

J.-R. Chazottes, A. Joets, C. Letellier et R. Ribotta

Compte-rendus

de la

8^e Rencontre du Non-Linéaire

Paris 2005

Non Linéaire Publications

Bât. 510 Université de Paris-sud, 91405 ORSAY cedex

pnl@lps.u-psud.fr

<http://pnl.lps.u-psud.fr/pnl>

La loi du 11 mars 1957 n'autorise que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective". **Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'éditeur est illicite.** Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

Dépôt légal : 03.05

ISBN 2-9516773-4-0

EAN 9782951677340

RENCONTRES DU NON LINÉAIRE
Institut Henri Poincaré, PARIS,
9-11 mars 2005

Nous remercions vivement Michel Broué, Directeur de l'Institut Henri Poincaré pour son aide à l'organisation de ces Rencontres, et le Département des Sciences pour l'Ingénieur (SPI) du CNRS pour son soutien financier par le GDR "Physique Non Linéaire".

Les Rencontres annuelles du Non Linéaire sont organisées par :

Jean-René Chazottes	<i>Centre Phys. Théor.- Polytechnique</i>
Sergio Ciliberto	<i>Labo. Phys. ENS-Lyon</i>
Vincent Hakim	<i>Labo. Phys. Stat.- ENS - Paris</i>
Guillaume James	<i>Labo. MIP-INSA - Toulouse</i>
Alain Joets	<i>Labo. Phys. Solides - Orsay</i>
Laurent Larger	<i>Labo. Duffieux - Besançon</i>
Marc Lefranc	<i>PHLAM - Univ. Lille 1</i>
Christophe Letellier	<i>Coria - Rouen</i>
Stéphane Métens	<i>MSC - Univ. Paris 7</i>
Emmanuel Plaut	<i>LEMTA- Univ Poincaré Nancy</i>
Luc Pastur	<i>LIMSI- Orsay</i>
Roland Ribotta	<i>Labo. Phys. Solides - Orsay</i>

Le Colloque Elasticité,gels et morphogénèse du vivant est organisé par :

Martine Ben Amar	<i>Labo. Phys. Stat.- ENS - Paris</i>
Sébastien Neukirch	<i>LMM - Univ. Paris 6</i>

Ces compte-rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

Non Linéaire Publications
Bât. 510, Université de Paris-sud, 91405 ORSAY cedex

Toutes les informations concernant les Rencontres sont publiées sur le serveur :

<http://pnl.lps.u-psud.fr/pnl>

Renseignements :

pnl@lps.u-psud.fr

Sommaire

Dynamique des asynchronismes entre patient et ventilateur en ventilation non invasive <i>L. Achour, C. Letellier, A. Cuvelier et J. F. Muir</i>	1
Vésicules multi-domaines : changement de topologie induit par l'absorption de protéines <i>J.M. Allain, M. Ben Amar</i>	7
Effets des basses fréquences d'un bruit multiplicatif sur l'intermittence On-Off <i>S. Aumaître, K. Mallick, F. Pétrélis</i>	13
Contrôle de la diffusion chaotique en hydrodynamique <i>T. Benzekri, C. Chandre, R. Lima, M. Vittot</i>	19
Poils mouillés : un mécanisme de coalescence élastocapillaire <i>J. Bico, B. Roman, L. Moulin, A. Boudaoud</i>	25
Nucléation spontanée des pics localisés dans un système non linéaire et multi-stable <i>U. Bortolozzo, R. Rojas, S. Residori</i>	31
Contrôle actif de convection thermocapillaire loin du seuil d'instabilité <i>P. Brunet, G. Amberg, P.H. Alfredsson</i>	37
Défauts spectro-temporels associés à une instabilité de dérive dans les Lasers à Electrons Libres <i>C. Bruni et al.</i>	43
Etude des effets d'inertie dans l'instabilité de Saffman-Taylor <i>C. Chevalier, M. Ben-Amar, D. Bonn et A. Lindner</i>	49
Bruit et intermittence du transport électrique — dans les milieux granulaires <i>M. Creyssels, E. Falcon et B. Castaing</i>	55
Reconnexion de vortex contrarotatifs : effet du nombre de Reynolds <i>I. Delbende et M. Rossi.</i>	61

Etude expérimentale de fronts inclinés en solidification directionnelle <i>J. Deschamps, A. Pocheau et M. Georgelin</i>	67
Dynamique nonlinéaire à retard <i>T. Erneux</i>	73
Interactions de similaritons optiques :du similariton au soliton noir <i>Christophe Finot et Guy Millot</i>	79
Oscillations de volume et ondes dans des gels de polymères pH sensibles couplés à une réaction à autocatalyse acide <i>V. Labrot, P. De-Kepper, J. Boissonade, F. Gauffre</i>	85
Défauts topologiques des instabilités secondaires <i>L. Gil</i>	91
Morpho-élasticité <i>A. Goriely et M. Ben Amar</i>	97
Réflexion critique d'ondes internes de gravité en fluides stratifiés <i>L. Gostiaux, T. Dauxois, E. Falcon</i>	103
Bifurcations et pulsations complexes dans un laser à modes bloqués <i>M. Grapinet et Ph. Grelu</i>	109
Domaines d'existence et caractéristiques de l'oscillation dans une cavité photoréfractive <i>M. Grapinet and al</i>	115
Oscillations sous-seuil et réponse stationnaire dans des modèles neuronaux simples à conductance <i>B. Ibarz, Miguel A.F. Sanjuán, K. Aihara</i>	121
Expérience réalisant un oscillateur en longueur d'onde d'un laser accordable pour l'étude des dynamiques non linéaires à retard <i>L. Larger, D. Nirousset, V. Udaltsov</i>	127
Mode d'instabilité primaire dans un anneau cylindrique vertical soumis à un gradient radial de température <i>V. Lepiller et al.</i>	133
Topologies inéquivalentes de chaos dans des systèmes tri-dimensionnels <i>C. Letellier, E. Roulin & O. E. Röessler</i>	139
La digitation lors du décollement d'un fluide newtonien <i>A. Lindner, D. Derks, M.J. Shelley</i>	145
Interactions à retard et attracteurs (quasi-)périodiques — dans les circuits de régulation positifs et négatifs <i>A. Meyroneinc, B. Fernandez, R. Lima, R. Coutinho</i>	151

Un nouveau formalisme pour l'analyse topologique — du chaos déterministe <i>P.-E. Morant, M. Nizette et M. Lefranc</i>	157
Mesure lagrangienne de l'accélération dans un écoulement turbulent <i>N. Mordant, A. M. Crawford, E. Bodenschatz</i>	163
Un réseau cellulaire non linéaire pour le traitement d'images <i>S. Morfu, J. Bossu, P. Marquié</i>	169
La turbulence en rotation :spectres et transferts d'énergie. <i>C. Morize, F. Moisy & M. Rabaud</i>	175
Modélisation stochastique des gradients de vitesse en turbulence <i>A. Naso et A. Pumir</i>	181
Dynamique et fragmentation de tiges fragiles :pourquoi les spaghetti cassent en trois morceaux ? <i>B. Audoly et S. Neukirch</i>	187
Oscillations carrées d'un système électro-optique à retard <i>M. Nizette</i>	193
Instabilités tridimensionnelles de l'écoulement de von Kármán entre disques contra-rotatifs <i>C. Nore et al.</i>	199
Décollement d'une poutre en adhésion sur un substrat lisse <i>X. Oyharcabal et T. Frisch</i>	205
Interféromètre radio-fréquence réalisé en optoélectronique, application aux communications sécurisées par chaos <i>A. Pallavisini, L. Larger</i>	211
Transition au chaos spatio-temporel dans une expérience d'hydrodynamique à deux dimensions <i>C. Pirat et al.</i>	217
Doubles couches stables et instables dans la chambre de diffusion d'une décharge inductive basse pression en plasma électronégatif <i>N. Plihon, C.S. Corr, P. Chabert, J.L. Raimbault</i>	223
Bifurcation globale de l'écoulement de von Kármán turbulent :seuil d'apparition du phénomène en nombre de Reynolds. <i>F. Ravelet, A. Chiffaudel et F. Daviaud</i>	229
Modélisation en temps discret d'un convertisseur d'énergie électrique. <i>B.Robert, A.El Aroudi, M.Fadel</i>	235
Instabilité modulationnelle incohérente dans une fibre optique <i>A. Sauter, A. Picozzi, S. Pitois et G. Millot</i>	241

Ondes solitaires pulsatoires en milieu discret	
<i>Y. Sire, G. James</i>	247
Faisabilité de la gestion de la dispersion dans les lignes électriques de transmission	
<i>K.Tse Ve Koon, P.Marquie et P.Tchofo-Dinda</i>	253
Bifurcations dans un circuit électronique du neurone de Morris-Lecar	
<i>A. Wagemakers, J.M. Casado, M. A.F. Sanjuán, K. Aihara</i>	259
Résonances dans un système chaotique	
<i>S. Zambrano, J.M. Casado et M.A.F. Sanjuán</i>	265

Dynamique des asynchronismes entre patient et ventilateur en ventilation non invasive

L. Achour †, C. Letellier †, A. Cuvelier ‡, et J.-F. Muir ‡

†CORIA UMR 6614 - Université de Rouen,
Av. de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray Cedex
‡Service de Pneumologie et Soins intensifs,
Hôpital de Bois Guillaume, C.H.U de Rouen, 76031 Rouen Cedex
linda.achour@coria.fr

Résumé

L'asynchronisme patient-ventilateur peut apparaître comme un non déclenchement de la phase inspiratoire par le ventilateur. En effet, certains patients peuvent avoir des difficultés à déclencher le ventilateur. La fréquence de ces cycles non déclenchés est assez variable. Une technique de détection des cycles non déclenchés basée sur les variations de débit et de pression enregistrées au sein du circuit de ventilation a été développée. La variabilité de la durée du cycle respiratoire est étudiée et révèle l'aptitude du patient à réduire le nombre de cycles non déclenchés ou non.

Abstract

Patient-ventilation asynchrony may take the form of inspiratory-trigger asynchrony. Some patients may have considerable difficulty in triggering the ventilator. The amount of non-triggered cycles is patient dependent. A technique to detect non-triggered cycles based on flow and pressure measurements within air ventilation system has been developed. The variability of the duration of the respiratory cycle is studied and reveals the ability of the patient to reduce the number of non-triggering cycles or not.

1 Introduction

La ventilation non invasive est réalisée à l'aide d'un ventilateur délivrant une pression positive dans les voies aériennes par l'intermédiaire d'un masque (interface avec le nez et/ou la bouche du patient). Elle permet de pallier à des insuffisances respiratoires chroniques pour un nombre croissant de patients : en France elle représente 10% de l'assistance respiratoire à domicile (46000 patients) [1]. L'efficacité de ce traitement ventilatoire nécessite une parfaite coordination du patient avec son ventilateur, c'est-à-dire une réactivité optimale du ventilateur lors de l'effort inspiratoire du patient. Les interactions patient/ventilateur peuvent se résumer à deux phases distinctes : la phase inspiratoire durant laquelle le ventilateur délivre une pression positive relativement élevée et la phase expiratoire durant laquelle le ventilateur délivre une pression positive relativement faible. Nous nous intéressons principalement à la mise en évidence du non déclenchement de la phase inspiratoire ainsi que leur impact sur le mode ventilatoire. Les défauts de synchronisation entre patient et ventilateur sont le plus souvent étudiés par des méthodes invasives (donc très désagréables) au nombre desquelles on compte la mesure de la pression oesophagienne et gastrique. La mise au point d'un dispositif expérimental [2, 3] permettant une détection "non invasive" de ces asynchronismes alliée à la théorie des systèmes

dynamiques non linéaires constitue une nouvelle méthode d'étude des asynchronismes patient/ventilateur. Leur détection se fait en temps réel par confrontation des courbes de débit et de pression enregistrées au sein du circuit de ventilation : une signature évidente des cycles déclenchés par le ventilateur se retrouve sur un portrait de phase reconstruit à partir de la mesure du débit à l'aide de coordonnées décalées. Au cours de cette étude, 4 patients ayant une Bronchopneumopathie Chronique Obstructive (BPCO), 4 patients atteints du syndrome d'obésité-hypoventilation et 4 sujets sains sont ventilés par masque facial au cours de 6 périodes de 10 minutes chacune avec une pression inspiratoire positive augmentée de 10 à 20 mbar. Les BPCO, insuffisants respiratoires obstructifs, ont une obstruction des voies aériennes entraînant une distension thoracique et une augmentation des résistances à l'écoulement de l'air [5]. Les obèses, insuffisants respiratoires restrictifs, dont l'augmentation de la masse corporelle diminue la compliance de la paroi thoracique et augmente la consommation d'oxygène en majorant la production de dioxyde de carbone [4]. Nous montrerons qu'il existe un lien étroit entre le nombre de cycles respiratoires non déclenchés et la fréquence respiratoire propre du patient. Par ailleurs, l'analyse de la variabilité sur la durée du cycle respiratoire par une application de premier retour constitue une aide supplémentaire dans la compréhension du comportement ventilatoire du patient face à son ventilateur. Les asynchronismes sont également renforcés par la présence d'un filtre antibactérien et par la perte de l'état de vigilance en situation de sommeil.

2 Résultats : le couplage patient-ventilateur

Le mode de ventilation utilisé dans cette étude est le mode de ventilation spontanée avec aide inspiratoire avec une pression expiratoire positive additionnelle (VS-AI+PEP). Le ventilateur a trois tâches à effectuer : reconnaître l'inspiration, délivrer une pression sous forme de plateau et reconnaître l'expiration. La reconnaissance de l'effort inspiratoire par le ventilateur est déterminée par une variation de débit (1 l/min en 20 ms) et provoque la délivrance et le maintien du niveau de pression inspiratoire positive (IPAP). La durée de la montée en pression est fixée à 0.4 sec : lorsque cette durée est trop lente, le travail ventilatoire augmente. Le relâchement de la pression et le passage à la phase expiratoire est déclenché par le signal de débit. L'expiration a lieu lorsque le débit atteint une certaine proportion du débit de pointe (maximal) (dans notre étude, il est fixé à 75%) : le ventilateur maintient alors une pression expiratoire positive (EPAP = 4 mbar). Ce mode de ventilation est très utilisé aussi bien au cours d'un sevrage que pour une assistance ventilatoire partielle qui permet à un patient qui conserve une commande respiratoire efficace de bénéficier d'une bonne synchronisation avec son ventilateur. Toutefois, on s'aperçoit que ce mode de ventilation peut aussi faire apparaître des asynchronismes patient-ventilateur.

2.1 Détection non invasive des asynchronismes

Au cours de la ventilation non invasive, l'existence d'efforts inspiratoires non suivis d'un déclenchement du ventilateur est à l'origine d'un asynchronisme patient-ventilateur. La méthode de référence de détection de ce type d'asynchronisme est basée sur la mesure de la pression œsophagienne. Cette méthode est difficile à réaliser, introduction d'un cathéter perfusé par le nez avec une anesthésie nasale. De plus, elle est mal adaptée à notre étude qui doit concilier le confort du patient et la qualité de l'information recueillie. En VS-AI+PEP, c'est l'effort inspiratoire du patient qui déclenche la phase inspiratoire : ainsi, la fréquence respiratoire est propre au patient. Par définition, un effort inspiratoire est caractérisé par

une déflexion négative de la pression œsophagienne. Parallèlement, on observe un pic du débit inspiratoire qui correspond à un pic en pression égal à la valeur de l'IPAP pré-réglée : nous sommes dans la configuration d'un cycle détecté et déclenché par le ventilateur et il y a synchronisation de l'effort inspiratoire du patient avec le déclenchement de la phase inspiratoire par le ventilateur (Fig. 1). Dans le cas où le cycle n'est pas détecté (non déclenché) par le ventilateur, un pic en débit ne correspond pas à un pic en pression égal à la valeur de l'IPAP pré-réglée mais à une pression voisine de l'EPAP. Toutefois, si on regarde la pression œsophagienne, on remarque bien une déflexion de cette dernière : le patient a effectué un effort inspiratoire insuffisant pour déclencher le ventilateur. Nous pouvons donc nous passer de la mesure de la pression œsophagienne pour la détection rapide et automatique des cycles non déclenchés par le ventilateur. Une reconstruction par coordonnées décalées du portrait de phase à partir de la mesure du débit nous permet de mettre en évidence les cycles non déclenchés (Fig. 2). En effet, les cycles respiratoires de faible amplitude se trouvant à l'intérieur du portrait de phase représentent les cycles non déclenchés par le ventilateur (Fig. 2.a).

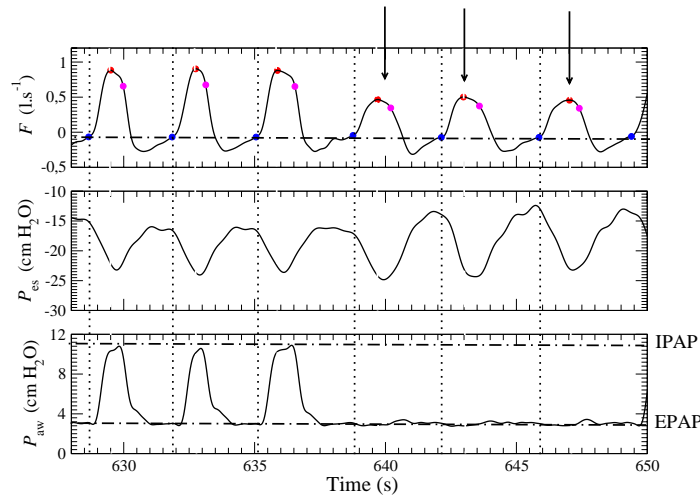
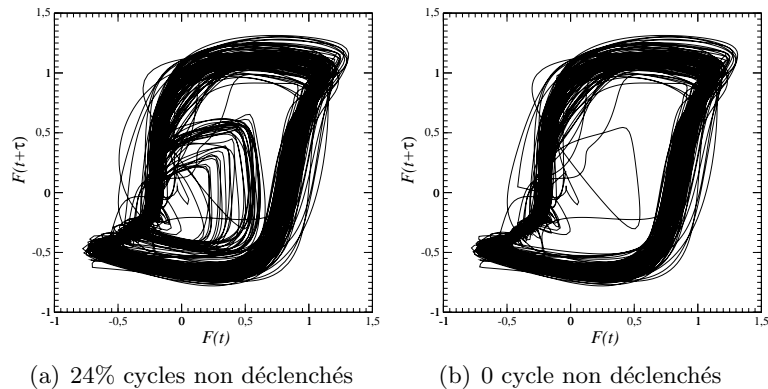


FIG. 1 – Illustration des cycles déclenchés et non déclenchés par le ventilateur chez un patient BPCO en ventilation spontanée avec aide inspiratoire. De haut en bas sont mesurées le débit (F), la pression œsophagienne (P_{es}) et la pression dans les voies aériennes (P_{aw}). Les 3 flèches désignent des cycles respiratoires non déclenchés par le ventilateur.



(a) 24% cycles non déclenchés

(b) 0 cycle non déclenchés

FIG. 2 – Portraits de phase reconstruits avec (a) et sans (b) cycles déclenchés.

2.2 Impact de l'effet d'accoutumance à la ventilation non invasive

La méthodologie employée se propose de comparer en parallèle le comportement ventilatoire du même patient, un sujet sain, soumis à trois niveau d'IPAP (10, 12 et 14 mbar) : dans une première situation, désignée par le terme "débutant", le sujet est soumis pour la première fois à ce type de ventilation avec les trois niveaux d'aide inspiatoire et dans une seconde situation, le sujet refait les mêmes essais de ventilation, le terme "entraîné" sera alors utilisé. La figure 3 met en évidence cet effet d'accoutumance dans la mesure où les portraits de phase du patient débutant révèle une variabilité plus importante (ce qui se sonfirme sur les applications de premier retour). Après un entraînement suffisant, consistant à ventiler un certain temps le sujet sain, les portraits de phase se resserrent et les applications de premier retour sur les durées du cycle se concentrent au voisinage de la bissectrice : la variabilité a été réduite.

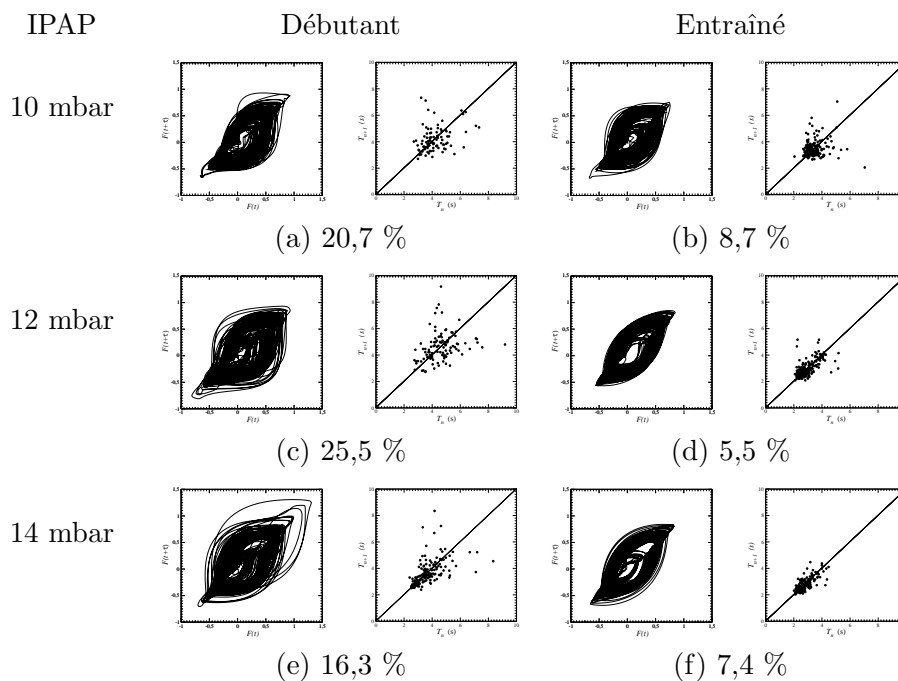


FIG. 3 – Représentation de portraits de phase reconstruits à partir de la mesure du débit et des applications de premier retour sur la durée du cycle respiratoire chez le même patient pour trois pressions inspiratoires différentes. Les situations "débutant" et "entraîné" sont mis en évidence. Le pourcentage indique la proportion de cycles non déclenchés.

2.3 Variabilité de la durée du cycle respiratoire

Les applications de premier retour (Fig. 4) nous permettent de distinguer deux classes de patients : ceux qui présentent une grande variabilité sur le cycle respiratoire (Figs. 4.a, 4.b, 4.c) et ceux qui ont une faible variabilité comme le révèle la concentration de points sur la première bissectrice (4.d, 4.e, 4.f). Remarquons que la proportion des cycles non déclenchés est assez grande chez le patient mal adapté à la ventilation non invasive et que cela aura une influence considérable sur la qualité de la ventilation qui se dégrade. En effet, la présence de cycles non déclenchés entraîne une augmentation de la fréquence respiratoire accompagnée d'une diminution de la ventilation minute ce qui provoquera

une diminution de l'efficacité de la ventilation. Par ailleurs, chez le patient entraîné, la proportion des cycles non déclenchés est plus faible : si cette proportion peut avoisiner les 30%, mais ce patient sait néanmoins gérer ces asynchronismes en gardant une variabilité faible sur la durée de ses cycles respiratoires (Fig. refmap1.e). Sur l'ensemble des résultats obtenus chez les 12 patients, on a relevé une corrélation entre le nombre de cycles non déclenchés et la fréquence respiratoire (Fig. 5). On remarque que le nombre de cycles non déclenchés diminuent lorsque la fréquence respiratoire propre au patient sous ventilation non invasive augmente.

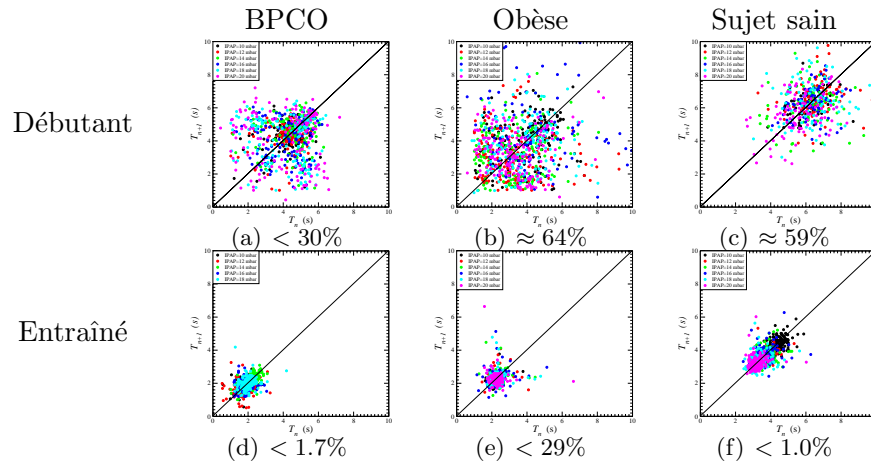


FIG. 4 – Application de premier retour sur le temps total du cycle respiratoire. Patients novices et entraînés à la ventilation non invasive. Le pourcentage indique la proportion de cycles non déclenchés.

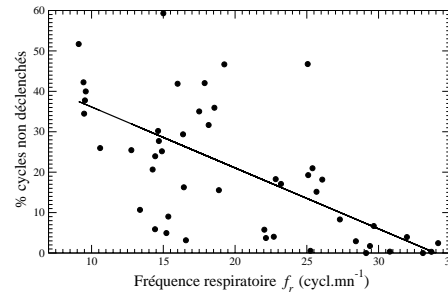


FIG. 5 – Représentation du nombre de cycles non déclenchés en fonction de la fréquence respiratoire calculée pour 12 patients.

2.4 Influence du filtre antibactérien et de l'état de vigilance

La présence d'un filtre antibactérien placé à la sortie du ventilateur augmente de façon très significative le nombre de cycles non déclenchés (Fig. 6). Ceci est dû au fait que le seuil de sensibilité de déclenchement de la phase inspiratoire est augmenté en présence du filtre, elle est multipliée par 1,6. Par ailleurs, la ventilation nocturne a pour objectifs de reposer les muscles respiratoires, de corriger les perturbations gazométriques et de retrouver dans la journée une autonomie fonctionnelle. En situation d'éveil, le patient est capable de déclencher le ventilateur tandis qu'en situation de sommeil, la perte de l'état de vigilance implique le non déclenchement du ventilateur (Fig. 7).

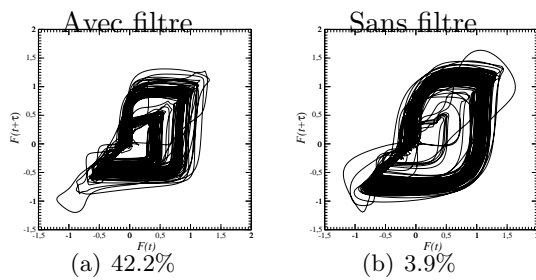


FIG. 6 – Influence du filtre antibactérien.

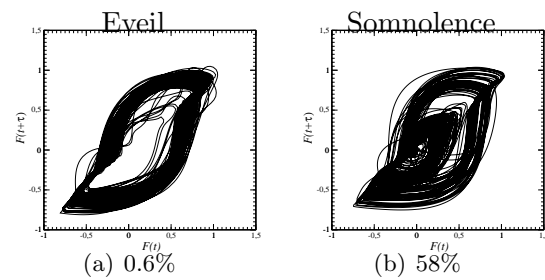


FIG. 7 – Asynchronisme au cours du sommeil.

3 Conclusion

De l'analyse brute des séries temporelles, il en résulte une détection précise des cycles non déclenchés par le ventilateur. Le portrait de phase reconstruit à partir de la mesure du débit révèle rapidement la présence ou non de cycles non déclenchés. L'étude sur la variabilité de la durée du cycle respiratoire souligne qu'une période d'entraînement est nécessaire avant la mise en place d'une ventilation non invasive à domicile afin de réduire le nombre des asynchronismes rencontrés. Une perspective intéressante s'ouvre pour l'application de cette technique à des enregistrements de nuit, principale situation rencontrée pour le traitement de l'insuffisance respiratoire, où les patients se plaignent parfois d'une ventilation inefficace ou encore d'un mauvais fonctionnement du ventilateur.

Références

- [1] J-F. Muir, *La ventilation à domicile en France.*, Revue des maladies respiratoires, **21**, 461-464 (2004).
- [2] L. Achour, C. Letellier, A. Cuvelier et J-F. Muir, *Dynamique patient/ventilateur lors de la ventilation non invasive*, Actes du 4ème Colloque chaos temporel et chaos spatio-temporel, pp. 69-74, Rouen (2003).
- [3] L. Achour, C. Letellier, A. Cuvelier et J-F. Muir, *Etude clinique de la ventilation non invasive à l'aide des portraits de phase*, Compte-rendus de la 7ème Rencontre du Non-Linéaire, pp. 7-12, Paris (2004).
- [4] Société de pneumologie de langue française, *Recommandations pour la prise en charge de la BPCO*, Revue des maladies respiratoires, **20**, (3), 4S1-4S68 (2003).
- [5] J.F. Masa, B.R. Celli, J.A. Riesco, M. Hernandez, J. Sanchez de Cos, C. Disdier, *The obesity hypoventilation syndrome can be treated with noninvasive mechanical ventilation*, Chest, **119**, (4), 1101-1107, (2001).

Vésicules multi-domaines : changement de topologie induit par l'absorption de protéines

J.M. Allain et M. Ben Amar

*Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure,
24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05
allain@lps.ens.fr*

Résumé

La découverte d'une organisation latérale des membranes cellulaires, due à la formation de domaines membranaires, a motivé de nombreux travaux, à la fois en biologie et en physico-chimie. Une expérience récente sur un système modèle a montré une déformation spectaculaire, avec l'éjection des domaines présents, due à l'absorption de protéines. Nous présentons ici une interprétation physique de cette instabilité. Une approche basée sur l'énergie du système et incluant la présence de protéines est utilisée pour déterminer les formes possibles. Ce modèle conduit à une bifurcation classique avec comme paramètre d'ordre une tension de ligne effective, dépendante de la concentration en protéines.

Abstract

The discovery of a lateral organization in the cell membrane, due to the formation of domains, has motivated a large number of studies, both in biology and physico-chemistry. A recent experiment on a model system has shown a spectacular deformation, with the ejection of domains induced by protein absorption. We present here a physical interpretation of this instability. We use an approach based on the energetic description of the system, including the proteins, to determine the possible shapes. This model leads to a classical bifurcation diagram with an effective line tension, function of the protein concentration, as control parameter.

1 Introduction

La membrane cellulaire est majoritairement formée de lipides, des molécules amphiphiles qui s'organisent spontanément en bicouches pour protéger leurs parties hydrophobes [1]. La cellule utilise des bicouches de lipides pour créer des compartiments distincts mais aussi pour assurer le transport de lipides et de protéines entre ces compartiments. Une étape clé dans le processus de transport est la fission, la séparation d'une partie de la membrane du compartiment initial; *in vivo*, ce processus est contrôlé à la fois par les protéines membranaires et par la réponse aux déformations de la bicouche de lipides [2]. Comprendre les propriétés mécaniques des structures de lipides est donc un enjeu important pour comprendre les propriétés de la cellule.

Les lipides sont confinés dans les feuillettes par l'eau environnante et n'ont pas d'autre interaction spécifique forte. Aussi, la membrane résiste peu aux déformations qui n'exposent pas le coeur hydrophobe et beaucoup à celles qui l'exposent. C'est donc un milieu anisotrope qui se comporte comme un solide pour les déformations hors de son plan (courbure), et comme un fluide incompressible pour les déformations dans son plan. Les systèmes modèles formés uniquement d'une bicouche de lipides, comme les vésicules géantes unilamellaires (VGU), sont particulièrement adaptés pour l'étude des bicouches.

L'étude des VGU a ainsi montré qu'une séparation de phase pouvait se produire dans les bicouches formées d'un mélange de lipides [3], conduisant à la formation de domaines de composition différente dans la bicouche. Actuellement, les domaines composés de sphingomyéline et de cholestérol attirent particulièrement l'attention : ils semblent reproduire les rafts, des structures lipidiques impliquées *in vivo* dans de nombreux processus cellulaires comme la signalisation ou le transport [4]. Ces domaines possèdent les mêmes propriétés d'élasticité et de fluidité que la membrane "classique", mais sont plus ordonnés en raison d'une interaction stérique entre les lipides [1]. Aussi, ils sont qualifiés de domaines "liquides-ordonnés", par opposition à la membrane classique dite "liquide-désordonnée".

L'absorption de protéines PIA2 sur des vésicules à plusieurs domaines provoque une instabilité spectaculaire : un ou plusieurs domaines ordonnés peuvent être éjectés [5]. Dans la suite, nous nous attacherons à décrire cette instabilité. Nous montrerons qu'elle peut être expliquée analytiquement par un diagramme de bifurcation classique.

2 Description de la bicouche de lipides

2.1 Membrane inhomogène

Nous considérons une vésicule inhomogène et axisymétrique, formée par deux domaines, un 'liquide-ordonné' (l_o) et un 'liquide-désordonné' (l_d). Même si le domaine l_o est plus structuré que le domaine l_d , ils sont tous les deux formés par une bicouche à l'état liquide et leurs propriétés élastiques sont bien décrites par le modèle de Canham et Helfrich [6], chaque phase i ayant l'énergie :

$$F_m^i = \int_S \left[2\kappa_i H^2 + \kappa_G^{(i)} K + \Sigma_i \right] dS \quad (1)$$

H et K sont respectivement la courbure moyenne et de Gauss. Les modules élastiques κ_i (module de flambage) et $\kappa_G^{(i)}$ (module de Gauss) sont plus élevés dans la phase l_o que dans la phase l_d . Des valeurs typiques des modules de flambage sont $\kappa_{l_d} = 20k_bT$ et $\kappa_{l_o} = 80k_bT$. Les modules de Gauss sont beaucoup plus difficiles à mesurer : bien que F_m^i soit une intégrale sur la surface, la contribution des termes de Gauss se traduit par une intégrale sur l'interface entre les deux domaines ou par une constante topologique.

La dernière contribution dans l'eq.(1) est liée à l'extension de la membrane. Quand l'énergie nécessaire pour augmenter la surface de la membrane est grande devant l'énergie élastique, la surface de la vésicule peut être considérée comme constante ; Σ_i est alors le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte.

L'énergie totale de la vésicule comporte les énergies (1) de chaque phase plus deux termes de couplage. Il existe un interface d'épaisseur négligeable entre les deux domaines. Tout augmentation de la longueur de l'interface se traduit par un coût énergétique proportionnel à la tension de ligne σ . Ensuite, la membrane est légèrement perméable à l'eau mais pas aux ions ou aux grosses molécules dissoutes dans l'eau environnante ; ceci permet l'apparition d'une pression osmotique P . L'énergie associée aux termes de couplage est alors :

$$F_{memb} = +\sigma \int_C dl - P \int dV \quad (2)$$

2.2 Absorption de molécules

L'absorption de molécules extérieures, comme des protéines ou des détergents, est bien décrite par une approche de Landau autour d'une concentration optimale ϕ_{eq} . S'écarter de cette concentration a un coût que nous supposons être quadratique à l'ordre dominant. Le potentiel chimique μ_i donne l'équilibre de concentration avec l'eau environnante.

Le couplage des molécules avec la bicouche entraîne une courbure locale de la membrane, due soit à l'inclusion, soit à une pression osmotique. Ces deux effets sont décrits pour un terme proportionnel à la courbure moyenne et à la concentration en molécules, comme introduit par S. Leibler [7]. La contribution, dans le domaine i est alors :

$$F_p^i = \int_{S_i} \left\{ \Lambda_i H \phi + \left(\frac{\alpha_i}{2} (\phi - \phi_{eq_i})^2 + \frac{\beta_i}{2} (\nabla \phi)^2 + \mu_i \phi \right) \right\} dS \quad (3)$$

La forme de la membrane est donnée par la minimisation de l'énergie :

$$F_{TOT} = F_m^o + F_m^d + F_p^o + F_p^d + \sigma \int_C dl - P \int dV$$

Nous ne donnons pas les détails du calcul variationnel, qui donne les équations de forme (ou Euler-Lagrange) et les conditions de raccord à l'interface [8]. Nous considérons une membrane axisymétrique. Les coordonnées cylindriques sont donc un choix adapté. La membrane est paramétrée par son abscisse curviligne s et sa forme est donnée par ses coordonnées $r(s)$ et $\psi(s)$ (voir figure 1), reliés par la relation $r'(s) = \cos \psi$. La concentration en protéines est donnée par $\phi(s)$.

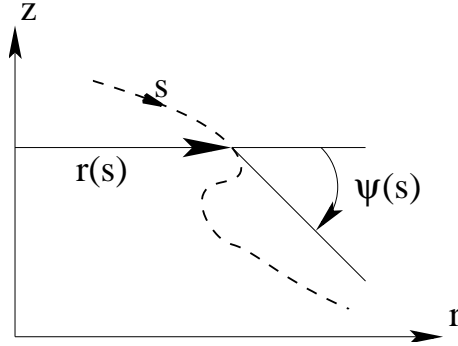


FIG. 1 – Paramétrisation d'une vésicule axisymétrique en coordonnées cylindriques. La courbe pointillée représente le profil de la vésicule.

3 Formes de la membrane

3.1 Solution sans protéines

Nous considérons d'abord une membrane sans protéine ($\phi = 0$). Quand la pression osmotique domine l'énergie élastique, une solution des équations d'Euler-Lagrange est faite de deux calottes sphériques connectées. La forme de la membrane est alors complètement déterminée par quatre paramètres : les rayons des deux calottes R_o et R_d et les deux angles au raccord θ_o et θ_d (voir figure 2). Au niveau du raccord entre les deux calottes, il

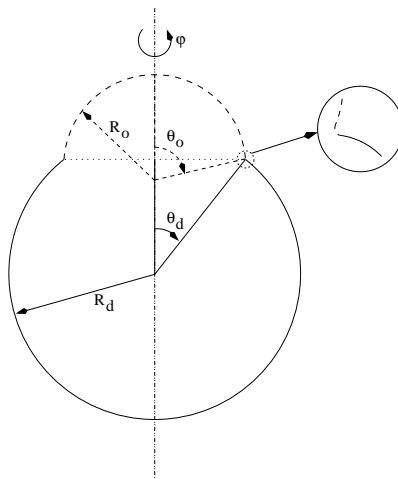


FIG. 2 – Représentation schématique d'une vésicule axisymétrique tendue à deux domaines. La forme de la vésicule est donnée par les quatre paramètres R_o , R_d , θ_o et θ_d . Au niveau de la jonction entre les deux domaines, les propriétés élastiques ne peuvent plus être négligées ; un pli apparaît alors (cercle).

n'est plus possible de négliger l'élasticité : la courbure serait divergente. Aussi, il se forme un pli élastique, qui peut être traité par une approche en couche limite.

En négligeant les effets élastiques, le calcul variationnel montre que la forme de la vésicule est donnée par quatre équations : les conservations des deux surfaces, la condition de raccord de la membrane à la jonction ($R_o \sin \theta_o = R_d \sin \theta_d$) et l'équilibre des forces horizontales

$$R_o^2 \sin \theta_o \cos \theta_o = R_d^2 \sin \theta_d \cos \theta_d - \frac{2\sigma}{P} \quad (4)$$

La forme de la vésicule est contrôlée par la tension de ligne réduite $\tau = \sigma/P$, qui peut être modifiée expérimentalement en changeant la pression osmotique. À partir de la figure (1b) de l'article de Baumgart et al. [9], nous calculons $\tau = 20.5 \mu m^2$ pour des valeurs de R_o , R_d , θ_o et θ_d que nous avons estimé.

Déterminer R_o , R_d , θ_o et θ_d à partir de cette valeur de τ donne deux solutions : une solution de basse énergie, qui est celle observée expérimentalement, et une solution de haute énergie, instable. Une étude systématique du couple de solutions en fonction de τ montre un diagramme de bifurcation classique (voir figure 3). τ apparaît comme le paramètre de contrôle alors que $l_J = 2\pi R_o \sin \theta_o$, la longueur de l'interface, est le paramètre d'ordre, la solution instable ayant un interface plus petit que la solution stable. Lorsque τ augmente, les deux solutions deviennent de plus en plus similaires, jusqu'à une valeur finie τ_c . Au delà de τ_c , il n'y a plus de solution connectée possible mais il reste la possibilité, irréversible, d'avoir deux sphères séparées. Il faut noter que, à $\tau = \tau_c$, la taille de la jonction n'est pas nulle, ce qui n'empêche pas la fission.

Ce diagramme de bifurcation, avec un changement de topologie, est similaire au problème d'un film de savon fixé à deux anneaux parallèles faiblement écartés. Deux caténoïdes sont solutions mais une seule est stable et peut être observée ; lorsque l'on écarte les deux anneaux, les deux solutions se rapprochent jusqu'à la rupture, conduisant à deux disques de savons indépendants [10].

À proximité de la jonction, l'élasticité de la membrane ne peut plus être négligée : les

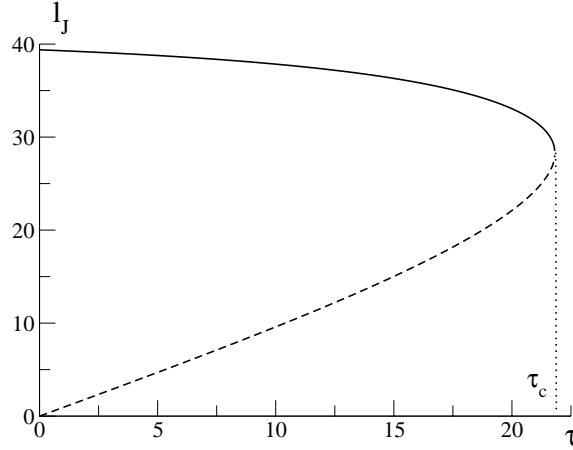


FIG. 3 – Longueur de l'interface l_J des couples de vésicules possibles en fonction de la tension de ligne réduite τ . Le calcul a été fait avec $A_o = 21.7\mu\text{m}^2$ et $A_d = 206\mu\text{m}^2$. La ligne continue représente les solutions stables et la ligne en tirés les solutions instables.

effets élastiques se faisant sentir sur une longueur typique

$$l_e = \sqrt{\frac{\kappa}{PR}}$$

Comme $l_e \ll R$, il est possible d'utiliser une approche en couche limite pour décrire le pli élastique. La forme de la membrane est alors donnée par une équation similaire au pendule oscillant, que nous pouvons résoudre complètement :

$$\psi'' = \sin(\psi - \theta_i) \quad (5)$$

où θ_i est l'angle du raccord dans la solution sans élasticité. Nous pouvons alors montrer que l'élasticité joue un rôle similaire à une tension de ligne effective σ_{el} qui vient s'ajouter à la tension de ligne σ . Le diagramme de bifurcation reste adapté, avec τ incluant la tension de ligne effective due à l'élasticité.

3.2 Membrane avec protéines

Le modèle en deux calottes reste une solution des équations d'Euler-Lagrange quand des protéines sont ajoutées, sauf si la concentration en protéines devient supérieure à une concentration seuil $\phi_c = PR^2/\Lambda$ ou si le couplage devient très fort ($\Lambda^2/\kappa\alpha \gg 1$), au quel cas nous avons précédemment montré que les calottes sont instables [8]. Nous supposons ici que les conditions expérimentales restent en dessous de ces limites.

Loin de l'interface, la concentration en protéines est homogène et est notée $\bar{\phi}$. Au niveau de l'interface, de forts gradients peuvent apparaître. Trois longueurs déterminent la distribution de protéines et doivent être comparées à la longueur élastique l_e , ce qui définit trois nombres sans dimension :

$$l_c = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{l_e}, \quad \lambda_e = \frac{\Lambda \bar{\phi}}{PR^2} \frac{1}{l_e} \quad \text{et} \quad \lambda_c = \frac{\Lambda}{\alpha \bar{\phi} R} \frac{1}{l_e}$$

l_c est la longueur chimique, qui donne l'échelle de diffusion des molécules ; λ_e est la longueur de couplage élastique, qui donne la longueur caractéristique d'influence des protéines sur

la membrane ; λ_c est la longueur de couplage chimique, qui donne la taille caractéristique de l'influence de la membrane sur la concentration en protéines.

Le développement en couche limite des équations d'Euler-Lagrange montre que l'effet des protéines peut s'exprimer par une tension de ligne effective, comme pour l'élasticité. Le système d'équations couplées décrivant la couche limite ne peut pas être résolu analytiquement sauf dans des cas limites, en particulier $l_c \ll 1$ et $\lambda_c \ll 1$. Dans ces deux cas, nous avons montré que les protéines contribuent à augmenter la tension de ligne effective.

Le diagramme de bifurcation de la figure 3 est toujours adapté, la contribution des protéines étant comprise dans τ . Aussi, une augmentation de la concentration en protéines entraîne une augmentation de la valeur de τ . Ceci peut conduire à deux situations : soit il y a assez de protéines absorbées pour avoir $\tau \geq \tau_c$ et il va y avoir fission, formant deux vésicules distinctes, soit ce n'est pas suffisant et il y a un bourgeonnement du domaine ordonné, éventuellement réversible, sans fission.

4 Conclusion

L'étude des domaines membranaires est un sujet très dynamique actuellement. Parmi les sujets d'intérêt, l'implication des domaines dans le transport intracellulaire peut être étudié grâce aux systèmes modèles. Nous prédisons ici l'existence d'une instabilité mécanique conduisant à un changement de topologie. Cette instabilité est rendue possible soit par un choc osmotique soit par l'absorption de protéines sur l'une ou l'autre partie de la membrane. Nous avons utilisé une approche en couche limite : la membrane tendue est essentiellement formée par deux calottes sphériques, sauf au niveau de la jonction entre les deux domaines ; les protéines ont pour rôle d'introduire des défauts coniques ponctuels à la surface. Cette approche conduit à un diagramme de bifurcation avec une tension de ligne critique au delà de laquelle se produit la fission.

Références

- [1] B. Alberts et al., *Molecular Biology of the Cell*, 3rd ed., Garland, New York, (1994).
- [2] K. Farsad et P. De Camilli, *Mechanisms of membrane deformation*, Current Opinion in Cell Biology, **15**, 372-381, (2003).
- [3] C. Dietrich et al., *Lipid Rafts Reconstituted in Model Membranes*, Biophys. J., **80**(3), 1417-1428, (2001).
- [4] M. Edidin, *The State of Lipid Rafts: From Model Membranes to Cells*, Annu. Rev. Biophys. Biomol. Struct., **32**, 257-283 (2003).
- [5] G. Staneva, M. I. Angelova, K. Koumanov, *Phospholipase A2 promotes Rafts Budding and Fission from Giant Liposomes*, Chem. Phys. of Lipids, **129**, 53-62, (2004).
- [6] W. Helfrich, *Elastic properties of lipid bilayers: Theory and possible experiments*, Z. Naturforschung C, **28**, 693 (1973).
- [7] S. Leibler *Curvature instability in membranes*, J. Physique, **47**, 507-516 (1986).
- [8] J.M. Allain, M. Ben Amar, *Bi-Phasic vesicle: instability induced by adsorption of proteins*, Physica A, **337**, 531-545 (2004) .
- [9] T. Baumgart, S.T. Hess, W.W. Webb, *Imaging coexisting fluid domains in biomembrane models coupling curvature and line tension*, Nature, **425**, 821-824 (2003).
- [10] M. Ben Amar et al., *Stability and vibrations of catenoid-shaped smectic films*, Euro. Phys. J. B, **3** (2), 197-202 (1998).

Effets des basses fréquences d'un bruit multiplicatif sur l'intermittence On-Off

Sébastien Aumaître¹, Kirone Mallick², François Pétrélis¹

¹*Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure
24, rue Lhomond, 75005 Paris, France*

²*Service de Physique Théorique, Centre d'étude de Saclay
91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France*

aumaitre@lps.ens.fr

Résumé

Au voisinage du seuil d'instabilité, un système dynamique soumis à un bruit multiplicatif peut présenter un régime d'intermittence On-Off. Nous montrerons ici, sur l'exemple dynamique le plus simple, l'extrême sensibilité de ce régime à la nature spectrale du bruit. En effet, par la méthode d'expansion en cumulants [1], nous avons pu établir les densités de probabilité (PDF) du mode instable de ce système quelle que soit la densité spectrale du bruit. Grâce à ces PDF en loi de puissance, nous avons montré que le régime intermittent était contrôlé par l'écart au seuil, rapporté à la densité spectrale à fréquence nulle : un filtrage des basses fréquences du bruit réduit considérablement le domaine du régime intermittent. Ces résultats sont confirmés par une étude numérique.

Abstract

A dynamical system subject to a multiplicative noise can exhibit On-Off intermittency close to the instability threshold. Here we demonstrate the extreme sensitivity of this intermittency to the noise density spectrum in the case of a simple dynamical system. Using the cumulant expansion method [1], we calculate the Probability Density Function (PDF) of the system subject to a random noise with arbitrary Power Spectrum Density (PSD). From the power law of the PDF, we show that the intermittent regime is determined by the ratio between the departure from the threshold and the PSD of the noise at zero frequency. Consequently, a high pass filter greatly reduces the intermittency domain. These results are in agreement with numerical simulations.

La plupart des structures périodiques observées dans la nature sont créées par des instabilités se développant dans un environnement bruité. La convection dans l'atmosphère ou le manteau terrestre est forcée par des flux de chaleur inhomogènes et fluctuants. Les dunes de sable sont formées par le vent qui souffle avec une intensité et une direction variables. Cette variabilité modifie en général le paramètre de forçage qui contrôle l'instabilité. C'est par exemple le cas en convection où le nombre de Rayleigh est proportionnel au gradient de température imposé. Ainsi ces fluctuations aléatoires agissent de façon multiplicative sur le mode instable.

Il est par ailleurs bien connu depuis les travaux de Kawaboto, Kabashima et Tsuchiya qu'un bruit multiplicatif modifie les phénomènes d'instabilité [2]. Dans certains cas le bruit induit un déplacement du seuil d'instabilité [3]. T. Yamada *et al* [4] ont montré qu'un bruit multiplicatif engendre un nouveau type d'intermittence dit intermittence on-off dans lequel alternent aléatoirement des bouffées excitées de grandes amplitudes (on) et des phases laminares proches de 0 (off). Cette intermittence peut être vue comme l'extension à des systèmes stochastiques du concept d'intermittence introduit précédemment comme route vers le chaos [5]. Du point de vue mathématique, l'analyse de [4] montre le lien

entre l'intermittence on-off et la loi de puissance suivie près de l'origine par l'histogramme normalisé de l'amplitude du mode instable.

De nombreux travaux théoriques, étudient l'effet d'un bruit delta-corrélé ou d'un processus d'Ornstein–Uhlenbeck dont la fonction de corrélation décroît exponentiellement. Dans ces deux cas, le spectre de ces bruits a au plus une fréquence caractéristique et il est difficile d'identifier quelle partie du spectre du forçage aléatoire joue un rôle important pour la dynamique. Comme le bruit qui intervient dans la nature et les expériences est loin d'être un bruit blanc, nous considérons que cette question mérite d'être approfondie. Comme on peut le voir en figure 1, l'intermittence peut être supprimée si les basses fréquences du bruit sont filtrées, et ce, même si l'amplitude du bruit reste constante. Pour comprendre cela nous allons calculer l'histogramme normalisé (PDF) de l'amplitude du mode instable pour un bruit quelconque.

1 Expansion en cumulant

Nous considérons l'exemple proposé par [4] pour modéliser un système décrivant de l'intermittence On–Off:

$$\dot{X} = (a + \zeta(t))X - X^3, \quad (1)$$

où ζ est un bruit. L'équation (1) peut être vue comme la limite surhamortie de l'oscillateur de Duffing qui a été très étudié [6,7].

Pour comprendre l'effet des différentes fréquences du bruit lorsque celui-ci est quelconque, nous appliquons l'expansion en cumulant pour calculer l'équation d'évolution de la densité de probabilité de X à partir de l'équation 1. Cette méthode consiste à écrire une équation du type Liouville pour la densité dans l'espace des phases pour une réalisation du bruit $\rho(X, \zeta)$. Ensuite une équation d'évolution est calculée pour l'histogramme normalisé (PDF) $P(X, t)$ en moyennant $\rho(X, \zeta)$ sur les réalisations du bruit (en effet on a $P(X, t) = \langle \rho(X, \zeta) \rangle_s$). Pour tout bruit cette équation est développée au second ordre en $\alpha\tau_c$, α est la déviation standard du bruit et τ_c son temps de corrélation [1]. On obtient une équation du type Fokker-Planck:

$$\partial_t P = \partial_x \left(\left(\left(1 + \frac{S-M}{a} \right) X^3 - (a+S)X \right) P \right) + \partial_{x^2} \left(\left(SX^2 + \frac{M-S}{a} X^4 \right) P \right). \quad (2)$$

Deux coefficients ont été introduits

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\infty \langle \zeta(0)\zeta(\tau) \rangle_s d\tau, \\ M &= \int_0^\infty \langle \zeta(0)\zeta(\tau) \rangle_s e^{-2a\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

S est l'intégral de la fonction d'autocorrélation qui, en vertu du théorème de Wiener-Khinchine est la moitié du spectre à fréquence nulle du bruit. La solution stationnaire de l'équation (2) est pour $S \neq 0$ et $S \neq M$:

$$P(X) = C |X|^{\frac{a}{S}-1} \left| 1 + \frac{(M-S)X^2}{Sa} \right|^{-\left(1 + \frac{aM}{2S(M-S)}\right)}, \quad (4)$$

où C est une constante de normalisation. Il apparaît que la loi de puissance qui détermine l'intermittence est *contrôlée uniquement par S i.e., le spectre du bruit à fréquence nulle.*

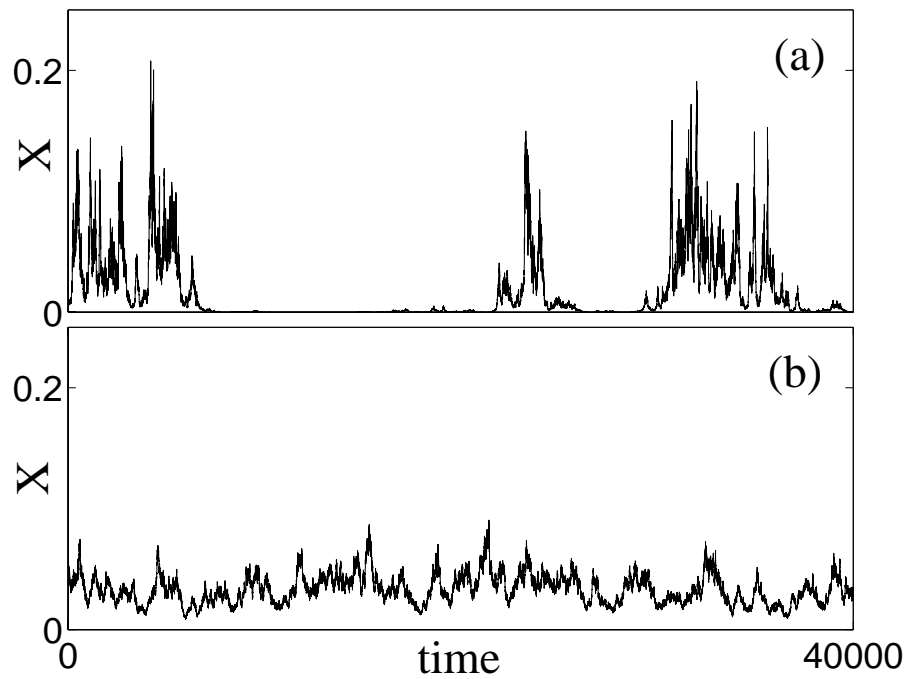


FIG. 1 – Série temporelle de la variable $X(t)$ solution de l'équation (1). Dans les deux cas $a = 0.00125$, $\alpha^2 = 0.005$ et la fonction d'autocorrelation du bruit est donnée par (6). Mais en figure (a), $\eta = \Omega = 0.25$ i.e., $a/S = 0.3927$; en figure (b), $\eta = \Omega = 2.5$ i.e., $a/S = 3.9270$.

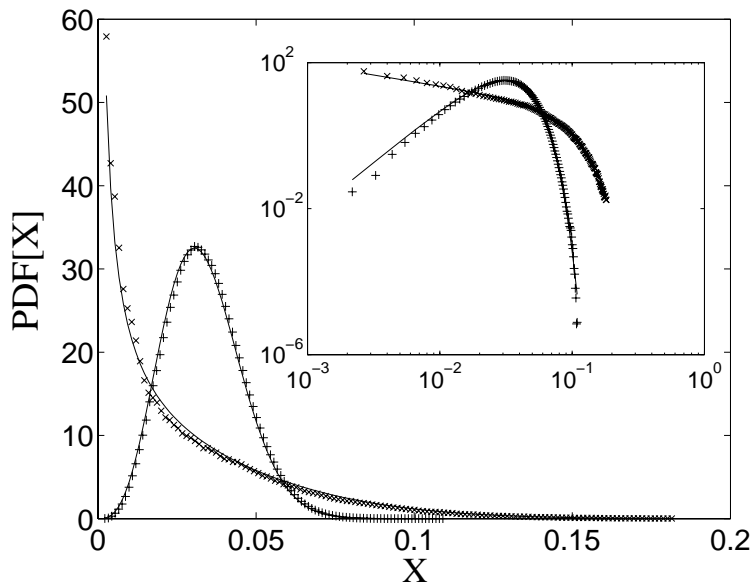


FIG. 2 – PDF des solutions de l'équation (1) pour le bruit coloré décrit par (6) . Les symboles ($\times \times \times$) et ($++$) correspondent , respectivement , aux paramètres utilisés en figure 1a et figure 1b. Les traits pleins sont les prédictions théoriques (4). L'insert est une représentation avec des axes logarithmiques des résultats.

2 Études numériques

Nous vérifions numériquement la pertinence de l'équation (4) en introduisant un bruit coloré ayant deux fréquences caractéristiques: Ω et η . Ce bruit est créé par les équations suivantes [8] :

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -4\pi\eta A - 4\pi^2(\Omega^2 + \eta^2)\zeta + (4\pi)^{3/2}\sqrt{2\eta(\Omega^2 + \eta^2)}\alpha\xi \\ \dot{\zeta} &= A \end{aligned} \quad (5)$$

où ξ est un bruit blanc gaussien. La fonction d'autocorrélation est alors

$$\langle \zeta(t) \cdot \zeta(t + \tau) \rangle_s = \alpha^2 \exp(-2\pi\eta|\tau|) \left(\cos(2\pi\Omega\tau) + \frac{\eta}{\Omega} \sin(2\pi\Omega|\tau|) \right) \quad (6)$$

où α^2 est la variance du bruit et $t_c = (2\pi\eta)^{-1}$ son temps de corrélation. Les séries temporelles des solutions de 1 sont représentées en figure 1. Les deux courbes sont obtenues pour la même valeur de α^2 , et a . En figure 1a, on a $S > a$; tandis qu'en figure 1b, le rapport a/S est plus grand que un. Dans ce cas, l'intermittence est clairement supprimée ce qui illustre le fait que si la PDF de X ne diverge pas en $X = 0$, il n'y a pas d'intermittence.

En figure 2, nous montrons que les deux PDFs correspondant aux figures 1a et 1b sont très bien décrites par l'équation (4).

Nous avons calculé une approximation analytique pour la PDF du mode instable dans le cas d'un système dynamique du premier ordre soumis à un bruit multiplicatif (1). Nos résultats sont valides pour des bruits ayant un spectre quelconque. Nous avons mis en évidence l'importance des basses fréquences du bruit pour engendrer l'intermittence on-off.

Références

- [1] N. G. van Kampen, *Physics Reports*, **24**, 173 (1976).
- [2] T. Kawakubo, S. Kabashima, Y. Tsuchiya, *Prog. Theor. Phys. supp.*, **64**, (1978).
- [3] A. Schenzle, H. Brand, *Phys. Rev. A*, **20**, 1628, (1979) — R. Graham, A. Schenzle, *Phys. Rev. A*, **26**, 1676, (1982) — R. C. Bourret, U. Frisch, A. Pouquet, *Physica* **65**, 303, (1973) — A. Becker, L. Karmer, *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 955, (1994).
- [4] T. Yamada, H. Fujisaka, *Prog. Theor. Phys.*, **76**, 582, (1986) — H. Fujisaka, H. Ishii, M. Inoue, T. Yamada, *Prog. Theor. Phys.*, **76**, 1198, (1986).
- [5] Y. Pomeau, P. Manneville, *Commun. Math. Phys.*, **74**, 1889, (1980).
- [6] M. Lücke, F. Schanck, *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 1465, (1985).
- [7] K. Mallick, P. Marcq, *Euro. Phys. J. B*, **38**, 99, (2004).
- [8] B. L. Sawford, *Phys. Fluids A*, **3**, 1577, (1991).

Contrôle de la diffusion chaotique en hydrodynamique

T. Benzekri, C. Chandre, R. Lima, M. Vittot

*Centre de Physique Théorique¹, CNRS Luminy, Case 907, F-13288 Marseille
Cedex 9, France*

benzekri@cpt.univ-mrs.fr

Résumé

Nous présentons une application d'une méthode du contrôle du chaos pour les systèmes Hamiltoniens à un modèle d'advection chaotique en hydrodynamique. Cette méthode permet de créer des barrières à la diffusion chaotique des particules en ajoutant un terme de contrôle petit et simple à la fonction de courant du système.

Abstract

We present an application of a method of the control of Hamiltonian chaos to a system of chaotic advection in hydrodynamics. The aim is to create barriers to diffusion of passive tracers by adding a small and simple control term to the stream function of the system.

1 Introduction

Nous nous intéressons au contrôle du chaos d'un problème d'advection chaotique dans un fluide bidimensionnel, incompressible et périodique par rapport au temps. Une expérience utilisant la technique magnéto-hydrodynamique montre que les trajectoires des particules pour des écoulements bidimensionnels et périodiques sont chaotiques. Il s'agit d'une expérience dans laquelle un courant électrique passe à travers une couche mince d'une solution électrolytique. Le courant interagit avec un champ magnétique alternatif produit par des aimants placés au-dessous du liquide. Une chaîne de vortex est alors observée. Une dépendance périodique en temps est imposée par une force extérieure qui oscille lentement de haut en bas, déplaçant le fluide latéralement c'est-à-dire dans la direction perpendiculaire aux axes des rouleaux donnant lieu ainsi à l'advection chaotique. L'espace des phases, qui est ici l'espace réel, est caractérisé par des trajectoires régulières dans le centre des rouleaux et une région chaotique autour et entre les rouleaux. Un Hamiltonien décrivant ce phénomène a été proposé dans [4]. Une comparaison a été faite avec l'expérience pour valider ce modèle.

Nous utiliserons ce Hamiltonien comme le point de départ pour réduire le transport chaotique qui est donné par la fonction de courant:

$$\Psi(x,y,t) = \epsilon \sin(x + B \sin t) \sin y, \quad (1)$$

où ϵ est la vitesse maximale dans le fluide et B l'amplitude des oscillations latérales. Le terme $B \sin t$ est une simple modélisation des oscillations latérales des rouleaux.

1. Unité Mixte de Recherche (UMR 6207) du CNRS, et des universités Aix-Marseille I, Aix-Marseille II et du Sud Toulon-Var. Laboratoire affilié à la FRUMAM (FR 2291).

2 Contrôle localisé

La méthode de contrôle localisée a été largement décrite dans [3] où les résultats mathématiques rigoureux ont été prouvés. Nous exposons ici le résultat principal de ce papier. Pour un système Hamiltonien à L degrés de liberté écrit dans les variables action-angles, le Hamiltonien perturbé est donné par:

$$H(\mathbf{A}, \theta) = \omega \cdot \mathbf{A} + V(\mathbf{A}, \theta),$$

où $(\mathbf{A}, \theta) \in \mathbb{R}^L \times \mathbb{T}^L$, ω est un vecteur de \mathbb{R}^L . Sans perte de généralité, nous considérons une région au voisinage de $\mathbf{A} = 0$ (par translation des actions) et, comme le Hamiltonien est presque intégrable, la perturbation V possède des parties constantes et linéaires dans les variables actions et est d'ordre ε , i.e.

$$V(\mathbf{A}, \theta) = \varepsilon v(\theta) + \varepsilon \mathbf{w}(\theta) \cdot \mathbf{A} + Q(\mathbf{A}, \theta), \quad (2)$$

où Q est d'ordre $O(\|\mathbf{A}\|^2)$. Notons que pour $\varepsilon = 0$, le Hamiltonien H a un tore invariant de vecteur fréquence ω en $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ pour tout Q non nécessairement petit. Le Hamiltonien contrôlé est de la forme:

$$H_c(\mathbf{A}, \theta) = \omega \cdot \mathbf{A} + V(\mathbf{A}, \theta) + f(\theta), \quad (3)$$

Notons que le terme de contrôle f que nous construisons dépend seulement des variables angles et est donné par

$$f(\theta) = V(\mathbf{0}, \theta) - V(-\Gamma \partial_\theta V(\mathbf{0}, \theta), \theta), \quad (4)$$

avec Γ un opérateur linéaire défini comme le pseudo-inverse de $\omega \cdot \partial_\theta$, i.e. agissant sur $V = \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} e^{i\theta \cdot \mathbf{k}}$ tel que

$$\Gamma V = \sum_{\omega \cdot \mathbf{k} \neq 0} \frac{V_{\mathbf{k}}}{i\omega \cdot \mathbf{k}} e^{i\theta \cdot \mathbf{k}}.$$

Notez que f est d'ordre ε^2 . On peut le voir à partir de l'Eq. (2) où f peut se réécrire comme $f(\theta) = \varepsilon^2 \mathbf{w}(\theta) \cdot \Gamma \partial_\theta v - Q(-\varepsilon \Gamma \partial_\theta v, \theta)$, avec Q quadratique dans les variables actions. Pour toute perturbation V , le Hamiltonien (3) a un tore invariant dont le vecteur fréquence est proche de ω . L'équation du tore construit en ajoutant f est:

$$\mathbf{A} = -\Gamma \partial_\theta V(\mathbf{0}, \theta), \quad (5)$$

qui est d'ordre ε car $V(\mathbf{0}, \theta)$ est d'ordre ε .

Dans la section suivante, nous verrons dans notre modèle que l'amplitude du terme de contrôle est petite comparée à la perturbation.

3 Application au modèle

Dans cette section, nous utilisons le contrôle localisé pour réduire le transport chaotique de particules passives localisées autour et entre les rouleaux de convections. Par cette méthode, nous créons ainsi des barrières isolées à la diffusion chaotique. Pour construire une barrière, nous sélectionnons une surface localisée autour de $x = x_0$. Par exemple, pour créer une barrière entre deux rouleaux nous pouvons choisir $x_0 = \pi$. Suivant les notations de la Sec. 2, nous réécrivons le Hamiltonien autonome sous la forme:

$$\begin{aligned}
 H(x,E,y,\tau) &= E + V(x,y,\tau), \\
 &= E + \Psi(x_0,y,\tau) + \Psi(x,y,\tau) - \Psi(x_0,y,\tau), \\
 &= E + \epsilon v(y,\tau) + \epsilon w(x,y,\tau)(x - x_0) + Q(x - x_0,E,y,\tau),
 \end{aligned} \tag{6}$$

avec $\epsilon v(y,\tau) = \Psi(x_0,y,\tau)$ et

$$\begin{aligned}
 \epsilon w(x - x_0,y,\tau) &= \partial_x \Psi(x_0,y,\tau), \\
 Q(x - x_0,E,y,\tau) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!} \partial_x^{l+1} \Psi(x_0,y,\tau) (x - x_0)^{l+1},
 \end{aligned} \tag{7}$$

où $(\mathbf{A},\theta) = (x - x_0,E,y,\tau)$ et $\omega = (0,1)$ qui est dans ce cas un vecteur résonant. Afin de calculer l'opérateur Γ , nous développons $\sin(B \sin \tau)$ et $\cos(B \sin \tau)$ en série de fonctions de Bessel:

$$\begin{aligned}
 \cos(B \sin \tau) &= \mathcal{J}_0(B) + 2 \sum_{n \geq 1} \mathcal{J}_{2n}(B) \cos 2n\tau, \\
 \sin(B \sin \tau) &= 2 \sum_{n \geq 0} \mathcal{J}_{2n+1}(B) \sin(2n+1)\tau,
 \end{aligned} \tag{8}$$

le potentiel V se réécrit alors:

$$\begin{aligned}
 V(x,y,\tau) &= \epsilon \sin y \sin x \left(\mathcal{J}_0(B) + 2 \sum_{n \geq 1} \mathcal{J}_{2n}(B) \cos 2n\tau \right) \\
 &\quad + 2\epsilon \sin y \cos x \left(\sum_{n \geq 1} \mathcal{J}_{2n+1}(B) \sin(2n+1)\tau \right),
 \end{aligned}$$

et l'opérateur Γ appliqué à V est donné par:

$$\begin{aligned}
 \Gamma V(x,y,\tau) &= 2\epsilon \sin y \sin x \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n} \mathcal{J}_{2n}(B) \sin 2n\tau \right) \\
 &\quad - 2\epsilon \sin y \cos x \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)} \mathcal{J}_{2n+1}(B) \cos(2n+1)\tau \right).
 \end{aligned}$$

Nous déduisons le terme de contrôle:

$$f(y,\tau) = \partial_x \Psi(x_0,y,\tau) \Gamma \partial_y \Psi(x_0,y,\tau) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+1)!} \left(\partial_x^{l+1} \Psi(x_0,y,\tau) \right) (\Gamma \partial_y \Psi(x_0,y,\tau))^{l+1}, \tag{9}$$

où nous avons remplacé $x - x_0$ par $-\Gamma \partial_y \Psi(x_0,y,\tau)$.

Comme Ψ ne dépend pas de E , nous calculerons seulement $\Gamma \partial_y \Psi(x_0,y,\tau)$:

$$-\Gamma \partial_y \Psi = 2\epsilon \cos x_0 \cos y \mathcal{S}_o(\tau) - 2\epsilon \sin x_0 \cos y \mathcal{S}_e(\tau), \tag{10}$$

où \mathcal{S}_o et \mathcal{S}_e sont définis par:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_o(\tau) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \mathcal{J}_{2n+1}(B) \cos(2n+1)\tau, \\ \mathcal{S}_e(\tau) &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n} \mathcal{J}_{2n}(B) \sin 2n\tau.\end{aligned}$$

Nous déduisons le terme de contrôle exacte :

$$\begin{aligned}f(y, \tau) &= \epsilon \sin(B \sin \tau + x_0) \sin y \\ &\quad - \epsilon \sin [2\epsilon \cos x_0 \cos y \mathcal{S}_o(\tau) - 2\epsilon \sin x_0 \cos y \mathcal{S}_e(\tau) + x_0 + B \sin \tau] \sin y.\end{aligned}\quad (11)$$

L'équation du tore invariant est

$$x = x_0 + 2\epsilon \cos y [\cos x_0 \mathcal{S}_o(\tau) - \sin x_0 \mathcal{S}_e(\tau)]. \quad (12)$$

Pour $|\epsilon| \ll 1$, le terme de contrôle localisé peut être simplifié en ne considérant que le premier terme du développement dans l'Eq.11. Le terme de contrôle simplifié est alors:

$$f_2(y, \tau) = -\epsilon^2 \sin 2y \cos(B \sin \tau + x_0) [\cos x_0 \mathcal{S}_o(\tau) - \sin x_0 \mathcal{S}_e(\tau)] + O(\epsilon^3). \quad (13)$$

Pour B petit et $x_0 = \pi$, si nous ne tenons compte que du premier terme de la série \mathcal{S}_o , nous obtenons un terme de contrôle simplifié donné par $f = f_s + O(B^2)$,

$$f_s = -\frac{\epsilon^2(\mathcal{J}_0(B) + 1)\mathcal{J}_1(B)}{2} \sin 2y \cos \tau. \quad (14)$$

Les sections de Poincaré de la dynamique du Hamiltonien non contrôlé (1) et du Hamiltonien (1) avec le terme de contrôle simplifié (14), sont représentées sur la figure 1, pour $B = 0.12\pi$ et sur la figure 2, pour $B = 0.2\pi$. Le terme de contrôle crée un tore invariant, correspondant à la courbe représentée en gras dans les figures dont l'équation est donnée par (12). Nous constatons que le terme de contrôle réduit efficacement la diffusion chaotique d'une particule passive; il n'y a pas de particules advectées d'une cellule à l'autre. Par contre, pour $B = 0.2\pi$, le contrôle est moins efficace; nous observons quelques particules qui passent d'une cellule à l'autre. Ceci est dû au fait que nous n'avons pas ajouté au Hamiltonien initial, le terme de contrôle exacte mais une approximation de ce terme. Le contrôle serait plus efficace, lorsque B croît, si nous tenons compte des termes d'ordre supérieurs f_n où $n \geq 3$.

Afin de voir plus précisément les effets de ce terme de contrôle, nous allons étudier les propriétés de transport de ce système. Pour cela nous calculons le déplacement quadratique moyen $\langle r^2(t) \rangle$ d'une distribution de \mathcal{M} particules (d'ordre 3000) en fonction du temps:

$$\langle r^2(t) \rangle = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_i(0)\|^2, \quad (15)$$

où $\mathbf{x}_i(t)$, $i = 1, \dots, \mathcal{M}$ est la position de la i ème particule au temps t obtenu par intégration des équations de Hamilton à partir de conditions initiales $\mathbf{x}_i(0)$. Nous remarquons sur la figure 3(a) que $\langle r^2(t) \rangle$ croît linéairement avec le temps pour t suffisamment grand. Le coefficient de diffusion peut être déterminé par la pente du graphe de $\langle r^2(t) \rangle$ par rapport à t :

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle r^2(t) \rangle}{t}. \quad (16)$$

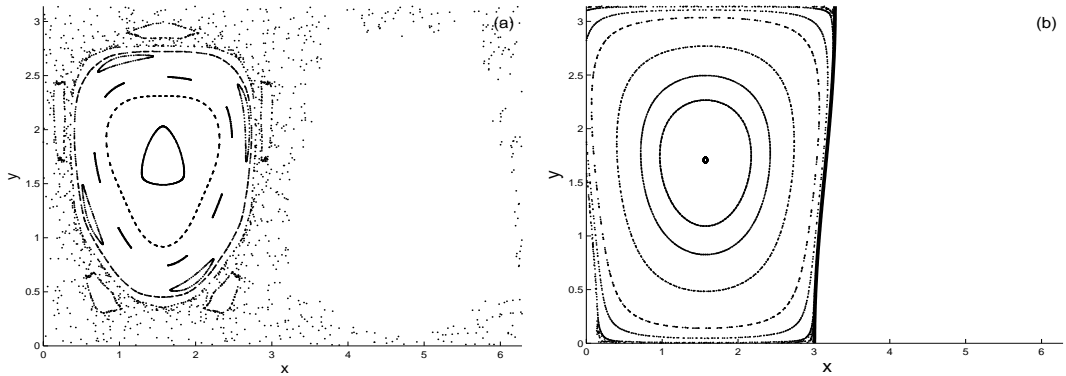


FIG. 1 – Section de Poincaré pour la fonction de courant ψ donnée par l'Eq. (1) pour $\epsilon = 0.18$, $B = 0.12\pi$, (a) sans contrôle, (b) avec le terme de contrôle simplifié donné par l'Eq. (14)

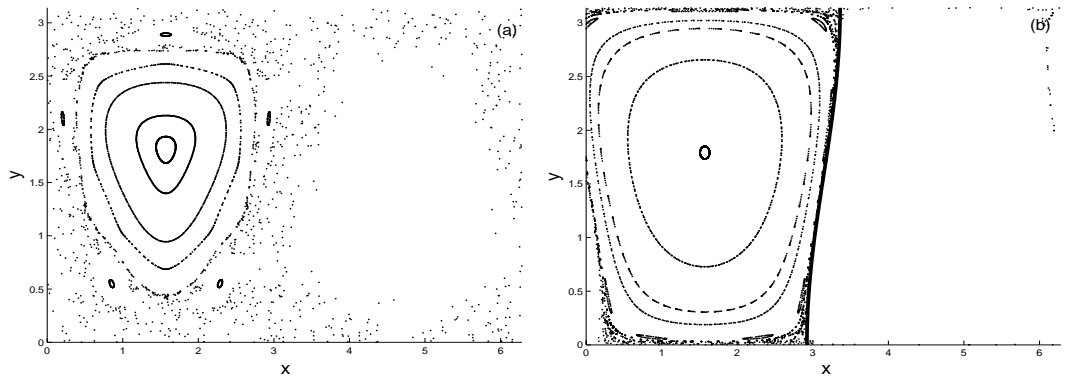


FIG. 2 – Section de Poincaré pour la fonction de courant ψ donnée par l'Eq. (1) pour $\epsilon = 0.18$, $B = 0.2\pi$, (a) sans contrôle, (b) avec le terme de contrôle simplifié donné par l'Eq. (14)

Figure 3(b) montre les valeurs de D en fonction de B avec et sans le terme de contrôle déterminé à partir du déplacement quadratique moyen pour $t > 1000$. Nous remarquons une réduction nette de la diffusion en présence du terme de contrôle.

4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce travail une première tentative d'appliquer en hydrodynamique une technique de contrôle du chaos fondée sur une petite modification de la fonction de courant. Nous avons calculé analytiquement le terme de contrôle permettant de réduire l'advection chaotique dans le problème original. Nous avons montré numériquement que la diffusion chaotique dans le fluide a été significativement réduite en prenant en compte seulement un terme de contrôle simplifié.

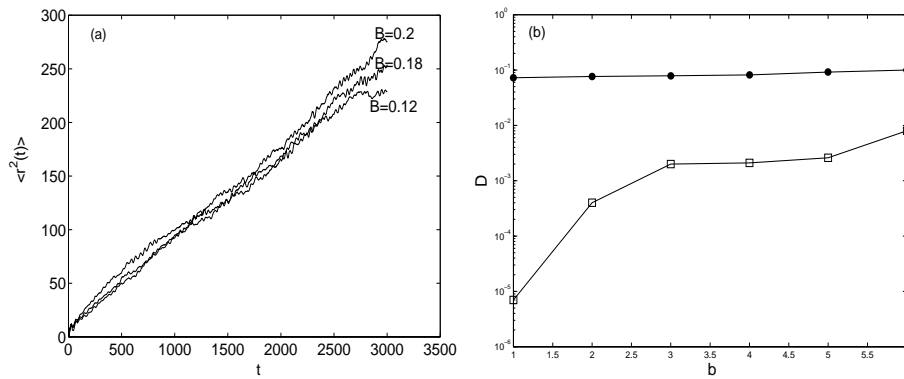


FIG. 3 – Diffusion pour le Hamiltonien (1): (a) Déplacement quadratique moyen $\langle r^2(t) \rangle$ en fonction de t pour trois valeurs de B , $B = 0.12, 0.18, 0.2$; (b) Coefficient de diffusion en fonction de B pour le Hamiltonien sans contrôle (cercle) et avec contrôle (14) (carré)

Remerciements

Nous remercions A. Goulet pour les discussions fructueuses que nous avons eues.

Références

- [1] C. Chandre, G. Ciraolo, F. Doveil, R. Lima, A. Macor, M. Vittot, *Channelling chaos by building barriers*, Phys. Rev. Lett., (2005) to appear.
- [2] G. Ciraolo, C. Chandre, R. Lima, M. Vittot, M. Pettini and Ph. Ghendrih, *Tailoring phase space: a way to control Hamiltonian transport*, Europhysics Lett., (2005), to appear.
- [3] M. Vittot, C. Chandre, G. Ciraolo and R. Lima, *Localized Control for nonresonant Hamiltonian systems*, Nonlinearity **18**, 423, (2003).
- [4] T. H. Solomon, J. P. Gollub, *Chaotic particle transport in Rayleigh-Bénard convection*, Phys. Rev. A, **38**, 6280, (1988).
- [5] T. H. Solomon and I. Mezic *Uniform, resonant chaotic mixing in fluid flows*, Nature, **425** (6956), 376-80, (2003).

Poils mouillés : un mécanisme de coalescence élastocapillaire

J. Bico*, B. Roman*, L. Moulin*, A. Boudaoud†

**Physique et mécanique des Milieux Hétérogènes,
ESPCI, 10 rue Vauquelin 75005 Paris*

†*Laboratoire de Physique Statistique
ENS, 24 rue Lhomond 75005 Paris
jbico@pmmh.espci.fr*

Résumé

Un pelage mouillé s'organise en touffes sous l'action des forces interfaciales dues au liquide emprisonné entre les poils. De tels phénomènes d'auto-association capillaire de structures flexibles apparaissent à plus petite échelle et peuvent détériorer des micro-systèmes électromécaniques ou des tapis de nanotubes de carbone. Combien trouve-t-on de poils dans une touffe? Pour répondre à cette question, nous avons réalisé des expériences macroscopiques avec des brosses de lamelles flexibles régulièrement espacées mises en contact avec un liquide mouillant. La structure des amas formés résulte d'une succession de collages auto-similaires de sous-amas de plus en plus gros et conduit ainsi à un nouveau processus de coalescence. La longueur de collage de deux unités résulte d'un équilibre entre capillarité et élasticité des poils et permet de déterminer le nombre maximal de poils par amas. Enfin, une approche statistique basée sur l'équation de Smoluchowski décrit cette distribution.

1 Forces capillaires sur un solide élastique

Les forces capillaires peuvent déformer fortement des structures élastiques flexibles à des échelles très différentes, avec des conséquences parfois importantes. A l'échelle de notre expérience quotidienne, la forme des pinceaux que l'on trempe dans la peinture ou d'une chevelure mouillée qui s'organise en mèches en sont les résultats les plus évidents. Nous nous intéressons ici à un problème qui, malgré son importance technologique, semble avoir reçu peu d'attention du point de vue fondamental. En effet, de nombreuses techniques de microgravure mettent en jeu la dissolution d'une résine photosensible par un solvant que l'on doit ensuite évaporer. Les micro-structures gravées sont parfois déformées de façon permanente ou détruites lors de leur séchage [1, 2, 3, 4]. En outre, l'utilisation de plus en plus courante de matériaux élastomères de faible module de Young accentue ce problème (structures qui restent "collées"). Au delà des applications de type micro-systèmes (MEMs), cette thématique concerne également l'élaborations de verres ou de substrats spéciaux (hydrophobes, auto-nettoyants).

Une brosse constituée de lamelles de polyester est plongée dans un bain de liquide mouillant, puis retirée quasi-statiquement jusqu'à une hauteur L . Pour une petite hauteur L , les lamelles restent rectilignes, (Fig. 1a) mais au delà d'une valeur seuil, des paires de lamelles voisines se collent entre elles (Fig. 1b), tandis que certaines (environ 1/3) restent seules. Une cascade de collage est obtenue lorsque l'on augmente L : des paires de touffes se collent pour former des amas de plus en plus gros (Fig. 1c). Dans cet article, nous analysons ces figures de collage et calculons la distribution statistique des tailles d'amas.

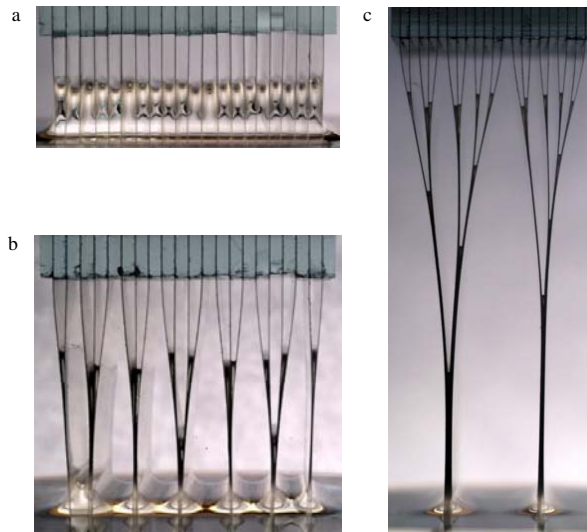


FIG. 1 – Une brosse de lamelles régulièrement espacées est retirée progressivement d’un bain de liquide. **a** Simple montée capillaire entre des lamelles non déformées, **b** et **c** collages successifs conduisant à un motif hiérarchique, qui apparaît comme un processus d’agrégation (du haut vers le bas) ou de fragmentation (du bas vers le haut).

2 Brosse à deux poils : montée capillaire entre deux lames flexibles

La première étape consiste à étudier le mécanisme élémentaire de collage pour deux lamelles séparées d’une distance d . Si les lamelles étaient rigides, les propriétés de mouillage du liquide conduiraient à la montée capillaire jusqu’à la hauteur de Jurin $h_J = 2L_c^2/d$, où $L_c = (\gamma/\rho g)^{1/2}$ est la longueur capillaire (γ est la tension de surface du liquide, ρ sa densité et g l’accélération de la gravité). Si les lamelles sont flexibles, la succion capillaire les courbe et le liquide peut monter plus haut dans cet environnement plus confiné. Nous avons mesuré la hauteur d’ascension L_{wet} en fonction de la hauteur hors du liquide L pour deux lamelles de polyester ($50\mu\text{m}$) séparée de $d = 1\text{mm}$ (Fig. 2). Deux régimes sont observés : montée capillaire jusqu’à la hauteur h_J (ou jusqu’en haut de la brosse si $L < h_J$) et collage pour des hauteurs plus grandes. De façon surprenante, la hauteur d’ascension L_{wet} augmente linéairement avec L dans ce dernier régime, alors que $L_{dry} = L - L_{wet}$ reste constante. En fait, L_{dry} est prescrit par un équilibre entre capillarité et élasticité. L’énergie capillaire (par unité de largeur) vaut $-2\gamma L_{wet}$, alors que l’énergie élastique est proportionnelle au carré de la courbure typique d/L_{dry}^2 et vaut exactement $3\kappa d^2/L_{dry}^3$ pour cette géométrie, où κ est la rigidité en flexion de la lamelle. En minimisant la somme des deux énergies par rapport à L_{dry} (l’énergie potentielle gravitaire devient négligeable dans ce régime, puisque le volume du liquide concerné est infime) donne

$$L_{dry}^4 = 9/2d^2L_{EC}^2, \quad (1)$$

où $L_{EC} = (\kappa/\gamma)^{1/2}$ est la longueur élastocapillaire. Ce résultat est en bon accord avec nos mesures sur plusieurs ordres de grandeurs (Fig. 2 insert). On trouve dans la théorie de fissure [8] et celle des tests d’adhésion (CITE) une formulation énergétique identique, où l’énergie capillaire est remplacée par la ténacité du matériau. Alors que L_{EC} donne la

courbure typique induite par les forces capillaires [9], L_{dry} est la longueur critique au delà de laquelle une structure lamellaire est sensible au collage capillaire. Lorsque les dimensions d'une structure sont réduites (par un facteur λ), L_{EC} et L_{dry} (qui varient respectivement comme $\lambda^{3/2}$ et $\lambda^{5/4}$) deviennent finalement plus petits que la taille de la structure, ce qui conduit à de fortes déformations de micro-systèmes [1, 2, 3, 4].

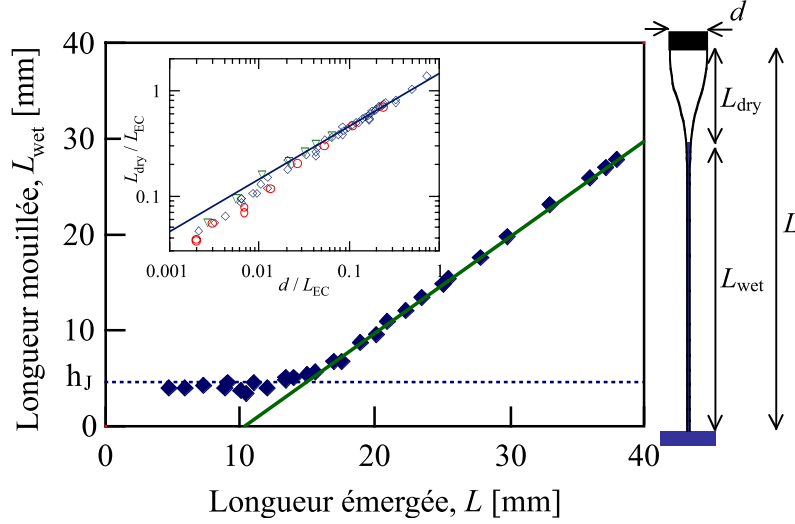


FIG. 2 – Collage de deux lamelles. Des bandes de polyester (épaisseur $e = 100\mu\text{m}$, et rigidité en flexion $\kappa = 5,1 \cdot 10^{-4} \text{N.m}$) sont progressivement retirées d'un bain d'huile de silicone ($\gamma = 20,6 \text{mN/m}$, longueur capillaire $L_C = 1,5 \text{mm}$). Hauteur d'ascension du liquide L_{wet} en fonction de la hauteur émergée L pour $d = 1 \text{mm}$ illustrant la transition entre montée capillaire ($L_{wet} = h_J$) et le régime de collage ($L_{dry} = L - L_{wet}$ est constant). Insert: régime de collage. Longueur sèche adimensionnée L_{dry}/L_{EC} en fonction de la séparation adimensionnée d/L_{EC} , où L_{EC} est la longueur élastocapillaire (ronds: $e = 50\mu\text{m}$, $L_{EC} = 47 \text{mm}$, losanges: $e = 100\mu\text{m}$, $L_{EC} = 150 \text{mm}$, triangles: $e = 170\mu\text{m}$, $L_{EC} = 370 \text{mm}$) et comparaison avec la théorie (ligne continue: Eq.1 sans paramètre ajustable)

3 Le cas multilames

Pour généraliser l'équation (1) au cas du collage multiple, nous supposons qu'un amas de N lamelles se comporte comme une seule lamelle qui serait N fois plus rigide (nous négligeons la friction solide entre les lamelles lubrifiées par le liquide). En moyenne, un tel amas résulte de l'agrégation de deux demi-amas de taille $N/2$, placés à une distance $Nd/2$. La longueur sèche (entre la jonction des deux amas et l'encastrement) devient alors

$$L_{dry}^4 = \frac{9}{16} N^3 d^2 L_{EC}^2, \quad (2)$$

ce qui est en très bon accord avec nos expériences (Fig. 3). La taille maximale N_{max} des touffes observable au bout d'une brosse est ainsi donnée par l'équation (2) où l'on remplace L_{dry} par la longueur totale de la brosse L .

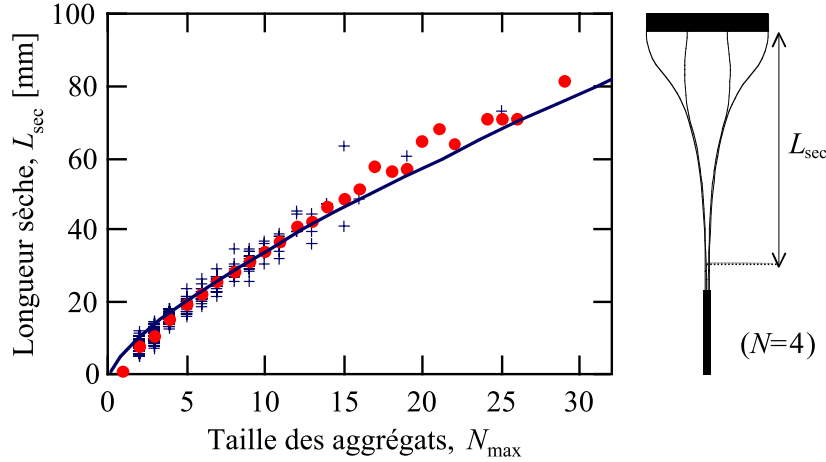


FIG. 3 – Agregation de plusieurs lamelles en mèches. Des brosses ($e = 50\mu\text{m}$, $\kappa = 5 \cdot 10^{-5}\text{N.m}$, $L_{EC} = 50\text{mm}$ et $d = 1\text{mm}$) sont retirées d'un bain d'huile de silicone. Longueur sèche L_{dry} (au dessus de la jonction de deux agrégats) en fonction du nombre N de lamelles de l'agrégat final (croix: données brutes, ronds: longueur moyenne) et comparaison avec la théorie (ligne continue: Eq. 2 sans paramètre ajustable).

4 Statistique des tailles de mèches

Pour comprendre la statistique de tailles de mèches, nous avons d'abord étudié un modèle numérique simplifié. Des particules de masse 1 sont disposées régulièrement sur une ligne avec un petit bruit, de sorte que la distance entre deux particules consécutives soit à peu près 1 (à 1 % près par exemple). Ensuite le processus suivant est itéré : les deux particules les plus proches sont remplacées par une seule particule placée au centre de masse des particules mères, tout en conservant la masse. Ce processus conduit à des arbres d'évènements de coalescence, de structures semblables à celles de brosses de lamelles.

À un instant donné (ou pour une longueur de lamelles donnée), la dynamique impose une masse (taille) maximale N_{max} pour la masse (taille) des amas. Si l'on suppose le processus auto-similaire, alors la variable réduite est N/N_{max} et la probabilité de trouver un amas de masse (taille) N prend la forme

$$p(N, N_{max}) = \frac{\alpha}{N_{max}} \phi\left(\frac{N}{N_{max}}\right), \quad (3)$$

où α est une constante de normalisation. Cette forme permet de regrouper les données expérimentales et numériques sur une même courbe maîtresse (Fig. 4).

Le modèle numérique suggère l'utilisation du formalisme de la théorie de la coalescence [7]. On considère un ensemble d'objets et l'on note $n(m, t)$ la densité d'objets de masse m à l'instant t (le temps correspond à la longueur des lamelles). Deux amas de masses m_1 et m_2 coalescent pour en donner un de masse $m_1 + m_2$ avec un taux $K(m_1, m_2)$ (classiquement ce taux est une constante). L'équation de Smoluchovski s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t}(m, t) = & \frac{b1}{2} \int n(m_1, t) n(m_2, t) K(m_1, m_2) \delta(m - m_1 - m_2) dm_1 dm_2 \\ & - \int n(m, t) n(m_1, t) K(m, m_1) dm_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Le premier terme du second membre correspond à la création de masses m et le second à leur disparition.

La difficulté est ici de trouver la forme du taux de réaction $K(m_1, m_2)$ qui correspond au système physique. L'ingrédient important est que deux masses coalescent si et seulement si l'objet résultant a une masse égale à la masse maximale à cet instant-là. Donnons-nous la masse maximale $M(t)$ comme fonction du temps. Le taux de réaction s'écrit alors comme

$$K(m_1, m_2) = \frac{2}{\Pi \int n(m, t) dm} \delta(t - M^{-1}(m_1 + m_2)). \quad (5)$$

La fonction de Dirac traduit le fait que deux masses m_1 et m_2 coalescent lorsque $m_1 + m_2 = M(t)$. Le nombre total d'amas est $T = \int n(m, t) dm$; chaque objet peut coalescer avec l'un de ses deux voisins, soit 2 parmi T , d'où le préfacteur. Enfin Π est une mesure des corrélations spatiales ($\Pi = 1$ sans corrélations).

Maintenant que l'équation de Smoluchovski est fermée, nous en cherchons des solutions auto-similaires sous la forme

$$n(m, t) = \frac{b1}{M^2(t)} \phi\left(\frac{m}{M(t)}\right). \quad (6)$$

Une astuce permet de transformer l'équation intégral-différentielle pour ϕ en équation différentielle ordinaire, que l'on intègre aisément numériquement. La solution représentée sur la figure 4 correspond à un choix du paramètre de corrélation $\Pi = 0,67$ qui n'est pas très éloigné de la valeur que l'on trouve avec un calcul approximatif.

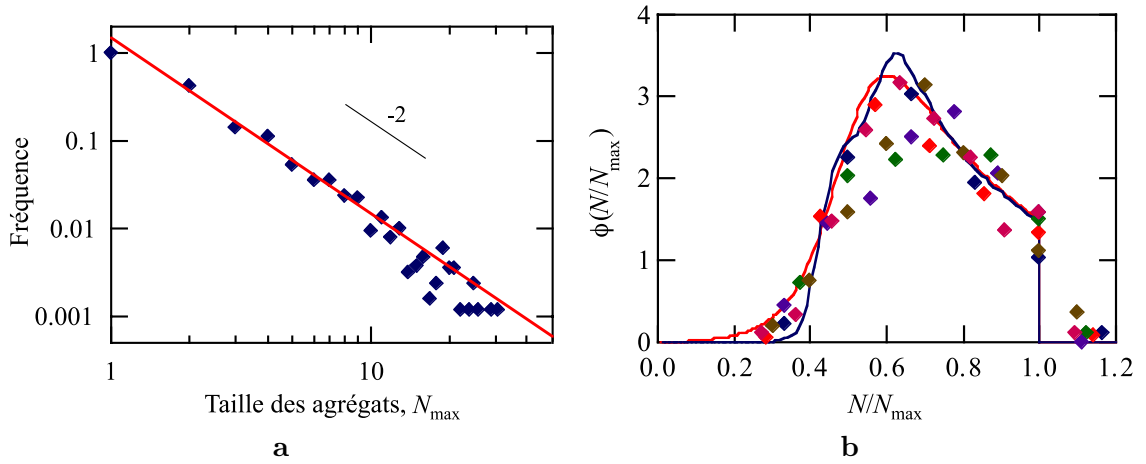


FIG. 4 – **a** Fréquence des agrégats de taille N_{max} (nombre d'agrégats normalisé par le nombre total de lamelles) en fonction de N_{max} (losanges : expérience, lignes continues superposées : simulation numérique et théorie de coalescence). **b** La distribution de la taille des agrégats est auto-similaire : la distribution renormalisée prend la forme $\phi(N/N_{max}) = n(N, N_{max}) N_{max}^2 / N_{tot}$, où $n(N, N_{max})$ est le nombre d'agrégats de taille N pour une taille maximale N_{max} et une brosse de N_{tot} lamelles. Expérience (losanges, N_{max} varie de 6 à 11), simulation numérique (ligne noire) et théorie de coalescence (ligne grise).

5 Conclusion

Nous avons ainsi caractérisé l'auto-organisation de lamelles flexibles en présence d'interfaces liquides : une cascade d'événements de collage auto-similaire conduit à une structure hiérarchique (Fig. 1c). Nous avons étudié l'événement élémentaire de collage, puis obtenu la taille maximale N_{max} des amas qui peuvent apparaître à une longueur donnée L de la racine des lamelles. En réalité on observe une polydispersité de la taille des agrégats ; une étude statistique adaptant les outils classiques de la théorie d'agrégation nous permet de déterminer cette distribution. Nous montrons que l'assemblage des lamelles correspond à un nouveau processus de coalescence avec une taille maximale, dont on peut visualiser l'historique simplement en regardant la brosse.

Une fois mis à l'échelle, ces résultats devraient être pertinents pour la conception de systèmes micro-mécaniques. Le processus d'agrégation auto-similaire que nous décrivons devrait s'étendre à d'autres géométries (comme celle de tapis de fibres) ou d'autres systèmes de fragmentation ou de coalescence dans lesquels une taille maximale est imposée.

Références

- [1] T. Tanaka, M. Morigami, N. Atoda, *Mechanism of resist pattern collapse during development process*, Jpn. J. Appl. Phys. **32**, 6059-6064 (1993).
- [2] C.H. Mastrangelo, C.H. Hsu, *Mechanical stability and adhesion of microstructures under capillary forces: Part I and II*, IEEE J. Microelectromech. Syst. **2**, 33-55 (1993).
- [3] O. Raccurt, F. Tardif, F. Arnaud d'Avitaya, T. Vareine, *Influence of liquid surface tension on stiction of SOI MEMS*, J. Micromech. Microeng. **14**, 1083-1090 (2004).
- [4] K. Lau, *et al*, *Superhydrophobic carbon nanotube forests*, Nano Lett. **3**, 1701-1705 (2003).
- [5] N. Chakrapani, B. Wei, A. Carrillo, P.M. Ajayan, R.S. Kane, *Capillarity-driven assembly of two-dimensional cellular carbon nanotube foams*, P. Natl. Aca. Sci. USA, **101**, 4009-4012 (2004).
- [6] J. Bico, B. Roman, L. Moulin, A. Boudaoud, *Elastocapillary coalescence in wet hair*, Nature, **432**, 690 (2004).
- [7] F. Leyvraz, *Scaling theory and exactly solved models in the kinetics of irreversible aggregation*, Phys. Rep. **383**, 95-212 (2003).
- [8] L.B. Freund, *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press (1990).
- [9] A.E. Cohen, L. Mahadevan, *Kinks, rings, and rackets in filamentous structures*, P. Natl. Aca. Sci. USA **100**, 12141-12146 (2003).

Nucléation spontanée des pics localisés dans un système non linéaire et multi-stable

Umberto Bortolozzo^{1,2}, René Rojas¹, Stefania Residori¹

Institut du Non Linéaire de Nice
1361, Route des Lucioles, 06560 Valbonne-Sophia Antipolis
umberto.bortolozzo@inln.cnrs.fr

Résumé

Dans une expérience d'optique non-linéaire nous montrons une nouvelle classe des structures localisées, qui apparaissent comme des pics localisés d'une structure spatiale qui vient se nucléer sur une autre structure spatiale. Nous observons des pics localisés avec deux amplitudes différentes, correspondant à différentes branches des solutions spatiales périodiques. La nucléation des pics localisés est spontanée et gouvernée par la dynamique spatio-temporelle de la structure sous-jacente.

1 Introduction

Des structures localisées apparaissent dans différents domaines de la physique, chimie, géophysique, etc. Des classes différentes des structures localisées ont été identifiées [1, 2, 3], même si une classification exhaustive de tous les types possibles d'états localisés ne soit pas encore établie. Du point de vue expérimental il est possible de donner une description phénoménologique des structures localisées: celles que l'on observe en présence de bistabilité entre un état homogène et un état périodique, par exemple dans la convection thermique [4], les pulses localisés, comme dans l'instabilité de Faraday [5], les oscillons dans les granulaires vibrés [6], les solitons de cavité en optique [7]. Cependant, quand l'on regarde l'espace de phase la situation est très complexe et des propriétés spécifiques des structures localisées peuvent apparaître, comme la formation des états liés [8], ou leur forme triangulaire [9], comme il a été récemment observé en optique non linéaire.

Dans une expérience d'optique non linéaire qui se compose d'une Valve Cristal Liquide (LCLV de l'anglais *Liquid-Crystal-Light-Valve*) dans une boucle de rétro-action optique, nous allons montrer un nouveau type des structures localisées qui apparaissent comme des pics isolés sur une structure spatiale de plus faible amplitude. Ces pics isolés peuvent être interprétés comme des connexions homoclines entre les différentes structures spatiales qui sont associées aux branches de multi-stabilité du système [10]. La création et le mouvement des pics localisés se font de manière spontanée, car ils sont induits par les fluctuations de phase et d'amplitude de la structure spatiale sous-jacente.

2 Description de l'expérience

Le montage expérimental est le même que celui décrit dans [9]. La LCLV se compose d'un film nématique pris en sandwich entre une lame de verre et une lame photoconductrice sur laquelle un miroir diélectrique est déposé. Les deux parois en contact avec le cristal liquide sont traitées de façon à induire un ancrage planaire (directeur nématique \vec{n} parallèle aux parois). Le photoconducteur se comporte comme une résistance variable qui diminue

lorsque l'intensité lumineuse augmente. La LCLV, sur laquelle on applique une tension sinusoïdale, est insérée dans une boucle de rétroaction optique et illuminée par une onde plane (laser He-Ne élargi). L'onde, après avoir traversée la couche de cristal liquide, est réfléchiée par le miroir de la LCLV et, grâce à un faisceau de fibres optiques, est dirigée vers le photoconducteur. La lumière subit un déphasage qui dépend de l'angle d'orientation des cristaux liquides. Ce déphasage, à son tour, contrôle le voltage effectif qui localement s'applique au film nématique.

La boucle optique est réalisée de façon à ce que la diffraction et l'interférence de polarisation sont simultanément présentes [9]. La longueur de propagation libre de la lumière est fixée à $L = -40 \text{ mm}$ et les angles des polariseurs sont orientés à 45° par rapport à \vec{n} , le directeur des cristaux liquides. L'extrémité libre de la fibre optique est montée sur une platine de précision pour éviter toute rotation ou translation dans la boucle de rétroaction. Nous avons fixé la valeur r.m.s. de la tension appliquée à la LCLV, $V_0 = 12.3 \text{ V}$ (fréquence 6 KHz), et nous avons fait varier l'intensité de la lumière incidente I_{in} . Autour de cette valeur de V_0 , nous observons trois états uniformes et stationnaires. Comme on va voir dans la suite, l'analyse de stabilité linéaire de ces solutions montre que chaque branche devient instable par rapport à un mode transverse. On dira alors, de manière générique, que chaque branche bifurque vers une structure spatiale périodique, que nous appelons P_1 , P_2 and P_3 , respectivement.

3 La nucléation des pics localisés

Une séquence typique d'images que l'on observe en augmentant I_{in} est montrée sur la Fig.1. Pour des faibles intensités on observe la structure P_1 , issue de la bifurcation de l'état homogène vers un état périodique (Fig. 1a). Ensuite, comme montré sur la Fig. 1b, des pics localisés apparaissent sur P_1 . Nous appelons ces pics P_{12} , car, selon notre conjecture, ils proviennent d'un processus de nucléation de P_2 sur P_1 . En augmentant ultérieurement I_{in} , il apparaît des pics localisés d'amplitude plus élevée, que nous appelons P_{13} , car provenant de la nucléation de P_3 sur P_1 .

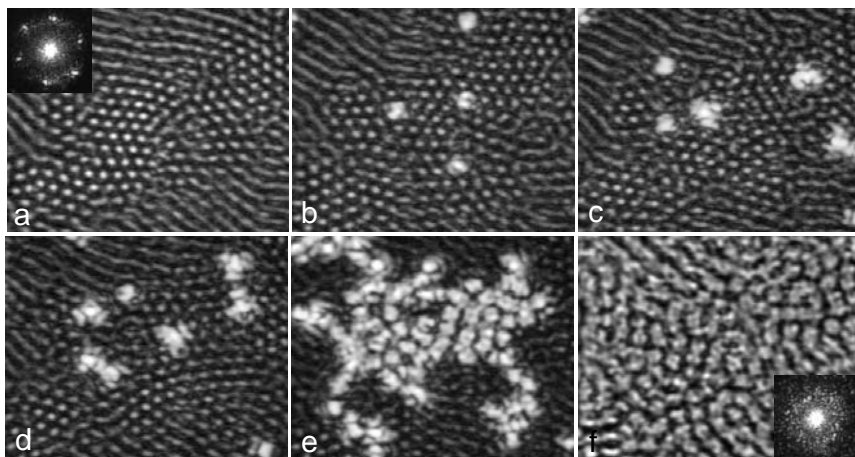


FIG. 1 – Séquence d'images montrant l'énucléation des pics localisés: $I_{in} = a)$ 0.32, $b)$ 0.38, $c)$ 0.40, $d)$ 0.41, $e)$ 0.42 et $f)$ 0.52 mW/cm^2 . Dans les insertions sur $a)$ et $f)$ sont montrées les images de champ lointain pour P_1 et P_3 , respectivement

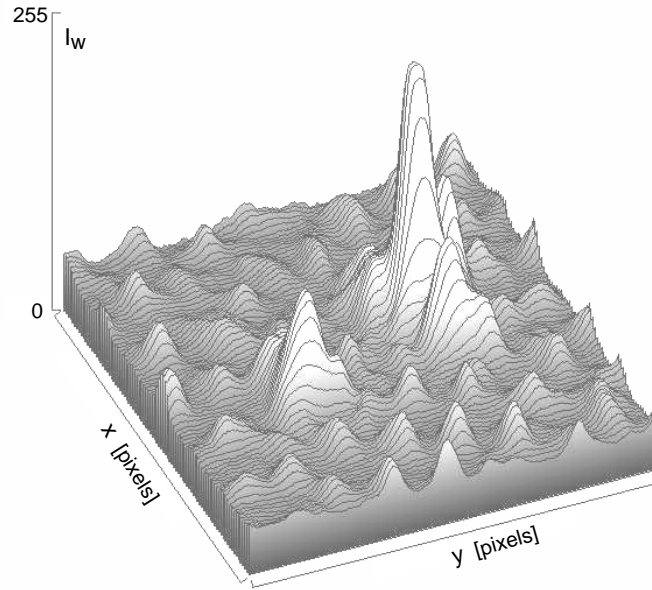


FIG. 2 – Profil tridimensionnel d'intensité avec un pic P_{12} et un pic P_{13} sur la structure sous-jacente P_1 .

Pour des valeurs intermédiaires de I_{in} , comme dans la Fig. 1c et d, P_{13} et P_{12} coexistent dans les mêmes régions de l'espace. Un profil tridimensionnel d'intensité typique est montré dans la Fig. 2, où il est possible de distinguer la structure périodique sous-jacente, P_1 , le pic P_{12} d'amplitude intermédiaire et le pic P_{13} ayant une amplitude beaucoup plus élevée. Si on continue à augmenter I_{in} , les pics P_{13} deviennent dominants et commencent à envahir tout l'espace, jusqu'à ce que ils forment une structure spatiale densément remplie (Fig. 1f).

C'est bien de remarquer que la transition des pics localisés P_{13} vers la structure spatiale dense P_3 a lieu à travers la propagation d'un front sur la structure sous-jacente P_1 . Une image typique du front est montrée sur la Fig. 1e, où on peut voir un cluster des pics P_{13} qui est en train de s'agrandir. Une autre remarque importante est que l'état final P_3 ne peut pas être considéré comme une structure périodique proprement dite, puisque elle contient toujours des pics P_{12} et possède une dynamique spatio-temporelle chaotique, caractérisée par des grandes fluctuations d'amplitude et par les mouvements de domaines spatialement décorrelés. De même, on ne peut pas dire que P_2 existe en tant que structure propre, car elle apparaît seulement dans la zone de coexistence de P_1 et P_2 et peut être observée seulement sous la forme de pics P_{12} .

Les structures P_1 , P_2 et P_3 sont en principe caractérisées par des valeurs différents de leur nombre d'onde $q_i = 2\pi/d_i$, $i = 1, 2, 3$. Dans les insertions de la Fig. 1a et f, nous montrons les images de champ lointain correspondant à P_1 et P_3 . Les tailles spatiales mesurées pour P_1 et P_3 sur ces images sont, respectivement, $d_1 \simeq 210 \mu m$ et $d_3 \simeq 290 \mu m$. Nous ne pouvons pas mesurer d_2 , car P_2 se manifeste seulement par la nucléation de pics P_{12} , ne donnant pas un cercle critique sur les figures de champ lointain.

Le comportement dynamique de P_1 est déterminant pour la nucléation de pics localisés. En fait, aussi bien P_{12} que P_{13} apparaissent spontanément et, au cours du temps, ils continuent de se déplacer à cause de la dynamique légèrement chaotique de la structure

sous-jacente P_1 . La nucléation de pics localisés est spontanée, dans le sens qu'elle est due principalement aux fluctuations d'amplitude de P_1 . Ces fluctuations agissent comme une source de bruit qui, des temps en temps, injecte assez d'énergie dans le système pour le faire passer d'un état bas, P_1 , à un état haut, celui-ci étant P_2 ou P_3 selon l'ampleur de la fluctuation locale.

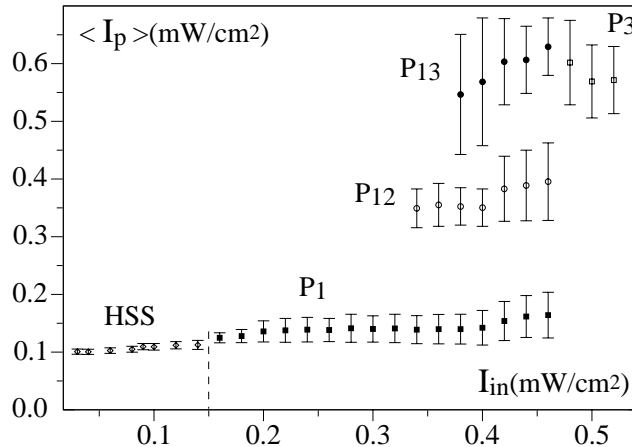


FIG. 3 – Diagramme de bifurcation expérimental, $\langle I_p \rangle$ en fonction de I_{in} , pour $V_0 = 12.3 V$. Les trois branches correspondent P_1 , P_{12} et P_{13} , respectivement. HSS est l'état homogène qui bifurque P_1 . La hauteur des bars d'erreurs est la variance de $\langle I_p \rangle$.

Nous montrons dans la Fig.3 le diagramme de bifurcation expérimental: l'intensité du pic $\langle I_p \rangle$ de chaque structure spatiale est graphiquée en fonction de l'intensité incidente I_{in} . Les branches successives correspondent, respectivement, à l'état homogène, qui perd ensuite sa stabilité et bifurque vers P_1 , et aux pics P_{12} , P_{13} , ce dernier se transformant en P_3 pour I_{in} élevée. Pour chaque valeur de I_{in} , $\langle I_p \rangle$ est mesuré en faisant la moyenne sur les maximums de la structure spatiale: grâce à une camera CCD contrôlée par ordinateur nous avons enregistré plusieurs images de champ proche; ensuite, nous avons appliqué un seuil pour garder seulement les maximums sur chaque image et nous avons fait une moyenne d'ensemble sur tous les pics. Quand deux états différents, comme P_1 et P_{12} , coexistent dans la même image nous avons appliqué un double seuil, de façon à isoler les deux états, respectivement à basse et à haute amplitude, sur deux images séparées. Quand les pics P_{12} et P_{13} coexistent, nous appliquons un troisième seuil pour distinguer entre leurs différentes amplitudes.

En diminuant I_{in} , nous observons, aussi bien pour P_{12} que pour P_{13} , le même diagramme de bifurcation que celui enregistré en augmentant I_{in} . En fait, la nucléation spontanée des pics étant induite par les fluctuations de P_1 , la zone d'hystérésis devient très petite à cause du bruit associé aux fluctuations.

4 Analyse de stabilité linéaire du modèle

Le modèle pour la LCLV a été précédemment dérivé dans [11]:

$$\tau \partial_t \theta = l^2 \nabla_{\perp}^2 \theta - \theta + f(\theta) \quad (1)$$

où $0 \leq \theta(\vec{r}, t) \leq \pi/2$ est l'angle moyen d'orientation des cristaux liquides, $f(\theta) = 0$ quand $V \leq \Gamma V_{FT}$ et $f(\theta) = \pi/2 \left(1 - \sqrt{\Gamma V_{FT}/V}\right)$ quand $V > \Gamma V_{FT}$, V_{FT} étant le voltage de seuil pour la transition de Fréedericksz et $V = \Gamma V_0 + \alpha I_w(\theta, \nabla_{\perp}^2)$. Γ est l'impédance des couches diélectriques de la LCLV, α est un paramètre phénoménologique qui résume, dans l'approximation linéaire, la réponse du photo-conducteur, l est la longueur de cohérence électrique et $I_w = I_{in}/4 \left| e^{-i\frac{L\lambda}{4\pi}\nabla_{\perp}^2} \left(1 - e^{-i\beta \cos^2 \theta}\right) \right|^2$ est l'intensité de rétroaction de la lumière après une longueur de propagation libre L , la diffraction étant prise en compte par l'opérateur $e^{-i\frac{L\lambda}{4\pi}\nabla_{\perp}^2}$, avec λ la longueur d'onde optique.

Le système montre une instabilité spatiale en fonction de la longueur de diffraction L . En écrivant $\theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 e^{\sigma t} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$ nous faisons l'analyse de stabilité linéaire de la solution homogène θ_0 , par rapport à la perturbation spatial θ_1 et nous dérivons la relation de dispersion $\sigma(q)$ pour les modes les plus instables:

$$\sigma = -q^2 - 1 - \chi \cos(\Lambda q^2 + \frac{\varphi_0}{2}) \quad (2)$$

où $\Lambda = -\lambda L/4\pi l^2$, $\varphi_0 = \beta \cos^2 \theta_0$ et $4\chi = \pi \alpha I_{in} \beta \sin(\varphi_0/2) \sin(2\theta_0) / (\Gamma V_0 + \alpha I_{in} \sin^2(\varphi_0/2))^{3/2}$.

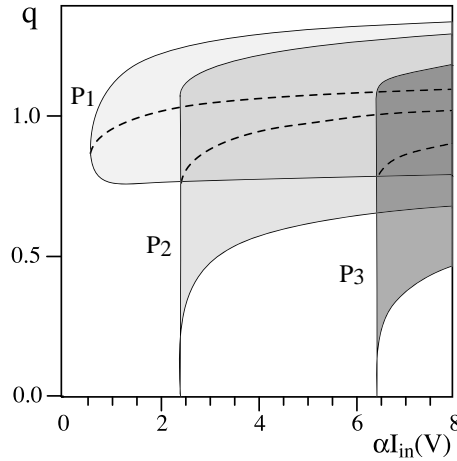


FIG. 4 – Ballons d'instabilité q vs I_{in} , pour $V_0 = 12.3 V$.

Pour $\Gamma = 0.5$, $V_{FT} = 3.0 V$, $l = 30 \mu m$, $\lambda = 632 nm$ et $L = -40 mm$ nous montrons en Fig.4 les ballons d'instabilité q vs I_{in} . Ceux-ci sont en accord qualitatif avec le changement de nombre d'onde qui accompagne l'apparition des pics localisés et la transition de P_1 vers P_3 . Il faut noter que P_1 bifurque avec un nombre d'onde critique $q_1 \neq 0$ (instabilité de type I selon la classification de Cross-Hohenberg [2]), alors que P_2 et P_3 sont accompagnés par l'apparition d'une bande à grande longueur d'onde avec un nombre d'onde critique zéro. Ces bifurcations ne peuvent pas être proprement classifiées comme type II, car les deux bandes instables bifurquent de manière sous-critique en fonction de I_{in} . Par conséquent, il est toujours possible d'identifier les deux modes les plus instables, $q_{2max} \neq 0$ et $q_{3max} \neq 0$, correspondant, respectivement, aux maximums de σ pour P_2 et P_3 . Dans les trois ballons d'instabilité, les maximums de σ , σ_{max} , sont indiqués sur la Fig.4 par les trois lignes en pointillé. Pour chaque valeur de I_{in} , les nombres d'onde q_{1max} , q_{2max} et q_{3max} des trois modes les plus instables sont sur la ligne σ_{max} . Si on considère la taille spatiale des pics localisés P_{12} et P_{13} , on peut voir qu'elle est consistante avec les valeurs q_{2max} et q_{3max}

résultant de l'analyse de stabilité linéaire pour P_2 et P_3 , respectivement (q étant normalisé à $1/l$).

Il faut enfin remarquer que les trois branches qui apparaissent sur le diagramme de bifurcation expérimental ne sont pas nécessairement issues de la déstabilisation des trois états homogènes correspondant. En effet, il existe aussi la possibilité que la deuxième branche instable présente une instabilité secondaire, donnant lieu à une troisième branche de solutions. Expérimentalement c'est impossible de distinguer entre les deux cas.

5 Conclusions

En conclusion, nous avons identifié une nouvelle classe de structures localisées, les pics localisés, qui apparaissent chaque fois que deux structures périodiques coexistent dans la même région des paramètres. Nous avons montré l'existence de ces type de structures dans l'expérience de la LCLV avec rétro-action optique. Nous avons aussi remarqué que les pics localisés sont nucléés par les fluctuations d'amplitude de la structure sous-jacente, qui agit comme une source de bruit induisant l'apparition spontanée des pics localisés. Ces caractéristiques de pics isolés, comme le scénario pour leur apparition, semblent définir une classe très générique des phénomènes, ayant lieu chaque fois qu'un système présente des branches bistables entre différentes structures spatiales.

Références

- [1] S. Fauve and O. Thual, Phys. Rev. Lett. **64**, 282 (1990).
- [2] M. Cross and P. Hohenberg, Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993).
- [3] P. Couillet, Int. J. of Bif. & Chaos **12**, 2445 (2002).
- [4] J. Wu, R. Keolian and I. Rudnick, Phys. Rev. Lett. **52**, 1421 (1984).
- [5] W.S. Edwards and S. Fauve, J. Fluid Mech. **278**, 123 (1994).
- [6] P.B. Umbanhowar, F. Melo and H.L. Swinney, Nature **382**, 793 (1996).
- [7] M. Tlidi, P. Mandel and R. Lefever, Phys. Rev. Lett. **73**, 640 (1994).
- [8] B. Schäpers, M. Feldmann, T. Ackemann and W. Lange, Phys. Rev. Lett. **85**, 748 (2000).
- [9] U. Bortolozzo, L. Pastur, P.L. Ramazza, M. Tlidi and G. Kozyreff, Phys. Rev. Lett. **93**, 253901 (2004).
- [10] U. Bortolozzo, R. Rojas and S. Residori, *Spontaneous nucleation of localized peaks in a multi-stable nonlinear system*, soumis à Phys. Rev. Lett. 2005.
- [11] M.G. Clerc, A. Petrossian and S. Residori, Phys. Rev. E **71**, 015205 (R) (2005).

Contrôle actif de convection thermocapillaire loin du seuil d'instabilité

P. Brunet, G. Amberg, P.H. Alfredsson

KTH Mechanics, SE-10044 Stockholm

`brunet@mech.kth.se`

Résumé

Nous avons mené des expériences de contrôle actif d'instabilités thermocapillaires à fort gradient thermique, dans un container cylindrique. Des études précédentes [1, 2] ont montré qu'un contrôle significatif d'instabilités oscillatoires pouvait être obtenu en optimisant une rétroaction de température par chauffage local. Dans une nouvelle série d'expériences menées dans une géométrie d'écoulement convergeant, plus instable, nous avons noté l'apparition d'instabilités d'ordre supérieur et de chaos. Appliquant dans un premier temps un contrôle actif local à un état périodique près du seuil d'instabilité primaire, nous étendons le processus à plus haute différence de température, où la loi de contrôle initialement linéaire nécessite l'ajout de termes non-linéaires ou proportionnels à la dérivée temporelle du signal. Enfin, un contrôle actif proportionnel permet la synchronisation d'états chaotiques, vers un état périodique [3].

Abstract

We report experiments on control of thermocapillary instabilities at high temperature differences, in a cylindrical container. Previous studies [1, 2] showed that a reasonable control of oscillatory instability could be achieved by optimizing a local heating feed-back process. We conducted experiments with a basic flow converging from periphery to center. This constitutes a more unstable configuration than previously, that enables the appearance of higher-order instabilities and chaos. Applying successfully local feedback control to the periodic state close to the threshold, we extend the process to higher temperature differences, where non-linear as well as proportional/derivative control law are necessary to obtain a significant decrease of the temperature fluctuations. Finally, proportional control allows to synchronise a chaotic state, to a periodic one [3].

1 Introduction

Le phénomène de thermocapillarité traduit la dépendance de la tension de surface du liquide avec la température: la tension de surface est généralement une fonction décroissante de la température. Ainsi, lorsque différentes zones de la surface d'un liquide sont portées à différentes températures, il en s'en suit un écoulement de la zone la plus chaude vers la zone la plus froide. Par continuité, cet écoulement superficiel entraîne un écoulement d'ensemble en profondeur. En laboratoire, les écoulements thermocapillaires ont été étudiés dans de nombreuses géométries. Parmi celles-ci, celles du 'pont-liquide' et de la 'cuve cylindrique' sont utilisées dans des situations pratiques comme la production de monocristaux par fusion/resolidification locale ou les bassins de soudure. Un certain nombre d'études ont précédemment été menées dans des géométries axisymétriques confinées (par exemple, [6, 9]), et la résolution théorique de la stabilité est disponible dans [7]. C'est dans cette géométrie axisymétrique (cuve cylindrique) que nos expériences de contrôle ont été conduites.

Lorsque la différence de température est supérieure à un certain seuil ΔT_c (entre 15° et 20° dans les géométries usuelles), l'écoulement de base subit différentes bifurcations. Le

premier stade de ces instabilités est une brisure de l’axisymétrie de l’écoulement, associé à des oscillations de température et de vitesse. En raison du confinement géométrique, l’écoulement oscillant a une structure spatiale relativement simple (nombre d’onde azimutal typiquement égal à 2 ou 3) et prend la forme d’ondes stationnaires ou propagatives. Lorsque la différence de température ΔT est plus élevée, le degré de complexité des instabilités augmente: des oscillations initiales sont couplés avec des modes de différentes fréquences apparaissant à la suite d’une cascade d’instabilités, pour résulter à très haut ΔT en un état chaotique.

De telles instabilités perturbent généralement les procédés de production de cristaux, et il peut être intéressant de chercher à en atténuer l’amplitude. Depuis plus d’une dizaine d’année et l’article pionnier de Ott, Grebogi et Yorke [10], on sait qu’il est possible de contrôler un système instable et/ou chaotique à faible nombre de degrés de liberté, en appliquant dynamiquement de faibles corrections optimales. La méthode, dénommée OGY par le nom des auteurs, a été appliquée avec succès dans certains cas, principalement en simulations numériques. Les perturbations optimales pour un contrôle sont déterminées au cours d’une phase d’initialisation, où l’algorithme ‘apprend’ comment réagir de manière optimale à des perturbations modèles. La complexité de calcul dans cette méthode peut en restreindre l’utilisation dans des cas expérimentaux. Notons tout de même l’étude de Petrov et al. [11] qui a contrôlé avec succès les oscillations dans une expérience de convection en pont liquide.

La géométrie contrainte (système à faible degré de liberté) et la phénoménologie de la convection thermocapillaire, se prêtent bien à ce type d’étude. Les instabilités de convection sont devenues une référence en physique non-linéaire et en physique du chaos, en raison du caractère général de leur dynamique, et ont été très étudiées dans l’optique de trouver des scénarios de transition prévus par les théories du chaos temporel [4]. L’étude du contrôle de tels systèmes offre une vue différente sur la stabilité de leurs états dynamiques, en donnant des indices sur leur robustesse à supporter des perturbations. Nous décrivons ici des expériences récentes de contrôle de convection thermocapillaires, avec une loi de rétroaction relativement simple, à des différences de température élevées. L’écoulement non-contrôlé présente une cascade d’instabilités à paramètre de contrôle (différence de température adimensionnée) ϵ croissant jusqu’à un état chaotique ($\epsilon = \frac{\Delta T - \Delta T_c}{\Delta T_c}$, ΔT_c étant la différence de température à l’apparition de l’instabilité primaire oscillatoire).

2 Description de l’expérience

L’écoulement est généré dans une cuve cylindrique de 6 mm de diamètre, sur laquelle la différence de température est appliquée entre le centre et la périphérie. Dans les expériences précédentes [9, 1, 2], il n’était pas possible d’observer des états chaotiques: ceux-ci nécessitaient un gradient de température trop élevé, et des bulles apparaissaient alors dans la cellule. Le remède a été d’inverser le gradient de température, pour obtenir une configuration plus instable vis-à-vis de ces instabilités secondaires: la température froide est appliquée au centre par la circulation d’eau froide dans un tube métallique fin (1.2 mm de diamètre) coaxial à la cuve. La température chaude est appliquée en périphérie, par un anneau de cuivre. Le liquide utilisé est de l’huile silicone. La viscosité est choisie à 1 cP, résultat d’un compromis entre la volatilité et l’apparition d’instabilités. En raison d’un taux d’évaporation non-négligeable, il est nécessaire d’ajouter du liquide à débit constant.

Les mesures de température sont effectuées à l’aide de fils chauds immergés (fig. 1-b), utilisés à courant constant. La résistance ohmique est directement reliée à la température

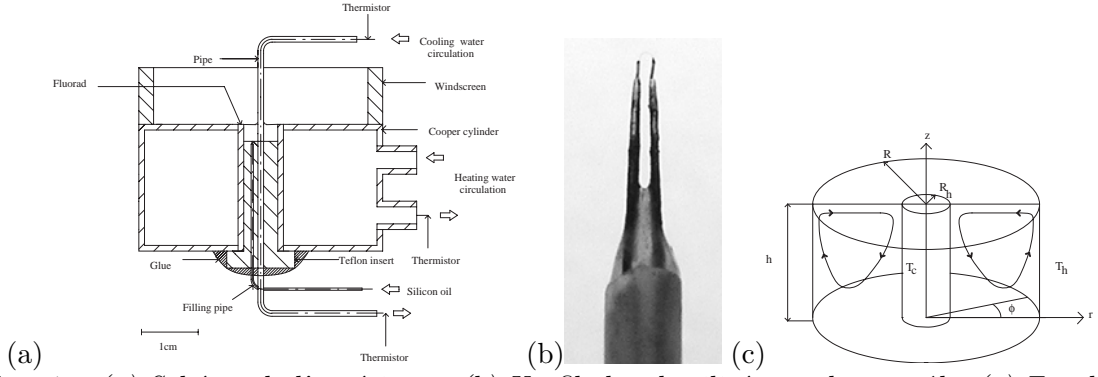


FIG. 1 – (a) Schéma de l'expérience. (b) Un fil chaud utilisé pour le contrôle. (c) Écoulement de base.

locale . L'utilisation de fils très fins (1-2 microns de diamètre) permet une précision dans la mesure (leur longueur est d'un demi-millimètre), une réponse temporelle très rapide et une déformation négligeable de la surface libre. Ils sont dénommés ci-après par l'anglicisme *sensor*. Dans les plages de température explorées, la tension aux bornes des fils est liée par une simple relation proportionnelle à la température. Les corrections en températures sont apportées par des fils chauds de même nature (dénommés par *heater*), dont on fait varier le courant qui les traverse. Ils sont placés à environ 100 microns de la surface sans toucher celle-ci. Dans nos expériences, nous avons utilisé 2 sensors et 2 heaters, compte-tenu de la simplicité de la structure spatiale de l'écoulement dans la direction azimutale.

La tension du courant injectée dans les heaters est fixée par une loi de rétroaction qui dépend des valeurs de température mesurées par les sensors en Φ_1 et Φ_2 . Le contrôle proprement dit est effectué de la manière suivante: en définissant $\theta(\Phi_i)$ par l'écart entre température non-dimensionnée mesurée par le sensor i et sa valeur temporelle moyenne ($\theta = (T - \langle T \rangle) / \Delta T_c$), on obtient la tension injectée à chaque instant sur le heater i :

$$V_i = -G_1 \theta(\Phi_i) - G_3 \theta(\Phi_i) (\theta(\Phi_1)^2 + \theta(\Phi_2)^2) \quad (1)$$

Ainsi, si la température est inférieure à sa valeur moyenne temporelle $\langle T \rangle$, de la chaleur est injectée sur le heater correspondant, alors que si celle-ci est supérieure, rien n'est injecté (pas de refroidissement local possible). La puissance injectée, donnée par V_i^2 / R_i (R_i étant la résistance du heater), est d'ordre de grandeur de 1 milliwatt (assez souvent inférieure), excepté dans les premières secondes du contrôle où on observe quelquefois des pics brefs à 10 milliwatt. L'équation (1) suggère une loi de contrôle combinaison d'un terme linéaire $-G_1 \theta$ et d'un terme non-linéaire couplant à l'ordre 3 les températures des deux sensors. Les coordonnées azimutales des fils chauds doivent être optimisées pour l'efficacité du contrôle. Cette optimisation est directement reliée à la structure spatiale du mode dominant: une onde progogative de nombre d'onde 2 dans la direction azimuthale (cf. détails dans [1, 2, 3]).

3 Résultats

3.1 Écoulement en l'absence de contrôle

Au delà de $\Delta T = \Delta T_c$ ($\epsilon = 0$, pour $\Delta T_c = 17^\circ$), le système subit une bifurcation vers un écoulement oscillatoire, non-axisymétrique (fig. 2-a). Pour des valeurs modérées de ϵ ,

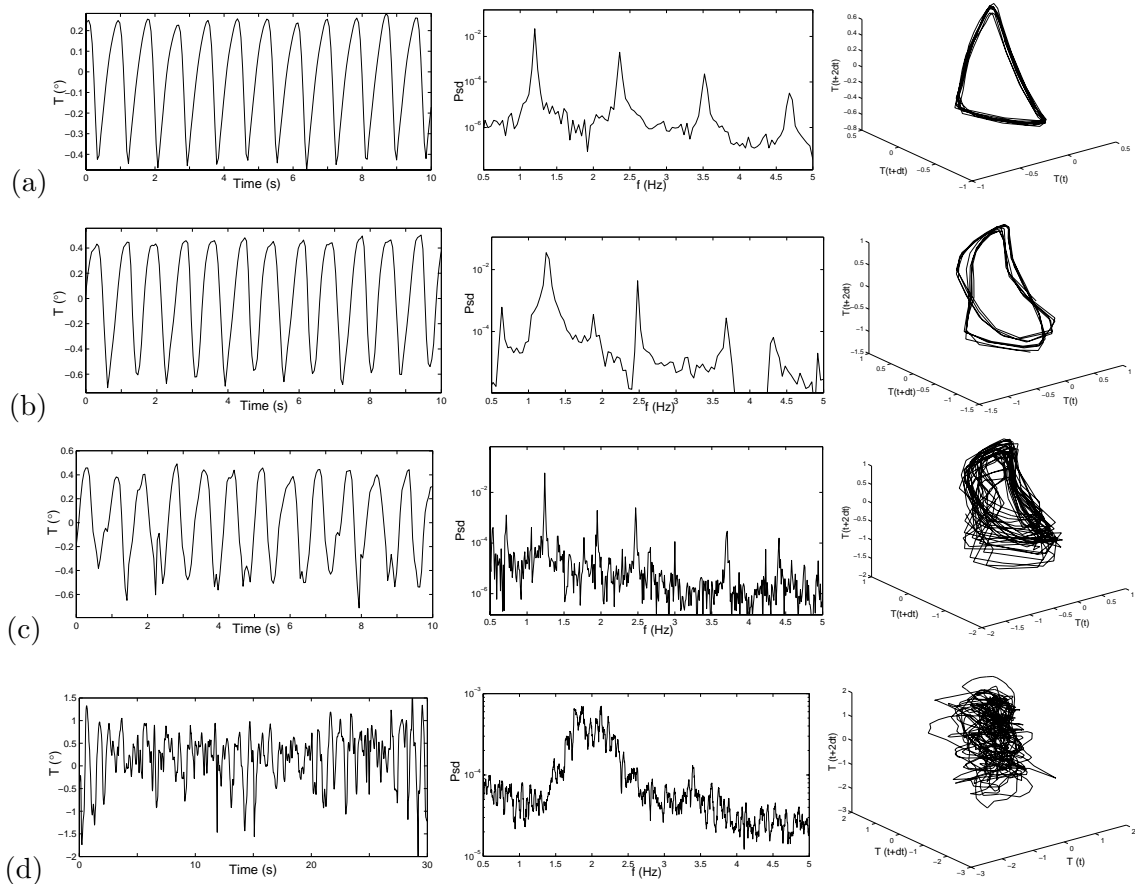


FIG. 2 – *Extraits de signaux temporels moyennés, spectres de puissance et coupes de Poincaré, pour différents ϵ . (a) $\epsilon=0.53$: *tat oscillatoire*. (b) $\epsilon= 0.99$: *doublément de période*. (c) $\epsilon=1.10$: *apparition d'autres fréquences*. (d) $\epsilon=1.80$: *Chaos*.*

l'amplitude des oscillations croit avec l'écart en température. Il apparaît que $A^2 = a\epsilon$ (avec A : amplitude du mode fondamental), signature d'une bifurcation de Hopf. Au delà d'un certain ϵ (autour de 0.95), l'écoulement oscillatoire subit une nouvelle bifurcation avec la croissance d'un mode subharmonique. Cela se traduit par un doublément de période temporelle (cf. fig. 2-b). De nouvelles étapes similaires conduisent le système vers une dynamique imprédictible (fig. 2-c). Il s'agit d'un scénario de transition vers le chaos par cascade de doublément de période, observé dans nombre d'autres systèmes. Un mode subharmonique y apparaît de manière évidente par des pics aux la fréquences $1/2$ entières du fondamental, alors que les spectres d'états chaotiques sont aplatis, avec une bosse autour de la fréquence dominante. La mesure d'exposants de Lyapunov [3] a révélé une brusque augmentation vers $\epsilon=1.25$, l'exposant maximal restant proche de zéro en deà. Une telle étude dans une géométrie un peu différente (half-zone) a montré une transition vers le chaos par quasi-périodicité [8].

3.2 Atténuation des instabilités loin du seuil

Se référant à la loi de rétroaction de l'équation (1), il s'agit de 'jouer' sur les valeurs de G_1 et G_3 , directement liés à la puissance injectée, pour obtenir un optimum de contrôle. Cet

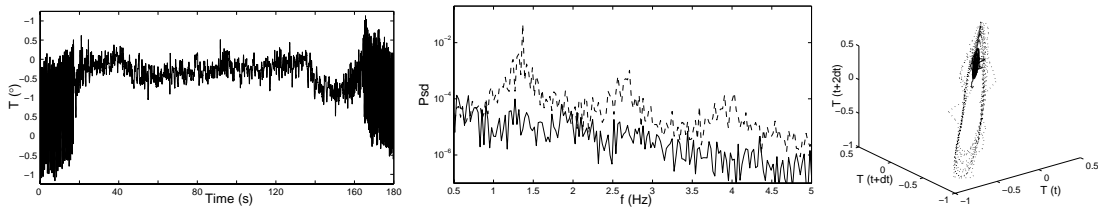


FIG. 3 – Contrôle d’instabilités oscillatoires loin du seuil. Signal temporel - Spectre fréquentiel des états avant contrôle (pointillés) et pendant contrôle (trait plein) - Section de Poincaré . $\epsilon = 0.72$.

optimum est trouvé pour une puissance intermédiaire, entre une zone de faible puissance où le système ne réagit pas, et une zone de forte puissance où la rétroaction engendre des instabilités de forte amplitude. Il est à noter que pour de faibles valeurs de ϵ , cet optimum est assez large. Quand ϵ augmente, la plage où la rétroaction est satisfaisante se réduit. Un exemple de contrôle est illustré sur les figures 3, où sont reportés: (a) le signal temporel: on y remarque une forte diminution de l’amplitude, lorsque le contrôle est appliqué. (b) le spectre fréquentiel des états avec/sans contrôle: l’atténuation apparaît clairement, notamment autour de la fréquence initialement dominante. (c) la construction d’un attracteur dans un pseudo-espace des phases, obtenu en reportant le signal temporel sur 3 axes (x,y,z) aux instants $t, t + dt$ et $t + 2dt$. L’attracteur en pointillés représente l’état non-contrôlé, et celui en trait plein l’état contrôlé. On obtient des rapports de puissance (carré de l’amplitude) entre 0.01 et 0.1 jusqu’à $\epsilon=0.85$.

Il est à noter que le terme non-linéaire dans (1) s’avère de plus en plus important au fur et à mesure qu’on augmente ϵ : en d’autres termes, le rapport optimal G_3/G_1 est croissant avec ϵ . Ainsi, plus on s’éloigne du seuil, plus un simple contrôle proportionnel linéaire échoue à atténuer les oscillations. Un tel contrôle a été possible sur une large gamme de ϵ , relativement loin du seuil. Au delà d’un certain ϵ (autour de 0.95), la rétroaction donnée par la loi (1) échoue à contrôler. Il est alors nécessaire de recourir à une loi de rétroaction différente, combinaison d’un terme proportionnel et d’un terme dérivatif, qui donne des résultats satisfaisants jusqu’à $\epsilon=1.10$ [3].

3.3 Synchronisation d’états chaotiques

L’action d’une rétroaction ne permet pas d’atténuer l’amplitude des fluctuations significativement. Néanmoins, il a été possible de synchroniser un état chaotique vers un état quasiment périodique. Une illustration est donnée par les figures 4. Cette synchronisation nécessite une certaine configuration de sensors/heaters: les deux sensors sont disposés à $\pi/2$ l’un de l’autre, les deux heaters à $\pi/3$ l’un de l’autre. D’autre part, la loi de rétroaction est donnée par (1) avec $G_3 = 0$, une rétroaction complètement linéaire. On peut alors tenter d’interpréter cette synchronisation comme suit: en utilisant les fluctuations en opposition de phase, du mode chaotique où domine encore un mode 2, on en réinjecte un signal similaire sur les deux heaters placés de telle sorte qu’ils vont exciter un mode de structure spatiale différente (mode 3), qui lui est plus stable que le mode 2. L’interprétation d’un mode différent excité est compatible avec l’apparition d’une nouvelle fréquence sur le spectre contrôlé, différente de celle du mode 2. A noter que les mesures d’exposants de Lyapunov (autour de 2 dans un état chaotique, et autour de 0.1 dans l’état

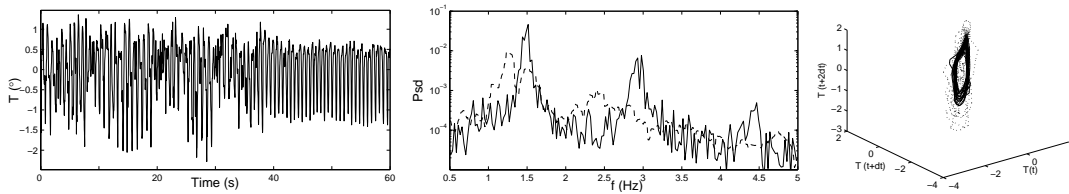


FIG. 4 – Synchronisation d'état chaotique. $\Delta T = 43.1^\circ$; $\epsilon = 1.53$.

contrôlé) confirment cette synchronisation.

4 Conclusion

Les résultats obtenus sur le contrôle d'instabilités thermoconvectives loin du seuil sont significatifs et prometteurs: il existe à l'heure actuelle peu d'exemples d'un tel contrôle, simple, mené sur un système expérimental. Les principaux enseignements à tirer de tels résultats sont:

- La géométrie de la cuve cylindrique constitue un système adéquat pour étudier les bifurcations successives d'un écoulement thermocapillaire, et les contrôler. L'écoulement convergent est plus instable vis à vis des bifurcations secondaires, et fait apparaître un mode dominant différent de celui de la géométrie divergente.

- La nécessaire complexification de la loi de rétroaction lorsque ϵ augmente (ajout de termes non-linéaires, puis dérivatifs), est une première étape vers un contrôle dit 'optimal', décrit théoriquement dans l'article précurseur de Ott, Grebogy et Yorke [10].

- Une synchronisation du chaos vers a été obtenue de la manière suivante: en puisant l'énergie des fluctuations du mode dominant instable, et en la réinjectant pour permettre le développement d'un mode spatial différent, qui est plus stable.

Références

- [1] J. Shiomi and G. Amberg, *Phys. Fluids* **14**, 3039–3045 (2002).
- [2] L. Torres, J. Shiomi and G. Amberg, *J. Cristal Growth Submitted* (2003).
- [3] P. Brunet, G. Amberg and P.H. Alfredsson, *Submitted to Phys. Fluids* (2005).
- [4] C. Normand, M. Velarde and Y. Pomeau, *Rev. Mod. Phys.* (1977).
- [5] I. Ueno, S. Tanaka and H. Kawamura, *Phys. Fluids* **15**, 408–416 (2003).
- [6] T. Ondarucu et al., *Phys. Rev. E* **48**, 1051–1057 (1993).
- [7] S.H. Davis, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **19**, 403–435 (1987).
- [8] J. Shiomi et al., *J. Fluid Mech.* **496**, 193–211 (2003).
- [9] Y. Kamotani, J.H. Lee, S. Ostrach and A. Pline, *Phys. Fluids* **4**, 955–962 (1992).
- [10] E. Ott, C. Grebogi and J.A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196–1199 (1990).
- [11] V. Petrov et al., *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3779–3782 (1996).

Défauts spectro-temporels associés à une instabilité de dérive dans les Lasers à Electrons Libres

S. Bielawski¹, C. Szwaj¹, C. Bruni², G. L. Orlandi², D. Garzella², M.E. Couprie², M. Hosaka³, A. Mochihashi³, Y. Takashima³, M. Katoh³

1) *PhLAM/CERLA, Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq, France.*

2) *LURE-CEA/DSM/DRECAM/SPAM, Bât. 522, 91191 Gif-sur-Yvette, France.*

3) *UVSOR, Institute of Molecular Science, 444-8585 Okazaki, Japan.*

`christelle.bruni@phlam.univ-lille1.fr`

Résumé

Nous montrons qu'un effet de dérive peut induire une instabilité caractérisée par des défauts spectro-temporels, dans les systèmes présentant une structure localisée en espace. Cet effet est observé numériquement et expérimentalement dans les lasers à électrons libres de super-ACO (Orsay, France) et de UVSOR (Okazaki, Japon). Nous considérons un modèle élémentaire de diffusion-convection (Ginzburg-Landau avec advection et une région supercritique localisée) qui reproduit l'apparition des défauts spectro-temporels dus à la convection. Ceci suggère que la généralité du phénomène dépasse celle des lasers impulsions.

1 Introduction

Les structures apparaissant dans un système spatiotemporel peuvent présenter un effet de dérive lorsque la symétrie de réflexion est brisée. En augmentant le paramètre v , contrôlant la vitesse de dérive, des phénomènes tels que les instabilités convectives [1] et les structures entretenues par le bruit [2] peuvent apparaître. Généralement ces phénomènes sont étudiés dans des systèmes spatiotemporels possédant un couplage local (diffusion, dispersion) [3, 4, 5] et/ou une solution non localisée. Toutefois, il existe des situations plus complexes lorsque la formation de l'onde est localisée dans une région de l'espace et/ou lorsque le couplage est différent des cas typiques de diffusion et de dispersion (e. g. couplage global). Ces situations apparaissent dans des contextes différents comme en hydrodynamique [6], en physique des plasmas [7], en chimie [8], en optique [9, 10, 11] ou en biologie [12].

Nous considérons l'effet de l'advection en présence d'une solution localisée, en nous concentrant sur les premiers régimes qui apparaissent lorsque la vitesse de dérive augmente. Dans un premier temps, le Laser à Electrons Libres (LEL) est étudié de façon numérique et expérimentale [13, 14]. Ceci va nous permettre de mettre en évidence la présence d'une instabilité de dérive associée à des défauts dans l'espace de Fourier. Dans un deuxième temps, le caractère dual de cette instabilité est aussi mis en évidence pour un modèle de type Ginzburg-Landau, montrant ainsi la généralité de ce type de comportement.

2 Défauts spectro-temporels observés dans les LEL

2.1 Modèle en champ d'un LEL sur anneau de stockage

L'évolution de l'impulsion d'un LEL basé sur un anneau de stockage [15, 16] obéit aux équations de Haus [17, 18, 19, 10], utilisées couramment pour modéliser les lasers à

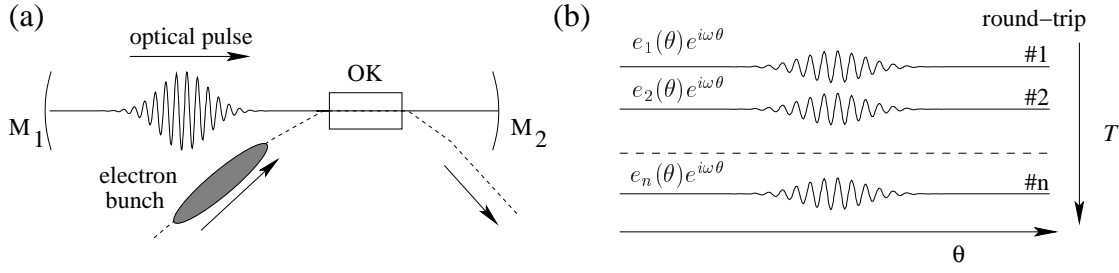


FIG. 1 – a) Dispositif expérimental d'un LEL basé sur un anneau de stockage. L'onde est constituée d'une impulsion optique (de quelques picosecondes de durée), qui effectue des aller-retour entre deux miroirs M_1 et M_2 . A chaque passage, l'impulsion est amplifiée de par l'interaction avec le paquet d'électrons relativistes dans un klystron optique (KO). b) Illustration de l'approche utilisée pour la modélisation : le profil de l'enveloppe complexe du champ $e_n(\theta)$ est considéré à chaque passage, et prend en compte la limite continue $n \rightarrow T$

blocage mode. Ce modèle décrit, à chaque tour, l'évolution des enveloppes successives du champ complexe $e_n(\theta)$, θ étant la coordonnée longitudinale (temporelle) de l'impulsion (cf. Figure 1). Le LEL sur anneau de stockage peut donc être considéré comme un système spatio-temporel pour lequel θ et n représentent respectivement l'espace et le temps. En passant à un temps continu $n \rightarrow T$ [17], et en tenant compte des particularités du gain d'un tel système, l'évolution de $e(\theta, T)$ obéit à l'équation sans dimension :

$$e_T + ve_\theta = -e + g(T)f(\theta)(e + e_{\theta\theta}) + \sqrt{\eta}\xi \quad (1)$$

Le temps lent T , associé au nombre de tours, est exprimé en temps de vie du champ (de l'ordre de la microseconde). Le temps rapide θ , résolvant l'impulsion, est exprimé en unité de $t_u = \pi/\sqrt{2}\Delta\omega_g$ (échelle de temps sub-picoseconde) avec $\Delta\omega_g$ la largeur spectrale du gain. L'opérateur de diffusion est dû à la largeur spectrale finie du gain. Le terme de dérive ve_θ provient du désaccord entre le temps d'aller retour de l'onde optique et la période de passage des électrons dans la cavité optique. Le désaccord v est le paramètre de contrôle principal du système et peut prendre des valeurs positives ou négatives. $f(\theta)$ caractérise la forme du gain, due à la distribution longitudinale des électrons de largeur rms σ_b . L'effet de l'émission spontanée est pris en compte par le terme de bruit blanc $\xi(\theta, T)$ avec $\langle \xi^*(\theta', T')\xi(\theta, T) \rangle = \delta(\theta - \theta')\delta(T - T')$. Le niveau de bruit est contrôlé par le paramètre η . Le gain $g(T)$ dépend des caractéristiques de l'accélérateur et des éléments d'insertion et il peut s'exprimer simplement de la façon suivante [20, 21]:

$$g(T) = \frac{A}{\sigma(T)} \exp [-(\sigma^2(T) - 1)/2] \quad (2)$$

$$\text{Avec } \frac{d\sigma^2}{dT} = \frac{1}{T_s} \left(1 - \sigma^2 + \int_0^L |e(\theta, T)|^2 d\theta \right) \quad (3)$$

Le gain dépend de la variable σ liée à la saturation (désignée plus communément sous le nom "chauffage du paquet"), qui est la dispersion en énergie normalisée à sa valeur lorsque le laser est éteint. A est le gain maximum, normalisé aux pertes de la cavité optique, qui doit être supérieur à l'unité pour permettre au laser de démarrer. L'équation (3) traduit la relaxation de σ^2 ainsi que son augmentation due au chauffage du paquet par le laser. Le temps de relaxation T_s est donné par le temps d'amortissement synchrotron normalisé au temps de vie des photons ($T_s \gg 1$). L est le taux de répétition en unité de t_u .

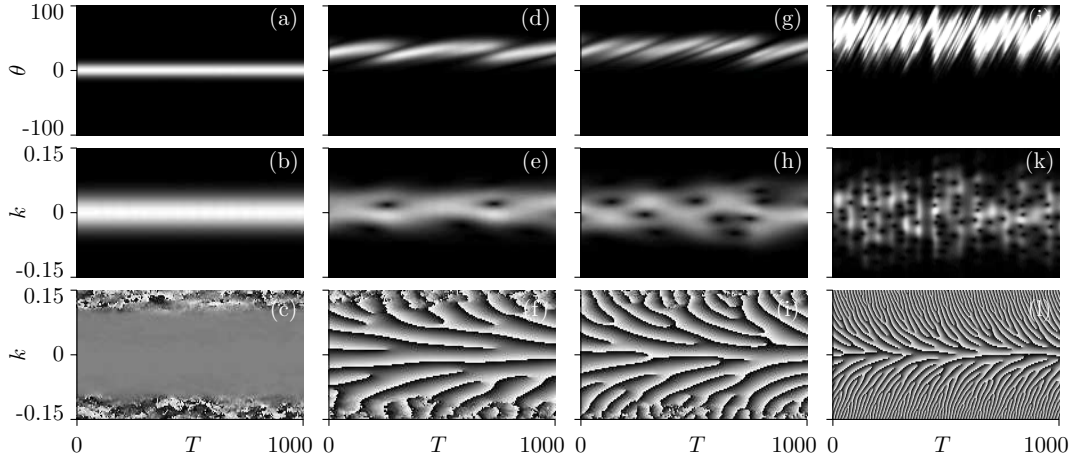


FIG. 2 – Solutions numériques du modèle du LEL (eq. 1-3) en fonction du paramètre de dérive v . La première ligne (a, d, g, j) représente la forme de l'impulsion $|e(\theta, T)|^2$ en fonction du temps T . L'évolution de la transformée de Fourier spatiale $\tilde{e}(k, T)$ est illustrée en dessous chaque régime : la deuxième ligne et troisième ligne représentent respectivement l'amplitude $|\tilde{e}(k, T)|^2$ et la phase $\text{Arg}[\tilde{e}(k, T)]$. a, b, c) $v = 0$, d, e, f) $v = 0.5$, g, h, i) $v = 0.7$, j, k, l) $v = 3.4$.

Dans la suite, nous utilisons des paramètres typiques du LEL de Super-ACO : $1/T_s = 0.0047$, $\sigma_b = 862$, $A = 4.5$, $t_u = 80$ fs, $\eta = 10^{-5}$ et l'unité de T est de 120 ns.

La figure 2 présente les différents régimes observés lorsque le désaccord est augmenté. Dans le cas d'un accord parfait ou proche de cet accord parfait, le laser présente une impulsion unique (cf. Figure 3a). Au-delà d'un certain seuil de désaccord ($v = \pm 0.17$), on observe une bifurcation qui crée des sous-structures qui dérivent (cf. Figure 3d,g). Une structure dérive lentement et est remplacée par une nouvelle. En augmentant le désaccord, le nombre de sous-structures croît. Pour de grandes valeurs de désaccord, la solution est une structure entretenue par le bruit (cf. Figure 3j), similaire à celle étudiée par Morgner et Mitschke et par Geddes *et al.* dans le cas des laser à blocage de modes actif [9, 10]. Concentrons nous, à présent, sur les régimes apparaissant juste avant la première transition afin de mettre en évidence le mécanisme de l'instabilité. L'intégration de ce modèle de LEL montre que l'instabilité de dérive, induit par le terme d'advection, est systématiquement associé à l'apparition de défauts spectro-temporels. Ils sont caractérisés par des trous dans l'amplitude de la distribution $|\tilde{e}(k, T)|$ (cf. Figure 3b,e,h,k), associés à des singularités de phase (cf. Figure 3c,f,i,l). La présence de cette instabilité semble expliquer le fait que le LEL possède la plus fine largeur spectrale et la plus petite largeur d'impulsion à l'accord parfait [22].

2.2 Observation expérimentale des défauts spectro-temporels

Afin de vérifier ces prédictions, nous avons réalisé une analyse spectro-temporelle sur le LEL de Super-ACO à 350 nm. Les enregistrements dans l'espace direct de l'intensité $|e(\theta, T)|^2$ sont réalisés par une caméra à double balayage de fente (Hamamatsu C5680). Les spectro-chronogrammes de $|\tilde{e}(k, T)|^2$ sont obtenus avec un étalon Fabry-Pérot, sur lequel est focalisé le laser, suivi d'une barrette CCD (128 pixels, 33000 lignes/s). La figure 3 représente les images temporelles et spectrales pour quatre paramètres typiques. Le

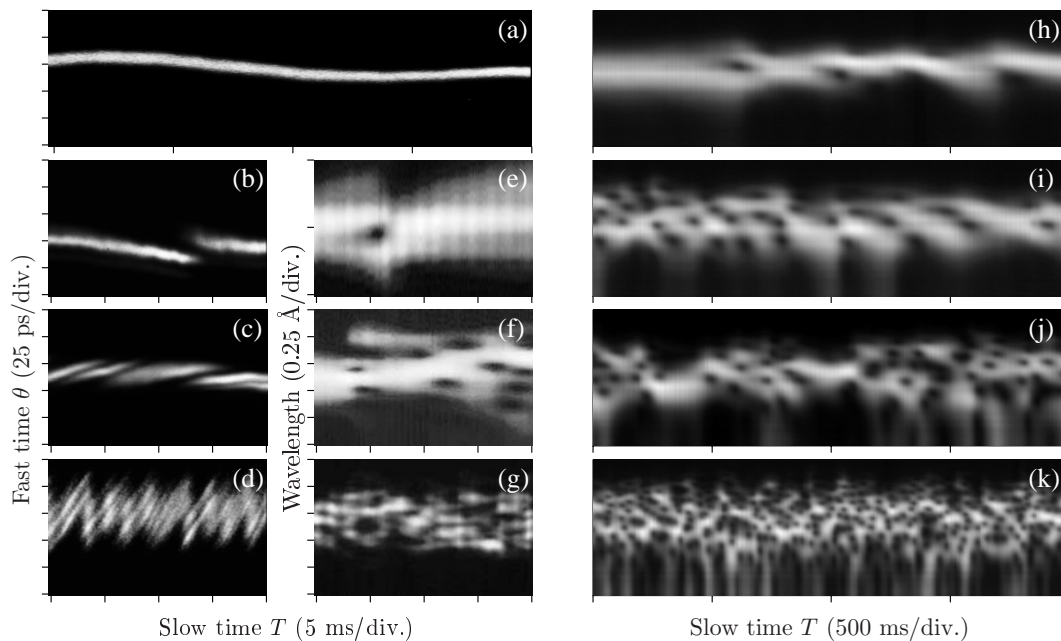


FIG. 3 – a) Résultats expérimentaux obtenus sur le LEL de Super-ACO : a-d) Évolution de la forme de l’impulsion $|e(\theta, T)|^2$ enregistré avec une caméra à double balayage de fente, e-g) Évolution du spectre $|\bar{e}(k, T)|^2$ associé aux figures b-d. a) cas de l’accord parfait $\nu \approx 0$ pour lequel la fréquence de la cavité RF est ν_0 , b, e) $\nu = \nu_0 - 0.5\text{Hz}$, c, f) $\nu = \nu_0 + 1.5\text{Hz}$, d, g) $\nu = \nu_0 + 3\text{Hz}$. h-k) Spectrochronogrammes expérimentaux obtenus sur le LEL de UVSOR pour différents paramètres de dérive.

désaccord est contrôlé par la fréquence de la cavité RF, servant à compenser les pertes d’énergie par rayonnement synchrotron des électrons par tour.

La figure 3a montre une impulsion sans qq sous-structure autour de l’accord parfait [23]. Lorsque le désaccord dépasse un certain seuil, on observe une transition qui mène à la dérive des structures. Pour de plus grande valeur de désaccord, le LEL présente des structures entretenues par le bruit. Quant aux spectro-chronogrammes, ils montrent des trous d’intensité nulle comme il a été prédit par le modèle.

Les résultats expérimentaux et numériques mettent en évidence que ce comportement a un caractère dual :

- dans l’espace des intensités, il présente des dérives dues au terme d’advection,
- dans l’espace de Fourier, il présente des défauts.

Les figures 3(h-k) présentent des spectro-chronogrammes obtenus sur le LEL de UVSOR, montrant ainsi la généralité de cette instabilité au sein du LEL.

3 Défauts spectro-temporels observés sur un modèle de type Ginzburg-Landau

Dans cette partie, nous allons étudier un modèle de type Ginzburg-Landau réel avec une dépendance spatiale parabolique “lente” du gain, ce qui assure l’existence d’une solution localisée. On a considéré les cas d’une saturation du gain par un couplage local et global :

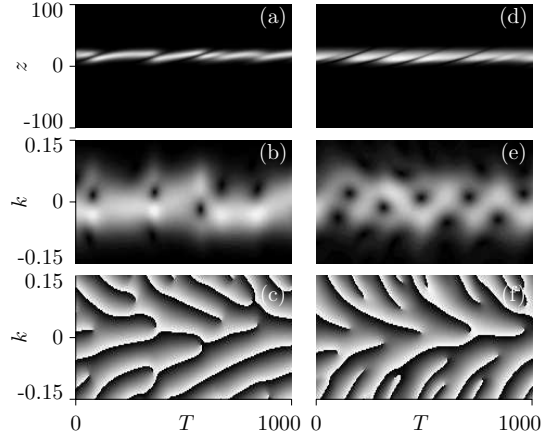


FIG. 4 – Intégration numérique des équations de Ginzburg-Landau avec une non uniformité spatiale et un terme d’advection. *a-c*) cas du couplage global (S donné par l’eq. 6), $v = 0.6$, $\epsilon = 0.0012$, $R = 4$. *d-f*) cas du couplage local (S donné par l’eq. 5), $v = 0.6$, $\epsilon = 0.01$, $R = 0.04$. *a, d*) $|e(z,T)|$, *b, e*) $|\tilde{e}(k,T)|$, *c, f*) $\arg[\tilde{e}(k,T)]$.

$$e_T + ve_z = e_{zz} + R(1 - \epsilon^2 z^2)e - S + \sqrt{\eta}\xi, \quad (4)$$

$$\text{avec } S = |e|^2 e \quad (5)$$

$$\text{ou } S = e \int_{-\infty}^{+\infty} |e|^2 dz, \quad (6)$$

et $\epsilon \ll 1$. La valeur de ϵ a été variée afin de garder une largeur d’impulsion comparable à celle du LEL. Ce modèle a été intégré pour diverses valeurs des paramètres de contrôle (v , ϵ , R). On trouve que toutes les caractéristiques discutées précédemment sont reproduites au-delà d’un certain seuil pour v (cf. Fig. 4).

4 Conclusion

Les systèmes localisés avec advection peuvent présenter une instabilité caractérisée par une instabilité de dérive dans l’espace direct et des défauts dans l’espace de Fourier. Les instabilités apparaissent pour des vitesses d’advection bien plus basse que celles donnant lieu à des structures entretenues par le bruit. Les expériences réalisées sur les LEL ont mis en évidence la présence de trous dans les diagrammes spectro-temporels. Des études préliminaires sur des équations de type Ginzburg-Landau montrent que ce phénomène est susceptible d’affecter des systèmes ayant une solution localisée par couplage global ou local.

Références

- [1] P. Huerre, P. A. Monkewitz, *Local and global instabilities in spatially developing flows*, Ann. Rev. Fluid Mech., **22**, 473, (1990).
- [2] R. J. Deissler, Physica D, **25**, 233, (1987).
- [3] K. L. Babcock, G. Ahlers, D. S. Cannell, Phys. Rev. E, **50**, 3670, (1994).
- [4] M. C. Cross, P. C. Hohenberg, *Pattern formation outside of equilibrium*, Rev. Mod. Phys., **65**, 851, (1993).
- [5] E. Louvergneaux, C. Szwej, G. Agez, P. Glorieux, M. Taki, *Experimental evidence of absolute and convective instabilities in optics*, Phys. Rev. Lett., **92**, 043901, (2004).
- [6] F. Hayot, Y. Pomeau, *Turbulent domain stabilization in annular flows*, Phys. Rev. E, **50**, 2019, (1994).
- [7] B. Bruhn, B.-P. Koch, P. Jonas. *Amplitude equation at ionization instability and the onset of turbulence in a neon glow discharge*, Phys. Rev. E, **58**, 3793–3805, (1998).
- [8] V. K. Vanag, Y. Lingfa, M. Dolnik, A. M. Zhabotinsky, I. R. Epstein. *Oscillatory cluster patterns in a homogeneous chemical system with global feedback*, Nature, **406**, 389, (2000).
- [9] U. Morgner, F. Mitschke. *Drift instabilities in the pulses from cw mode-locked lasers*, Phys. Rev. E, **58**, 187, (1998).
- [10] J. B. Geddes, W. J. Firth, K. Black. *Pulse dynamics in an actively mode-locked laser*, SIAM J. applied dynamical systems, **1**, 647, (2003).
- [11] S. Coen, M. Tlidi, Ph. Emplit, M. Haelterman. *Convection versus dispersion in optical bistability*, Phys. Rev. Lett, **83**, 2328, (1999).
- [12] J. von Hardenberg, E. Meron, M. Shachak, Y. Zarmi. *Diversity of vegetation patterns and desertification*, Phys. Rev. Lett., **87**, 198101, (2001).
- [13] M. Billardon et al., Phys. Rev. Lett., **51**, 1652, (1983).
- [14] G. Dattoli and A. Renieri et A. Torre, *Lectures on the free electron laser and related topics*, World Scientific Publishing (1993).
- [15] P. Elleaume. *microtemporal and spectral structure of storage ring free-electron lasers*, IEEE J. Quantum Electron., **21**, 1012, (1985).
- [16] G. Dattoli, T. Hermsen, A. Renieri, A. Torre, Gallardo. Phys. Rev. A, **37**, 4326, (1988).
- [17] H. A. Haus. *A theory of forced mode locking*, IEEE J. Quantum Electron., **11**, 323–330, (1975).
- [18] A. M. Dunlop, W. J. Firth, D. R. Heatley, E. M. Wright. Opt. Lett., **21**, 770, (1996).
- [19] N. Joly, S. Bielawski. *Suppression of Q-switch instabilities by feedback control in passively mode-locked lasers*, Opt. Lett., **26**, 692–694, (2001).
- [20] G. De Ninno, D. Fanelli, C. Bruni, M.-E. Couprie. *Chaotic dynamics in a storage ring free-electron laser*, Eur. Phys. J. D, **22**, 269–277, (2003).
- [21] S. Bielawski, C. Bruni, G. L. Orlandi, D. Garzella, M. E. Couprie. *Suppression of the pulsed regimes appearing in free-electron lasers using feedback control of an unstable stationary state*, Phys. Rev. E, **69**, 045502 (R), (2004).
- [22] K. Kimura, J. Yamazaki, S. Takano, T. Kinoshita, H. Hama. *Gain narrowing of spectral and temporal widths of the uvsor fel*, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A, **375**, 62–66, (1996).
- [23] R. Roux et al., *The super-aco fel dynamics measured with a streak camera*, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A, **393**, 33–37, (1997).

Etude des effets d'inertie dans l'instabilité de Saffman-Taylor

Christophe Chevalier^{*}, Martine Ben Amar[†], Daniel Bonn[†] et Anke Lindner^{*}

^{*} *PMMH, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles,
10, rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France*

[†] *LPS, Ecole Normale Supérieure,
24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France
chevalc@ccr.jussieu.fr*

Résumé

Nous étudions l'instabilité de Saffman-Taylor, aussi nommée digitation visqueuse, dans de nouvelles conditions expérimentales où l'inertie ne peut plus être négligée. Les forces d'inertie se rajoutent donc aux forces capillaires et visqueuses qui rentrent classiquement en compte dans l'instabilité. Nous remarquons alors que, si l'inertie est suffisante, il est possible d'obtenir un élargissement des doigts qui va à l'opposé de la décroissance classique. Nous nous sommes intéressés aux observations en fonction de différents nombres caractéristiques. Une brève analyse théorique et les résultats expérimentaux montrent notamment l'importance d'un nombre de Reynolds modifié Re^* comme paramètre caractéristique : ce nombre permet d'obtenir une nouvelle courbe maîtresse empirique.

Abstract

We study the Saffman-Taylor or viscous fingering instability in new experimental conditions, where corrections due to inertia become important. In addition to capillary and viscous forces, inertia has thus to be taken into account in the total force balance. We note that, if inertia is sufficiently high, an inversion of the classical decrease of finger width with increasing velocity is obtained. We investigate the finger width as function of different dimensionless parameters. A short theoretical analysis together with our experimental results shows the importance of a modified Reynolds number Re^ : it allows for obtaining a new empirical master curve for high velocity.*

1 Introduction

L'instabilité de Saffman-Taylor a été largement étudiée comme un système modèle pour la formation de motifs mais aussi comme facteur limitant pour la récupération du pétrole [1, 2, 3]. L'instabilité se développe quand un fluide pousse un liquide plus visqueux dans un fin canal ou cellule de Hele-Shaw. Il se forme alors un motif en forme de doigt.

Classiquement, la largeur du doigt formé résulte de la compétition entre deux types de force : les forces capillaires qui tendent à élargir le doigt et les forces visqueuses qui tendent à l'amincir. Pour une expérience donnée, la largeur du doigt est ainsi déterminée par le nombre capillaire Ca . Dans la très grande majorité des études, des huiles très visqueuses étant utilisées, les forces d'inertie peuvent en effet être négligées.

Plus récemment, des études sur l'instabilité de Saffman Taylor ont été menées pour des fluides complexes comme les solutions de polymères [4, 5]. Ces solutions, à base d'eau, ont des viscosités proches de 1 mPa.s et lors de ces expériences, il n'est alors plus possible de négliger l'inertie à vitesse élevée. En parallèle, des corrections à la loi de Darcy (qui permet de décrire l'écoulement 2D dans la cellule de Hele-Shaw) ont été développées pour

prendre en compte l'inertie dans le cas de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz [6, 7, 8]. Ces nouveaux développements expérimentaux et théoriques nous ont donc conduits à envisager l'étude précise de l'instabilité de digitation pour les fluides newtoniens dans cette limite mal connue d'une inertie non négligeable.

Le papier est organisé de la manière suivante. Dans la section 2 nous rappellerons les équations de base de l'instabilité de Saffman-Taylor et les corrections à y apporter. Nous verrons dans la section 3 le protocole expérimental employé. Les résultats expérimentaux seront présentés dans la section 4. Nous concluons par un résumé dans la section 5.

2 Théorie

2.1 Présentation de l'instabilité "classique" de Saffman-Taylor

Nous étudions l'instabilité de Saffman-Taylor dans un canal aux grands rapports d'aspect ou cellule de Hele-Shaw (Fig. 1). La largeur W de la cellule est notamment choisie grande par rapport à l'épaisseur b . La cellule est remplie d'un fluide visqueux qui est ensuite poussé par de l'air. Les caractéristiques du fluide sont sa viscosité η , sa tension de surface γ et sa densité ρ . La viscosité et la densité de l'air sont négligées. Quand l'air

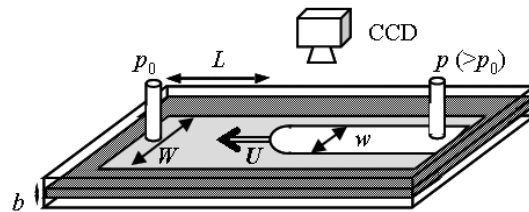


FIG. 1 – Schéma du montage expérimental.

pousse le fluide visqueux, l'interface est déstabilisée et, de manière générale, un doigt de largeur w et de vitesse U se forme.

L'écoulement est décrit à deux dimensions par le champ de vitesse \mathbf{u} moyenné sur l'épaisseur de la cellule. Les équations de base sont les suivantes :

$$\mathbf{u} = -\frac{b^2}{12\eta}\nabla p, \quad \Delta p = 0. \quad (1)$$

La première équation est la loi de Darcy et la seconde traduit l'incompressibilité du fluide. Par ailleurs, les conditions à l'interface sont :

- le saut de pression qui vérifie $\delta p = \gamma/R$ où R est le rayon de courbure,
- la continuité de la vitesse normale.

Pour caractériser la largeur des doigts, le paramètre de contrôle $1/B$, qui est un nombre capillaire modifié, se déduit des équations 1 et des conditions à l'interface:

$$1/B = 12 \left(\frac{W}{b}\right)^2 \frac{\eta U}{\gamma} = 12 \left(\frac{W}{b}\right)^2 Ca. \quad (2)$$

Quand la largeur relative des doigts est placée en fonction de $1/B$, tous les points expérimentaux se retrouvent sur une unique courbe maîtresse, décroissante et qui tend vers $1/2$ à vitesse élevée.

2.2 Introduction des effets d'inertie

Différents travaux sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz [6, 7, 8] mettent en évidence une équation de Darcy modifiée prenant en compte les effets d'inertie :

$$\rho(\alpha\partial_t\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) = -\nabla p - \frac{12\eta}{b^2}\mathbf{u}, \quad (3)$$

où α et β diffèrent selon les travaux, mais restent de l'ordre de 1.

Il est alors possible de construire, de manière analogue à l'obtention de $1/B$, deux nouveaux nombres caractéristiques : un Reynolds modifié Re^* et un Weber modifié We^* . Ils décrivent, à l'échelle de la cellule, l'influence relative des forces d'inertie par rapport aux forces visqueuses et par rapport aux forces capillaires respectivement :

$$We^* = \frac{\rho U^2 W}{\gamma} = \frac{W}{b} We, \quad Re^* = \frac{b}{W} \frac{\rho U b}{\eta} = \frac{b}{W} Re. \quad (4)$$

3 Dispositif expérimental

Nous avons travaillé dans une cellule de Hele-Shaw linéaire et horizontale constituée de deux plaques de verre séparées par un film de Mylar et serrées entre elles par des serre-joints (Fig. 1). Nous avons ainsi pu travailler avec différentes épaisseurs ($b = 0,25$ à $1,45$ mm) et largeur ($W = 4$ ou 8 cm) de cellule. Nous avons utilisé des huiles silicone Rhodorsil 47V02, 47V05, 47V10, 47V20, 47V100 de viscosité mesurée 2,8 , 5, 10, 20 et 100 mPa.s. La tension de surface et la densité des huiles données par Rhodia Silicones sont de : $\gamma = 19,5 \pm 1$ mN/m et $\rho = 0,93 \pm 0,02$ kg/L.

Les doigts, formés en appliquant un saut de pression constant entre l'entrée et la sortie de la cellule, ont été enregistrés à l'aide d'une caméra CCD connectée à un ordinateur via une carte d'acquisition National Instrument. Cela nous a permis de mesurer la largeur relative des doigts λ en fonction de leurs vitesses U . Pour chaque configuration (type de fluide et géométrie de cellule) de 10 à 20 expériences ont été menées, nous permettant de couvrir avec précision une grande étendue de vitesse.

4 Présentation des résultats : largeur relative des doigts

Nous allons, par la suite, nous intéresser à la largeur relative des doigts λ en fonction des différents paramètres caractéristiques de notre système.

Notons auparavant que nous avons testé la loi de Darcy moyennée loin du doigt $\mathbf{V} = -\frac{b^2}{12\eta}\nabla P$, où \mathbf{V} est la vitesse moyennée et ∇P le gradient de pression, et que celle-ci n'est pas modifiée par les effets d'inertie que nous allons observer par la suite.

4.1 Paramètre de contrôle classique $1/B$

Les figures 2 représentent la largeur relative des doigts en fonction du paramètre $1/B$ pour différentes viscosités à géométrie fixée (Fig. 2a) et pour différentes géométries de cellule avec un fluide donné (Fig. 2b). Nous observons que pour les faibles $1/B$, la largeur des doigts λ décroît de manière classique. Cependant, passée une certaine valeur du paramètre de contrôle $1/B_c$ (qui varie selon les configurations) λ augmente. Nous relierons cet effet surprenant aux "effets d'inertie" comme il apparaît pour des nombres de Reynolds élevés. Nous observons ainsi que nos résultats expérimentaux dévient de la

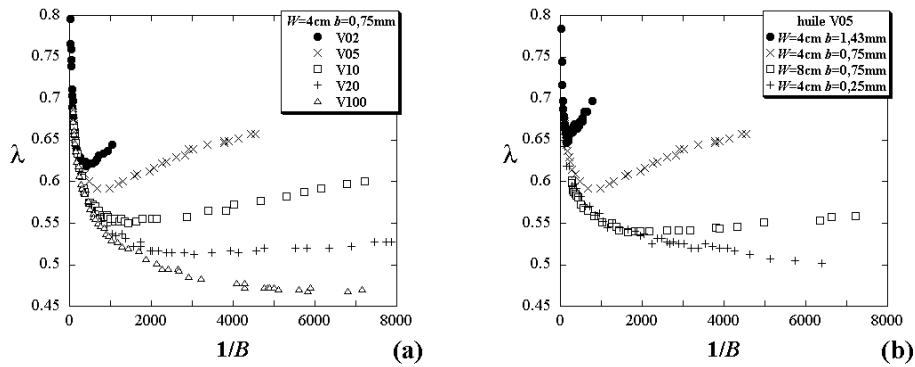


FIG. 2 – Largeur relative des doigts λ en fonction de $1/B$ à géométrie fixée (a) et pour un fluide donné (b).

courbe classique de Saffman-Taylor par une phase d'augmentation de la largeur des doigts. Cette augmentation intervient pour un paramètre $1/B_c$ d'autant plus petit que la viscosité est faible, que l'épaisseur du canal est grande ou que sa largeur est faible.

Nous allons, dans la suite, étudier la largeur relative des doigts en fonction de nombres caractéristiques faisant intervenir les forces d'inertie. Pour cela, nous nous concentrerons uniquement sur une seule géométrie ($W = 4$ cm; $b = 0,75$ mm). Les résultats sont cependant identiques pour toutes nos données.

4.2 Nombre de Reynolds modifié Re^*

La figure 3a présente les résultats en fonction du nombre de Reynolds modifié. Les données semblent se placer sur une unique courbe en fonction de $Re^* = \frac{b}{W} \frac{\rho U b}{\eta}$. Les observations dans les autres configurations sont en accord avec l'existence de cette courbe maîtresse en fonction de Re^* . Nous soulignons, notamment qu'il n'y a pas de tel collapse de données si on considère simplement le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho U b}{\eta}$.

4.3 Nombre de Weber modifié We^*

La figure 3b présente les résultats en fonction du nombre de Weber modifié. Toutes les courbes expérimentales semblent avoir un minimum commun aux alentours d'un Weber modifié critique We_c^* de l'ordre de 15. Considérant que $We^* = \frac{\rho U^2 W}{\gamma} = \frac{1}{12} Re^* \cdot 1/B$, ce résultat peut s'interpréter comme la séparation effective de deux cas limites :

- pour We^* petit ($We^* < We_c^*$), nous avons l'instabilité de Saffman-Taylor classique avec une décroissance de la largeur relative des doigts quand $1/B$ croît. Dans ce cas, la largeur est déterminée par l'importance relative des forces capillaires et des forces visqueuses, les forces capillaires tendant à élargir les doigts et les forces visqueuses à les amincir.
- pour We^* grand ($We^* > We_c^*$) nous avons une nouvelle courbe maîtresse où le paramètre de contrôle est le Reynolds modifié Re^* , la largeur des doigts augmentant avec ce dernier. Dans cette région, la largeur des doigts s'expliquerait principalement par la compétition entre forces visqueuses et forces d'inertie. Comme les forces visqueuses tendent à amincir les doigts, nous en déduisons que les forces d'inertie ont pour effet un élargissement des doigts.

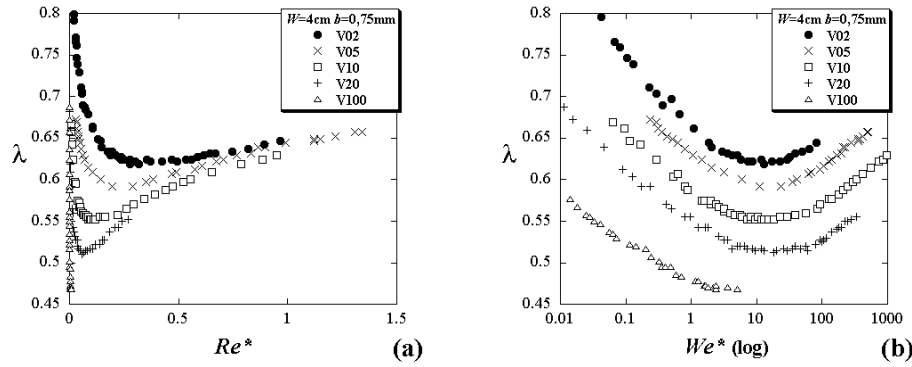


FIG. 3 – Largeur relative des doigts λ en fonction de Re^* (a) et de We^* (b).

4.4 Extension à une courbe maîtresse globale

La figure 3b semble présenter une symétrie en fonction de We^* , ce qui nous a incité à comparer la décroissance de la largeur des doigts λ en fonction de $1/B$ avec la croissance de λ en fonction de Re^* ou, plus précisément, avec sa décroissance en fonction de $1/Re^*$.

Définissons un nouveau paramètre de contrôle $1/B'$ prenant ce cross-over en compte :

$$1/B' = 1/B \left(\frac{1}{1 + We^*/We_c^*} \right). \quad (5)$$

Il est très simple de s'apercevoir que ce paramètre tend vers $1/B$ pour des petits We^* et est proportionnel à $1/Re^*$ pour des grands We^* .

La figure 4a présente λ fonction de $1/B'$. De manière surprenante, toutes les données se placent sur une seule courbe qui, de plus, est identique à la courbe maîtresse de Saffman-Taylor. Pour s'en convaincre, il suffit, par exemple, de considérer le fluide le plus visqueux.

La figure 4b présente l'ensemble de nos résultats en fonction de $1/B$ et de $1/B'$. Notons qu'il ne s'agit plus seulement que de faire varier la viscosité du fluide mais aussi la géométrie de la cellule : épaisseur et largeur. Nous observons ainsi que l'ensemble des données se replace de manière très satisfaisante sur une unique courbe maîtresse.

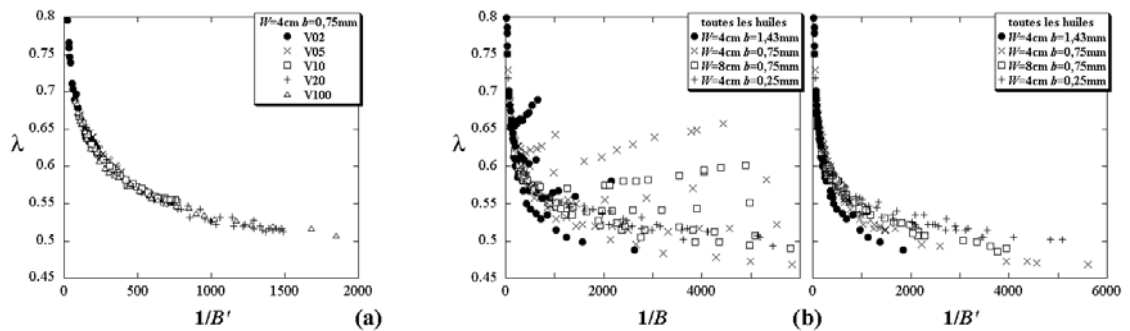


FIG. 4 – (a) Largeur relative des doigts λ en fonction de $1/B'$. (b) Aperçu de l'ensemble de nos données, fonction de $1/B$ et $1/B'$.

Nous pouvons, pour finir, nous interroger sur la structure de $1/B'$. Elle pourrait en effet s'interpréter par l'existence d'un paramètre effectif comme une tension de surface

modifiée de la forme $\gamma_{eff} = \gamma(1 + We^*/We_c^*) = \gamma + \frac{1}{We_c^*}\rho U^2 W$ qui prendrait alors en compte les effets similaires sur la taille des doigts (i.e. leur élargissement) de la tension de surface et de l'inertie.

5 Résumé et conclusion

Nous avons étudié, essentiellement à partir de l'expérience, les effets d'inertie dans l'instabilité de Saffman-Taylor. Ces effets deviennent importants pour des fluides de faible viscosité et des géométries de cellule à grande épaisseur et faible largeur. Pour ces configurations, on observe alors un élargissement possible des doigts à grande vitesse.

Nous avons introduit un nombre de Weber modifié We^* permettant d'établir un critère sur l'influence de ces effets.

Pour des We^* grands (supérieurs à un We_c^* estimé à 15), une augmentation de la largeur des doigts λ est ainsi observée avec des données se remplaçant sur une nouvelle courbe maîtresse en fonction d'un nombre de Reynolds modifié Re^* caractérisant l'influence relative des forces visqueuses et des forces d'inertie. Il apparaît également que les forces d'inertie tendent à élargir les doigts.

Nous avons finalement montré que l'on peut définir empiriquement un nouveau paramètre de contrôle $1/B'$ qui permet de prendre en compte les corrections dues à l'inertie. En plaçant nos données en fonction de ce nouveau paramètre, nous obtenons une unique courbe maîtresse qui correspond, de plus, à la courbe classique de Saffman-Taylor.

En conclusion, nous avons caractérisé expérimentalement l'instabilité de digitation pour les fluides newtoniens ayant une inertie non négligeable et nous avons montré empiriquement comment prendre ces corrections en compte.

Références

- [1] P.G. Saffman-Taylor et G.I. Taylor, *The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid*, Proc. R. Soc. Lond. A **245**, 312-329 (1958).
- [2] D. Bensimon, L.P. Kadanoff, S. Liang, B.I. Shraiman et C. Tang, *Viscous flows in two dimensions*, Rev. Mod. Phys. **58**, 977-999 (1986).
- [3] G.M. Homsy, *Viscous fingering in porous media*, Ann. Rev. Fluid Mech. **19**, 271-311 (1987).
- [4] D. Bonn, H. Kellay, M. Ben-Amar et J. Meunier, *Viscous fingering widening with surfactants and polymers*, Phys. Rev. Lett. **75**, 2132-2135 (1995).
- [5] A. Lindner, D. Bonn, E. Corvera Poiré, M. Ben-Amar et J. Meunier, *Viscous fingering in non-Newtonian fluids*, J. Fluid Mech. **469**, 237-256 (2002).
- [6] P. Gondret et M. Rabaud, *Shear instability of two-fluid parallel flow in a Hele-Shaw cell*, Phys. Fluids **9**, 3267-3274 (1997).
- [7] C. Ruyer-Quil, *Inertial corrections to the Darcy law in a Hele-Shaw cell*, C.R. Acad. Sci. Ser. Iib **329**, 337-342 (2001).
- [8] F. Plouraboué et A.J. Hinch, *Kelvin-Helmholtz instability in a Hele-Shaw cell*, Phys. Fluids **14**, 922-929 (2002).

Bruit et intermittence du transport électrique dans les milieux granulaires

M. Creyssels, E. Falcon et B. Castaing

Laboratoire de Physique, UMR 5672, Ecole Normale Supérieure de Lyon
46 allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France
mathieu.creysse@s-lyon.fr

Résumé

Nous nous intéressons à l'influence des effets collectifs de la matière granulaire sur ses propriétés électriques. Appliquons une tension électrique constante aux bornes d'une poudre métallique. Sous certaines conditions, l'évolution temporelle du courant qui la traverse est alors très bruitée [1, 2]. Nous montrons alors que ce bruit électrique (fluctuations temporelles de courant) possède d'intéressantes propriétés *d'invariance d'échelle* (sur 4 décades en temps) et *d'intermittence*, avec des similarités et des différences avec la turbulence hydrodynamique [2]. Ces étonnants phénomènes sont reliés aux effets collectifs de la matière granulaire.

1 Dispositif expérimental

Le milieu granulaire considéré est de la poudre de cuivre [3] constituée de grains quasi-sphériques de diamètre de l'ordre de $100\ \mu\text{m}$ (Fig. 2a). Un échantillon (3.5 grammes) est placé dans un cylindre de plexiglas, fermé par deux électrodes en laiton, le tout confiné dans un bâti en laiton (Fig. 1b). La hauteur de la poudre est d'environ 5 mm, correspondant à 500000 particules environ. Une pression mécanique pouvant atteindre $200\ \text{kg}/\text{cm}^2$ est appliquée à la poudre, que nous laissons relaxer pendant un jour, avant d'entreprendre les mesures électriques.

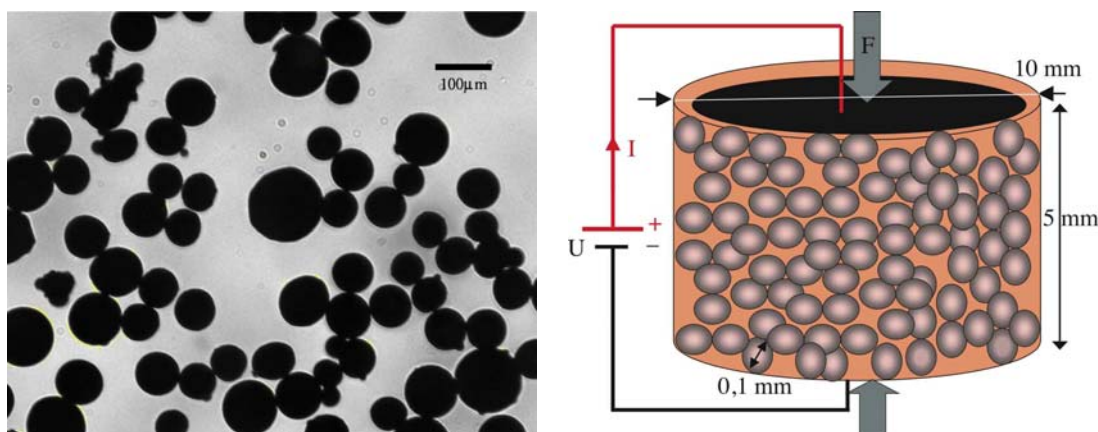


FIG. 1 – (a) Photo de la poudre de cuivre au microscope. (b) Schéma de l'expérience.

Une tension électrique (U) est appliquée à l'échantillon et nous mesurons le courant (I) le traversant ; sa résistance étant $R = U/I$. Deux fils peuvent être introduits à l'intérieur de la poudre pour vérifier que la résistance du massif n'est pas contrôlée par l'interface

poudre - électrode. Avant chaque nouvelle expérience, l'échantillon est remplacé avec de la poudre neuve. Cette procédure permet d'obtenir une meilleure reproductibilité qu'en ramenant simplement la pression à zéro et en secouant la poudre.

2 Caractéristique électrique : transition isolant - conducteur

A force F fixée et à faible tension, la résistance de la poudre est élevée ($R_0(F) \sim M\Omega$), du fait de la couche d'oxyde présente à la surface des particules. Lorsque U augmente, la caractéristique $R - U$ devient non linéaire (Fig. 2a). Au-delà d'une valeur critique U_c , une transition apparaît de cet état quasi-insolant vers un état conducteur. Si U est maintenant abaissée, la résistance de la poudre garde sa faible valeur¹. La tension critique U_c dépend de la force appliquée à la poudre. Cependant, le seuil de transition correspond toujours à la même puissance dissipée $P_c \equiv U_c^2/R_0 \sim 10^{-4}W$ quelle que soit la contrainte appliquée (Fig. 2b). Ceci suggère que la transition provient d'une instabilité thermique.

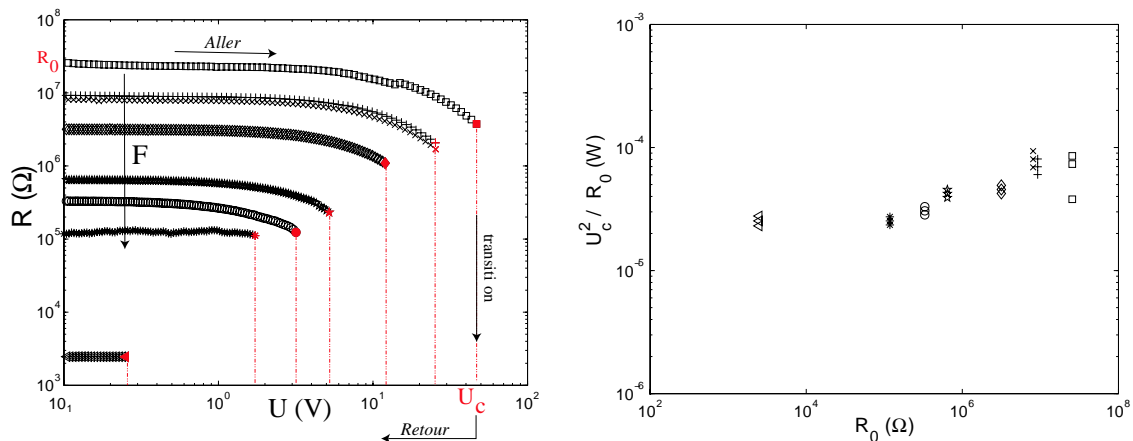


FIG. 2 – (a) Caractéristique résistance - tension pour de la poudre de cuivre soumise à différentes forces, F . A faible tension, la résistance est élevée et de valeur $R_0(F)$. Pour chaque F , une transition de l'état isolant à conducteur apparaît lorsque $U = U_c(F)$. Au delà de U_c , la résistance est faible. (b) La transition a lieu pour une puissance dissipée pratiquement constante $U_c^2/R_0 \sim 10^{-4} W$ sur 4 décades en R_0 .

3 Bruit et invariance d'échelle

Pour une tension appliquée telle que $P < P_c$, l'évolution temporelle du courant est relativement stable. En revanche, si $P > P_c$, le courant augmente brutalement (transition étudiée au §2) puis il continue à croître avec des fluctuations temporelles très importantes. Afin d'étudier ces fluctuations de courant, on le rend stationnaire en abaissant la tension appliquée à la poudre. Ainsi, on ralentit la croissance du courant (la tendance s'inverse même en dessous d'une certaine tension) tout en conservant son caractère très bruyé (voir encarts Fig. 3). Les outils usuels du traitement du signal (analyse spectrale) et ceux plus

1. Cette transition de conduction irréversible semble similaire à l'effet *Branly* continu précédemment étudié dans une chaîne de billes [4].

sophistiqués développés dans le cadre de la turbulence hydrodynamique peuvent alors être appliqués sur un tel bruit quasi-stationnaire dans ce système granulaire.

Les fluctuations de courant sont enregistrées à basse et à haute fréquence d'échantillonnage (respectivement à $f_b = 50$ Hz et $f_h = 330$ kHz) pendant 18 jours et 1 heure respectivement. La densité spectrale des fluctuations de courant est montrée sur la Fig. 3. Son comportement en loi de puissance sur quatre décades en fréquence ($0.1 \text{ Hz} < f < 1 \text{ kHz}$) est impressionnant. Cette invariance d'échelle est stoppée à basse fréquence par le temps de diffusion typique d'une perturbation thermique à l'intérieur de l'échantillon, estimé à 10 s. L'accord avec cet ordre de grandeur confirme là encore l'hypothèse d'un phénomène activé thermiquement. L'échantillon de poudre a aussi un comportement capacitif modélisé par une capacité en parallèle avec la résistance et $RC\omega \sim 1$ pour $\omega \sim 10^4$ Hz. On observe ainsi une coupure du spectre à haute fréquence.

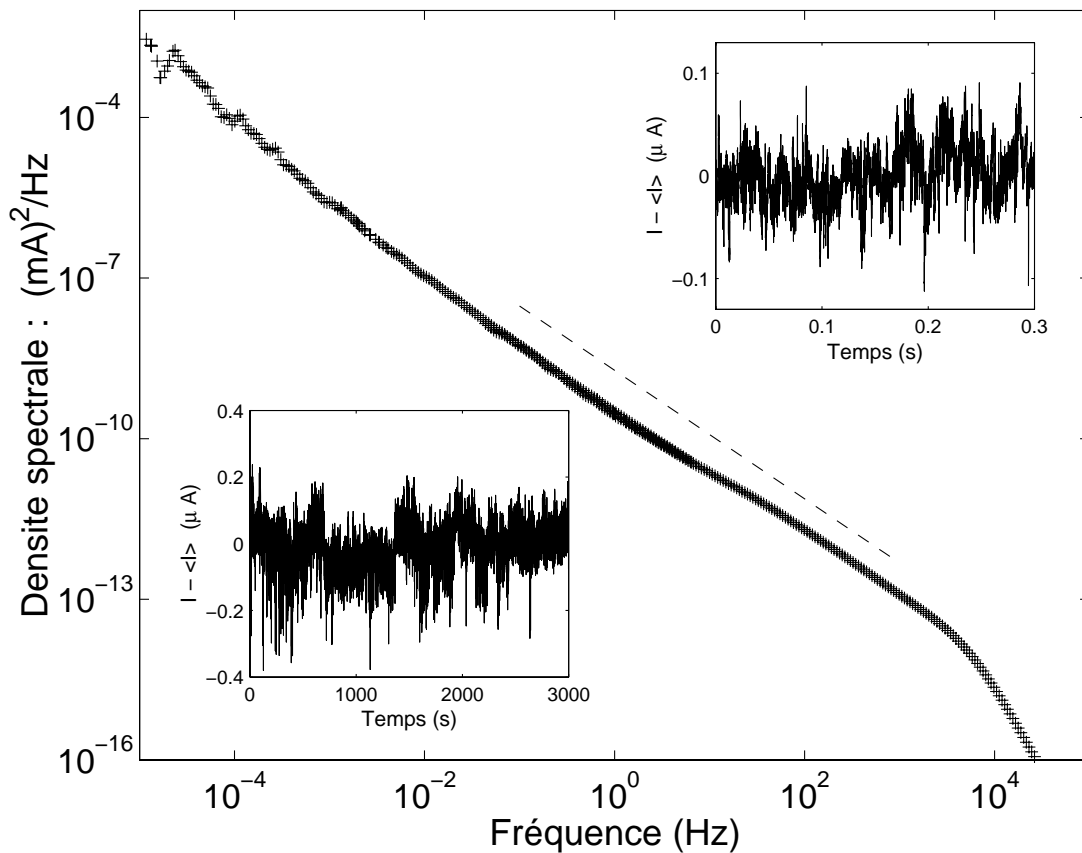


FIG. 3 – Densité spectrale des fluctuations de courant électrique. L'invariance d'échelle est observée sur 4 décades en fréquence. La droite en traits pointillés est de pente -1.2 correspondant à $f^{-1.2}$. Encarts: fluctuations typiques quasi-stationnaires du courant observées pendant 3000s (encart à gauche) et 0.3s (encart à droite); $R \sim 100 \text{ k}\Omega$ et $U \sim V$.

Pour comprendre l'origine du bruit observé, deux modélisations différentes du comportement électrique de la poudre apparaissent : les fluctuations de courant sont soit engendrées par l'analogie d'un générateur de courant placé en parallèle avec une résistance constante ; soit par la résistance même de la poudre qui fluctue avec le temps. Dans le premier cas, l'amplitude des fluctuations ne devraient varier guère avec la tension appliquée à l'échantillon tandis que dans le second cas, les fluctuations de courant provoquées par les

variations de résistance doivent être d'autant plus importantes que la tension est grande. La mesure précédente de la densité spectrale de ces fluctuations est alors réitérée pour diverses tensions appliquées. L'invariance d'échelle persiste et l'amplitude du spectre augmente avec U (Fig. 4a). La figure 4b montre la proportionnalité entre la densité spectrale des fluctuations et le carré de la tension appliquée. Cette observation valide le modèle de bruit de résistance : les fluctuations de courant observées sont provoquées par des variations de la résistance de la poudre au cours du temps.

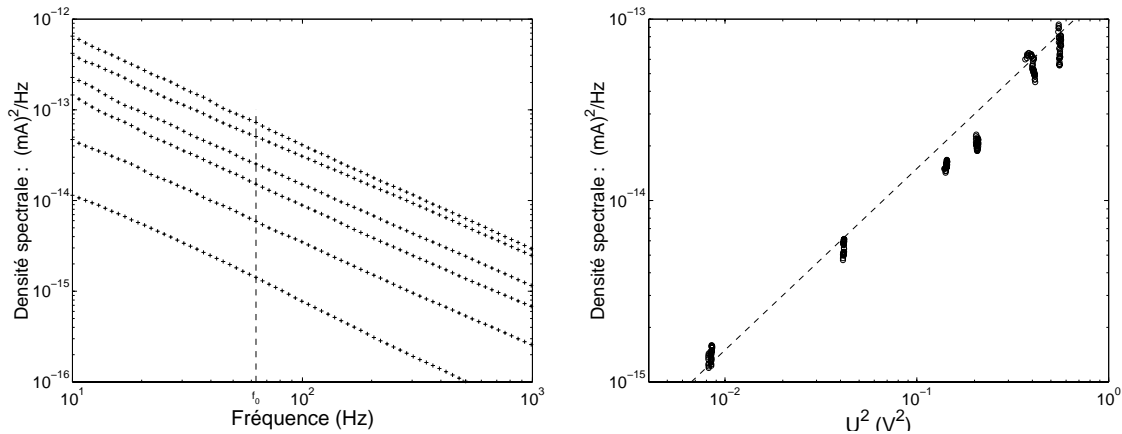


FIG. 4 – (a) Densités spectrales pour différentes tensions appliquées, U croît de bas en haut. (b) Amplitudes des densités spectrales mesurées à la fréquence $f_0 = 64\text{Hz}$ en fonction du carré de la tension appliquée à la poudre. La droite en traits pointillés est de pente 1.

4 Interprétation du bruit

Comme montré au §2, la puissance dissipée dans la poudre est le paramètre moteur de la transition isolant - conducteur. On peut penser que l'échauffement local entre grains change les propriétés électriques du contact, mais alors plusieurs centaines de degrés doivent être atteints [4]. La puissance dissipée à l'échelle d'un grain est tellement faible qu'il semble peu crédible qu'elle engendre des températures aussi élevées. Un autre mécanisme possible pour expliquer ce bruit fait intervenir un processus collectif de dilatation thermique des grains. La distribution des contacts dans la poudre est très inhomogène ce qui engendre aussi une distribution inhomogène des courants. Ainsi, l'échauffement local par effet Joule devrait modifier le réseau très inhomogène des forces au sein de la poudre. De très faibles dilatations thermiques des grains peuvent alors engendrer des changements dramatiques des lignes de courant, et donc de la distribution de ces échauffements locaux, et ainsi de suite. Ces dilatations peuvent intervenir à n'importe quelle échelle spatiale (de la taille du grain à la taille totale de l'échantillon) ce qui se traduit par un spectre fréquentiel ne présentant aucun pic caractéristique et une invariance d'échelle.

5 Intermittence

Le bruit observé précédemment possède une distribution d'amplitudes essentiellement gaussienne. Pour se rendre compte qu'il exhibe des variations sur une large gamme d'échelles de temps, il est plus pertinent d'étudier, en fonction d'un temps τ de séparation,

le comportement de l'incrément de courant $\delta I_\tau = I(t + \tau) - I(t)$. La figure 7a montre les fonctions de densité de probabilité (PDF) de ces incréments de courant pour trois échelles de temps testées. Notons d'abord que chaque PDF est symétrique. Les événements diminuant la résistance sont donc symétriques de ceux qui l'augmentent. Si on compare maintenant ces trois PDF, on remarque que leur forme change avec l'échelle de temps τ testée: ce phénomène est baptisé "intermittence". A temps long, la distribution des δI_τ tend vers une gaussienne, alors qu'aux petits τ , la queue se déforme. Les événements intenses (grandes valeurs de δI_τ) sont plus probables à petit temps qu'à temps long.

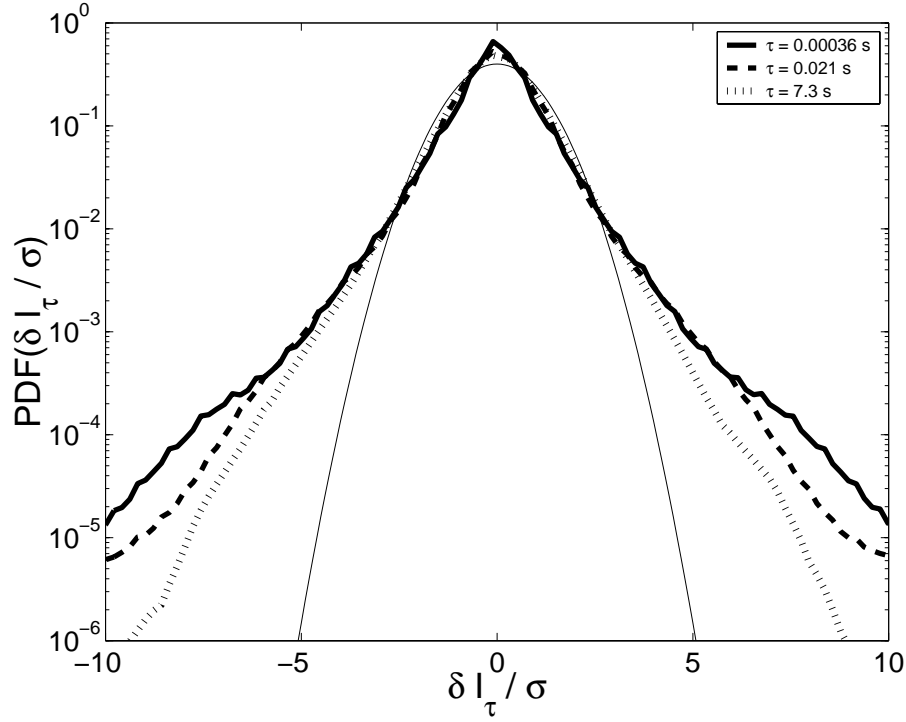


FIG. 5 – Fonctions de densité de probabilité (PDF) des incréments de courant δI_τ (normalisées par les écart-types σ) pour différentes échelles de temps testées. La courbe en trait plein représente la PDF de la gaussienne.

On définit la fonction de structure d'ordre n par: $S_n(\tau) = \langle [\delta I_\tau - \langle \delta I_\tau \rangle]^n \rangle$, où $\langle . \rangle$ représente une moyenne au cours du temps. Chaque PDF est centrée en zéro et normalisée par son écart-type $\sigma = \sqrt{S_2(\tau)}$. De plus, la distribution étant symétrique, la fonction de structure d'ordre 3, $S_3(\tau)$, est nulle. Pour caractériser l'évolution de l'intermittence à travers les échelles, la fonction de structure d'ordre 4 est étudiée ou traditionnellement, le coefficient d'aplatissement (flatness) défini par $S_4(\tau)/S_2(\tau)^2$.

La Fig. 6 montre que la flatness est une loi de puissance de l'échelle de temps testée τ . L'explication est la suivante. Les fluctuations de courant ne présentant aucune fréquence caractéristique dans la bande de 0.1 Hz - 1 kHz (Fig. 3.2), toutes les fonctions de structure $S_n(\tau)$ devraient être des lois de puissance de τ . Les encarts de la Fig. 6 montrent qu'en effet $S_2(\tau) \sim \tau^{\alpha_2}$ avec $\alpha_2 = 0.19$ et $S_4(\tau) \sim \tau^{\alpha_4}$ avec $\alpha_4 = 0.33$; et ainsi pour la flatness $S_4(\tau)/S_2(\tau)^2 \sim \tau^{\alpha_4 - 2\alpha_2}$. Par ailleurs, le fait que $\alpha_4 \neq 2\alpha_2$ est la signature de l'intermittence, la forme des PDF change donc avec τ (Fig. 7).

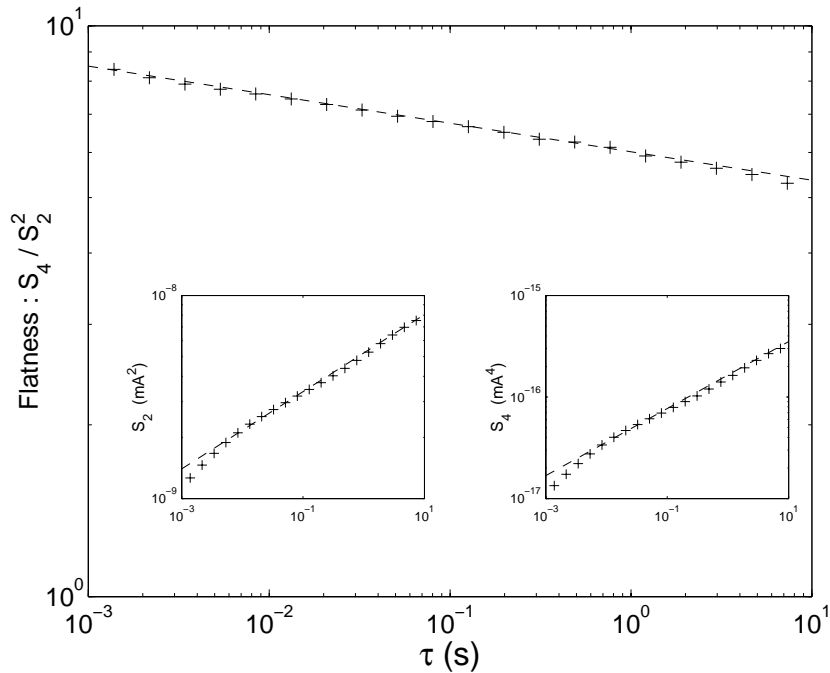


FIG. 6 – Flatness en fonction de l'échelle de temps τ testée. La droite en traits pointillés est de pente correspondant à $\tau^{-0.05}$. Encart à gauche: fonction de structure d'ordre 2, la droite en traits pointillés est de pente $\alpha_2 = 0.19$ ($S_2 \sim \tau^{0.19}$). Encart à droite: fonction de structure d'ordre 4, la droite en traits pointillés est de pente $\alpha_4 = 0.33$ ($S_4 \sim \tau^{0.33}$).

6 Conclusion et perspectives

Un échantillon de poudre de cuivre comprimée présente une résistance électrique élevée due à la couche d'oxyde présente sur les grains. Nous observons que ces caractéristiques courant - tension sont non linéaires et une transition apparaît vers un état conducteur à relativement faible tension appliquée. L'évolution temporelle du courant à travers la poudre est alors très bruitée et le bruit possède d'intéressantes propriétés d'invariance d'échelle et d'intermittence. La dissipation de la chaleur joue un rôle essentiel dans ce système. Un processus collectif de dilatation thermique créant et détruisant localement des contacts permet d'expliquer le bruit observé dans ce milieu granulaire. Une étude plus longue est en cours pour comprendre l'origine physique de l'intermittence.

Références

- [1] G. Kamarinos, A. Chovet, *Conducteurs granulaires, Proceedings SEE*, édité par E. Guyon (Palais de la Découverte, Paris) pp. 181-184, (1990).
- [2] E. Falcon, B. Castaing, C. Laroche, "Turbulent" electrical transport in Copper powders, *Europhys. Lett.* **65**, 186 (2004) — E. Falcon, B. Castaing & M. Creyssels, *Bull. SFP*. à paraître (2005).
- [3] *Goodfellow Product Catalogue*, site web du fabricant: <http://www.goodfellow.com/>
- [4] E. Falcon, B. Castaing, M. Creyssels, *Nonlinear electrical conductivity in a 1D granular medium*, *Eur. Phys. J. B*, **38**, 475 (2004).

Reconnexion de vortex contrarotatifs : effet du nombre de Reynolds

I. Delbende et M. Rossi.

Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI)

LIMSI-CNRS, BP 133, 91403 Orsay et

LMM- 4 Place Jussieu, 75252 Paris

`delbende@limsi.fr`

`maur@ccr.jussieu.fr`

Résumé

L'interaction entre deux vortex contrarotatifs conduit, à l'issue d'une instabilité de Crow, à un processus de reconnexion. Nous présentons des résultats de simulations numériques directes qui mettent en évidence l'effet du nombre de Reynolds sur cette dynamique. Des quantités pertinentes sont calculées, en particulier un taux de déformation lié à la courbure des vortex.

Abstract

The interaction between two counter-rotating vortices leads to a reconnection process after a Crow instability phase. We present here direct numerical simulation results showing the influence of the Reynolds number on this dynamics. Pertinent variables are computed, in particular a strain rate arising from the vortex curvature.

1 Introduction

La compréhension des changements de topologie dans les écoulements, en particulier de la reconnexion de vortex, est un point crucial de nombreuses études : comportements singuliers des équations de Navier–Stokes et d'Euler, dissipation [1, 2, 3]. Les processus de reconnexion sont également observés à grande échelle dans le contexte aérodynamique : les tourbillons contrarotatifs de bout d'aile sont déformés par l'instabilité de Crow. Lorsque l'amplitude des perturbations est suffisante, les deux vortex se reconnectent sous forme d'une série d'anneaux tourbillonnaires, potentiellement dangereuse. On se propose d'étudier, par la simulation numérique directe, ce processus intrinsèquement visqueux (la reconnexion étant interdite dans le cadre non visqueux de Helmholtz), et d'en tirer les mécanismes prépondérants dans le but d'une modélisation ultérieure. On se situe dans le sillage direct des travaux [1, 3, 4]. Cet article présente les premiers résultats dans ce sens.

2 Simulations directes de la reconnexion

2.1 Code numérique et conditions initiales

Le code numérique utilisé intègre les équations de Navier–Stokes par une méthode pseudo-spectrale en formulation vitesse/vorticité, les champs étant développés sur une base de Fourier dans les trois directions cartésiennes. L'avance en temps est effectuée par un schéma explicite Adams–Bashforth du second ordre pour les termes non linéaires, les termes visqueux étant intégrés exactement.

Les conditions initiales sont constituées de deux vortex de Lamb–Oseen contrarotatifs d’axe x , de circulations $\pm\Gamma_0$, espacés d’une distance L_0 , de rayon a_0 , que l’on déforme en leur superposant la perturbation définie plus loin. La vorticité $\mathbf{\Omega}$ de l’écoulement initial s’écrit comme la superposition de la vorticité des tourbillons rectilignes non perturbés :

$$\mathbf{\Omega}^b(y,z) = \frac{\Gamma_0}{\pi a_0^2} \left[\exp\left(-\frac{(y-L_0/2)^2+z^2}{a_0^2}\right) - \exp\left(-\frac{(y+L_0/2)^2+z^2}{a_0^2}\right) \right] \mathbf{e}_x$$

et d’une perturbation

$$\omega(x,y,z) = - \left(\pm \frac{\partial \Omega_x^b}{\partial y} \delta_y(x) + \frac{\partial \Omega_z^b}{\partial y} \delta_z(x) \right) \mathbf{e}_x \pm \Omega_x^b \frac{d\delta_y}{dx}(x) \mathbf{e}_y + \Omega_x^b \frac{d\delta_z}{dx}(x) \mathbf{e}_z,$$

Cette dernière est obtenue en deux étapes : la composante axiale ω_x correspond à un petit déplacement des vortex rectilignes de $(\pm\delta_y(x),\delta_z(x))$ dans le plan yz , avec + (resp. –) pour le tourbillon du demi-plan $y > 0$ (resp. $y < 0$). Les composantes ω_y et ω_z sont adaptées de manière à assurer que le champ de vorticité soit solénoïdal. Le problème est adimensionné à l’aide de la longueur L_0 et de la circulation Γ_0 . Dans la suite, on fixe $a_0/L_0 = 0.2$ et le seul paramètre adimensionnel est alors le nombre de Reynolds $Re = \Gamma_0/\nu$ où ν désigne la viscosité cinématique du fluide. Comme dans [6], le domaine de calcul est cubique, tri-périodique, sa taille est égale à la longueur d’onde du mode le plus instable de l’instabilité de Crow ($L_x = L_y = L_z = 7.3$). L’origine du repère est au centre du domaine. On vérifie que la périodicité dans les directions transverses y et z n’influe pas sur la dynamique rapportée ici. La déformation de l’axe des vortex $(\pm\delta_y(x),\delta_z(x))$ considérée est une approximation du mode de Crow, et l’on choisit $\delta_y(x) = \delta_z(x) = -A_0 \cos(2\pi x/L_x)$ avec $A_0 = 0.05$. Le plan d’approche maximale des tourbillons correspond à $x = 0$. Dans la suite, les dates seront données en temps de retournement initial $\tau_0 = 4\pi a_0^2/\Gamma_0 = 1.579$.

2.2 Effet du nombre de Reynolds

Les simulations ont été effectuées à différents nombres de Reynolds : $Re = 500, 1000, 1500, 2000$. Même s’il n’y a pas de transition franche, deux comportements différents sont observés.    haut nombre de Reynolds (e.g. $Re = 1500$, figure 1 gauche), la reconnexion se produit en quelques temps de retournement. Entre deux anneaux consécutifs se forme un pont de deux vortex contrarotatifs très concentrés, mais qui se dissipe rapidement. En revanche, à bas nombre de Reynolds (e.g. $Re = 500$, figure 1 droite), la reconnexion est plus lente, le pont semble constitué de deux vortex de taille comparable à la taille initiale a_0 , et persiste.

Pour $Re = 1500$, le maximum de vorticité dans le plan d’approche maximale $x = 0$ culmine vers $t = 15$ (figure 2a), alors que l’extension latérale (suivant y) a_y de chaque vortex dans le pont est minimale (figure 2b). Ce phénomène n’est pas observé à $Re = 500$, pour lequel la taille varie peu. Notons également que la vorticité dans le plan d’approche maximale $x = 0$ en fin de simulation est plus faible pour $Re = 1500$ que pour $Re = 500$. En effet, ce pont est dissipé, ce que l’on observe sur la chute de vorticité (figure 2a entre $t = 15$ et $t = 25$) et également sur la courbe de dissipation globale (non représentée).

3 Champ de déformation 3D et mécanismes

Dans une première approche, considérons, à la manière de [1] les taux de déformation dans le plan d’approche maximale $x = 0$. Ces quantités contiennent le champ de déformation 2D induit par le dipôle présent dans le plan $x = 0$ (figure 3). On observe

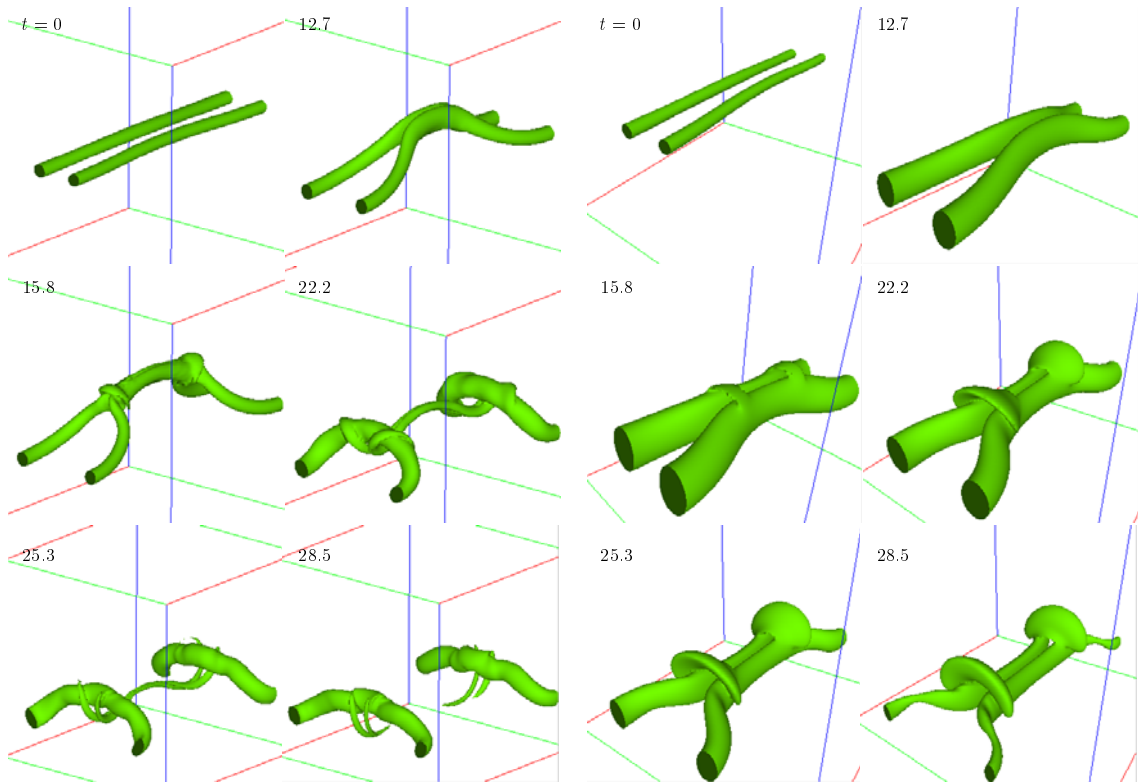


FIG. 1 – Isosurface de la vorticité totale lors de la reconnexion à $Re = 1500$ (à gauche) et à $Re = 500$ (à droite). Le niveau correspond à $\omega_{\max}/2$ sauf pour $Re = 500$ où il a été sciemment pris plus faible de $t = 12.7$ à $t = 25.3$ pour rendre plus visible la pontification.

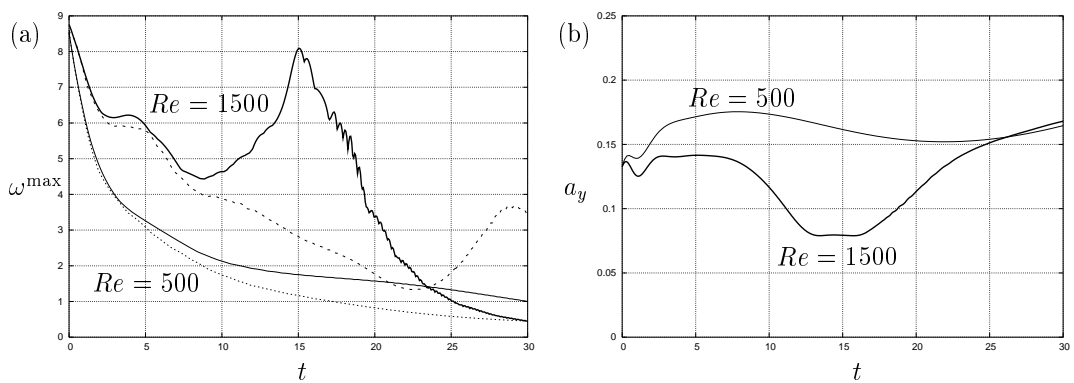


FIG. 2 – (a) Vorticité maximale pour $Re = 1500$ (courbes supérieures) et $Re = 500$ (courbes inférieures) dans le plan d'approche maximale $x = 0$ (traits pleins) et $x = \pm L_x/2$ (traits discontinus). (b) Extension latérale (suivant y) de chaque vortex dans le plan $x = 0$ pour $Re = 1500$ et $Re = 500$.

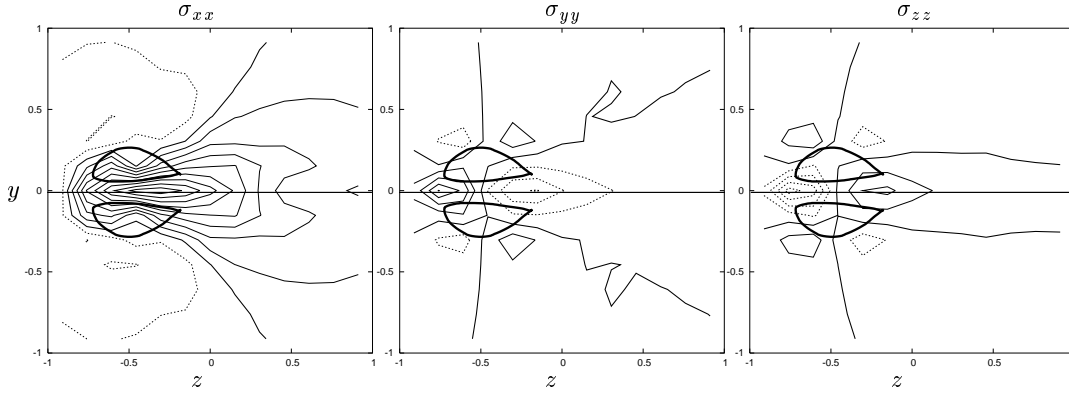


FIG. 3 – Taux de déformation axiale σ_{xx} , transverse σ_{yy} , et verticale σ_{zz} dans le plan $x = 0$ à $t = 12.7$. Les courbes continues (resp. pointillés) correspondent aux valeurs positives (resp. négatives). L'emplacement approximatif du dipôle est matérialisé par la courbe en gras. Les isovaleurs s'étendent de -0.1 à 0.4 par pas de 0.1 pour σ_{xx} , de -1.5 à 2 par pas de 0.5 pour σ_{yy} et de -2 à 1 par pas de 0.5 pour σ_{zz} .

qu'à l'intérieur des vortex, la structure des champs σ_{yy} et σ_{zz} est loin d'être uniforme et de signe bien défini. En revanche, σ_{xx} est essentiellement positif et varie principalement suivant la direction y joignant l'axe des vortex. Les grandeurs σ_{yy} et σ_{zz} ne semblent pas appropriées dans un modèle en termes d'interaction entre vorticité et déformation extérieure due à la courbure, comme celui proposé par Saffman [4]. Pour remédier à ce problème, on définit le dipôle tangent en $x = 0$: dans ce plan, à tout instant, la vorticité est purement axiale par symétrie, le vortex tangent est le vortex rectiligne d'axe x et de même champ de vorticité. On soustrait alors à chaque instant au champ de vorticité totale le dipôle tangent en $x = 0$. Ceci permet d'une part de préserver le caractère solénoïdal des champs et d'autre part de supprimer la déformation auto-induite. Le champ ainsi défini est de vorticité nulle au voisinage du plan $x = 0$: l'écoulement y est très proche d'un écoulement potentiel. Cette opération n'a aucune incidence sur la composante σ_{xx} , c'est-à-dire sur la déformation axiale. En revanche, les composantes σ_{yy} et σ_{zz} sont modifiées et les nouvelles grandeurs $\hat{\sigma}_{yy}$ et $\hat{\sigma}_{zz}$ font uniquement apparaître l'effet global de la courbure des vortex (figure 4). Contrairement à σ_{yy} , $\hat{\sigma}_{yy}$ est du même ordre de grandeur que σ_{xx} , d'une topologie assez semblable, et essentiellement négatif, ce qui traduit une compression des deux vortex l'un contre l'autre. En revanche, $\hat{\sigma}_{zz}$ est sensiblement plus faible : le processus de la reconnexion est donc principalement bi-dimensionnel, dominé par un étirement axial et une compression transverse très intenses.

On peut quantifier les taux de déformation effectifs dans le plan $x = 0$ en effectuant une moyenne spatiale autour du point de reconnexion.   l'instar de [1], on calcule la moyenne sur la droite $x = y = 0$, mais en utilisant les taux de déformation modifiés ; si $z_c(t)$ est la position du centroïde d'un des vortex, et $a_z(t)$ le rayon de dispersion suivant z de ce vortex, la moyenne est effectuée sur l'intervalle $I_z = [z_c - a_z, z_c + a_z]$.

$$\alpha(t) = \frac{1}{2a_z} \int_{I_z} \sigma_{xx}(0,0,z) dz, \quad \beta(t) = \frac{1}{2a_z} \int_{I_z} \hat{\sigma}_{yy}(0,0,z) dz, \quad \gamma(t) = \frac{1}{2a_z} \int_{I_z} \hat{\sigma}_{zz}(0,0,z) dz.$$

Notons qu'une autre moyenne pourrait être calculée sur le domaine qui englobe le dipôle.

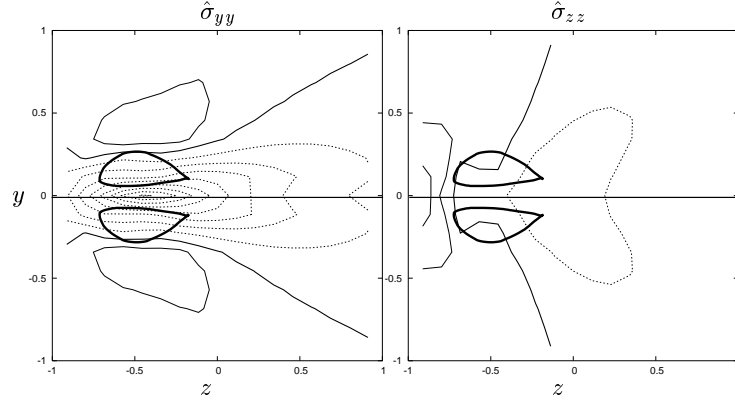


FIG. 4 – Taux de déformation modifiés $\hat{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} - \sigma_{yy}^{2D}$ et $\hat{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz} - \sigma_{zz}^{2D}$ (la contribution du vortex tangent en $x = 0$ est retirée) dans le plan $x = 0$ à $t = 12.7$. Les isovalues s'étendent de -0.4 à 0.05 par pas de 0.05 pour $\hat{\sigma}_{yy}$ et de -0.05 à 0.1 par pas de 0.05 pour $\hat{\sigma}_{zz}$.

Pour $Re = 1500$ (figure 5a), α passe par un net maximum à $t = 13$, avant que la vorticité ne soit maximale à $t = 15$. Pour $Re = 500$, le taux d'étirement est beaucoup plus faible, varie sur des temps plus longs. Ceci est probablement à l'origine d'une reconnexion plus lente et d'un pont de vortex de cœurs moins concentrés (figure 5b).

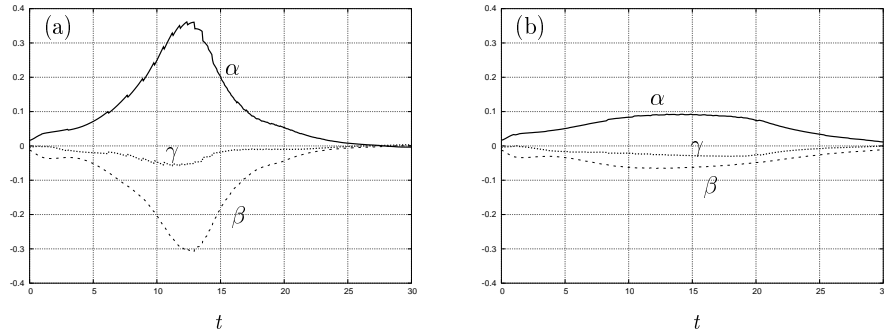


FIG. 5 – Taux de déformation α , β et γ moyens en fonction du temps pour les simulations de reconnexion à (a) $Re = 1500$ et (b) $Re = 500$.

4 Perspectives

Cette étude met en évidence l'importance de la déformation (étirement axial/compression transverse), ce qui n'est pas nouveau, mais permet de la quantifier d'une manière plus efficace et convaincante qu'en considérant les taux de déformation totaux. Une étape ultérieure consistera à simuler l'effet d'un étirement instationnaire 3D sur un dipôle 2D avec les valeurs obtenues ici, et de comparer avec l'évolution de la vorticité dans le plan de reconnexion.

Références

- [1] M. J. Shelley, D. I. Meiron et S. A. Orszag *Dynamical aspects of vortex reconnection of perturbed anti-parallel vortex tubes*, J. Fluid Mech., **246**, 613-652, (1993).
- [2] S. Kida et M. Takaoka, *Vortex reconnection*, Ann. Rev. Fluid Mech., **26**, 169-189 (1994).
- [3] H. K. Moffatt et R. E. Hunt, *A model of magnetic reconnection*, in Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics, Eds K. Bajer and H. K. Moffatt, pp. 125-138, Kluwer Academic Publisher, (2002).
- [4] P. G. Saffman, *A model of vortex reconnection*, J. Fluid Mech., **212**, 315, (1990).
- [5] P. G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1992).
- [6] J. S. Marshall, P. Brancher et A. Giovannini, *Interaction of unequal anti-parallel vortex tubes*, J. Fluid Mech., **446**, 229-252, (2001).

Etude expérimentale de fronts inclinés en solidification directionnelle

J. Deschamps, A. Pocheau et M. Georgelin

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre
Technopôle de Château-Gombert - 49, rue Joliot Curie - 13084 Marseille
 deschamps@irphe.univ-mrs.fr

Résumé

Nous étudions l'orientation des cellules de croissance directionnelle lorsque la direction du gradient thermique, la direction privilégiée par l'anisotropie du cristal et la direction de poussée dans le gradient sont distinctes. L'expérience est réalisée dans un échantillon en lame mince rempli d'un alliage dilué de succinonitrile et pour des isothermes planes. Seules les deux premières directions sont dans ce cas pertinentes. La direction d'avancée des cellules se place alors entre celle du gradient et celle privilégiée par l'anisotropie, d'une manière qui s'avère dépendante du nombre de Péclet des cellules et de l'ouverture entre ces deux directions limites. Nous clarifions le couplage entre ces variables, l'homothétie des réponses en orientation des cellules, leurs transitions morphologiques et les relations respectives entre ces différents phénomènes.

1 Introduction

La solidification d'un matériau dans un gradient de température variable est le mécanisme dominant de production de la plupart des solides qui nous entourent. Son étude a donné lieu à des configurations modèles pour lesquelles les champs physiques importants ont été considérés, par souci de simplification, uniformes et parallèles. Ainsi, la plupart des montages expérimentaux de croissance réalisés en couche mince, de même que les travaux théoriques associés, se sont inscrits dans le cadre où le gradient de température \mathbf{G} , la vitesse de croissance \mathbf{V} par rapport aux isothermes et la direction privilégiée de croissance \mathbf{a} sous l'effet de l'anisotropie sont uniformes et parallèles à une même direction : $\mathbf{G} \parallel \mathbf{V} \parallel \mathbf{a}$.

Ces études modèles de croissance directionnelle ont considérablement accru la connaissance de la morphologie et de la dynamique des structures de croissance d'alliages binaires. Sur cette base, il apparaît maintenant utile de déterminer les spécificités que pourraient entraîner, dans des conditions plus naturelles, les variations des trois champs de croissance : \mathbf{G} , \mathbf{V} et \mathbf{a} (Fig. 1).

Dans une première étape, l'expérience présentée ici se propose de conserver un gradient de température \mathbf{G} et une direction privilégiée de croissance \mathbf{a} *homogènes*, tout en variant leur *direction* par rapport à la vitesse \mathbf{V} de poussée de l'échantillon : $(\mathbf{V}, \mathbf{G}) = \theta_0 \neq 0$, $(\mathbf{V}, \mathbf{a}) = \theta_1 \neq 0$.

Dans cette configuration, les isothermes sont planes, de sorte que la composante tangentielle de la vitesse de poussée sur celles-ci se rapporte à une vitesse de glissement du milieu en croissance le long des lignes d'iso-température (Fig. 1). Ce mouvement étant sans effet physique, seule la composante normale $V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{G} / G$ de la vitesse de poussée \mathbf{V} dans la direction du gradient \mathbf{G} influera sur la croissance. Par simplicité pratique, nous conserverons cependant dans la suite la direction de \mathbf{V} comme axe de référence.

L'objet de l'étude sera l'orientation et la stabilité des cellules de croissance pour des directions (θ_0, θ_1) quelconques, un gradient thermique \mathbf{G} et une vitesse de poussée V variable. En particulier, en notant θ l'angle de la direction de croissance des cellules avec la direction de référence \mathbf{V} , nous chercherons à déterminer la réponse en orientation des cellules $\theta = \varphi(\theta_0, \theta_1, V_n, \Lambda)$ aux inclinaisons du gradient thermique, θ_0 , ou de l'axe privilégié de croissance, θ_1 , aux variations de vitesse de poussée effective $V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{G} / G$ et de largeur cellulaire Λ (Fig. 1).

2 Configuration et méthode expérimentales

Usuellement, les expériences de solidification directionnelles sont menées pour $\theta_0 = \theta_1 = 0$ selon le dispositif classique introduit par Jackson et Hunt (Fig. 2a) [1]. Celui-ci est constitué de deux fours de températures différentes, $T_2 > T_1$, distants de l , qui créent un gradient $G = (T_2 - T_1)/l$ dans lequel un échantillon en lame mince est poussé à vitesse $\mathbf{V} \parallel \mathbf{G}$.

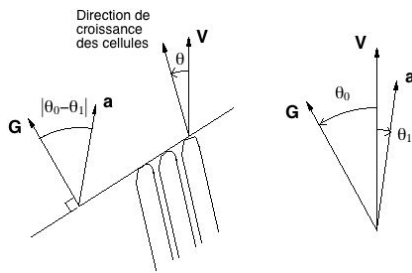


FIG. 1 – Représentation des trois champs de croissance \mathbf{G}, \mathbf{V} et \mathbf{a} , ainsi que des angles associés θ_0, θ_1 et θ .

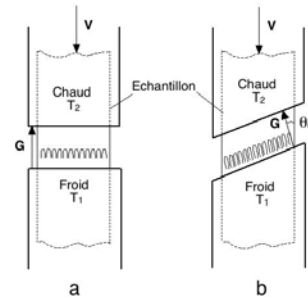


FIG. 2 – a) Schéma du dispositif usuel de croissance directionnelle : $(\mathbf{V}, \mathbf{G}) = 0$. b) Schéma du dispositif utilisé ici où les fours sont inclinés de θ_0 par rapport à la direction de croissance : $(\mathbf{V}, \mathbf{G}) = \theta_0 \neq 0$.

L'échantillon est rempli ici d'un alliage dilué de succinonitrile en couche mince ($4\text{cm} \times 15\text{cm} \times 50\mu\text{m}$). La gamme de vitesse s'étend de $5\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ à $50\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et \mathbf{G} vaut $140\text{K} \cdot \text{cm}^{-1}$. L'angle θ_1 représente l'orientation d'un mono-grain sélectionné par tirage d'un germe unique. Usuellement, ceci est réalisé selon l'axe de l'échantillon, i.e. la direction \mathbf{V} , de sorte que $\theta_1 = 0$. Changer θ_1 revient ainsi à sélectionner un nouveau mono-grain dans l'ensemble de l'échantillon, ce qui est long, délicat et source d'imprécisions. Il apparaît donc préférable de conserver le même grain, donc le même θ_1 , le plus souvent possible et de varier plutôt l'angle θ_0 en modifiant l'orientation des fours (Fig. 2b). Ceux-ci étant usinés finement, ce changement angulaire peut être accompli de manière reproductible à une grande précision et sans accumulation d'erreur. En pratique, l'angle θ_1 a pris les valeurs suivantes sur les différents échantillons, $0.7^\circ, 7.9^\circ, 14^\circ, 26.6^\circ, 29.3^\circ, 43.1^\circ$ et l'angle θ_0 a été modifié sur chacun par sauts de 5° à 10° sur une gamme de 0° à 45° .

L'angle θ repère la direction de croissance des pointes de cellules par rapport à la direction de référence \mathbf{V} (Fig. 3a). Il est à noter qu'elle diffère de la direction de l'axe des sillons car ceux-ci sont soumis à un processus de refonte en aval des pointes. Pour mesurer θ , il convient de déterminer la position des pointes de cellules à chaque instant, puis de

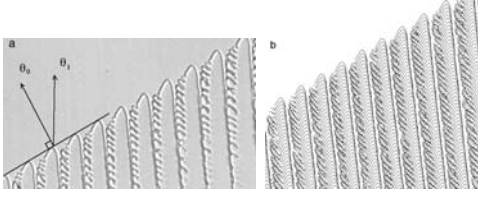


FIG. 3 – a) Image brute du front pour $\theta_0 = 29.9^\circ$, $\theta_1 = -0.7^\circ$, $\Theta_0 = 30.6^\circ$, $V = 30\mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. b) Trajectoire des pointes de cellules dans un diagramme spatio-temporel de leur mouvement. On remarque que, suite aux refontes en aval des pointes, l'orientation des sillons de dendrites en (a) diffère de celle des lignes d'accumulation des trajectoires en (b). La largeur des images correspond à 1.2mm.

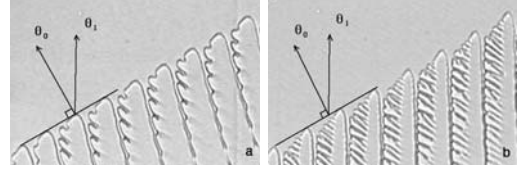


FIG. 4 – a) Image du front pour $\theta_0 = 29.9^\circ$, $\theta_1 = -0.7^\circ$, $\Theta_0 = 30.6^\circ$, $V = 10\mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. b) Même configuration mais pour $V = 50\mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. On note que pour de faibles vitesses, les dendrites s'orientent selon θ_0 alors que pour des vitesses plus élevées, elles s'inclinent selon θ_1 . La largeur des images correspond à 1mm.

reconstituer leur trajectoire. Pour cela, les contours de l'interface sont extraits à intervalle de temps régulier τ d'un film de l'interface, puis superposés après décalage constant d'une quantité $\mathbf{V}\cdot\tau$ dans la direction de poussée \mathbf{V} . On recompose ainsi le chemin suivi par les pointes de cellules dans l'échantillon (Fig. 3b).

La direction de poussée par rapport à laquelle les angles θ_0 , θ_1 sont comptés étant sans statut physique, seules les différences angulaires $\Theta = |\theta - \theta_1|$ et $\Theta_0 = |\theta_0 - \theta_1|$ seront pertinentes. Elles reviennent à prendre la direction privilégiée de croissance \mathbf{a} comme direction de référence pour la discussion physique.

3 Résultats expérimentaux

Lorsqu'on pousse, pour $\theta_1 \neq 0$, l'échantillon au-delà de la vitesse critique de Mullins-Sekerka [2], l'interface plane solide/liquide se déstabilise en un réseau de cellules asymétriques. A plus haute vitesse, celles-ci émettent des branchements et deviennent dendritiques (Fig. 3, 4).

La gamme d'observations s'est étendue de $\Theta_0 = 5.7^\circ$ à 43.1° . Notons que, par raison de symétrie du cristal, elle ne peut dépasser 45° sous peine d'induire la croissance du branchement orthogonal pour lequel l'angle Θ_0 , complémentaire du précédent, reviendrait alors sous les 45° .

Pour Θ_0 et Λ donnés, on constate, à faibles vitesses de poussée V , que les cellules sont orientées selon une direction proche de la direction du gradient \mathbf{G} (Fig. 4a). A plus haute vitesse V , leur direction de croissance s'oriente sur une direction fixe asymptotique \mathbf{a}' voisine de celle du grain \mathbf{a} (Fig. 4b). La différence entre \mathbf{a}' et \mathbf{a} , si elle existe, n'étant pas mesurable, nous admettrons dans la suite que ces deux directions sont confondues. Le même type de comportement est observé en fixant Θ_0 et V et en augmentant la taille Λ des cellules. Cette dualité est confirmée dans la figure 5 où, pour chaque angle d'ouverture Θ_0 entre \mathbf{G} et \mathbf{a} , les angles Θ se placent sur une même courbe fonction du nombre de Péclet $Pe = \Lambda V_n/D$. On retrouve en particulier les orientations limites: $\Theta = \Theta_0$, i.e. $\theta = \theta_0$, à bas Pe et $\Theta = 0$, i.e. $\theta = \theta_1$, à haut Pe .

L'angle d'ouverture Θ_0 détermine donc la gamme de variation de l'orientation Θ des

cellules. Pour investiguer les implications de la largeur de gamme Θ_0 envers la forme de la courbe de réponse en orientation $\Theta(Pe)$, nous considérons la variation réduite Θ/Θ_0 en fonction de Pe . Deux comportements sont observés. Pour $\Theta_0 < 30^\circ$, une courbe de réponse commune apparaît en variable réduite (Fig. 6a) : ceci montre que les courbes initiales $\Theta(Pe)$ étaient homothétiques. Pour $\Theta_0 > 30^\circ$, les courbes de réponse en variable réduite restent distinctes (Fig. 6b) : les formes mêmes des courbes initiales sont donc différentes. La synthèse de ces comportements indique que la réponse en orientation Θ des cellules est une fonction à deux variables $\Theta = g(Pe, \Theta_0)$ qui est plus que linéaire en Θ_0 comme le souligne la figure 7. Elle ne peut donc pas en particulier être à variables séparables car une écriture sous la forme $\Theta = h(\Theta_0)k(Pe)$ conduirait, pour $Pe = 0$, à $h(\Theta_0) = g(0, \Theta_0) = \Theta_0$, i.e. à une variation linéaire en Θ_0 . La réponse en orientation du système met ainsi en jeu un couplage entre le nombre de Péclet Pe et l'angle d'ouverture $\Theta_0 = (\mathbf{a}, \mathbf{G})$. De ce fait, elle doit être étudiée dans l'espace bidimensionnel (Pe, Θ_0) .

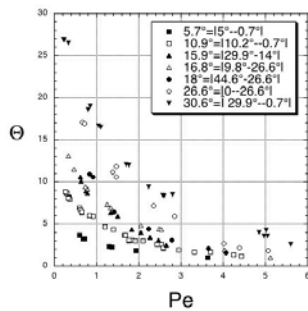


FIG. 5 – Evolution de Θ pour différents $\Theta_0 < 30^\circ$. Dans la légende sont explicitées les valeurs de Θ_0 .

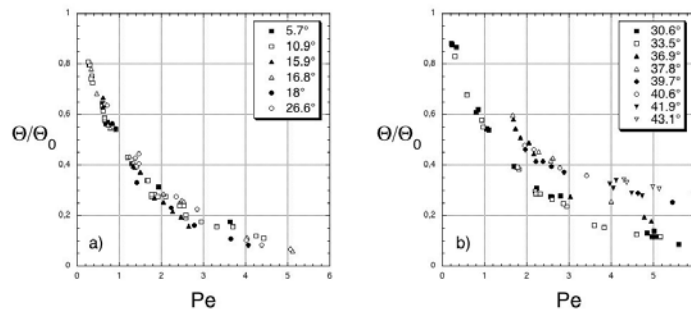


FIG. 6 – Evolution de Θ/Θ_0 en fonction de Pe . On distingue deux régimes: a) $\Theta_0 < 30^\circ$, le comportement est décrit par $\Theta/\Theta_0 = f(Pe)$. b) $\Theta_0 > 30^\circ$, le comportement est décrit par $\Theta = g(Pe, \Theta_0)$.

La figure 6b montre par ailleurs une interruption des points expérimentaux à bas Péclet pour $\Theta_0 \gtrsim 30^\circ$. Ceci correspond à une transition morphologique conduisant pour les basses vitesses de croissance à des coupures de pointes répétitives réminiscentes de la croissance en algues (Fig. 9a) [5]. Dans ce mode "dégénéré" [5], la morphologie des structures de croissance est évolutive et très couplée à leurs voisines, ce qui interdit en pratique la définition d'une direction stable de croissance. Pour des vitesses plus élevées, le front retrouve cependant une structure dendritique (Fig. 9b). Le nombre de Péclet limite Pe_l de cette transition est reporté en fonction de Θ_0 en figure 8. Il apparaît croissant au delà d'un seuil proche de $\Theta_0 = 30^\circ$ et voisin de la valeur de Θ_0 au delà de laquelle les courbes $\Theta/\Theta_0(Pe)$ de la figure 6 ne sont plus superposables. Il est ainsi intéressant de constater que la rupture d'homothétie des courbes de réponse en orientation des cellules coïncide avec la transition morphologique au mode dégénéré.

4 Discussion

Deux directions importantes orientent ainsi la croissance des cellules : la direction du gradient thermique \mathbf{G} et celle, \mathbf{a} , de croissance privilégiée par anisotropie. La direction de

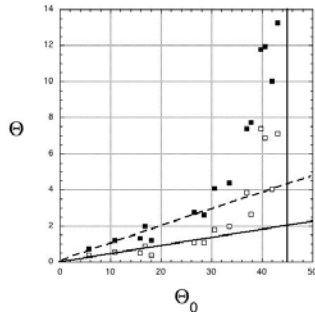


FIG. 7 – Représentation de la dérive pour deux Pe fixés: ■ $Pe = 5$, □ $Pe = 10$. La ligne oblique pleine (resp. pointillée) est un guide pour les yeux dans le régime $\Theta < 30^\circ$ pour $Pe = 5$ (resp. $Pe = 10$).

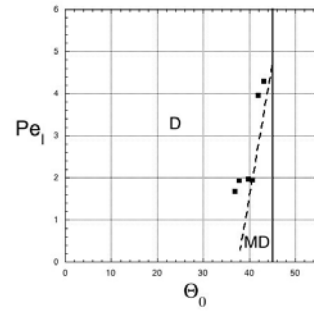


FIG. 8 – Représentation de Pe_l en fonction de Θ_0 . La ligne pointillée sépare deux domaines d'existence: D mode dendritique (carrés pleins), MD mode dégénéré. La ligne s'interrompt volontairement à $Pe = 0.1$, limite de notre étude.

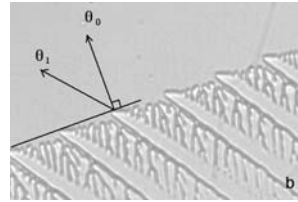
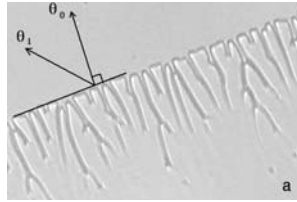


FIG. 9 – a) Mode dégénéré pour $\theta_0 = 20^\circ$, $\theta_1 = 60.6^\circ$, $\Theta_0 = 40.6^\circ$, $V = 12\mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. b) Mode dendritique pour $V = 50\mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à autres conditions inchangées. La largeur des images correspond à 1mm.

croissance des cellules reste intermédiaire entre les deux selon une proportion réglée par le nombre de Péclet $Pe = V_n\Lambda/D$.

Ce résultat corrobore, pour tout angle d'ouverture Θ_0 , les conclusions d'une étude expérimentale [3] effectuée aux deux angles $\Theta_0 = 30^\circ$ et 40° dans une configuration où $\mathbf{G}\parallel\mathbf{V}$, ainsi que celles de deux études numériques effectuées à $\Theta_0 = 17^\circ$ et à $\Theta_0 = 30^\circ$ [3, 4]. La comparaison de ces deux courbes de réponse expérimentales $\theta(Pe, 30^\circ)$ et $\theta(Pe, 40^\circ)$ a montré des asymptotes différentes à grand Pe ($\theta \rightarrow \Theta_0 = 30^\circ$ ou 40°), mais des pentes à petit Pe identiques. Ceci indique que ces courbes ne sont pas homothétiques, ce que confirme notre étude en l'étendant à tout angle Θ_0 supérieur à 30° . La dépendance de l'orientation des cellules à l'angle Θ_0 a été par ailleurs investiguée par simulation numérique à Péclet fixé à $Pe = 2.925$ [3]. Une tendance linéaire a été observée à faible Θ_0 suivie par une infléchissement notable. Cette observation de la loi $\Theta(2.925, \Theta_0)$ à Pe fixé ne peut cependant préjuger de la loi générale $\Theta(Pe, \Theta_0)$ et, notamment, de la validité d'un découplage des deux variables Pe et Θ_0 dans certains domaines de paramètres. Pour ce faire, une étude bidimensionnelle dans l'espace (Pe, Θ_0) est nécessaire.

En autorisant une variation aisée de l'angle entre le gradient \mathbf{G} et la vitesse \mathbf{V} , l'expérience présentée ici nous a permis d'investiguer un large domaine de l'espace (Pe, Θ_0) . Ceci nous a conduit à conclure au découplage de l'influence des variables Pe et Θ_0 aux faibles Θ_0 et à leur couplage au delà. En particulier, pour $\Theta_0 < 30^\circ$, $\theta = \Theta_0 g(Pe)$

alors que, pour $\Theta_0 > 30^\circ$, cette séparation n'a pas cours. Pour préciser ce changement de comportement, nous avons réalisé un ajustement des données expérimentales à une famille de fonctions $\Theta(Pe)$ décroissant entre 1 et 0 : $\Theta = (1 + aPe^b)^{-1}$, les paramètres a et b étant fonction de Θ_0 . Cet ajustement bidimensionnel conduit à un paramètre b constant mais à un paramètre a constant jusqu'à $\Theta_0 \approx 25^\circ$ puis décroissant d'un facteur 3 jusqu'à $\Theta_0 = 45^\circ$.

La non-linéarité de la réponse en orientation de la cellule se trouve ainsi principalement contenue dans la fonction $a(\Theta_0)$. Celle-ci constitue de ce fait un guide pour la compréhension de l'orientation des cellules mais aussi un challenge de la prise en compte couplée des phénomènes de transport et d'anisotropie en croissance directionnelle.

5 Conclusion

Nous avons étudié expérimentalement l'orientation \mathbf{n} des cellules de croissance directionnelle en fonction des directions du gradient de température \mathbf{G} , de la vitesse de poussée \mathbf{V} du milieu dans le gradient et de celle, \mathbf{a} , privilégiée par l'anisotropie. Notre méthode expérimentale nous a permis d'explorer l'espace (Pe, Θ_0) des nombres de Péclet $Pe = \Lambda V_n / D$ et des angles d'ouverture $\Theta_0 = (\mathbf{a}, \mathbf{G})$. Ceci nous a conduit à corroborer une variation en Pe des orientations $\Theta = (\mathbf{a}, \mathbf{n})$ de croissance des cellules, puis à démontrer un découplage à bas Θ_0 des influences respectives des variables Pe et Θ_0 , suivi d'un couplage notable de ces variables au delà.

La compréhension de la non-linéarité de la réponse en orientation des cellules, et donc de la forme de la relation $\Theta(Pe, \Theta_0)$, s'avère un enjeu notable pour appréhender les mécanismes influençant la croissance, qu'ils soient d'origine microscopique (anisotropie), macroscopique (gradient thermique), ou couplés.

Références

- [1] K. A. Jackson, J. D. Hunt, *Acta Metall.* **13** (4), 1212, 1965.
- [2] W.W. Mullins, R.F. Sekerka, *J. Appl. Phys.*, **30**, 444, 1964.
- [3] S. Akamatsu, T. Ihle, *Similarity law for tilt angle of dendrites in directional solidification of non-axially-oriented crystals*, *Phys. Rev. E*, **56** (4), 4479, 1997.
- [4] T. Okada, Y. Saito, *Simulation of unidirectional solidification with a tilted crystalline axis*, *Phys. Rev. E*, **54** (1), 650, 1996.
- [5] S. Akamatsu, G. Faivre, T. Ihle, *Symmetry-broken double fingers and seaweed patterns in thin-film directional solidification of a nonfaceted crystal*, *Phys. Rev. E*, **51** (5), 4751, 1995.

Dynamique nonlinéaire à retard

Thomas Erneux

Université Libre de Bruxelles

Optique Nonlinéaire Théorique

Campus Plaine C.P. 231, 1050 Bruxelles

terneux@ulb.ac.be

Résumé

Les équations différentielles à retard tiennent compte de l'effet du passé dans la prédiction du futur. Elles sont apparues dans différentes disciplines scientifiques (biologie des populations, contrôle mécanique, trafic urbain) et sont difficiles à résoudre. La première bifurcation vers une solution périodique dans le temps est particulièrement importante pour les problèmes à retard car elle nous permet d'estimer les effets (stabilisants ou déstabilisants) du retard. Trois problèmes d'actualité seront analysés: les vibrations induites par le retard lors de l'usinage de pièces mécaniques, les oscillations lentes du taux d'échange en économie, et un phénomène d'accrochage de fréquence pour un laser soumis à un feedback opto - électronique retardé.

Abstract

Delay differential equations take into account the effect of the past on the prediction of the future. They appeared in different scientific disciplines (population biology, mechanical control, traffic flow) but are difficult to solve. The first bifurcation to a time-periodic solution is particularly important for delay problems because it allow us to estimate the (stabilizing or destabilizing) effects of the delay. Three different problems of current interest will be analyzed: the mechanical vibrations in machine tool chatter, the slow time oscillations of the exchange rate in economy, and a frequency locking phenomenon for a laser subject to a delayed opto-electronic feedback.

1 Introduction

Après la Première Guerre Mondiale, l'utilisation de systèmes de contrôle a conduit à étudier une classe complètement différente d'équations appelées équations différentielles à retard (EDR). N'importe quel système qui dispose d'un dispositif de contrôle est quasiment sûr de montrer des retards. Ces retards sont inévitables car un temps fini est nécessaire pour détecter l'information et pour réagir à celle-ci. Le contrôle de robots mécaniques, par exemple, dépend de plusieurs sources de retard. D'abord, il y a le temps d'échantillonnage du contrôleur digital (le temps entre les observations) qui est, en général, de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-2} s. Ensuite, il y a le retard du signal dans le système de transmission. Il est de l'ordre de 10^{-6} à 1 s dépendant de la distance à parcourir. Les livres de Pinney (1958) [1] et Driver (1977) [2] contiennent de nombreux exemples d'EDRs qui sont apparus dans la littérature jusqu'aux années soixante. Les livres plus récents de Stépán (1989) [3], Fowler (1997) [4], Epstein et Pojman (1998) [5], Murray (2002) [6], Fall et al (2002) [7] et Beuter et al (2003) [8] explorent différents EDRs en mécanique, chimie et biologie. Toutes ces études montrent que le retard conduit à des instabilités oscillantes (vibrations mécaniques, perte de synchronisation, oscillations physiologiques). Enfin, les EDRs soulèvent d'importantes questions d'ordre mathématique revues par Hale et Verduyn Lunel (1993) [9] et Diekmann et al (1995) [10].

L'intérêt actuel de la communauté scientifique pour les EDRs n'est pas un hasard. Ce sont les progrès de nos ordinateurs et de nos techniques de simulation [11] qui ont permis l'étude d'EDRs formulées bien auparavant mais qui étaient impossible de résoudre. De nouveaux domaines de recherche ont également vu le jour où des EDRs jouent un rôle fondamental (optique nonlinéaire, trafic urbain, robotique). Par exemple, les lasers que nous utilisons tous les jours (lecture code-bar au supermarché, lecture de CD, imprimante laser) souffrent du feed-back optique. Une partie de la lumière sortant d'un laser est réfléchi sur la surface d'un disque ou d'une fibre optique et revient dans le laser. Au temps t , le laser est alors soumis à sa propre lumière émise au temps $t - \tau$ (τ est le temps de parcours laser – disque – laser). Même si l'amplitude de ce feed-back optique est faible, ce retard est la cause d'instabilités temporelles.

Un phénomène typique causé par le retard est l'apparition d'oscillations amorties ou entretenues. Ces oscillations sont souvent indésirables parce qu'elles conduisent à des vibrations à haute fréquence lors de l'usinage de pièces métalliques ou à des anomalies rythmiques dans les systèmes vivants. La bifurcation vers ces oscillations entretenues peut prendre des formes très variées que j'illustrerai en analysant trois problèmes d'actualité.

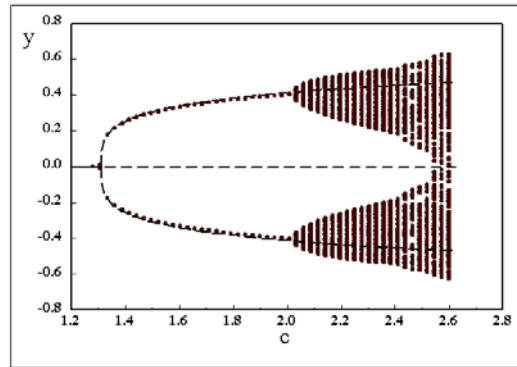


FIG. 1 – Diagramme des bifurcations représentant les maxima et minima des solutions stables de l'Eq. (1). La bifurcation de Hopf est suivie par une bifurcation secondaire vers des oscillations quasi-périodiques. La ligne brisée est la solution stationnaire de l'équation d'amplitude. Les valeurs des paramètres sont $a = 2.623$ et $b = (13\pi)^2$.

2 Bifurcations

Johnson et Moon [12] ont étudié expérimentalement un système électro-mécanique dans le contexte général des vibrations mécaniques induites par un retard. Ils ont simulé leurs expériences en étudiant numériquement l'équation

$$y'' + ay' + b(y - y^3) = c(y' - y'(t - 1)) \quad (1)$$

où $a = 2.623$, $b = 170\pi^2$ et c est le paramètre de contrôle. Nous analysons les deux premières bifurcations en tenant compte de la valeur élevée de b [16]. Après avoir introduit $T \equiv \sqrt{bt}$ et un petit paramètre $\varepsilon \equiv b^{-1/4}$, nous recherchons une solution qui dépend du "temps rapide" T et du "temps lent" t . La méthode des échelles multiples [17, 18] permet de déterminer une équation pour l'amplitude A de la solution périodique $y = A(t) \exp(iT) + c.c. + O(\varepsilon)$ où $c.c.$ signifie complexe conjugué. Ce qui est intéressant par

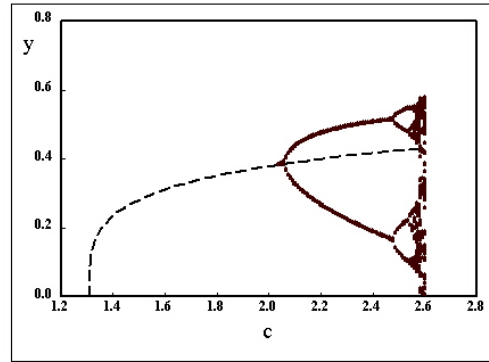


FIG. 2 – Diagramme des bifurcations de l'équation d'amplitude ($y = 2|A|$). La ligne brisée est la branche de solutions périodiques. Les bifurcations secondaire et tertiaire sont les enveloppes des oscillations quasi-périodiques de la Figure 1.

rapport à un problème de bifurcation de Hopf classique est le fait que cette équation est elle-même une EDR pour $A(t)$. Elle peut être étudiée analytiquement pour ses solutions stationnaires (solutions périodiques du problème original) et leur bifurcations de Hopf (bifurcations vers des régimes quasi-périodiques à deux fréquences). La figure 1 montre que la solution stationnaire de l'équation d'amplitude est en accord quantitatif avec la solution numérique de l'Eq. (1). Notons également que la branche de solutions est très raide près du point de bifurcation de Hopf. Il est possible de montrer à partir de la solution stationnaire de l'équation d'amplitude que celle-ci varie comme $(c - c_H)^{1/4}$.

Durant les trente dernières années, des efforts ont été consacrés en économie pour mieux décrire les oscillations du taux d'échange. Une équation à retard étudiée récemment par Erdélyi [13] et P. Brunovský et al [14] est de la forme

$$y' = a(y - y(t - 1) - |y|y) \quad (2)$$

où y représente la déviation du taux d'échange naturel (sans spéculations ou perturbations aléatoires) et $a > 0$ est un paramètre. Physiquement, la croissance exponentielle de y est contrôlée en évaluant à chaque instant la différence entre y et $y(t - 1)$. Il en résulte que la solution nulle $y = 0$ est linéairement stable pour tout l'intervalle $0 \leq a < 1$. Lorsque $a > 1$, la solution nulle est instable mais le terme nonlinéaire a un effet stabilisant. Il apparaît une bifurcation super-critique en $a = 1$ vers une solution périodique de grande période et de petite amplitude. Voir Figure 3. Ce n'est ni une bifurcation de Hopf ni une bifurcation d'une orbite de période infinie. Une analyse de la solution près de $a = 1$ est possible et indique que l'amplitude des oscillations croît comme $a - 1$ et que la période varie comme $(a - 1)^{-1/2}$ [19]. Il est possible de montrer que ce type de bifurcation ne dépend pas de la nonlinéarité choisie mais s'applique à une classe de fonctions.

Des expériences sur un laser soumis à un feed-back opto-électronique [15] ont révélé des phénomènes d'accrochage de fréquence dans des régimes oscillants quasi-périodiques. Nous associons ces phénomènes à l'existence de bifurcation de Hopf dégénérées. Le laser est décrit par les équations (sans dimension) suivantes

$$x' = -y + \eta y(t - \theta) - \varepsilon_1 f(x, y) \quad (3)$$

$$y' = (1 + y)(x - \varepsilon_2 y) \quad (4)$$

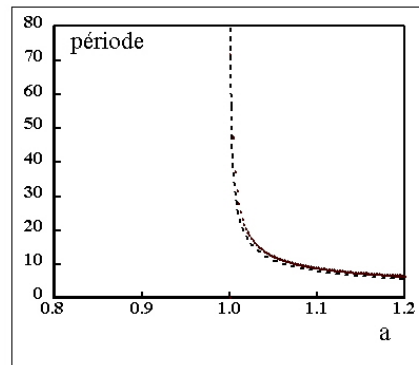


FIG. 3 – Diagramme des bifurcations: la période devient infinie en $a = 1$ bien que l'amplitude des oscillations approche zero. La ligne brisée est obtenue analytiquement.

où Les variables x et y sont définis comme des déviations de l'inversion de population et

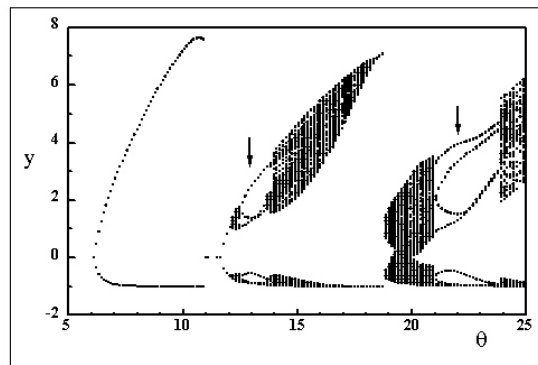


FIG. 4 – Diagramme des bifurcations des maxima et minima des solutions stables. La figure montre trois bifurcation de Hopf successives ainsi que leurs bifurcations secondaires. Les flèches indiquent les régimes multi-périodiques. $\eta = -0.4$. Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, les domaines de solutions quasi-périodiques précédants les régimes multi-périodiques disparaissent.

de l'intensité du champ électrique par rapport à une solution stationnaire non nulle. Les paramètres $\eta = O(1)$ et $\theta = (1)$ mesurent l'amplitude et le retard du feed-back optique. Les termes $-\varepsilon_1 f(x,y)$ et $-\varepsilon_2 y$ sont petits comme 10^{-2} et décrivent les pertes du laser. Le diagramme des solutions stables est montré dans la Figure 4. Il montre des branches de solutions multi-périodiques (plusieurs maxima et minima) entre des régimes d'oscillations quasi-périodiques. Ces équations ont été étudiées lorsque $\eta \ll 1$ [20] mais les expériences en [15] sont pour $\eta = O(1)$. Dans ces conditions, nous pouvons négliger les termes multipliant ε_1 et ε_2 . Le problème réduit admet des bifurcations de Hopf doublement dégénérées caractérisés par deux fréquences commensurables. Ce type de bifurcation apparaît relativement facilement dans les équations à retard [4]. Le diagramme des bifurcations a été étudié analytiquement pour quelques unes de ces bifurcations dégénérées et explique comment les solutions multi-périodiques émergent à partir de bifurcations secondaires [22]. Ce qui est intéressant est le fait que les termes multipliant ε_1 et ε_2 jouent un rôle important près de ces bifurcation secondaires. Ce sont ces termes qui sont responsable des régimes

quasi-périodiques au voisinage des points de bifurcation secondaires. L'accrochage des fréquences se produit qu'à une certaine distance de ces points.

3 Résumé

La bifurcation vers des solutions oscillantes d'EDRs peut prendre des formes très variées. Pour les problèmes mécaniques (équations d'oscillateur nonlinéaire avec retard) comme celui décrit par l'Eq. (1), une bifurcation de Hopf est suivie par une bifurcation secondaire vers des oscillations quasi-périodiques. Cette bifurcation secondaire résulte du fait que le retard est important. Pour les oscillations quasi-périodiques de l'Eq. (1), les deux fréquences sont \sqrt{b} et 1.

Pour d'autres problèmes comme celui décrit par l'Eq. (2), c'est le terme de contrôle $y(t) - y(t-1)$ qui est responsable d'une bifurcation particulière. Ce terme apparaît souvent dans les applications comme un moyen de stabiliser une solution stationnaire. Pour notre problème, une bifurcation est inévitable lorsque $a > 1$ mais celle-ci n'est pas dramatique car les oscillations sont de faible amplitude et sont lentes.

Enfin, le problème laser décrit par les équations (3) et (4) révèle l'importance des bifurcations de Hopf dégénérées pour l'émergence de solutions multi-périodiques. Ce type de bifurcation n'est pas rare pour les systèmes décrits par des équations du second ordre lorsque l'amplitude du feed-back retardé n'est pas petite.

4 Remerciements

Cette recherche a eu le support du Fond National de la Recherche Scientifique (Belgique) et le Pole d'Attraction Interuniversitaire du gouvernement Belge. L'auteur remercie H.-O. Walther et A. Gavrielides pour de nombreuses discussions passionnantes et, plus particulièrement, Michel et Théodore pour leur aide à comprendre les subtilités de LaTeX.

Références

- [1] E. Pinney, *Ordinary Difference-Differential Equations*, University of California Press, Berkeley (1958).
- [2] R. D. Driver, *Ordinary and Delay Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences **20**, Springer-Verlag, New York (1977).
- [3] G. Stépán, *Retarded Dynamical Systems*, Longman, London, (1989).
- [4] A. C. Fowler, *Mathematical Models in the Applied Sciences*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [5] I. R. Epstein et J. A. Pojman, *An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics*, Oxford University Press, Oxford (1998).
- [6] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Third edition, Springer Verlag, New York (2002).
- [7] C. P. Fall, E. S. Marland, J. M. Wagner, J. J. Tyson, (Eds.) *Computational Cell Biology*, Springer-Verlag, New York (2002).
- [8] A. Beuter, L. Glass, M. Mackey, M. Titcombe, (Eds.), *Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine*, Springer-Verlag, New York (2003).
- [9] J. K. Hale et S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Appl. Math. Sciences **99**, Springer, New York (1993).
- [10] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, et H.-O. Walther, *Delay Equations, Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*, Appl. Math. Sciences **110**, Springer, New York (1995).
- [11] K. Engelborghs: *Software for delay differential equations*, <http://www.cs.kuleuven.ac.be/~koen/delay/software.shtml>.
- [12] M. A. Johnson et F. C. Moon, *Int. J. of Bifur. and Chaos*, **9**, 49, (1999).
- [13] A. Erdélyi, *A Delay Differential Equation Model of Oscillations of Exchange Rates*, Ph.D. thesis Bratislava, (2003).
- [14] P. Brunovský, A. Erdélyi, and H.-O. Walther, *J. Dynamics Diff. Eq.*, **16**, 393 (2004).
- [15] F. Lin et J. M. Liu, *IEEE J. Quant. Electron.*, **39**, 562 (2003).
- [16] T. Erneux, en préparation (2005).
- [17] J. Kevorkian et J. D. Cole, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Applied Mathematical Sciences **34**, Springer, New York (1981) — *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*, Applied Mathematical Sciences **114**, Springer, New York (1996).
- [18] C. M. Bender et S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, Mc Graw Hill, New York (1978).
- [19] T. Erneux et H.-O. Walther, en préparation (2005).
- [20] D. Pieroux, T. Erneux, et K. Otsuka, *Phys. Rev. A*, **50**, 1822 (1994) — D. Pieroux et T. Erneux, *Phys. Rev. A*, **53**, 2765 (1996).
- [21] S. A. Campbell and J. Bélair, *Can. Appl. Mathematics Quartely*, **7**, 217 (1999) — S. A. Campbell et V. G. LeBlanc, *J. Dyn. and Diff. Equations*, **10**, 327 (1998) — S. A. Campbell, *Nonl. Analysis, Theory, Methods and Applications*, **30**, 4577 (1997) — S. A. Campbell, J. Bélair, T. Ohira, J. Milton, *Chaos*, **5**, 1-6 (1995).
- [22] T. Erneux et A. Gavrielides, en préparation (2005).

Interactions de similaritons optiques : du similariton au soliton noir

Christophe Finot et Guy Millot

Laboratoire de Physique de l'Université de Bourgogne, UMR 5027,
9 Avenue A. Savary, BP 47 870, 21078 Dijon Cédex
christophe.finot@u-bourgogne.fr

Résumé

Nous abordons dans cet article les aspects théoriques et expérimentaux de la génération et de la propagation d'une paire de similaritons optiques de même fréquence centrale. En raison de leur élargissement temporel progressif, les similaritons viennent à se recouvrir durant leur propagation. Ce recouvrement donne naissance à un battement sinusoïdal qui évolue adiabatiquement, en raison de la non-linéarité et du gain, vers un train de solitons noirs.

Nous étudions les aspects théoriques et expérimentaux de la formation de solitons noirs due à l'interaction de deux similaritons optiques. Les similaritons ont été générés par amplification Raman dans une fibre à dispersion normale à la longueur d'onde télécom de 1550 nm. Nous analysons également la dépendance de la période du train de solitons noirs vis-à-vis de l'écart temporel entre les deux impulsions initiales et de leur énergie initiale.

Abstract

We investigate both theoretically and experimentally the generation and propagation of a pair of optical similaritons in a normally-dispersive Raman amplifier at telecommunication wavelengths. Because of their progressive temporal broadening, similaritons overlap during their propagation. We demonstrate here that a sinusoidal beating appears in the overlap region. Due to nonlinearity and gain, the beating adiabatically evolves into a train of dark soliton pulses. The dependence of the repetition rate of the soliton train versus the properties of the initial pair of pulses is also studied.

1 Introduction

La propagation et l'amplification d'une impulsion d'amplitude complexe $\psi(t,z)$ dans une fibre optique peut être modélisée par l'équation de Schrödinger non-linéaire (ESNL) avec gain, prenant en compte la dispersion d'ordre 2 β_2 , l'effet Kerr optique à travers le coefficient non-linéaire γ et un gain g constant longitudinalement et spectralement :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \gamma |\psi|^2 \psi + i \frac{g}{2} \psi. \quad (1)$$

Une analyse autosimilaire de cette équation a montré qu'en régime de dispersion normale (β_2 positif), toute impulsion acquiert asymptotiquement un profil d'intensité parabolique et une dérive de fréquence linéaire et positive [1]. Une solution ψ_p est alors :

$$\psi_p(t,z) = A_p(z) \sqrt{1 - \frac{t^2}{T_p^2(z)}} e^{i(\varphi_p(z) - \frac{C_p}{2} t^2)} \quad \text{si } |t| < T_p(z) \quad ; \quad \psi_p(t) = 0 \quad \text{sinon,} \quad (2)$$

$$\text{avec } A_p(z) = A_0 e^{\frac{g-z}{3}}, \quad A_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{g U_{ini}}{\sqrt{\gamma \beta_2 / 2}} \right)^{1/3}, \quad U_{ini} = \text{énergie initiale,}$$

$$T_p(z) = \frac{6\sqrt{\gamma\beta_2/2}}{g} A_0 e^{\frac{g}{3}z}, \quad \varphi_p(z) = \varphi_0 + \frac{3\gamma A_0^2}{2g} e^{\frac{2g}{3}z} \quad \text{et} \quad C_p = \frac{g}{3\beta_2} \quad (3)$$

De ces expressions, deux points peuvent être soulignés [1]:

- Les amplitude et largeur temporelle de l’impulsion augmentent au fur et à mesure de l’amplification. Les deux données évoluent dans un rapport constant, illustrant une évolution parfaitement autosimilaire, d’où le nom de similariton optique.
- Seule l’énergie de l’impulsion initiale U_{ini} joue un rôle dans l’expression des caractéristiques de ψ_p . Les autres paramètres (amplitude, largeur ou forme) de l’impulsion initiale n’interviennent pas.

2 Interaction de deux similaritons

2.1 Problème étudié

Si la dynamique d’un similariton isolé est désormais bien cernée et a été mise à profit dans la conception de nouveaux systèmes [1, 2, 3], aucune étude n’a, à ce jour, détaillé la génération et la propagation d’une paire de similaritons de même fréquence centrale. Nous considérons numériquement à partir de l’équation (1) l’évolution d’une paire d’impulsions initiales de forme gaussienne d’une largeur à mi-hauteur de 5 ps pour une énergie U_{ini} de 2.9 pJ. Ces impulsions séparées d’une durée temporelle $\Delta T = 55ps$ vont évoluer dans un amplificateur fonctionnant à 1550 nm avec un gain linéique supposé constant $g = 9.72 \cdot 10^{-4} m^{-1}$. Cet amplificateur est basé sur une fibre d’une longueur de 5.3 km à zéro de dispersion décalé, avec un paramètre de dispersion $\beta_2 = 4.7 \cdot 10^{-3} ps^2.m^{-1}$ et une non-linéarité $\gamma = 2.0 \cdot 10^{-3} W^{-1}.m^{-1}$.

La figure 1(a) décrit le profil d’intensité des impulsions à différentes distances de propagation. A $z = 3290m$, les impulsions ont déjà acquis le caractère parabolique des similaritons. Puis, en raison de leur élargissement temporel progressif, le front descendant de la première impulsion se recouvre et interagit fortement avec le front montant de la seconde. Hors de la zone de recouvrement, on remarque que chaque impulsion évolue indépendamment de l’autre.

2.2 Formation d’un battement sinusoïdal

Durant la phase initiale de propagation, la nature quasiment bornée du similariton a permis à chaque impulsion de ne pas être affectée par la présence de sa voisine et d’acquérir notamment le même dérive de fréquence linéaire. Ainsi, puisque les deux impulsions sont décalées temporellement, lorsqu’elles se recouvrent, à un instant donné, les fréquences instantanées diffèrent d’une quantité constante. Il en résulte dans la zone centrale de recouvrement un phénomène de battement sinusoïdal en intensité de fréquence $f_s = \frac{C_p \Delta T}{2\pi}$, battement que l’on peut observer sur la figure 1(b).

2.3 Evolution vers la formation de solitons noirs

Le battement sinusoïdal va alors évoluer adiabatiquement, en raison de la non-linéarité et du gain, vers un train de solitons noirs. Un soliton noir ψ_n d’une largeur temporelle caractéristique T_0 est une solution localisée à profil constant de l’ESNL en régime de dispersion normale [4] et correspond à un profil d’intensité $|\psi_n|^2 = \frac{\beta_2}{\gamma T_0^2} \tanh^2(\frac{t}{T_0})$ associé à un saut de phase brutal de π lors du passage par le minimum de l’impulsion.

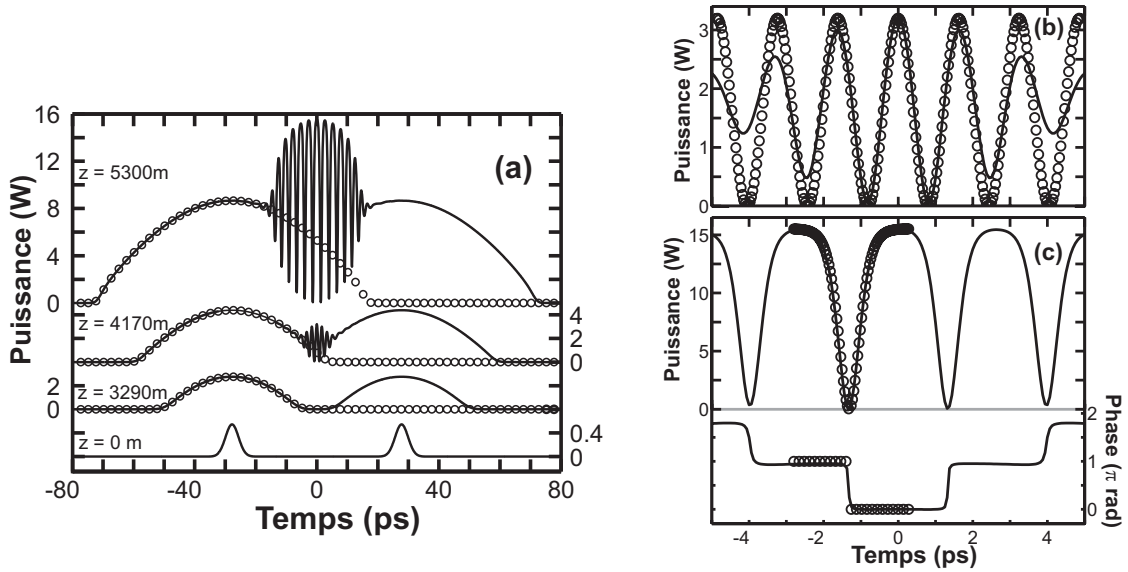


FIG. 1 – (a) Evolution de la puissance de l’impulsion pour différentes distances de propagation : pour une impulsion seule (o) et pour une paire d’impulsions espacées de 55 ps (-) (b) Oscillations obtenues dans la zone de recouvrement des impulsions après 4170 m (-), ajustement par une forme sinusoïdale(o) (c) Puissance et phase au centre de la zone de recouvrement après une distance de propagation de 5300 m (-) ajustements par la forme caractéristique d’un soliton noir (o).

Nous constatons sur la Figure 1(c) que les impulsions obtenues sont en très bon accord avec les caractéristiques des solitons noirs. Le spectre des deux impulsions est représenté figure 2(a). Remarquons la présence d’harmoniques dont l’écartement correspond bien à la fréquence du train d’impulsions.

Pour une plus grande distance de propagation, la figure 2(b) montre que les solitons générés ont acquis une vitesse relative par rapport au barycentre de la paire d’impulsions. Il ne s’agit donc pas de solitons noirs parfaits dont la vitesse relative est théoriquement nulle. Cela tient au fait que le battement initial dont ils sont issus met en jeu des impulsions ayant localement des amplitudes différentes. Une conséquence directe est que plus on s’écarte du barycentre, plus la vitesse relative des solitons va varier.

Nous constatons également que la largeur temporelle des solitons diminue adiabatiquement pour s’adapter à l’augmentation progressive de la puissance. Ce comportement constitue l’une des différences importantes par rapport à l’interaction de deux impulsions de profil $sech^2$ dans une fibre à dispersion normale sans gain décrit par Rothenberg et al. [5] où un élargissement des solitons noirs générés a été observé. Précisons que, dans le cas décrit par Rothenberg, le phénomène conduisant au recouvrement des impulsions était très éloigné de l’évolution autosimilaire d’un similariton. Les phénomènes mis en jeu étaient alors la modification profonde de la forme de chaque impulsion et l’élargissement temporel dus au ”wave-breaking” optique.

3 Modélisation de l’amplificateur Raman

Nous utilisons expérimentalement l’amplification Raman pour générer le gain [6]. L’équation(1), supposant un gain constant, est un modèle approché. Ainsi, pour modéliser

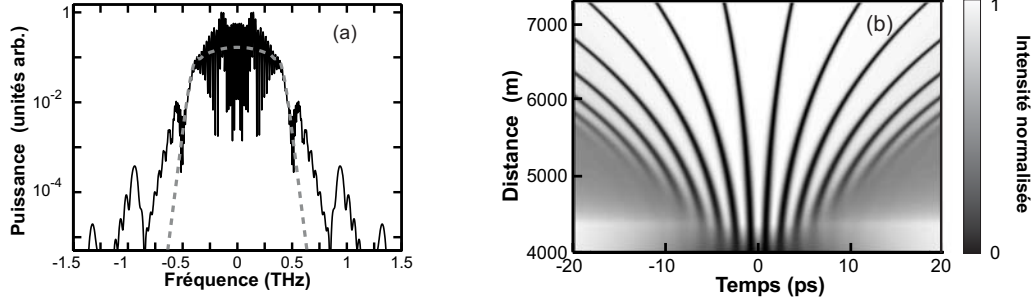


FIG. 2 – (a) Spectre après 5.3 km de propagation pour une impulsion (– gris) et pour une paire d’impulsions (–) (b) Evolution du profil d’intensité des impulsions suivant la distance de propagation. Pour chaque distance, l’intensité maximale est normalisée à 1.

avec précision la propagation de la paire d’impulsions, nous avons résolu numériquement l’ESNL sous sa forme généralisée [7], avec $R(t)$ la réponse de la silice :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = -i \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + i \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3} - \gamma \left[1 + \frac{i}{\omega_s} \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi \int_0^\infty R(t') |\psi(z, t - t')|^2 dt', \quad (4)$$

La dispersion d’ordre 3 $\beta_3 = 1.09 \cdot 10^{-4} ps^3.m^{-1}$ ainsi que les pertes linéiques sont également incluses. Ce modèle prend intrinsèquement en compte la dépendance fréquentielle du gain Raman ainsi que les phénomènes d’atténuation de la pompe lors de la propagation.

$\psi(z, t)$ est la superposition des champs signal ψ_s constitué de la paire d’impulsions, et du champ pompe ψ_u à l’origine du gain Raman. Les impulsions initiales à 1550 nm $\psi_s(0, t)$ correspondent aux caractéristiques expérimentales des impulsions délivrées par notre source laser picoseconde. La pompe ψ_u est une onde continue d’une puissance de 1.3 W délivrée par un laser Raman fonctionnant à 1455 nm.

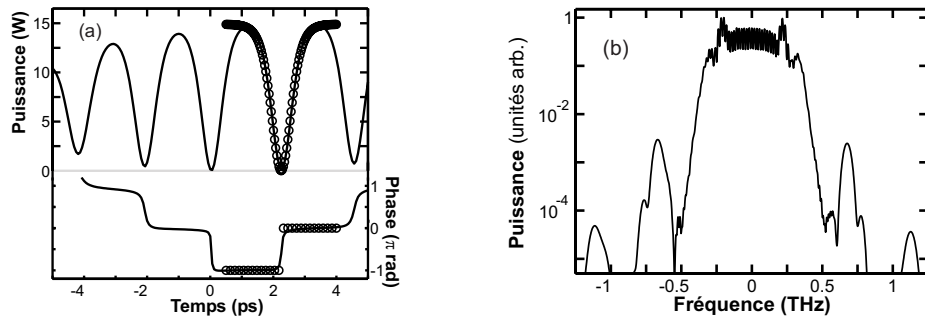


FIG. 3 – (a) Partie centrale de la zone de recouvrement : profil de puissance temporel et de phase des impulsions après 5.3 km de propagation (–). Ajustement par la forme d’un soliton noir (o) (b) Spectre de la paire d’impulsions après interaction.

Nous constatons sur la figure 3 que la modélisation réaliste des phénomènes physiques n’affecte pas le processus de formation des solitons noirs : les profils temporel et spectral ont des caractéristiques similaires à celles évoquées dans la partie précédente.

4 Résultats expérimentaux

Le dispositif expérimental de génération de similaritons est présenté figure 4(a). L'amplificateur Raman, pompé dans une configuration contraprogative, repose sur des dispositifs commerciaux, adaptés à une utilisation aux longueurs d'ondes des télécommunications optiques. Un dispositif de caractérisation spectro-temporelle basée sur une autocorrélation résolue en fréquence de type FROG [8] permet de déterminer expérimentalement les profils d'intensité et de dérive de fréquence (chirp) des impulsions d'entrée et de sortie de l'ampli.

Les résultats de la caractérisation FROG dans le cas de l'amplification d'une impulsion isolée sont présentés figure 4(b). La nature de similariton optique est attestée par la qualité des ajustements des profils expérimentaux d'intensité et de chirp par des formes respectivement paraboliques et linéaires. Notons également l'excellent accord avec les résultats issus des simulations numériques.

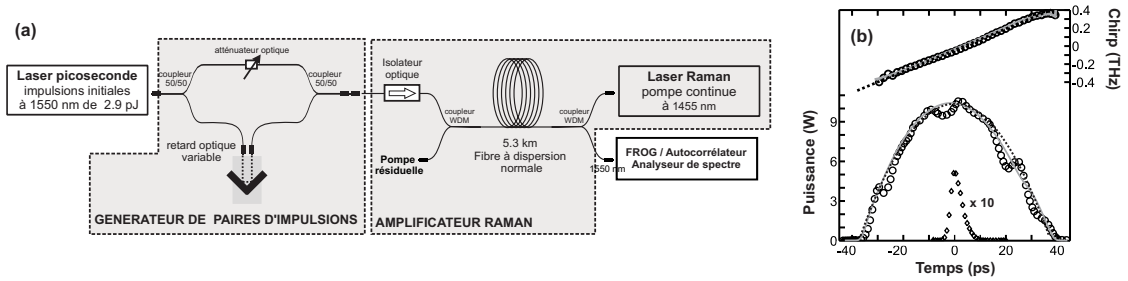


FIG. 4 – (a) Dispositif expérimental de génération de similaritons optiques (b) Profil de puissance et de chirp de l'impulsion après 5.3 km de propagation : résultats expérimentaux (o), résultats de simulations numériques (.), ajustements respectivement par une forme parabolique et linéaire (-gris); profil d'intensité de l'impulsion initiale ($\times 10$) (\diamond).

Pour caractériser expérimentalement l'interaction entre similaritons, la technique FROG se révèle inadaptée. Nous avons alors utilisé deux autres signaux à notre disposition : l'autocorrélation en intensité et le spectre qui sont représentés figure 5. Le bon accord entre données expérimentales et simulations numériques permet de conclure à la mise en évidence expérimentale de l'interaction de similaritons par la génération de solitons noirs.

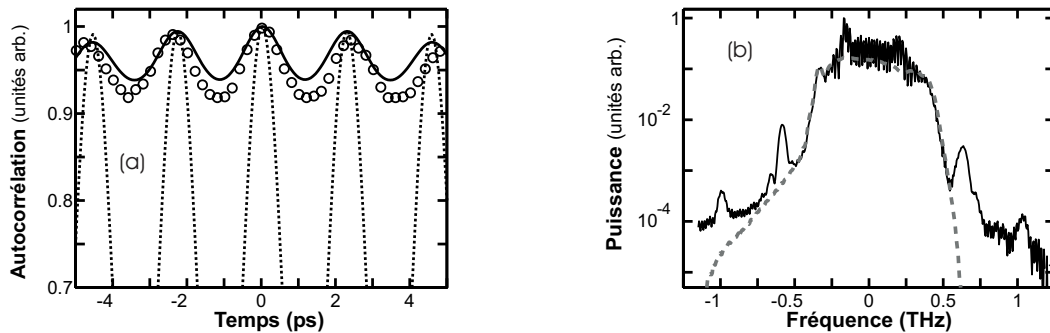


FIG. 5 – (a) partie centrale du signal d'autocorrélation de l'interaction de deux similaritons : données expérimentales (o), simulations numériques (-), ajustement par une forme sinusoïdale (..). (b) Spectre expérimental après 5,3 km de propagation (à comparer au spectre figure 3(b)).

5 Influence des paramètres de la paire d'impulsions

Nous avons déterminé expérimentalement l'influence des paramètres ΔT et U_{ini} (écart temporel et énergie initiale des impulsions) sur la fréquence f_n du train de solitons noirs généré par interaction de deux similaritons.

La figure 5(a) montre que f_n varie linéairement avec ΔT , évolution en accord avec les résultats numériques. Ce comportement est consistant avec le raisonnement tenu paragraphe 2.2 où l'on avait avant montré que $f_s = \frac{C_p \Delta T}{2\pi}$. En jouant sur la séparation temporelle des deux impulsions initiales, nous pouvons donc ajuster de manière simple le taux de répétition du train de solitons noirs.

Vis-à-vis de U_{ini} , la figure 5(b) montre une assez faible dépendance de f_n , ce qui concorde avec les propriétés des similaritons optiques et en particulier l'indépendance de leur chirp vis-à-vis de l'énergie initiale [1].

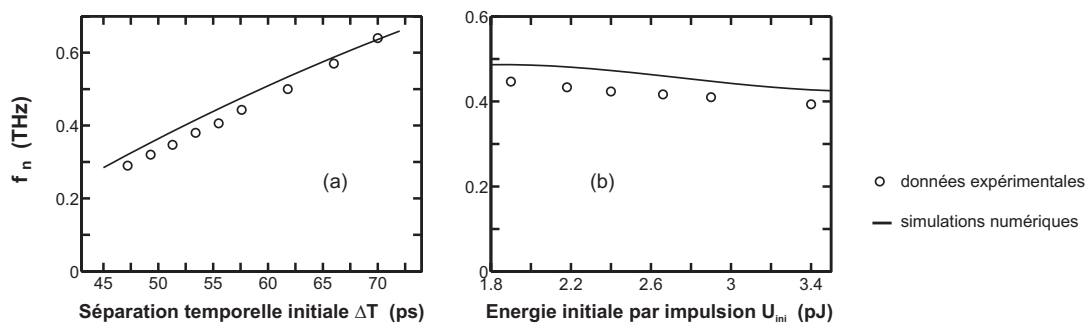


FIG. 6 – Evolution de la fréquence f_n du train de solitons noirs suivant ΔT (a) et U_{ini} (b).

Références

- [1] M. E. Fermann et al., *Self-similar propagation and amplification of parabolic pulses in optical fibers*, Phys. Rev. Lett., **84**, 6010-6013 (2000).
- [2] C. Finot et G. Millot, *Synthesis of optical pulses by use of similaritons*, Optics Express, **12**, 5104-5109 (2004).
- [3] C. Finot et al, *Synthèse temporelle d'impulsions et régénération optique de signaux télécom par similaritons Raman*, Journées Nationales d'Optique Guidée, Paris, (2004).
- [4] A. Hasegawa et F. Tappert, *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion*, Appl. Phys. Lett., **23**, 171-173 (1973).
- [5] J. Rothenberg, *Dark soliton trains formed by visible pulse collisions in optical fibers*, Optics Comm., **82**, 107-111 (1991).
- [6] C. Finot, G. Millot, C. Billet et J. M. Dudley, *Experimental generation of parabolic pulses via Raman amplification in optical fiber*, Opt. Express, **11**, 1547-1552 (2003).
- [7] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Third Edition, Academic Press, San Fransisco, (2001).
- [8] R. Trebino, *Frequency-Resolved Optical Gating. The Measurement of Ultrashort Laser Pulses*, Kluwer Academic Publishers (2000).

Oscillations de volume et ondes dans des gels de polymères pH sensibles couplés à une réaction à autocatalyse acide

Vincent Labrot, Patrick De-Kepper, Jacques Boissonade, Fabienne Gauffre*
Centre de Recherche Paul Pascal, 33600 Pessac; ()Laboratoire des IMRCP,
Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse
gauffre@chimie.ups-tlse.fr*

Résumé

Nous expérimentons et analysons un système chimiomécanique constitué d'une réaction à autocatalyse acide et d'un gel pH-sensible qui gonfle à pH élevé et s'effondre à pH faible. Dans un environnement chimique uniforme et constant le gel présente de la bistabilité entre un état gonflé et un état effondré, des ondes de contraction sans amortissement et des oscillations spatio-temporelles complexes. Nous démontrons que ces instabilités dynamiques résultent des modifications de la taille du gel en réponse à la composition chimique dans le cylindre de gel. Ces expériences nous conduisent à proposer une nouvelle voie pour la formation de motifs dans des systèmes déformables, alimentés en énergie chimique.

Abstract

We experimentally examine and analyze a chemomechanical system in which an acid autocatalytic reaction interacts with a pH-responsive gel that swells at high pH or shrinks at low pH. The reaction, the chlorite-tetrathionate reaction, which exhibits bistability in an open stirred tank reactor is operated in cylindrical soft pH-responsive hydrogel. We show that, the observed dynamical instabilities are a direct consequence of the system size changes with the chemical composition inside the cylinder of gel.

1 Introduction

L'étude des systèmes de réaction-diffusion a beaucoup contribué à la compréhension des dynamiques non-linéaires [1, 2]. L'utilisation de réacteurs continuellement alimentés en réactifs frais, dits CSTRs (Continuous-Stirred-Tank-Reactors), permet de maintenir les systèmes chimiques homogènes dans des conditions constantes de non équilibre. Pour l'étude des structures de réaction-diffusion, on utilise le plus souvent des réacteurs spatiaux ouverts alimentés par une face (ou OSFR pour One-Side-Fed-Reactors): ils sont constitués d'une pièce d'hydrogel mise au contact avec le contenu d'un CSTR. Le rôle du gel est de permettre le développement de motifs spatiaux de réaction-diffusion tout en éliminant les mouvements convectifs du mélange réactionnel. Habituellement, les gels utilisés sont chimiquement inertes et conservent une géométrie constante.

Dans les systèmes confinés la géométrie et la taille du système jouent un rôle fondamental dans les mécanismes de formation et de sélection de motifs. En outre, l'effet de la déformation des tissus biologiques sur la morphogénèse semble maintenant bien établi. Malgré cela, très peu d'études de couplage interactifs entre changements de taille ou de géométrie et les processus de réaction-diffusion ont été développés.

Les gels considérés ici sont des hydrogels de polymères. Le polymère forme un réseau tridimensionnel imbibé d'une solution aqueuse. Lorsqu'il est en contact avec un excès de solution, le gel change de volume de façon à maintenir l'équilibre entre la pression

osmotique et la tension élastique du réseau. Dans certains cas, la pression osmotique et/ou les propriétés élastiques du réseau dépendent de la composition chimique de la solution, et en particulier du pH [3].

Des oscillations de volume ont été obtenues en immergeant simplement des morceaux de gel sensibles au pH dans une réaction à pH oscillant [4]. De même, en localisant un catalyseur de la célèbre réaction de Belousov-Zabotinsky sur le réseau du gel, il est également possible d’obtenir de petites oscillations de volume, en réponse au changement de degré d’oxydation du catalyseur, tout en maintenant les concentrations au bord du gel constantes [5]. Dans ces deux cas, les déformations du gel sont asservies à la dynamique chimique et n’interviennent pas dans le mécanisme de l’instabilité. Plus récemment, des études théoriques ont montré que les déformations du gel peuvent jouer un rôle actif dans le développement d’instabilités temporelles [6, 7]. Ici, nous avons étudié expérimentalement les instabilités chimiomécaniques qui résultent du couplage entre un gel pH sensible et une réaction chimique à autocatalyse acide.

2 Couplage d’un gel pH-sensible avec la réaction CT

La réaction utilisée, la réaction Chlorite(ClO_2^-)/Tetrathionate($\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$), est une réaction d’oxydo-réduction à autocatalyse acide [8]. Elle a souvent été employée pour étudier la dynamique de fronts de réaction-diffusion. Bien que son mécanisme cinétique soit encore mal connu, son comportement cinétique peut être convenablement décrit par la relation stœchiométrique : $7\text{ClO}_2^- + 2\text{S}_4\text{O}_6^{2-} + 6\text{H}_2\text{O} \longrightarrow 7\text{Cl}^- + 8\text{SO}_4^{2-} + 12\text{H}^+$ associée à la loi de vitesse :

$$-\frac{1}{7} \frac{d[\text{ClO}_2^-]}{dt} = k[\text{ClO}_2^-][\text{S}_4\text{O}_6^{2-}][\text{H}^+]^2$$

Pour tenir compte des grandes variations de pH observées dans nos expériences (typiquement entre $p\text{H}=2$ et $p\text{H}=10$), il est nécessaire de considérer également les équilibres acido-basiques rapides : $\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{OH}^- + \text{H}^+$ et $\text{H}_2\text{SO}_4 \rightleftharpoons \text{HSO}_4^- + \text{H}^+$.

Les réactions autocatalytiques donnent généralement de la bistabilité entre deux branches d’états stationnaires en CSTR. L’une des branches correspond à des états chimiques de faible degré d’avancement, *i.e.* avec une composition très proche de celle du flux d’alimentation, on les qualifie de “non réagis” ; tandis que l’autre correspond à des états dits “réagis”, avec un état d’avancement quasi total de la réaction. Pour les expériences en OSFR, le gel est généralement alimenté par échange diffusif avec un CSTR maintenu sur la branche d’états non réagis. Il a été établi récemment que les systèmes bistables en CSTR donnent également de la bistabilité en OSFR : on parle alors de *bistabilité spatiale* [9, 10]. Dans le cas de CT [11], lorsque le CSTR est maintenu dans l’état non réagi (avec un pH de l’ordre de 10), deux types d’états stationnaires peuvent être observés. (i) Soit le gel reste complètement basique. Cette situation se produit lorsque le temps de renouvellement des réactifs dans le gel est plus bref que le temps des processus chimiques dans le gel. (ii) Soit le gel devient essentiellement acide ($p\text{H} \approx 2$), à l’exception d’une fine couche limite localisée près de la surface du gel. Ceci correspond au cas où le temps de renouvellement des réactifs dans le gel est plus long que le temps de réaction. En raison du caractère autocatalytique de la réaction les zones acides et basiques du gel sont reliées par un front de pH très raide. Ces deux états sont simultanément stables dans un large domaine de paramètres, qui s’étend jusqu’aux plus petites valeurs de $[\text{OH}^-]_0$, c’est-à-dire jusqu’à la limite $[\text{OH}^-]_0^{\text{lim}}$ de stabilité de la branche d’états non réagis du CSTR.

Nous utilisons ici un hydrogel composé de N-isopropylacrylamide et d'acrylique, réticulé par du N,N-méthylène bisacrylamide [3]. La sensibilité au pH provient de la présence des monomères acryliques, qui sont chargés pour des valeurs de pH supérieures au pK_a du polymère ($pK_a \approx 4,8$) et neutres pour des valeurs inférieures. Ainsi, à $pH=10$ le gel est chargé et gonflé sous l'effet de la forte pression osmotique exercée par les contres ions. Inversement, à $pH=2$, le gel est non chargé et possède un caractère hydrophobe. L'état d'équilibre du gel est alors un état effondré faiblement hydraté, et d'aspect turbide.

Dans les OSFR traditionnels, des gels chimiquement inertes sont utilisés et toutes les faces, sauf une, sont plaquées contre des parois du réacteur, mais ces contraintes sont incompatibles avec d'éventuels changements de volume. Pour l'étude de gels chimiosensibles alimentés, nous utilisons un CSTR dans lequel un cylindre (ou éventuellement un cône) de gel est suspendu par l'une de ses extrémités (Fig. 1). Le réacteur est conçu de façon à ce que le fluide soit rapidement renouvelé à la surface du gel et qu'il soit maintenu en position dans le champs d'observation d'une caméra vidéo.

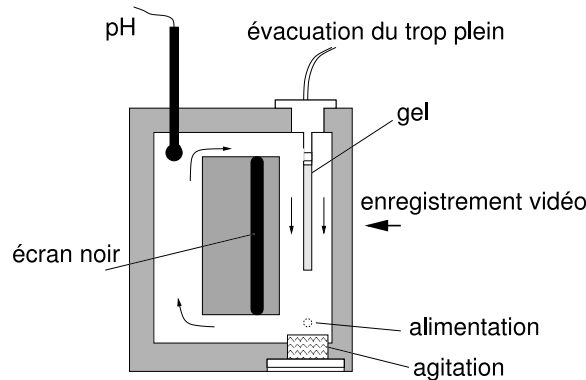


FIG. 1 – Schéma du réacteur utilisé pour l'étude des instabilités chimio-mécaniques.

Des cylindres de gels sensibles au pH mesurant typiquement 3 cm de long et 1-3mm de diamètre sont suspendus dans le réacteur. Celui-ci est continuellement alimenté par un flux de réactifs (chlorite, tétrathionate et hydroxyde) prémélangés juste avant leur injection dans le réacteur. Le seul paramètre de contrôle utilisé est la concentration $[OH^-]_0$ dans le flux entrant, les autres concentrations, la température, et le flux total étant maintenus constants. Les valeurs de paramètres étudiées sont toujours supérieures à la limite de stabilité de l'état non réagi dans le CSTR ($[OH^-]_0^{lim}$), de façon à ce que le gel soit alimenté en réactifs frais, à un pH de l'ordre de 10. Le volume du réacteur étant très supérieur à celui du gel (environ $\times 40$), la limite de stabilité du réacteur reste quasiment insensible à la présence du gel.

2.1 Etats asymptotiques du gel

Lorsque l'état initial du gel est basique ou neutre le gel reste dans un état stable, clair et gonflé quelle que soit la valeur de $[OH^-]_0$. Si une perturbation acide est appliquée à l'une ou l'autre des extrémités du gel, la dynamique de relaxation de la perturbation et l'état asymptotique atteints par le gel dépendent de la valeur de $[OH^-]_0$.

Pour des valeurs légèrement supérieures à $[OH^-]_0^{lim}$, l'extrémité perturbée du gel passe dans un état effondré, qui se propage ensuite dans l'état gonflé pour finalement

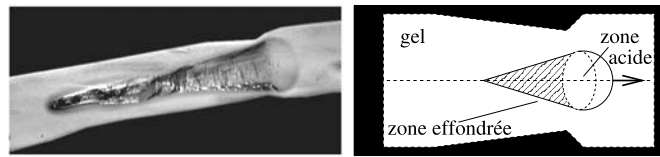


FIG. 2 – *Pulse acide et onde de contraction associée (photo et schéma de principe). Dans ce cas, l'onde se propage vers la droite. La zone acide (en gris clair sur la photo) est visualisée grâce à un indicateur de pH. La zone turbide associée à la contraction du gel (zone conique plus sombre avec reflets brillants dans la photo) suit le contour à l'arrière de la zone acide. Le diamètre initial du gel est de l'ordre de 2 mm.*

envahir tout le cylindre. Le gel reste ensuite dans cet état effondré, caractérisé par un cœur turbide et un aspect irrégulier. Cet état effondré perd sa stabilité au-delà d'une valeur seuil de $[\text{OH}^-]_0$. Le gel repasse alors dans l'état gonflé complètement transparent. Si une nouvelle perturbation acide est appliquée, le gel se contracte localement en formant un étranglement accompagné d'une zone de turbidité, qui se propage dans le cylindre (Fig.2). Après le passage de cette onde le gel regonfle, puis se maintient dans l'état gonflé transparent. L'effondrement du gel au niveau de l'étranglement peut atteindre environ 50% du diamètre initial. Nous avons constaté que la contraction du gel s'opère d'abord à proximité de la surface du gel, puis s'étend vers le centre. En effet, même si la bascule vers l'état acide commence au cœur du gel, l'effondrement du gel implique l'expulsion d'une partie de la solution, ce qui a lieu plus rapidement près du bord. L'observation de la propagation de ces ondes d'effondrement est possible dans un domaine de paramètres plus ou moins étendu selon le diamètre initial du gel et sa composition en monomère d'acide acrylique. Ces ondes possèdent les caractéristiques dynamiques d'ondes d'excitabilité. Aux plus hautes valeurs de $[\text{OH}^-]_0$, le gel perd son caractère excitable et les perturbations acides s'amortissent rapidement sans contraction significative. En outre, dans un domaine de paramètres très étroit entre le domaine excitable et le domaine de stabilité de l'état effondré, des oscillations spatio-temporelles de volume peuvent être observées (Fig.3).



FIG. 3 – *Oscillations spatio-temporelles. Le diamètre du gel mesure approximativement 0.7mm dans les parties effondrées et 1.2mm dans les parties gonflées. Les clichés sont pris à 0,20,37,55,95 et 120 minutes environ.*

Cette séquence d'états du gel est observée, avec des variations dans la valeur des bornes des différents domaines, pour des gels composés de différentes quantités d'acide acrylique, et préparés dans des moules de diamètres variables.

3 Mécanisme de l'instabilité chimiomécanique

Nous avons récemment mis en évidence expérimentalement et numériquement, qu'en OSFR la réaction CT peut développer une instabilité oscillante, dû à un mécanisme d'activation à longue portée [12, 13]. En effet, les protons, qui sont l'espèce activatrice de la réaction, diffusent plus rapidement que les autres espèces chimiques en présence. Cependant, en présence d'une concentration suffisante en polycarboxylate, l'instabilité oscillante se trouve inhibée, car les polycarboxylates sont des espèces essentiellement immobiles qui se comportent comme des "pièges" à protons, réduisant significativement la diffusion effective des protons [14].

Les gels pH-sensibles utilisés ici, comportent une proportion importante de fonctions carboxylates, ce qui leur confère leur sensibilité au pH. En conséquence, l'instabilité oscillante de réaction-diffusion est rendue inopérante dans nos expériences.

Nous proposons le mécanisme chimiomécanique suivant fondé sur la destabilisation de l'état acide du gel sous l'effet de la contraction (Fig. 4). Considérons un disque de gel correspondant à une section du cylindre, initialement dans l'état basique et gonflé (point **0**). Si une perturbation acide suffisamment importante est appliquée à ce cylindre (**0'**), le gel peut basculer vers l'état réagi du bistable (point **1**). Il commence alors à se contracter lentement (vers **2**). Si l'amplitude de la contraction est suffisamment importante, le système va franchir la limite de stabilité de l'état réagi et basculer vers l'état non-réagi. Cette bascule est plus lente que la précédente et est accompagnée d'un certain gonflement (point **3**). Le gonflement du gel se poursuit jusqu'à la valeur d'équilibre en pH basique (point **4/0**). Ce mécanisme enchaînant une bascule rapide et une dérive lente sur un bistable décrit un comportement excitable standard. Dans les cylindres de gels ce caractère excitable donne lieu à la propagation d'ondes de contraction.

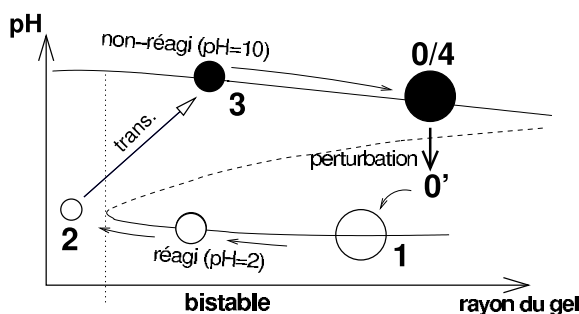


FIG. 4 – Représentation schématique du modèle d'instabilité temporelle chimio-mécanique. (—) branche d'états stables, (- - -) branche d'états instables, (ou seuil de perturbation supercritique). Code de couleur : blanc = basique; noir = acide.

Les oscillations spatio-temporelles (Fig. 3) relèvent d'un mécanisme qui met également en jeu la destabilisation de l'état acide lorsque le gel passe localement sous un diamètre critique. En effet, dans l'état totalement effondré, les cylindres sont très inhomogènes. Le rayon du cylindre varie significativement d'un endroit à un autre, de telle façon que, localement, le gel peut sortir du domaine de stabilité de l'état acide, devenir alors basique puis regonfler et rentrer de nouveau dans le domaine bistable (sous forme basique), alors que des régions voisines restent acides et contractées. La présence de contacts entre des zones acides et les parties re-gonflées peut alors déclencher la propagation d'un front acide

qui provoque un nouvel effondrement du gel. Ce cycle se répète à des positions plus ou moins aléatoire sur le cylindre.

4 Conclusion

Nous proposons ici la première mise en évidence expérimentale d'une instabilité dynamique induite par un couplage interactif entre processus chimiques non linéaires et variation de taille d'un matériau déformable chimiosensible. Ce travail ainsi que des études théoriques récentes [7] constituent de nouvelles pistes pour la formation de structures dissipatives pilotées par l'énergie chimique.

Références

- [1] R. Kapral, K. Showalter, eds. *Chemical Patterns and Waves*, Kluwer, Amsterdam, (1995).
- [2] I. Epstein, J. Pojman, eds. *An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics*, Oxford University Press, Oxford, (1998).
- [3] M. Huglin et al., *Thermoreversible swelling behaviour of hydrogels based on n-isopropylacrylamide with acidic comonomers*, *Polymer*, **38**, 5785–5791, (1997).
- [4] R. Yoshida et al., *Novel oscillating swelling-deswelling dynamic behaviour for pH-sensitive polymer gels*, *Material Science and Engineering*, **c4**, 107–113, (1996).
- [5] R. Yoshida et al., *Beating polymer gels coupled with a nonlinear chemical reaction*, *Chaos*, **9**, 260–266, (1999).
- [6] P. Borckmans et al., *A model for self-oscillating miniaturized gels.*, in *Non Linear Dynamics in Polymeric Systems*, 58-70, ACS Publications, Eds. J. Pojman et Q. Tran-Cong-Myata (2003).
- [7] J. Boissonade, *A simple chemomechanical process for self-generation of rythms and forms*. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 188302, (2003).
- [8] I. Peintler et al., *Autocatalysis and self-inhibition: coupled kinetic phenomena in the chlorite-tetrathionate reaction*, *JACS*, **126**, 6246–6247, (2004).
- [9] P. Blanchedeau, J. Boissonade, *Resolving an experimental paradox in open spatial reactors: The role of spatial bistability*, *Phys. Rev. Lett.*, **81** 5007–5010, (1998).
- [10] P. Blanchedeau et al., *Theoretical and experimental studies of spatial bistability in the chlorine dioxide-iodide reaction*, *Physica D*, **147**, 283–299, (2000).
- [11] J. Boissonade et al., *Spatial bistability and waves in a reaction with acid autocatalysis*. *Faraday Discuss.*, **120**, 353–361, (2001).
- [12] M. Fuentes et al., *Dynamical effects induced by long range activation in nonequilibrium reaction-diffusion system*, *Phys. Rev. E*, **66**, 056205, (2002).
- [13] F. Gauffre et al., *Reaction-diffusion patterns of the chlorite-tetrathionate system in a conical geometry*, *J. Phys. Chem. B*, **107**, 4452–4456, (2003).
- [14] I. Szalai et al., *Spatial Bistability in a pH Autocatalytic System: from Long to Short Range Activation*, en préparation.

Défauts topologiques des instabilités secondaires

L.Gil

Institut du non linéaire de Nice
 1361 Route des Lucioles, 06560 Valbonne
 lionel.gil@inln.cnrs.fr

Résumé

On s'intéresse aux défauts topologiques des bifurcations secondaires du type sous harmoniques des systèmes dissipatifs spatialement étendus. On montre, par des arguments de symétrie et on confirme numériquement [1], l'existence de structures ponctuelles 1/2 ou 1/3 de spirale ainsi que des défauts lignes de type paroi connectant entre eux les coeurs des défauts ponctuels.

Abstract

We focus here on the topological defects of subharmonic secondary bifurcations of dissipative spatially extended systems. Based on symmetry arguments, we predict and numerically observe [1] the existence of point defects analogous to 1/2 or 1/3 spiral together with line defect (of wall type) making the connection between the core of the point defects.

1 Introduction

Un système dissipatif spatialement étendu initialement homogène, poussé hors de l'équilibre thermodynamique par des contraintes extérieures, subit en général une première bifurcation donnant naissance à une structure spatiale périodique du type rouleaux, carrés ou hexagones [2]. A cette structure de base sont associés des défauts topologiques primaires tels les dislocations ou les paires penta-hepta [3, 4].

Variant les paramètres, cette structure spatiale peut elle même se destabiliser via une bifurcation que l'on qualifie alors de secondaire. Cette deuxième instabilité met en jeu des fréquences spatiales ou temporelles soit proches de celles de la structure primaire (instabilité de phase, compétition entre motifs), soit au contraire, proches de sous harmoniques (bifurcations par doublement de période). On s'intéresse ici aux défauts topologiques des instabilités secondaires de ce dernier type.

2 Instabilité secondaire d'un pattern homogène

A ma connaissance, la seule étude de l'interaction entre un défaut topologique primaire et une instabilité secondaire du type subharmonique concerne une équation différentielle aux dérivées partielles du type réaction-diffusion 2D, construite à partir du modèle de Rössler [5]. La première instabilité est une bifurcation de Hopf, les défauts topologiques primaires sont les spirales usuelles, et l'instabilité secondaire met en jeu un doublement de période temporelle. Proche du seuil de la deuxième bifurcation, un ensemble U de quantités physiques relevantes s'expriment

$$U = He^{+i\omega t}V_0 + \overline{H}e^{-i\omega t}\overline{V_0} + \dots + Ae^{+i\frac{\omega}{2}t}W_{\frac{2\pi}{\omega}}(t) + \overline{A}e^{-i\frac{\omega}{2}t}\overline{W_{\frac{2\pi}{\omega}}(t)} + \dots \quad (1)$$

où H est le paramètre d'ordre complexe associé à la première bifurcation et A celui associé à la seconde, ω la pulsation de la bifurcation de Hopf, V_0 le mode propre de l'instabilité primaire et $W_{\frac{2\pi}{\omega}}(t)$ une fonction $\frac{2\pi}{\omega}$ périodique. Comme on se trouve loin du premier seuil, les termes d'ordres supérieurs (...) en H ne sont plus négligeables, cependant ils n'interviennent pas explicitement dans les arguments de symétries et on peut donc les oublier dans notre discussion sur les propriétés topologiques.

L'invariance par translation dans le temps impose l'existence de tout un cercle de solutions

$$\left\{ \begin{array}{l} t \longrightarrow t + dt \\ (H, A) \longrightarrow (He^{+i\omega dt}, Ae^{+i\frac{\omega}{2}dt}) \end{array} \right\} \implies \mathcal{C} = \left\{ (H_0 e^{i\theta}, A_0 e^{i\frac{\theta}{2}}), \theta \in [0, 4\pi] \right\} \quad (2)$$

Les défauts topologiques associés sont donc du type spirale. Ils se caractérisent par un coeur où les amplitudes H et A s'annulent et une circulation des phases de H et A le long de toutes courbes fermées entourant le coeur du défaut égale respectivement à $\pm 4\pi$ et $\pm 2\pi$ (fig.1.1) (on notera $(\pm 2, [\pm 1])$, l'unité étant 2π). Il est important de noter que les arguments topologiques ne nous assurent la stabilité que de ces défauts $(\pm 2, [\pm 1])$. Or après la première bifurcation, les défauts topologiques stables sont de la forme $(\pm 1, [0])$. Que va t il donc se passer au passage de la bifurcation secondaire? Proche de la bifurcation secondaire, la topologie de l'espace des solutions est bien décrite par (2). Mais comme l'amplitude A est faible, on peut esperer que la topologie de H soit dominante. Le défaut primaire doit persister et la circulation de H autour du coeur doit rester égale à $\pm 2\pi$. A cause de (2), la phase de A ne va tourner que de π . On prédit donc, et on observe numériquement (fig.1.2) [5], la formation spontanée d'une ligne semi infinie du type paroi de retournement ($A \longrightarrow -A$).

3 Instabilité secondaire d'une structure rouleaux

On suppose maintenant que la première bifurcation a donné naissance à une structure stationnaire de rouleaux. Près de ce premier seuil, un ensemble U de quantités physiques relevantes s'écrit alors

$$U = Qe^{+ikx}V_0 + \overline{Q}e^{-ikx}\overline{V_0} + \dots \quad (3)$$

Le défaut topologique associé est une dislocation et on s'intéresse dans la suite au devenir de cette dislocation en présence d'une instabilité secondaire du type subharmonique. Nous allons nous restreindre aux cas particuliers d'une bifurcation secondaire du type doublement de période spatial, stationnaire ou du type Hopf.

3.1 Cas d'une instabilité secondaire stationnaire

Dans ce cas, au seuil de la bifurcation secondaire, la collection U s'écrit

$$U = Qe^{+ikx}V_0 + \overline{Q}e^{-ikx}\overline{V_0} + \dots \left\{ \begin{array}{l} Ae^{+i\frac{k}{2}x}W_{\frac{2\pi}{k}}(x) + Be^{+i\frac{k}{2}x}\mathcal{P}W_{\frac{2\pi}{k}}(x) + \\ \overline{A}e^{-i\frac{k}{2}x}\overline{W}_{\frac{2\pi}{k}}(x) + \overline{B}e^{-i\frac{k}{2}x}\overline{\mathcal{P}W}_{\frac{2\pi}{k}}(x) \end{array} \right. + \dots \quad (4)$$

où \mathcal{P} désigne l'opérateur parité. L'invariance par translation d'espace entraine l'existence d'un cercle de solutions:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \longrightarrow x + dx \\ (Q, A, B) \longrightarrow (Qe^{+ikx}, Ae^{+i\frac{k}{2}dx}, Be^{-i\frac{k}{2}dx}) \end{array} \right\} \implies \mathcal{C} = \left\{ (Q_0 e^{i\theta}, A_0 e^{i\frac{\theta}{2}}, B_0 e^{-i\frac{\theta}{2}}), \theta \in [0, 4\pi] \right\} \quad (5)$$

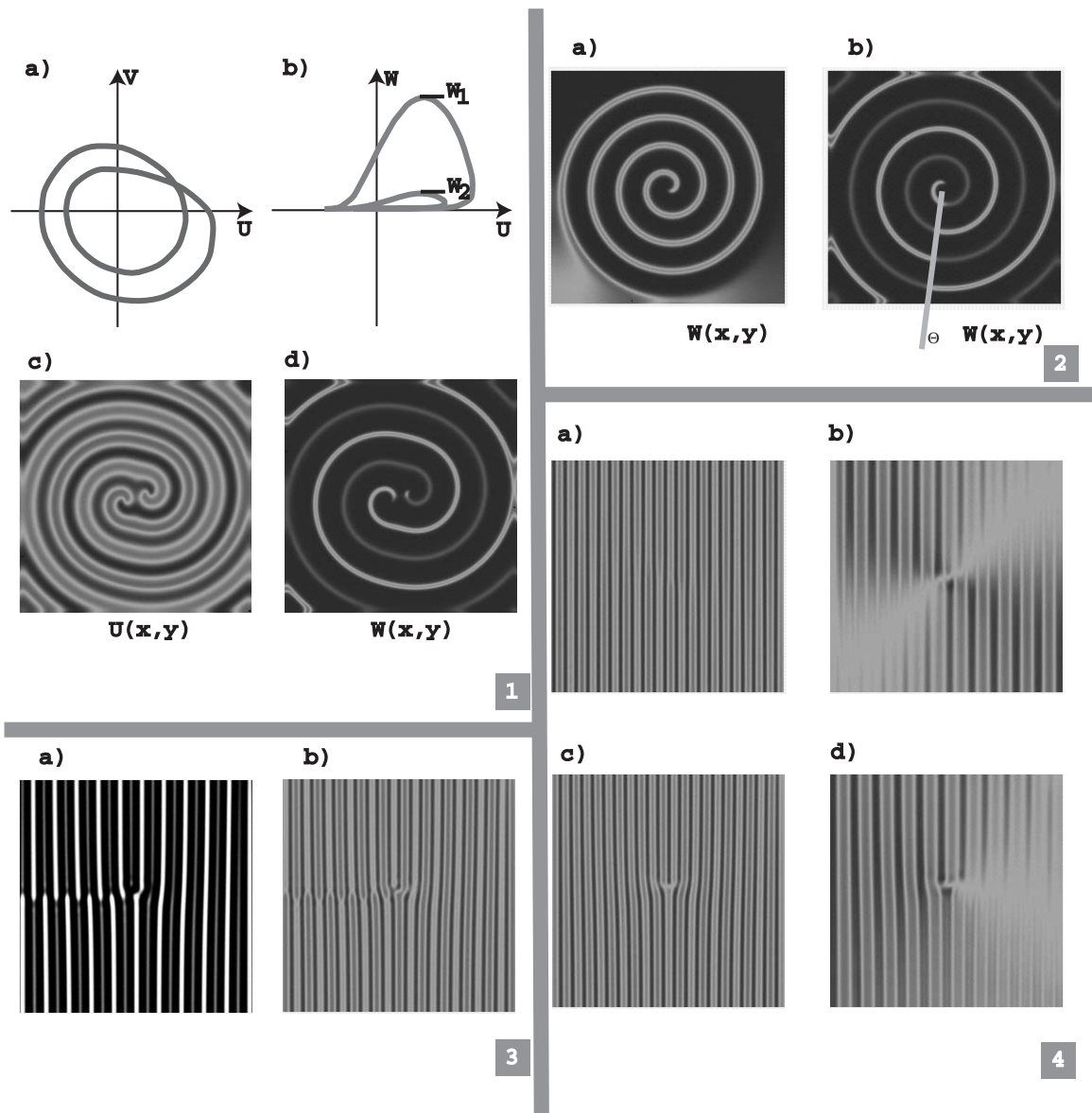


FIG. 1 – **1:** Modèle de Rössler sans espace: projection selon 2 plans (1a: (u, v) et 1b: (u, w)) du cycle limite en régime de doublement de période. 1c et 1d: modèle de Rössler avec espace (resp. $U(x, y)$ et $W(x, y)$), en régime de période doubling et en présence d'un défaut $(2, [1])$. **2:** Modèle de Rössler: passage de la bifurcation secondaire (avant: 2a, après: 2b) par un défaut spiral primaire et formation de la ligne de paroi. **3:** Bifurcation secondaire stationnaire d'une structure de rouleaux en présence d'une dislocation primaire $(1, [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}])$. 3a diffère de 3b par la palette de couleur qui accentue le mode spatial de l'instabilité secondaire. **4:** Bifurcation secondaire de type Hopf d'une structure rouleaux. 4a et 4b sont associés à $(0, [1, 1])$ tandis que 4c et 4d à $(1, [1, 0])$. 4a et 4c représentent le champ U tandis que 4b et 4d sa dérivée temporelle.

Les défauts topologiques sont donc de la forme $(\pm 2, [\pm 1, \mp 1])$. Mais, comme dans le cas de la bifurcation secondaire par doublement de période temporelle, on prédit et on observe numériquement la formation spontanée d'un défaut ligne du type paroi dans le voisinage d'une dislocation au passage du seuil de la bifurcation secondaire $(\pm 1, [\pm \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}])$ (fig.1.3).

3.2 Cas d'une instabilité secondaire du type Hopf

Près du seuil de l'instabilité secondaire, la collection U s'écrit

$$U = Qe^{+ikx}V_0 + \bar{Q}e^{-ikx}\bar{V}_0 + \begin{cases} e^{+i\omega t} \left(Ae^{+i\frac{k}{2}x}W_{\frac{2\pi}{k}}(x) + Be^{-i\frac{k}{2}x}\mathcal{P}W_{\frac{2\pi}{k}}(x) \right) + \\ e^{-i\omega t} \left(\bar{A}e^{-i\frac{k}{2}x}\bar{W}_{\frac{2\pi}{k}}(x) + \bar{B}e^{i\frac{k}{2}x}\bar{\mathcal{P}}W_{\frac{2\pi}{k}}(x) \right) \end{cases} + \dots \quad (6)$$

Les symétries relevantes sont les translation de temps et d'espace

$$\begin{cases} t \longrightarrow t + dt \\ (Q, A, B) \longrightarrow (Q, Ae^{+i\omega dt}, Be^{+i\omega dt}) \end{cases} \quad \begin{cases} x \longrightarrow x + dx \\ (Q, A, B) \longrightarrow (Qe^{ikdx}, Ae^{+i\frac{k}{2}dx}, Be^{-i\frac{k}{2}dx}) \end{cases} \quad (7)$$

Elles entraînent l'existence d'une famille à deux paramètres de solutions

$$\mathcal{T} = \left\{ (Qe^{i\theta}, Ae^{i(\alpha+\frac{\theta}{2})}, Be^{i(\alpha-\frac{\theta}{2})}, (\theta, \alpha) \in [0, 4\pi] \times [0, 2\pi]) \right\} \quad (8)$$

A cette topologie sont associés deux types de défauts topologiques:

1. Les défauts spirales classiques, de circulation $(0, [\pm 1, \pm 1])$, associés uniquement à l'invariance par translation dans le temps (fig.1.4a et 4b).
2. Les défauts 1/2 spirale, de circulation $(\pm 1, [\pm 1, 0])$ ou $(\pm 1, [0, \mp 1])$, associés à un défaut primaire du type dislocation et mélangeant intimement les invariances par translation d'espace et de temps. (fig.1.4c et 4d).

Pour bien comprendre le rôle joué par l'invariance par translation dans le temps, il suffit de comparer les défauts 1/2 spirales avec les défauts $(\pm 1, [\pm \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}])$ du cas stationnaire. En effet pour ces derniers, le saut de phase de $\pm\pi$ imposait l'existence d'une paroi de retournement. Mais en présence d'une symétrie supplémentaire, le saut de phase peut "s'étaler dans cette symétrie". On passe ainsi d'une zone de raccordement rapide (type "Ising") à une transition plus continue (type "Néel").

4 Instabilité secondaire d'un pattern hexagonal

On suppose qu'un système initialement homogène a subit une première bifurcation qui a donné naissance à un pattern hexagonal de la forme

$$U_{hex} = \sum_{j=0}^2 H_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} + cc + \dots \quad \vec{k}_j = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\lambda} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6} + j\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{6} + j\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Ce réseau vérifie $U(\vec{r} + \vec{a}_0) = U(\vec{r} + \vec{a}_1) = U(\vec{r})$ avec $\vec{a}_0 = \lambda(1, 0)$ et $\vec{a}_1 = \lambda(\cos(\frac{\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{3}))$. Le groupe de symétrie de l'hexagone contient 12 termes $(\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}}, \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}}^2, \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}}^3, \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}}^4, \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}}^5, \mathcal{P}_y, \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}}\mathcal{P}_y, \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}}^2\mathcal{P}_y, \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}}^3\mathcal{P}_y, \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}}^4\mathcal{P}_y, \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}}^5\mathcal{P}_y)$. En notant g_i les éléments successifs de \mathcal{G} , on montre que près du seuil de l'instabilité secondaire, U s'exprime [6]

$$U = U_{hex} + \mathcal{W} + \dots \quad \text{avec} \quad \mathcal{W} = e^{+i\omega t} \left(\sum_{j=1}^{12} A_j e^{ig_j \vec{k}_j \cdot \vec{r}} g_j \zeta_{hex}(\vec{r}) \right) + cc + \dots \quad (10)$$

où A_j sont des coefficients complexes de proportionnalité, $\zeta_{hex}(\vec{r})$ une fonction \vec{a}_0 et \vec{a}_1 périodique et où $i\vec{\kappa}$ est un vecteur de floquet imaginaire pur.

L'analyse théorique prédit l'existence d'un grand nombre d'instabilités secondaires génériques qui se distinguent les une des autres par leur vecteur d'onde κ et la forme des vecteurs propres critiques ($A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$) [6]. Nous n'allons nous intéresser ici qu'à une seule situation que nous sélectionnons parce qu'elle a été observée dans des simulations numériques de l'équation dite de Kuramoto Shivasinky amorti (KSA) [7]. Elle correspond à $\omega \neq 0$, $\kappa = \frac{1}{\sqrt{3}}k_0$, $\vec{\kappa}, \vec{k}_0 = \frac{\pi}{6}$ et à un sous espace propre de dimension 2 engendré par

$$V_1 = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1\} \quad V_2 = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0\} \quad (11)$$

La perturbation \mathcal{W} correspondante, s'exprimant

$$\mathcal{W} = e^{i\omega t} \left\{ \left[\alpha_1 \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}} + \alpha_2 Id \right] \left[Id + \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}}^2 + \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}}^4 \right] \left[Id + \mathcal{P}_y \right] \left[e^{+i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \zeta_{hex}(\vec{r}) \right] \right\} + cc + \dots \quad (12)$$

est donc invariante par $\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}}$, par \mathcal{P}_y , et satisfait à $\mathcal{W}(\vec{r} + \vec{a}_0, t) = \mathcal{W}(\vec{r}, t + \frac{2}{3}\frac{2\pi}{\omega})$ et $\mathcal{W}(\vec{r} + \vec{a}_1, t) = \mathcal{W}(\vec{r}, t + \frac{1}{3}\frac{2\pi}{\omega})$. Remarquant que V_1 et V_2 s'échangent par $\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{6}}$, on en déduit, comme dans le cas de l'apparition spontanée d'ondes dans un milieu homogène invariant par parité, que le poids relatif de α_1 et α_2 dépend des termes non linéaires de compétition. On s'attend donc soit à un régime de coexistence, caractérisé par $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, soit à un régime monomode où seule l'une des deux amplitudes est nulle.

L'invariance par translation dans le temps $t \rightarrow t + dt$, $A_j \rightarrow A_j e^{i\omega dt}$ et les invariances par translation d'espace

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} \rightarrow \vec{r} + s_0 \vec{a}_0 \\ H_1 \rightarrow H_1 e^{+is_0 2\pi} \\ H_2 \rightarrow H_2 e^{-is_0 2\pi} \\ H_3 \rightarrow H_3 \\ A_1 \rightarrow A_1 e^{+is_0 \frac{4}{3}\pi} \quad A_2 \rightarrow A_2 e^{+is_0 \frac{2}{3}\pi} \\ A_3 \rightarrow A_3 e^{-is_0 \frac{2}{3}\pi} \quad A_4 \rightarrow A_4 e^{-is_0 \frac{4}{3}\pi} \\ A_5 \rightarrow A_5 e^{-is_0 \frac{2}{3}\pi} \quad A_6 \rightarrow A_6 e^{+is_0 \frac{2}{3}\pi} \\ A_7 \rightarrow A_7 e^{+is_0 \frac{4}{3}\pi} \quad A_8 \rightarrow A_8 e^{+is_0 \frac{2}{3}\pi} \\ A_9 \rightarrow A_9 e^{-is_0 \frac{2}{3}\pi} \quad A_{10} \rightarrow A_{10} e^{-is_0 \frac{4}{3}\pi} \\ A_{11} \rightarrow A_{11} e^{-is_0 \frac{2}{3}\pi} \quad A_{12} \rightarrow A_{12} e^{+is_0 \frac{2}{3}\pi} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{r} \rightarrow \vec{r} + s_1 \vec{a}_1 \\ H_1 \rightarrow H_1 e^{+is_1 2\pi} \\ H_2 \rightarrow H_2 \\ H_3 \rightarrow H_3 e^{-is_1 2\pi} \\ A_1 \rightarrow A_1 e^{+is_1 \frac{2}{3}\pi} \quad A_2 \rightarrow A_2 e^{+is_1 \frac{4}{3}\pi} \\ A_3 \rightarrow A_3 e^{+is_1 \frac{2}{3}\pi} \quad A_4 \rightarrow A_4 e^{-is_1 \frac{2}{3}\pi} \\ A_5 \rightarrow A_5 e^{-is_1 \frac{4}{3}\pi} \quad A_6 \rightarrow A_6 e^{-is_1 \frac{2}{3}\pi} \\ A_7 \rightarrow A_7 e^{+is_1 \frac{2}{3}\pi} \quad A_8 \rightarrow A_8 e^{+is_1 \frac{4}{3}\pi} \\ A_9 \rightarrow A_9 e^{+is_1 \frac{2}{3}\pi} \quad A_{10} \rightarrow A_{10} e^{-is_1 \frac{2}{3}\pi} \\ A_{11} \rightarrow A_{11} e^{-is_1 \frac{4}{3}\pi} \quad A_{12} \rightarrow A_{12} e^{-is_1 \frac{2}{3}\pi} \end{array} \right. \quad (13)$$

entraînent l'existence d'une famille de solutions à 3 paramètres continus. Deux types de défauts topologiques semblent évidents:

1. le type spirale $(0, 0, 0, [\pm 1, \pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1])$, associé uniquement à l'invariance par translation dans le temps.
2. le type double paires penta-hepta, tel $(\pm 2, \mp 1, \mp 1, [\pm 1, \pm 1, 0, \mp 1, \mp 1, 0, \pm 1, \pm 1, 0, \mp 1, \mp 1, 0])$, associé à l'invariance par translation (ici $\pm(\vec{a}_0 + \vec{a}_1)$).

Après la première bifurcation, les défauts topologiques sont des paires penta-hepta. Comme on l'a déjà observé dans les cas de la bifurcation secondaire soit d'une bifurcation de Hopf soit d'un pattern de rouleaux, on s'attend à la persistance de la topologie des paires penta-hepta dans un voisinage du seuil de la bifurcation secondaire. Considérons par exemple

la paire associée à \vec{a}_0 . On s'attend donc à une circulation de $(1, -1, 0, [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}])$. On a vu, dans le cas de la bifurcation secondaire de type Hopf d'une structure rouleaux, que l'invariance par translation dans le temps pouvait "étaler" les sauts de phase. Mais il est clair ici que l'on ne peut pas rendre simultanément entières toutes les circulations secondaires. Les possibilités sont

1. déphasage temporelle correspondant à $+1/3$ de spirale (resp. $-2/3$). On obtient alors $(1, -1, 0, [1, \frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}])$. Il est important de remarquer que les composantes secondaires dont la circulation est entière correspondent exactement à V_2 . Par conséquent, ou bien on se trouve dans un régime monomode, et la combinaison précédente est un défaut topologique exact (puisque les circulations non entières correspondent à des amplitudes nulles), ou bien on se trouve dans un régime bimode, et le défaut $1/3$ de spirale est obligatoirement raccordé à un défaut ligne, du type paroi de retournement.
2. déphasage temporelle correspondant à $-1/3$ de spirale (resp. $+2/3$). On obtient alors $(1, -1, 0, [\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}, -1, -\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}, -1, -\frac{2}{3}, 0])$. Cette fois, ce sont les composantes de V_1 qui ont des circulations entières, et les conclusions sont donc similaires au cas précédent en échangeant les rôles joués par V_1 et V_2

5 Conclusion

Les défauts topologiques des instabilités secondaires ont des propriétés remarquables. D'abord, ils mélangent intimement les invariances par translation d'espace et de temps pour donner naissance à des défauts avec des charges topologiques qui semblent fractionnaires ($1/2$ et $1/3$ de spirale). Ensuite, et les conséquences sur la dynamique sont plus importantes, ils sont souvent associés à des défauts lignes, du type parois de retournement. Ces lignes connectent entre eux les défauts ponctuels de la structure primaire. Ces défauts ne sont plus alors des objets ponctuels qui interagissent par leur champ lointain, mais plutôt les extrémités actives d'une ligne susceptible de se mouvoir, se tordre, se replier....

Références

- [1] L. Gil, *Topological Defects of secondary instabilities*, en préparation.
- [2] M. C. Cross et P.C. Hohenberg, *Pattern formation outside of equilibrium*, Rev. Mod. Phys. **65**, 851, (1993).
- [3] N. D. Mermin, *The topological theory of defects in ordered media*, Rev. Mod. Phys., **51**, 591, (1979).
- [4] S. Ciliberto, P. Couillet, J. Lega, E. Pampaloni et C. Perez-Garcia, *Defects in roll-hexagon competition*, Phys. Rev. Lett., **65**, 2370, (1990).
- [5] A. Goryachev, H. Chaté, et R. Kapral, *Synchronisation Defects and Broken Symmetry in Spiral Wave*, Phys. Rev. Lett., **80**, 873, (1998).
- [6] C. Pirat et L. Gil, *Wave vectors selection at the threshold of a generic instability of a hexagonal stationary pattern*, Physica D, **179**, 92, (2003).
- [7] I. Daumont, K. Kassner, C. Misbah et A. Valance, *Cellular self-propulsion of two-dimensional dissipative structures and spatial-period tripling Hopf bifurcation*, Phys. Rev. E, **55** (6), 6902, (1997).

Morpho-élasticité

Alain Goriely et Martine Ben Amar

*Laboratoire de physique statistique, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond,
F75231 Paris Cedex 05, France*

goriely@math.arizona.edu, <http://www.math.arizona.edu/~goriely>

Résumé

La morpho-élasticité est la théorie de la croissance en milieu élastique. Elle s'inspire des théories de la thermo-élasticité et l'élasto-plasticité qui considèrent des effets anélastiques dans des milieux continus. Le but de cet article est de donner un aperçu des idées, enjeux, et applications de cette théorie en illustrant les concepts clés sur un exemple simple: la croissance différentielle d'une coque sphérique incompressible.

Abstract

Morphoelasticity is the theory of growth in elastic media. It is inspired by the theories of thermoelasticity and elastoplasticity which include anelastic effects in continuum mechanics. The goal of this paper is to address important issues associated with morphoelasticity and to illustrate them on a simple example: the differential growth of an incompressible elastic shell.

1 Introduction

Il existe en physique et en chimie différents mécanismes de croissance contrôlés par les effets de diffusion et accréation à la surface. Par opposition, en biologie la croissance volumétrique, c'est-à-dire l'augmentation de volume par une source extérieure, est impliquée dans de nombreux processus tels que la morphogénèse, la régulation physiologique ou même des désordres pathologiques [1]. C'est en général, un procédé extrêmement complexe qui implique des interactions à multi-échelle entre des phénomènes physiques, bio-chimiques et génétiques. La discussion pour cette contribution sera limitée aux aspects mécaniques de la croissance et en particulier l'interaction subtile entre croissance et contraintes dans les tissus mous.

1.1 Contraintes internes

Un des aspects les plus fascinants de la mécanique de la croissance est la possibilité de produire des contraintes internes [2]. Ces contraintes sont présentes à l'intérieur des tissus sans contrainte externe et peuvent se mettre en évidence lorsque le tissu est coupé entraînant un relâchement de ces contraintes. Par exemple, lorsqu'un petit morceau de cylindre d'une artère est coupée, le cylindre s'ouvre brusquement, indiquant clairement que le cylindre était initialement en état de contrainte [3]. Dans les artères, ces contraintes jouent un rôle important pour la régulation des pics de contraintes pendant le fonctionnement physiologique. L'existence de ce type de contraintes est une propriété fondamentale des tissus et avait déjà été mise en évidence en botanique au 19^{ème} siècle à travers les travaux de Sachs et DeVries [4, 5]. L'existence de ces contraintes liées à la croissance se comprend facilement. Considérons deux cylindres coaxiaux et collés ensemble. Si le cylindre intérieur

croît plus vite que le cylindre extérieur, le cylindre intérieur est en compression et le cylindre extérieur en traction radiale. Le tout crée en fait une structure beaucoup plus rigide que chaque cylindre individuellement.

1.2 Contraintes et instabilités

Il est bien connu que des milieux élastiques sous chargement peuvent devenir instables à travers des instabilités du type flambage. Ce type de problème est classique dans la mécanique des ingénieurs [6] mais pourrait également jouer un rôle important en morphogénèse. Par exemple, il a été suggéré que le procédé d’invagination chez les oursins [7, 8] pourrait être induit par une instabilité de flambage qui se retrouve dans des expériences modèles sur les gels. [9, 10]. Récemment nous avons montré que les contraintes induites par une croissance anisotrope sont suffisantes pour créer une instabilité de flambage dans des coques épaisses mais aussi que certains type de croissance aide le matériau à se stabiliser contre d’autres effets de flambage [11].

1.3 Description

Au niveau biomécanique, les tissus mous sont susceptibles de subir de larges déformations et sont en général anisotropes et inhomogènes. Une description correcte de ce genre de comportement requiert donc la théorie de l’élasticité finie où le comportement de corps hyperélastiques sous contrainte est défini par une relation constitutive, l’énergie des déformations [12, 13, 14]. La croissance elle-même peut être modélisée par une décomposition multiplicative du gradient des déformations due à Rodriguez *et. al.* [15] et similaire aux décompositions que l’on retrouve en élasto-plasticité [16]. Plus précisément, on suppose que le tenseur des déformations est le produit d’un tenseur de croissance, décrivant localement l’évolution d’un élément de masse sans contrainte géométrique ou mécanique et d’un tenseur de déformation élastique assurant l’intégrité et la compatibilité du matériau. Cette approche, appelée ici morpho-élasticité, a été utilisée pour la modélisation de divers systèmes physiologiques tels que les artères, le cartilage, les fibres musculaires, les tissus cardiaques et les tumeurs cancéreuses [13, 12, 17]. Le tenseur de croissance peut être couplé à la position, aux tenseurs des déformations ou contraintes, à la densité des nutriments. Ici, nous étudions le cas de la croissance différentielle, c.-à-d. quand la croissance dépend de la position à l’intérieur des tissus [18].

2 Décomposition de la déformation

La déformation d’un corps est donnée par $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ où \mathbf{X} (resp. \mathbf{x}) décrit les coordonnées matérielles d’un point dans une configuration de référence (resp. configuration instantanée). Soit $\mathbf{B}_{\text{inc}} = \text{Grad}(\chi)$ le gradient de la déformation obtenu après une croissance élastique incrémentale. La décomposition de ce tenseur se fait en un produit d’un tenseur de croissance \mathbf{G}_{inc} par un tenseur de déformations élastiques \mathbf{A} [15]:

$$\mathbf{B}_{\text{inc}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G}_{\text{inc}}, \quad (1)$$

La réponse élastique du tissu est déterminée par la fonction $W = W(\mathbf{A})$ qui donne la relation [19]

$$\mathbf{T} = \mathbf{A} \cdot W_{\mathbf{A}} - p\mathbf{1}. \quad (2)$$

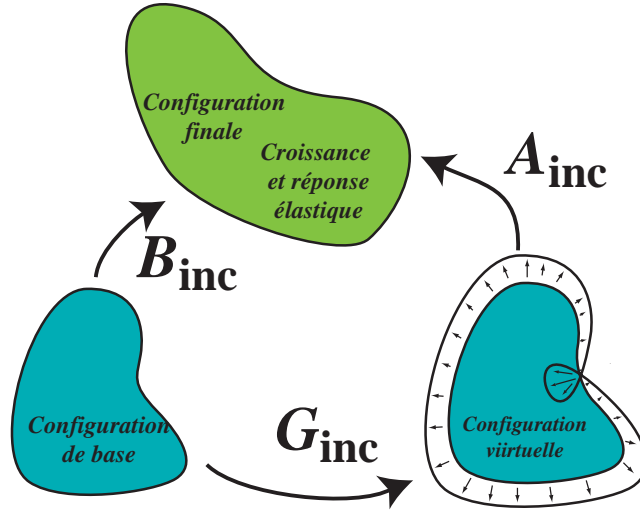


FIG. 1 – Décomposition de la déformation en partie croissance G et élastique A .

\mathbf{T} est le tenseur des contraintes (de Cauchy), $W_{\mathbf{A}}$ est la dérivée de W par rapport à \mathbf{A} et p est la pression hydrostatique associée à la condition d'incompressibilité. L'équation pour l'équilibre mécanique est donnée par

$$\operatorname{div}(\mathbf{T}) = 0. \quad (3)$$

Si le corps subit une charge hydrostatique P , Les conditions aux bords sont données par les valeurs de T le long de \mathbf{n} aux bords: $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -P\mathbf{n}$.

2.1 Exemple

Comme exemple, considérons le cas de la croissance d'une coque incompressible et isotrope en séchage (résorption) et sous pression hydrostatique. Nous supposons la croissance isotrope mais inhomogène et fonction de la position radiale r c'est-à-dire: $\mathbf{G} = g(r)\mathbf{1}$. Cette fonction représente en fait l'effet cumulatif de la croissance après de multiples étapes incrémentales. Des expériences numériques sur l'effet cumulatif de la croissance montrent qu'une forme linéaire représente très bien les effets de croissance et nous prenons donc $g(r) = 1 + \nu(r - a)$ où ν est positif pour la croissance et négatif pour le séchage. Nous considérons ici le cas d'une coque en séchage sous pression P . Dans ce cas,

$$\mathbf{B} = \operatorname{diag}(\partial_{Rr}, r/R, r/R), \quad \mathbf{A} = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad (4)$$

et comme le matériau est incompressible ($\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, $\alpha_1 = \alpha^{-2}$) et néo-hookéen, on a

$$W = \mu(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 3). \quad (5)$$

Les rayons sont $a = r(A)$ and $b = r(B)$ et la déformation est donc donnée par

$$R^3 = A^3 + 3 \int_a^r r^2/g^3(r) dr. \quad (6)$$

La seule inconnue est la valeur de a qui est obtenue en résolvant le problème de conditions aux limites donné sur la composante radiale du tenseur de Cauchy (voir Fig. 2).

$$t_1(r) = \int_a^r \frac{\alpha}{r} \partial_\alpha [W_{sh}(\alpha^{-2}, \alpha, \alpha)] dr \quad (7)$$

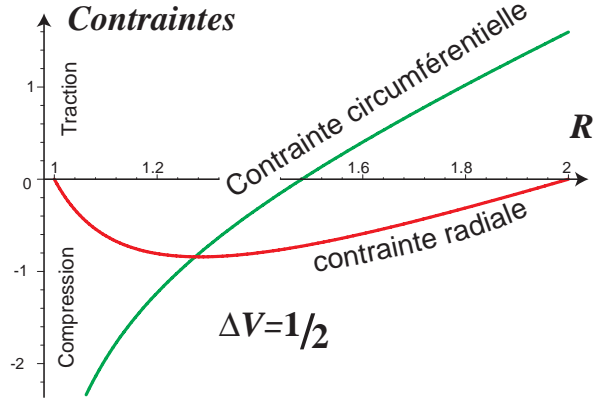


FIG. 2 – Contraintes internes radiales et circumférentielles dues au séchage ($\Delta V = 2$, i.e. $\nu = 0.344$) pour une coque élastique $A = 1, B = 2$ and $\mu = 1$.

Avec les conditions $t_1(a) = 0$ et $t_1(b) = -P$. Une fois que la constante a est déterminée les déformations sont données par $\alpha = r/(Rg)$ et la contrainte circumférentielle est $t_2 = t_1 + \frac{\alpha}{2g^3} \partial_\alpha [W_{\text{sh}}(\alpha^{-2}, \alpha, \alpha)]$. La constante ν est reliée à l'augmentation de volume $\Delta V = (b^3 - a^3)/(B^3 - A^3)$. On voit que le séchage crée une contrainte interne radiale compressive.

3 Instabilité

L'analyse précédente nous donne une solution complète du problème radial et la question est maintenant de déterminer sa stabilité. En particulier, on voudrait savoir si les contraintes internes produites par la croissance sont suffisantes pour destabiliser la coque, indépendamment des charges extérieures. Pour étudier la stabilité, on considère les déformations axisymétriques superimposées à la déformation radiale:

$$\text{grad}(\chi) = \text{grad}(\chi^{(0)}) + \epsilon \text{grad}(\chi^{(1)}) \quad (8)$$

ce qui implique

$$\mathbf{B} = (\mathbf{1} + \epsilon \mathbf{B}^{(1)}) \cdot \mathbf{B}^{(0)}, \quad (9)$$

où l'on a $\mathbf{B}^{(1)} = \text{grad}(\chi^{(1)})$. De façon similaire $\mathbf{A} = (\mathbf{1} + \epsilon \mathbf{A}^{(1)}) \cdot \mathbf{A}^{(0)}$. On développe aussi le tenseur de Cauchy $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(0)} + \epsilon \mathbf{T}^{(1)} + O(\epsilon^2)$ et les relations constitutives au premier ordre [11]

$$\mathbf{T}^{(0)} = \mathbf{A}^{(0)} \cdot W_{\mathbf{A}}^{(0)} - p^{(0)} \mathbf{1}, \quad (10)$$

$$\mathbf{T}^{(1)} = \mathcal{L} : \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(0)} \cdot W_{\mathbf{A}}^{(0)} - p^{(1)} \mathbf{1}, \quad (11)$$

$$\mathcal{L} : \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{A}^{(0)} \cdot W_{\mathbf{A}\mathbf{A}}^{(0)} : \mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(0)}, \quad (12)$$

où $p = p^{(0)} + \epsilon p^{(1)}$, et \mathcal{L} le tenseur du quatrième ordre des modules élastiques instantanés (voir [19, p. 412]), et $W_{\mathbf{A}}^{(0)}, W_{\mathbf{A}\mathbf{A}}^{(0)}$ sont les dérivées premières et secondes de W . L'analyse de stabilité se ramène à donner les valeurs critiques des paramètres pour lesquels, l'équation

$$\text{div}(\mathbf{T}^{(1)}) = 0 \quad (13)$$

avec des conditions aux limites au premier ordre, possède une solution non-triviale (instabilité donc au sens des bifurcations et non basée sur les variations de l'énergie).

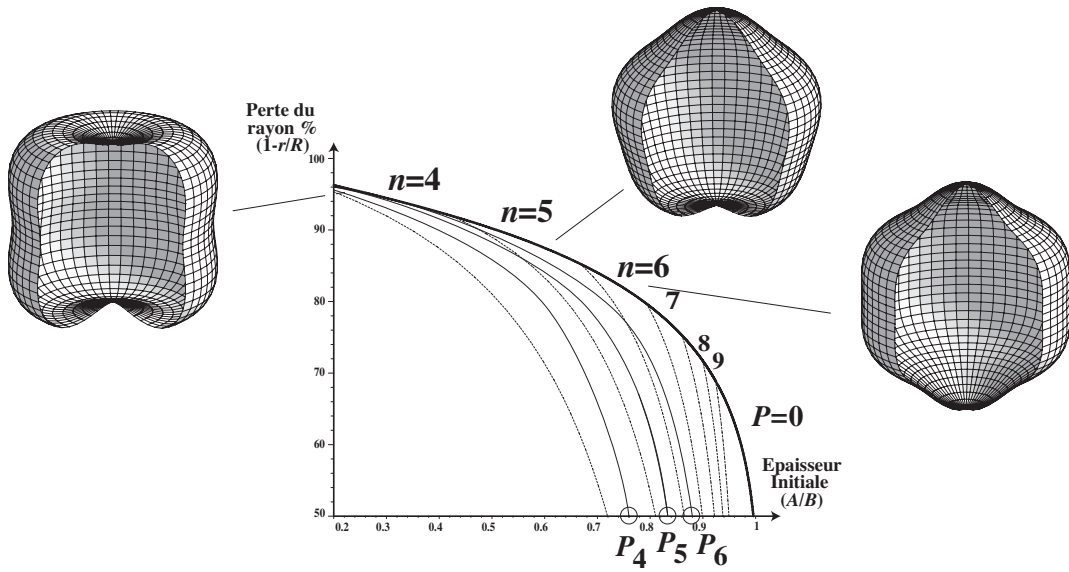


FIG. 3 – Instabilité d'une coque en résorption. Pour une épaisseur initiale A/B la coque devient instable quand son épaisseur perd une fraction $100(1 - \frac{b-a}{B-A})$ indiquée par la courbe pleine (à $P = 0$). Les courbes en pointillés indiquent les différents modes d'instabilité et les courbes P_i dnotent les valeurs critiques sous une pression choisie telle que le mode i devient instable. Les modes de déformation de la coque sont indiqués pour $n = 4, 5, 6$.

4 Exemple

Pour une coque en croissance, on utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ) et des déformations axisymétriques de la forme $\chi^{(1)} = [u, v, 0]^T$, où u, v sont indépendants de φ . Les équations pour la stabilité sont des équations linéaires du deuxième ordre qui peuvent se ramener à une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre pour l'amplitude du $n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre $u(r, \theta) = U_n(r)P_n(\cos \theta)$. On peut alors étudier numériquement ou analytiquement cette équation et trouver les valeurs des paramètres qui produisent une instabilité. Par exemple sur la Figure 3, on montre l'instabilité de la coque en croissance obtenue par des méthodes analytiques de perturbation valables pour les fines coques (fines dans l'état actuel mais pas nécessairement dans l'état initial). On voit que, au moment de l'instabilité, le mode N sélectionné à la bifurcation dépend de l'épaisseur $\delta = b - a$ suivant la loi $N \sim \delta^{-1/2}$ comme dans le cas classique. Le procédé de base de l'instabilité est le suivant: une coque non-chargée d'une épaisseur initiale donnée devient instable quand l'épaisseur actuelle est suffisamment petite et que les contraintes internes compressives sont suffisamment élevées. Sous une pression $P_n > 0$ telle que les modes $m \geq n$ sont stables, une coque stable devient instable quand son épaisseur diminue avec des modes d'instabilités $2 \leq m \leq n$.

5 Conclusion

L'analyse présentée ici montre que la croissance différentielle peut altérer les propriétés géométriques et mécaniques d'un matériau de telle façon qu'il devient instable. Notons que l'hypothèse constitutive choisie (élasticité néo-hookéenne) n'est pas réaliste

pour des tissus mous, néanmoins elle représente les matériaux les plus mécaniquement stables. On s'attend donc qu'un choix plus réaliste de relations constitutives donne lieu au même type d'instabilités voire à des instabilités nouvelles.

Remerciements: Ce travail a été réalisé pendant une visite de A. G. rendue possible grâce à une invitation du CNRS, une bourse de la ville de Paris et de la NSF: DMS #0307427 (A.G.)

Références

- [1] L. Taber, *Biomechanics of growth, remodeling and morphogenesis*, Appl. Mech. Rev., **48**, 487–545, (1995).
- [2] R. Skalak, S. Zargaryan, R. K. Jain, P. A. Netti, and A. Hoger, *Compatibility and the genesis of residual stress by volumetric growth*, J. Math. Biol., **34**, 889–914, (1996).
- [3] Y. C. Fung, *Biomechanics: material properties of living tissues*. Springer, New York, (1993).
- [4] J. Sachs, *Text-book of botany, morphological and physiological*, Clarendon, Oxford, (1875).
- [5] W. S. Peters and A. D. Tomos, *The history of tissue tension*, Annals of Botany, **77**, 657–665, (1996).
- [6] S. Timoshenko, *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, New York, (1940).
- [7] L. A. Davidson, M. A. R. Koehl, R. Keller, and G. F. Oster, *How do searching evaginate using biomechanics to distinguish between mechanisms of primary evagination*, Development, **121**, 2005–2018, (1995).
- [8] R. Keller, L. A. Davidson, and D. R. Shook, *How we are shaped: The biomechanics of gastrulation*, Differentiation, **71**, 171–205, (2003).
- [9] L. Pauchard and C. Allain, *Buckling instability induced by polymer solution drying*, Europhys. Lett., **62**, 897–903, (2003).
- [10] L. Pauchard and Y. Couder, *Invagination during the collapse of an inhomogeneous spheroid shell*, Europhys. Lett., **66**, 667–673, (2004).
- [11] M. Ben Amar and A. Goriely, *Growth and instability in soft tissues*, Preprint.
- [12] J. D. Humphrey, *Continuum biomechanics of soft biological tissues*, Proc. Roy. Soc. Lond. A, **459**, 3–46, (2003).
- [13] S. C. Cowin, *Tissue growth and remodeling*, Annu. Rev. Biomed. Eng., **6**, 77–107, (2004).
- [14] G. A. Holzapfel, T. C. Gasser, and R. W. Ogden, *A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models*, J. Elasticity, **61**, 1–48, (2000).
- [15] E. K. Rodriguez, A. Hoger, and A. McCulloch, *Stress-dependent finite growth in soft elastic tissue*, J. Biomechanics, **27**, 455–467, (1994).
- [16] E. H. Lee, *Elastic-plastic deformation at finite strains*, J. Appl. Mech., **36**, 1–8, (1969).
- [17] S. M. Klisch, S. S. Chen, R. S. Sah and A. Hoger, *A growth mixture theory for cartilage with application to growth-related experiments on cartilage explants*, J. Biomech. Engineering, **125**, 169–179, (2003).
- [18] U. Kutschera, *Tissue stresses in growing plant organs*, Physiologia Plantarum, **77**, 157–163, (1989).
- [19] R. W. Ogden. *Non-linear elastic deformation*, Dover, New york, (1984).

Réflexion critique d'ondes internes de gravité en fluides stratifiés

L. Gostiaux, T. Dauxois et E. Falcon
ENS Lyon, Laboratoire de Physique UMR 5672
46, Allée d'Italie, 69007 Lyon
 lgostiau@ens-lyon.fr

Résumé

Nous étudions la réflexion des ondes de gravité internes sur des surfaces planes qui présentent un angle d'incidence critique pour lequel la réflexion s'effectue le long de la pente. Dans le cadre linéaire, l'onde réfléchie est alors singulière, sa longueur d'onde tendant vers zéro et son amplitude vers l'infini. Une étude analytique non-linéaire par la méthode des échelles multiples a permis de dévoiler une instabilité de retournement des ondes susceptible d'induire du mélange dans la stratification. Nous menons actuellement des expériences de laboratoire en vue de comparaisons avec nos prédictions analytiques.

1 Introduction

L'étude des fluides stratifiés est une branche encore récente de la mécanique des fluides. En effet, les motivations sont apparues au 20ème siècle avec l'engouement pour l'étude des océans et de l'atmosphère. La grandeur caractéristique de tels fluides est N , la fréquence de Brunt-Väisälä, du nom de deux météorologistes de l'après-guerre, mesurant la stratification rapportée à l'accélération de pesanteur g

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz}} . \quad (1)$$

Elle définit la fréquence propre d'oscillation d'une particule de fluide de masse volumique ρ_0 autour de son altitude d'équilibre (selon l'axe z). De manière générale, l'étude des fluides stratifiés se place dans l'hypothèse où la densité est une quantité advectée par l'écoulement, dans le sens où les temps de diffusion des grandeurs intensives (température, composition chimiques) responsables de la stratification sont supposés longs devant les temps caractéristiques du problème. Dans l'hypothèse d'écoulements incompressibles, la fréquence de Brunt-Väisälä intervient donc dans la conservation de la masse qui traduit cette advection, ce qui s'écrit en notant ρ_e et P_e les perturbations au champ statique de densité et pression

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + v_z \frac{N^2 \rho_0}{g} = 0 . \quad (2)$$

La seconde approximation est celle dite de Boussinesq, dont le cadre s'étend au-delà des fluides stratifiés. Elle consiste à négliger l'influence des variations de densité dans les termes inertiels, et à ne les considérer que dans les termes gravitationnels (poussée d'archimède). Les équations du mouvement deviennent alors

$$\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P_e}{\partial x} , \quad \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial P_e}{\partial z} - \rho_e g . \quad (3)$$

En bouclant le système avec l'incompressibilité, nous obtenons un système fermé de quatre équations pour les quatre inconnues v_x , v_z , ρ_e et P_e , qui mène à la même équation pour les quatre variables [1, 2].

$$\frac{\partial^4 v_z}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 v_z}{\partial t^2 \partial z^2} = -N^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} . \quad (4)$$

Si l'on recherche des solutions progressives de l'équation (4) sous la forme d'ondes planes on obtient la relation de dispersion

$$\omega = \pm N \sin \beta , \quad (5)$$

en notant ω la pulsation et β l'angle du vecteur d'onde avec la verticale.

Cette formule est assez surprenante car le module du vecteur d'onde $k = |\vec{k}|$ n'y figure pas : il ne reste que la direction du vecteur d'onde, β . La première propriété étonnante des ondes internes est donc de se propager selon une direction fixe lorsque la fréquence est donnée ; la longueur d'onde est en revanche quelconque. On montre également que la vitesse de groupe est perpendiculaire à la vitesse de phase : par conséquent, un rayon d'ondes internes se propage parallèlement à ses plans d'onde (cf. Fig. 1a).

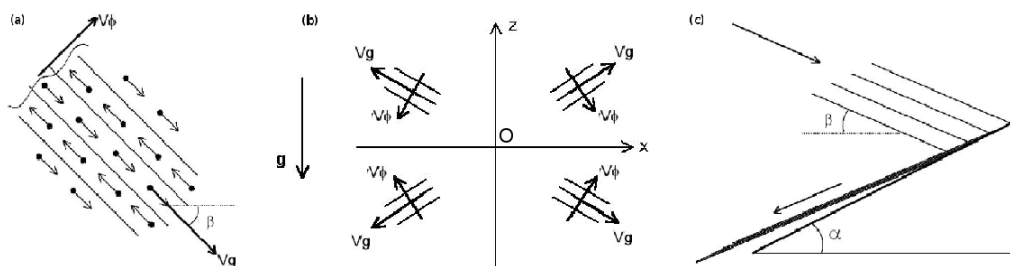


FIG. 1 – (a) Représentation des plans d'ondes, de la vitesse de phase v_ϕ , de la vitesse de groupe v_g , et de la trajectoire des particules de fluide. (b) Rayonnement dans le cas d'une source ponctuelle centrée en O . (c) Réflexion d'un faisceau d'ondes internes sur un plan incliné ($\beta \simeq \alpha$).

Les ondes internes sont venues au goût du jour avec l'étude des dynamiques océaniques et atmosphériques dans la deuxième moitié du 20ème siècle. Elles transportent en effet d'importantes quantités d'énergie dans la stratosphère et dans l'océan profond et doivent être absolument prises en comptes dans les modèles océaniques. Les recherches militaires ont également suscité des travaux expérimentaux sur l'émission de ces ondes par des corps en translation. Suite aux premières visualisations en laboratoire d'ondes internes datant de Görtler [3] puis Mowbray et Rarity [4], des travaux théoriques se sont attelés au problème océanographique de l'émission d'ondes par les marées et le forçage de surface des vents, ainsi qu'à la nature des instabilités susceptibles d'affecter ces ondes (convectives ou de cisaillement), leur déferlement étant un facteur essentiel du mélange des masses océaniques. Plus récemment, l'importance des interactions entre ces ondes et les fonds océaniques a été mesurée [5], suggérant que la réflexion des ondes internes sur les fonds océaniques pourrait être un facteur important de mélange. Les analyses théoriques et expérimentales de ce phénomène critique sont encore un sujet ouvert que nous étudions ici.

2 Approche linéaire de la réflexion d'ondes internes

Considérons l'interaction d'une onde interne avec un fond marin que nous supposons incliné avec un angle α par rapport à l'horizontale. Comme lors de tout phénomène de réflexion, la pulsation de l'onde est conservée de manière à respecter les conditions aux limites dans l'approximation linéaire. Par conséquent, étant donné la relation de dispersion (5), lorsqu'une onde interne se réfléchit, son angle de propagation par rapport à l'horizontale sera conservé, *indépendamment de l'angle de la pente*: il n'y aura donc plus de réflexion spéculaire comme pour des ondes acoustiques ou optiques.

Il apparaît donc un angle critique $\alpha_c = \beta$, pour lequel le rayon est réfléchi le long de la pente (cf. Fig. 1c). La figure met également en évidence un fort rétrécissement de la largeur du faisceau après la réflexion, lorsque les conditions sont proches de cet angle critique. De manière générale, le rétrécissement est donné par le rapport des longueurs d'ondes incidente λ_i et réfléchie λ_r

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_i} = \frac{\sin(|\beta - \alpha|)}{\sin(\beta + \alpha)} .$$

Par conservation de l'énergie, il sera accompagné d'une augmentation inverse de la densité d'énergie de l'onde réfléchie. Nous avons d'ores et déjà un critère d'instabilité: lorsque les ondes introduisent une perturbation de densité telle que le gradient vertical de densité s'annule, il y a déferlement (cela revient à dire que les isodensités présentent une tangente verticale). Ceci intervient pour une onde d'amplitude a lorsque $ak \sin 2\beta > 2$, donc compte tenu de l'amplification due à la réflexion, une onde incidente d'amplitude a engendrera une onde réfléchie instable si la différence $\phi = \alpha - \beta$ vérifie l'inégalité

$$\phi^2 < \frac{\pi a \sin^2(2\beta)}{\lambda_i} .$$

Cette relation permet de quantifier le caractère critique de la réflexion. Pour des ondes océaniques, se propageant à 20° par rapport à l'horizontale, d'amplitude 1 m et de longueur d'onde 100 m, on trouve $\phi_c = 6^\circ$, ce qui signifie qu'une réflexion sur un fond faisant un angle entre 14° et 26° avec l'horizontale déstabilisera l'onde. Le mécanisme de l'instabilité doit être mieux compris pour pouvoir modéliser le mélange induit le long des fonds océaniques par la réflexion des ondes internes.

3 Analyse non-linéaire de la réflexion quasi-critique

Les considérations précédentes suggèrent d'étudier le problème en distinguant une zone éloignée de la pente où la théorie linéaire s'applique, et une zone proche de la pente dans laquelle les termes non-linéaires sont prépondérants. Dans le cas critique, la région extérieure est parcourue par le rayon incident et par la seconde harmonique réfléchie (la première harmonique est piégée le long de la pente), la fonction de courant totale s'écrivant dans un système de coordonnées adimensionné relatif à la pente (z_\perp orthogonal à la pente)

$$\psi(x, z_\perp, t) = \psi_1(t, z_\perp) e^{i(x+z_\perp-t)} + \varepsilon \psi_2(t, z_\perp) e^{i(2x+mz_\perp-2t)} . \quad (6)$$

Le paramètre $\varepsilon = (\phi_c \tan \alpha)^{1/3}$ a été choisi pour des raisons dimensionnelles comme mesure de la nonlinéarité, et a été utilisé pour effectuer un développement en échelles

multiples dans la région interne [6]. La résolution des équations non-linéaires dans cette zone, avec les conditions aux limites sur la paroi et de raccordement à la solution externe proposée, permettent d'obtenir le champ de vitesse près de la paroi et de déterminer $\psi_2(t,z)$ fonction de $\psi_1(t,z)$. C'est l'hypothèse de piégeage le long de la pente qui permet de présupposer le doublement de fréquence spatiale longitudinale (selon x) de la seconde harmonique, m étant alors déterminé par la relation de dispersion.

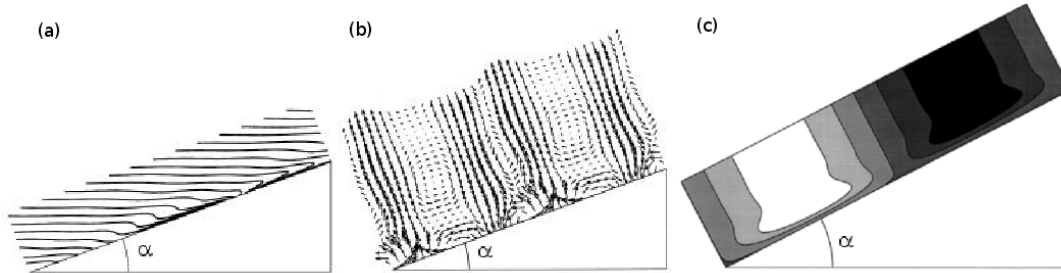


FIG. 2 – (a) Lignes isodensité obtenues analytiquement. (b) Champ de vitesse dans le cas quasi-critique. (c) Fonction de courant dans le régime permanent visqueux.

L'annulation des termes séculaires conduit à une équation linéaire d'évolution de l'amplitude dans la région interne, qui peut être résolue analytiquement. Les solutions dans le cas non visqueux sont présentées dans les figures 2(a) et 2(b), et présentent des retournements de densité associés à l'apparition de vortex concentrés le long de la pente. Dans le cas visqueux (cf. Fig. 2(c)), un régime permanent est atteint dans lequel l'ensemble de l'énergie est dissipée le long de la pente.

4 Méthode expérimentale

Afin d'évaluer quantitativement le mécanisme de la réflexion des ondes internes, nous avons mis au point une méthode de mesure optique des champs de densité des fluides stratifiés en laboratoire (cf. Fig. 3). Nous travaillons avec des solutions d'eau salée ($NaNO_3$) de concentration variable (densité allant de 1 à 1,25 sur 30 cm correspondant à $N = 1,25Hz$) en géométrie bi-dimensionnelle, dans une cuve en plexiglas de $40 \times 50 \times 10cm^3$. Nous utilisons les propriétés optiques des solutions d'eau salée pour mesurer les perturbations de la stratification.

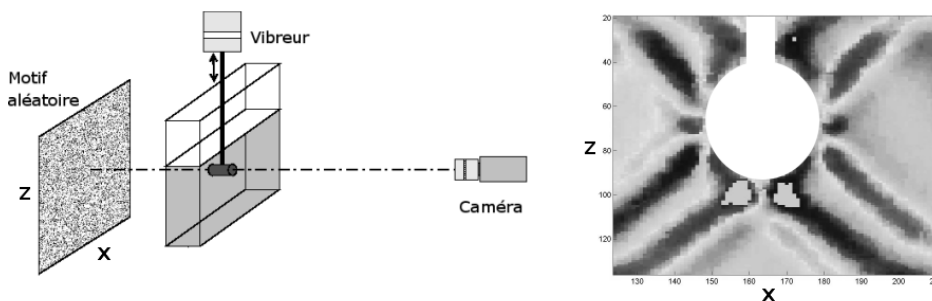


FIG. 3 – Dispositif expérimental et champ de densité mesuré autour d'un cylindre oscillant.

L'indice optique du fluide utilisé étant proportionnel à sa densité, les ondes de gravité

induisent des gradients d'indice qui dévient les rayons passant à travers le fluide. Un motif observé à travers la zone d'écoulement est déformé proportionnellement au gradient de densité. L'analyse d'images par des algorithmes de maximisation de corrélation dans le plan de Fourier (utilisé en PIV) permet de remonter quantitativement au champ de densité [7].

Pour valider notre méthode, nous nous sommes intéressés à la génération d'ondes internes par un objet oscillant. Comme dans la figure 1(b), le diagramme de rayonnement expérimental est en croix autour de l'objet. Nous mesurons les ondes émises par un cylindre oscillant verticalement à basse fréquence (0.1 Hz pour $\sin \beta = 0.5$), afin d'étudier l'influence de son rayon ($R=1, 1.5$ et 3 cm) et de l'amplitude de vibration (de 0 à 1 cm) sur la sélection de longueurs d'ondes. Le champ proche visible sur la figure 4(a) correspond aux prédictions théoriques, notamment la bimodalité de l'enveloppe des rayons au voisinage du cylindre due à la viscosité [8]. A plus forte amplitude néanmoins, des harmoniques d'ordre deux sont observées et en cours d'étude. Elles se traduisent par l'émission d'ondes à un angle plus vertical que celui du rayon fondamental, comme révélé par la figure 4(b).

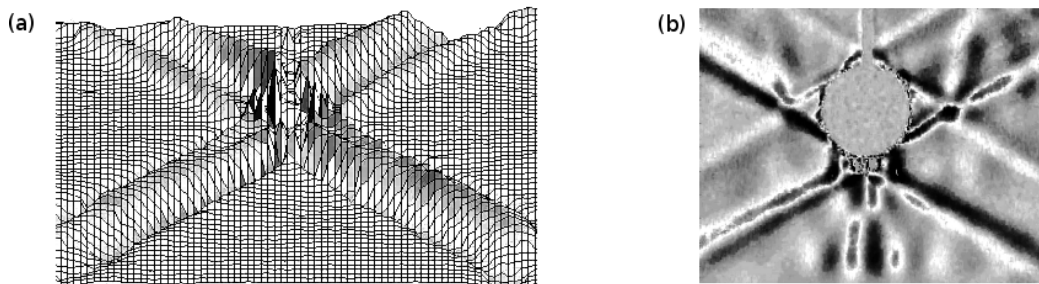


FIG. 4 – (a) Mesure expérimentale d'ondes de densité émises par un cylindre de rayon $R=1.5$ cm oscillant avec une amplitude de 3 mm. Noter la bimodalité près de la source dans les deux rayons du bas. (b) Non linéarités dans le cas d'un cylindre de rayon $R=3$ cm oscillant à une amplitude de 6 mm.

La technique de mesure permet une comparaison quantitative des champs de densité théoriques et expérimentaux : l'amplitude des ondes mesurée est, dans le cas linéaire, en bon accord avec la théorie. En revanche, les amplitudes relatives des secondes harmoniques ne sont actuellement prédites par aucun modèle.

5 Résultats concernant la réflexion

La réflexion proprement dite est difficilement observable en raison de la forte amplitude des gradients mis en jeu. Néanmoins, les premiers résultats laissent penser que la viscosité limite l'instabilité de retournement aux échelles de notre expérience [9]. A l'inverse du cas non visqueux qui diverge dans le temps, la solution visqueuse présente un régime permanent où l'ensemble de l'énergie incidente est dissipée le long de la paroi. La figure 5 montre les premiers résultats expérimentaux qui s'accordent qualitativement avec la théorie.

Une seconde instabilité apparaît après le déferlement et concerne l'équilibre entre la zone de mélange et le reste du fluide : la partie mélangée s'immisce dans la zone stratifiée sous forme de digitations horizontales régulières encore non expliquées [10].

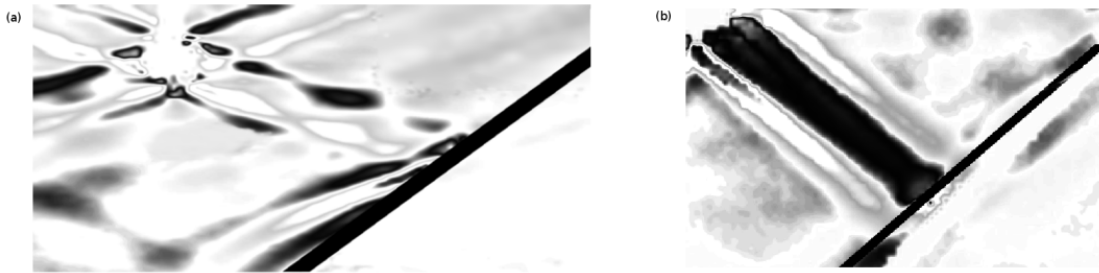


FIG. 5 – (a) Réflexion quasi critique ($\alpha = 23^\circ$, $\beta = 18^\circ$): le rayon réfléchi est visible le long de la pente. (b) Régime stationnaire où l'onde s'écrase sur la pente observé dans le cas critique ($\alpha \simeq \beta \simeq 23^\circ$). A comparer avec les résultats analytiques de la figure 2(c).

6 Conclusion

Nous étudions la réflexion d'ondes internes sur un plan incliné dans le cas critique. L'analyse non-linéaire du phénomène prédit une instabilité de retournement attendue par les océanographes mais à ce jour peu étudiée expérimentalement. Nous avons mis au point une méthode de mesure de champs de densité en fluides stratifiés, qui donne de premiers résultats très satisfaisants concernant l'émission des ondes internes. Des expériences à plus grande échelle sont à l'étude pour s'affranchir des effets de la viscosité qui limitent pour l'instant l'observation de l'instabilité.

Références

- [1] J. Lighthill, *Waves in Fluids*, Cambridge University Press (1978).
- [2] L. Gostiaux, T. Dauxois, *Propagation et réflexion d'ondes internes dans l'océan: le mystère de l'angle critique*, Bulletin de l'Union des Physiciens, **868**, 25 (2004).
- [3] H. Görtler, *Z. Angew. Math. Mech.*, **232**, 65 (1943).
- [4] D. E. Mowbray, B. S. H. Rarity, *A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid*, Journal of Fluid Mechanics, **28**, 1 (1967).
- [5] C. C. Eriksen, *Internal wave reflection and mixing at Fieberling Guyot*, Journal of Geophysical Research, **103**, 2977 (1998).
- [6] T. Dauxois, W. R. Young, *Near-critical reflection of internal waves*, Journal of Fluid Mechanics, **390**, 271 (1999).
- [7] L. Gostiaux, T. Dauxois, E. Falcon, *High resolution density measurements in stratified fluids*, Compte rendu colloque FLUVISU2005, en préparation
- [8] D. G. Hurley, G. Keady, *The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Part 2. Approximate viscous solution*, Journal of Fluid Mechanics, **351**, 119 (1997).
- [9] T. Dauxois, A. Didier, E. Falcon, *Observation of near-critical reflection of internal waves in a stably stratified fluid*, Physics of Fluids, **16**, 6 (2004).
- [10] E. E. McPhee-Shaw, E. Kunze, *Boundary layer intrusions from a sloping bottom: A mechanism for generating intermediate nepheloid layers*, Journal of Geophysical Research, **107**, 3 (2002).

Bifurcations et pulsations complexes dans un laser à modes bloqués

Mélanie Grapinet et Philippe Grelu

*Laboratoire de Physique Université de Bourgogne, UMR CNRS 5027,
9 Avenue Alain Savary, 21078 Dijon cedex
melanie.grapinet@u-bourgogne.fr*

Résumé

Les systèmes laser générant des impulsions ultra-courtes ont un nombre important d'applications en optique et télécommunications. Ainsi, la stabilité de l'impulsion tour après tour est cruciale pour ces lasers. Nous étudions les régimes réguliers, c'est-à-dire avec des pulsations périodiques dans l'évolution de l'impulsion.

Abstract

Laser systems generating ultra-short pulses have a number of important applications in optics and telecommunications. The stability of the pulses from one round-trip to another is one of important qualities of such lasers. We study regular regimes with periodic pulsations.

1 Introduction

Le blocage de modes d'un laser correspond à la synchronisation, ou verrouillage des phases, d'un très grand nombre de modes longitudinaux, pouvant atteindre plusieurs centaines de milliers, et conduisant à la formation d'impulsions picosecondes ou subpicosecondes. Le champ laser correspondant est ainsi associé à un nombre de degrés de liberté quasi infini. Le fonctionnement du laser à modes bloqués repose sur des dynamiques fortement non-linéaires, expliquant la stabilité des impulsions qui peut être obtenue pour certains jeux de paramètres. Les non-linéarités en jeu sont à la fois dispersives (effet Kerr) et dissipatives (saturation du gain). En régime fortement dissipatif, la stabilité des impulsions ultracourtes s'appréhende à travers les concepts et propriétés de solitons dissipatifs [1]. Que se passe-t-il lorsque l'on altère un ou plusieurs paramètres de la cavité, à partir d'une situation stable pour laquelle la période temporelle du cycle limite est égale au temps de parcours de la cavité? Aux côtés de la "classique" cascade de doublements de période menant au comportement chaotique, nous avons découvert deux variétés principales de comportements inédits. Premièrement, la cascade de doublements de période est souvent stoppée par la formation d'une impulsion additionnelle, véritable soupape dynamique du système qui lui permet de redistribuer l'énergie totale et d'échapper au chaos [2, 3]. Deuxièmement, le système peut évoluer vers des pulsations complexes, telles que des pulsations dont la période n'est pas une puissance de deux, des pulsations de longue période, ainsi que des pulsations possédant deux périodes non forcément commensurables, l'une courte et l'autre longue [2, 4].

Ces découvertes ont été observées expérimentalement dans un laser à fibre dopée à l'erbium, avec une cavité en anneau unidirectionnel, et ont été validées par des simulations numériques fondées sur l'emploi d'un modèle de Ginzburg-Landau complexe cubique-quintique à gestion de paramètres. Nous montrons ainsi que les pulsations longues et complexes peuvent se produire sans avoir à recourir aux relaxations "lentes" du milieu laser.

2 Système expérimental

Le dispositif expérimental schématisé ci-dessous est constitué d'une cavité fibrée en anneau, à gestion de la dispersion [5, 6]. Le laser à fibre émet des impulsions ultracourtes autour de $1,53 \mu\text{m}$.

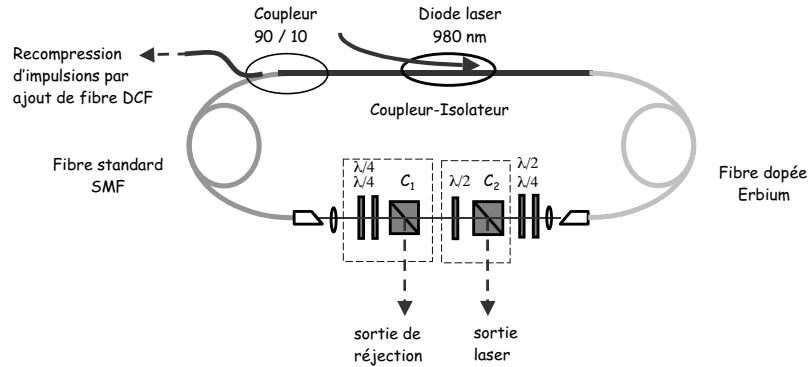


FIG. 1 – Schéma du dispositif expérimental

Le milieu amplificateur est une fibre optique dopée à l'Erbium avec une concentration d'environ 1400 ppm. Le champ laser subit une dispersion normale voisine de -40 ps/nm/km sur une distance de propagation de 1,9 m. La source de pompage est constituée de quatre diodes laser émettant autour de 980 nm. La dispersion moyenne de la cavité est ajustée en utilisant une longueur appropriée de fibre SMF-28 ayant une dispersion anormale de $+16,5 \text{ ps/nm/km}$. Une section à air libre de 50 cm est employée afin d'insérer des composants de polarisation : lames d'onde et cube polariseur. Le premier jeu de lames $\lambda/4$ et le cube polariseur C_1 introduisent des pertes sélectives en intensité pour conduire au blocage de modes. Entre le cube C_1 et le cube C_2 , une lame $\lambda/2$ est employée pour disposer d'un coupleur de sortie avec une extraction et une transmission variables. Au niveau de C_2 le spectre optique est observé.

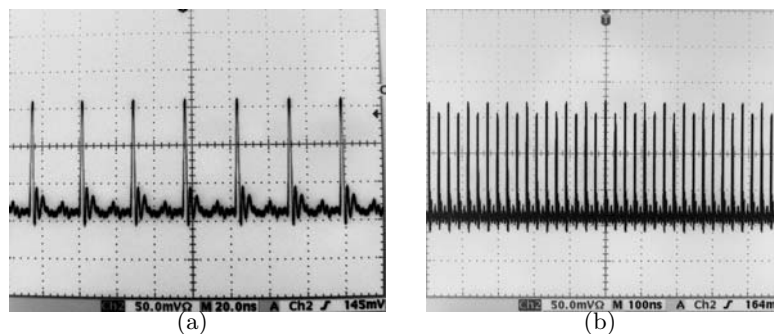


FIG. 2 – Génération d'un train d'impulsions. (a) avec une période $p-1$, (b) avec une période $p-2$.

Nous observons l'évolution de l'énergie des impulsions tour après tour qui extrait 10% de l'intensité intracavité après l'amplification dans la fibré dopée. La durée d'une impulsion est typiquement de 1 ps pour les sorties à air libre par contre elle vaut 150 fs

pour la sortie recompressée [6]. Dans le régime fondamental le plus stable, les impulsions sont identiques tour après tour et le taux de répétition de la cavité vaut 36,6 MHz (figure 6 a)).

3 Le modèle

Nous modélisons le laser à fibre par l'équation de Ginzburg-Landau complexe cubique-quintique à gestion de paramètres :

$$i\Psi_z + \frac{D}{2}\Psi_{tt} + |\Psi|^2\Psi + \nu|\Psi|^4\Psi = i\delta\Psi + i\epsilon|\Psi|^2\Psi + i\beta\Psi_{tt} + i\mu|\Psi|^4\Psi \quad (1)$$

où z est la distance parcourue par l'impulsion dans la cavité (la longueur de la cavité est normalisée), t est le temps normalisé, Ψ est l'enveloppe normalisée du champ, $D = \pm 1$ est le coefficient de dispersion de la vitesse de groupe (anormal ou normal), δ est le coefficient des pertes linéaires, β le filtrage spectral pour $\beta > 0$, ϵ correspond au gain non-linéaire, le terme avec μ représente, si il est négatif, la saturation du gain non-linéaire tandis que ν correspond si il est négatif, à la saturation de l'indice de réfraction non-linéaire.

La cavité laser est constituée de plusieurs sections de fibres, ainsi les propriétés du milieu où l'impulsion se propage varient selon la distance. Les coefficients de l'équation 1 doivent être des fonctions périodiques de la distance de propagation z .

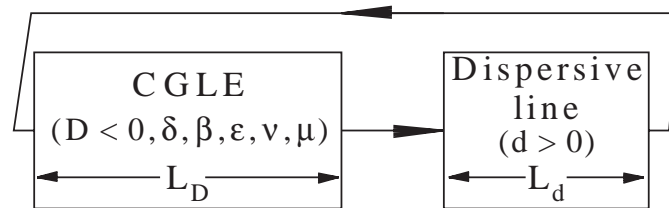


FIG. 3 – *Modèle numérique du laser*

Nous avons adopté un modèle relativement simple tenant compte des ingrédients essentiels du système : gain et non-linéarité, ainsi qu'une gestion de la dispersion chromatique donnant une périodicité à l'évolution temporelle. Le modèle numérique utilisé est représenté sur la figure 1. La section de fibre dopée à l'Erbium est modélisée par l'équation CGLE où tous les paramètres de l'équation sont différents de zéro. La dispersion de cette section de cavité est prise normale c'est-à-dire négative et sa longueur est noté L_D . Par contre, la fibre ayant une dispersion anormale est modélisée par la même équation où seul le terme de dispersion est pris en compte. La longueur de cette fibre est notée L_d .

Le profil de l'impulsion est suivi après la fin de chaque tour de cavité. Puisque l'on se trouve dans un système dissipatif, la solution ne dépend pas généralement des conditions initiales et converge rapidement vers un cycle limite.

4 Pulsations à période courte

Nous appelons "pulsations à période courte" les pulsations dont la période est comparable au temps pour parcourir un tour de cavité. Lorsque cette période coïncide avec le temps de parcours d'un tour, le laser est dans un régime stable de génération d'impulsions,

c'est-à-dire qu'il produit exactement la même impulsion à chaque tour de cavité. (figure 2 a), 4 a))

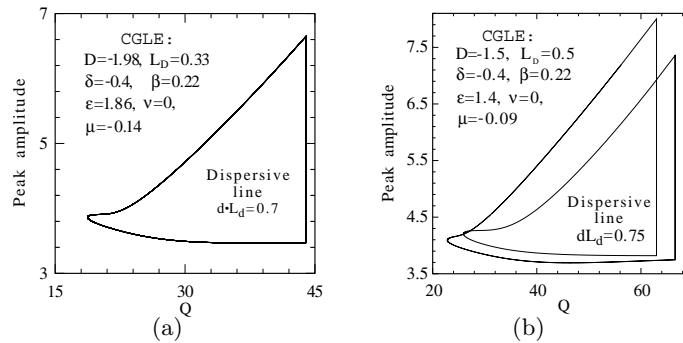


FIG. 4 – Cycles limites a) de période égale à tour de cavité b) de période 2.

Les figures ci-dessus représentent l'amplitude crête du soliton en fonction de l'énergie $Q = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(z,t)|^2 dt$, d'une impulsion évoluant tout au long de la cavité. Après chaque tour la trajectoire retourne exactement au point de départ c'est-à-dire les impulsions sont les mêmes tour après tour. Avec un changement des paramètres, il est possible de construire une trajectoire où la période est égale à deux fois le tour de cavité figure. La période d'une pulsation devient instable par contre le cycle avec deux tour de cavité est stable. Ce phénomène est connu sous le nom de **doublage de période**. L'observation expérimentale est donnée en figure 2 b).

4.1 Observation expérimentale

Sur la figure 2, est représentée la génération d'un train d'impulsions avec une impulsion unique à chaque tour de cavité ainsi que la génération d'un train d'impulsion avec un doublage de période.

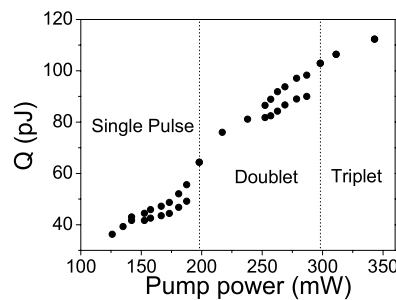


FIG. 5 – Diagramme associant bifurcations (doublage de période) et transitions vers des états multi-impulsionnels.

Pour observer expérimentalement ces cycles limites, nous avons le choix entre modifier la puissance de pompage ou les pertes intracavité. Lorsque l'énergie intracavité augmente, des impulsions multiples ainsi que la formation de multisoliton complexe peuvent être favorisées dans la cavité [5, 6]. Le changement de mode du laser avec l'augmentation de la puissance est représenté sur la figure 5. Quand la puissance de pompage atteint 140 mW, une oscillation avec un doublage de période apparaît. Lorsque l'on atteint une puissance

de 200 mW, au lieu d'avoir des oscillations plus complexes voire le chaos, un doublet se forme. Par contre le doublage de période disparaît. Ce nouvel état formé peut être analysé par l'enregistrement de son spectre optique et de sa fonction d'autocorrélation (figure 6 a), c)). Le doublet est caractérisé par les franges contrastées de son spectre. La distance entre deux franges est inversement proportionnelle à la séparation temporelle des deux impulsions et est mesurée grâce à la trace d'autocorrélation. L'augmentation de la puissance aboutit à une autre bifurcation de doublage de période pour $P=230$ mW. Pour des puissances encore plus élevée nous observons la création d'une troisième impulsion. Un triplet stable est formé pour 300 mW (figure 5). La figure 6 représente le spectre optique et la fonction d'autocorrélation du doublet et du triplet. En résumé, l'augmentation de l'énergie intracavité mène généralement à des instabilités. Cependant, elles peuvent être évitées par le partage de l'énergie intracavité entre plusieurs impulsions [3, 7].

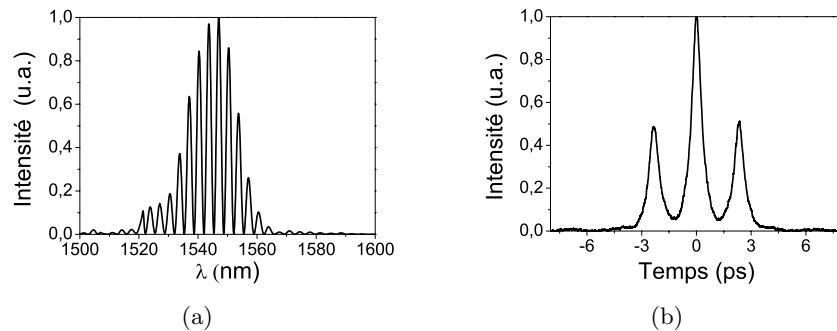


FIG. 6 – Caractéristique a) spectrale et b) autocorrélation optique montrant que l'état à deux impulsions est un état doublet lié..

5 Pulsations complexes

Le système peut évoluer vers des pulsations complexes, telles que des pulsations dont la période n'est pas une puissance de deux, des pulsations de longue période, ainsi que des pulsations possédant deux périodes non forcément commensurables, l'une courte et l'autre longue [2, 4]. Ce dernier cas est illustré sur la figure 7 a). La figure 7 b) est un exemple d'un diagramme de bifurcation menant à deux périodes possibles. Nous avons fixé tous les paramètres excepté un, ϵ . Ce diagramme montre l'énergie de sortie Q en fonction de ϵ . Pour une série de paramètres donnés (voir sur la figure), la solution de période-1 est stable pour $\epsilon > 1,332$. Il existe deux autres bifurcations pour $\epsilon = 1,292$ et $\epsilon = 1,33$, délimitant une surface de solutions apparemment chaotiques, où diverses valeurs de Q peuvent être obtenues. En fait, dans cette région, nous avons une évolution quasi-périodique de l'impulsion avec deux périodes distinguées. Les figures 7 représentant l'énergie du soliton en fonction du nombre de tours montre clairement la solution de nature doublement périodique. Après chaque tour, la valeur de Q passe d'une valeur haute (basse) à une valeur basse (haute) définissant ainsi la double période, l'ensemble étant modulé par une période longue.

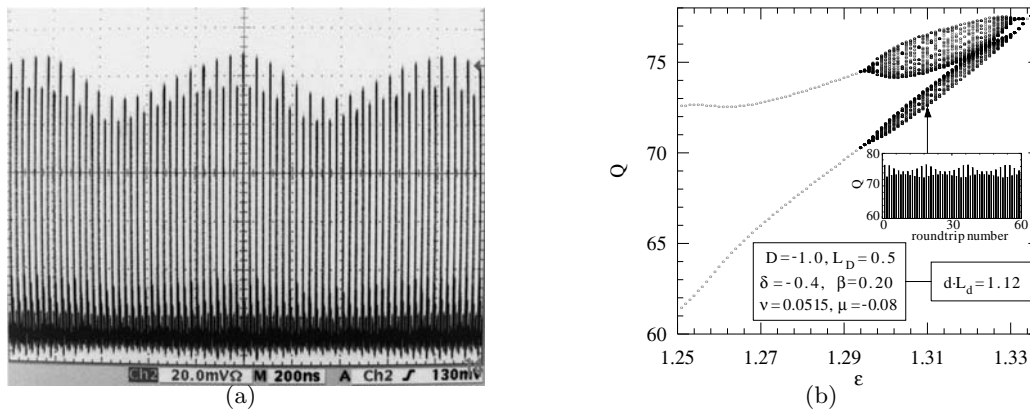


FIG. 7 – (a) Génération d'un train d'impulsions avec deux périodes incommensurables, (b) Diagramme de bifurcation théorique menant à deux périodes.

6 Conclusion

La laser à fibre à blocage de mode passif est un système dissipatif non-linéaire. Ce système possède un nombre important de degrés de liberté permettant ainsi d'obtenir de nombreuses dynamiques. Lorsque les instabilités dues à l'augmentation de la puissance de pompage apparaissent, la dynamique du laser réagit en créant des solitons à période multiple puis en augmentant le nombre de solitons intracavité. Ces périodes ont pu être vérifiées numériquement par notre modèle de Ginzburg-Landau complexe cubique-quintique à gestion de paramètres.

Références

- [1] *Dissipative solitons*, Springer-Verlag, (février 2005), édité par N. Akhmediev et A. Ankiewicz.
- [2] J.M. Soto-Crespo, M. Grapinet, Ph Grelu, N. Akhmediev, *Bifurcations and multiple period soliton pulsations in a passively mode-locked fiber laser*, Phys Rev E. **70**, 066612 (2004)
- [3] F. Idlay, J. Buckley, F. Wise, *Period-doubling Route to Multiple-pulsing in Femtosecond Fiber Lasers*, Proceedings of the Nonlinear Guided Waves Conference, Toronto, March 28-31(2004).
- [4] N. Akhmediev, J.M Soto-Crespo, M. Grapinet, Ph. Grelu, *Dissipative soliton pulsations with periods beyond the laser cavity round trip time*, soumis à JNOPM (2004)
- [5] K. Tamura, E. P. Ippen, H. A. Huas, L. E. Nelson *77-fs pulse generation from a stretched-pulse mode-locked all-fiber ring laser*, Opt. Lett. **18**, 1080-1082 (1993)
- [6] Ph. Grelu, J. Béal, J.M. Soto-Crespo *Soliton pairs in a fiber laser: from anomalous to normal average dispersion regime*, Optics Express **11**, 8, 2238-2243 (2003)
- [7] F. Gutty, Ph. Grelu, N. Huot, G. Vienne, G. Millot *Stabilisation of modelocking in fibre ring laser through pulse bunching*, Electronics Lett. **37**, 745-746 (2001)

Domaines d'existence et caractéristiques de l'oscillation dans une cavité photoréfractive

M. Grapinet*, P. Mathey*, B. Sturman**, H. R. Jauslin*, S. G. Odoulov¹, D. Rytz⁺

*Laboratoire de Physique de l'Université de Bourgogne UMR CNRS 5027
9 Avenue Alain Savary 21078 Dijon cedex, France

**Laboratory of Nonlinear Physics, Russian Academy of Sciences,
Koptug Ave. 1, 630090 Novosibirsk, Russie

¹Institut de Physique, National Academy of Sciences
03650, Kiev-39, Ukraine

⁺Forschungsinstitute für mineralische und metalische Werkstoffe,
Edelsteine/Edemetalle GmbH, Struhtstrasse 2, Wackenmuhle, 55743
Idar-Oberstein, Allemagne

*mgrap@u-bourgogne.fr, pmathey@u-bourgogne.fr, jauslin@u-bourgogne.fr

**sturman@iae.nsk.su, ¹odoulov@iop.kiev.ua, ⁺rytz@fee-io.de

Résumé

Les propriétés de dynamique non-linéaire d'une cavité optique photoréfractive constituée d'un miroir et d'un matériau photoréfractif non-linéaire pompé par deux ondes contre propageantes sont analysées. Nous montrons que certaines valeurs du coefficient de couplage et du coefficient de réflectivité du miroir conduisent à un cycle d'hystérésis dans l'intensité de l'oscillation lorsque le rapport des intensités des pompes varie.

Abstract

We study the non linear dynamics of a photorefractive cavity formed by a ordinary mirror and a photorefractive crystal pumped by two counterpropagating waves. By selecting the coupling constant and the reflectivity R , this configuration shows a hysteresis of intensities.

1 Géométrie de l'oscillateur optique semi-linéaire

La cavité photoréfractive est constituée d'un miroir de fond de cavité et d'un matériau photoréfractif non-linéaire utilisé en tant que miroir à conjugaison de phase pompé par deux ondes contre propageantes [1].

Pour un tel miroir les lois de la réflexion diffèrent des lois de Descartes. L'onde conjuguée en phase d'un champ monochromatique est un champ de même fréquence dont le front d'onde a la même forme que celui du champ incident mais se propageant dans la direction opposée. Ce miroir possède la propriété de produire un faisceau réfléchi dont le front d'onde reproduit fidèlement celui du faisceau incident. Un des intérêts d'un miroir à conjugaison de phase est d'être capable de corriger les distorsions du faisceau incident.

La cavité photoréfractive est schématisée sur la figure 1. Afin d'étudier la dynamique temporelle de l'oscillation issue de cette cavité, nous avons résolu numériquement le système composé des équations aux dérivées partielles du mélange à quatre ondes et de l'équation

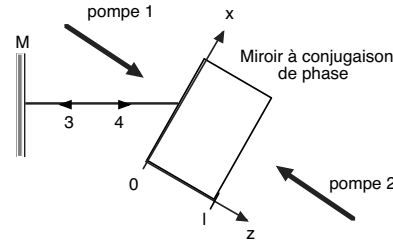


FIG. 1 – Oscillateur optique semi-linéaire.

de la dynamique du réseau d'indice [2, 3].

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A_1}{\partial z} &= \nu^* A_4 \\
 \frac{\partial A_2^*}{\partial z} &= \nu^* A_3^* \\
 \frac{\partial A_3}{\partial z} &= -\nu^* A_2 \\
 \frac{\partial A_4^*}{\partial z} &= -\nu^* A_1^* \\
 (\tau \frac{\partial}{\partial t} + 1)\nu &= \frac{\gamma l}{I_0} (A_1^* A_4 + A_2 A_3^*)
 \end{aligned} \tag{1}$$

où

- les A_j sont les amplitudes des ondes j ,
- τ est le temps de réponse du système,
- γl est le coefficient de couplage non-linéaire,
- $I_0 = \sum_{i=1}^4 |A_i|^2$,
- $\nu = ik\Delta n$ avec $\Delta n(x)$ la perturbation de l'indice de réfraction.

Nous ne détaillerons pas ici le développement complet de ce système basé sur le mélange à quatre ondes, qui est décrit dans [4].

Cette configuration correspond au cas d'un réseau à transmission. Lorsque les ondes 3 et 4 oscillent à la fréquence ω des ondes pompes 1 et 2, le système se trouve dans un régime d'ondes dégénérées. Il existe un autre type de régime appelé régime d'ondes non-dégénérées, si les ondes 3 et 4 acquièrent un décalage de fréquence Ω par rapport aux ondes de pompe. Ainsi, elles oscillent à la fréquence $\omega \pm \Omega$.

2 Etude analytique de l'oscillation dégénérée

La condition pour qu'une oscillation existe est que son intensité soit la même après un aller-retour dans la cavité. Ceci amène à la relation :

$$RR_{pc} = 1 \tag{2}$$

avec R le coefficient de réflectivité du miroir M de fond de cavité. Le coefficient de réflectivité du miroir à conjugaison de phase R_{pc} est [4] :

$$R_{pc} = \left| \frac{-2cT}{\Delta T + \sqrt{\Delta^2 + 4|c|^2}} \right|^2 \tag{3}$$

avec

$$\begin{aligned}
 T &= \tanh \frac{\gamma l Q}{2I_0} \\
 I_0 &= I_2(l) + I_1(0) + RI_3(0) \\
 Q &= \sqrt{\Delta^2 + 4|c|^2} \\
 \Delta &= I_2(l) - I_1(0) - RI_3(0) \\
 |c|^2 &= \{ \sqrt{I_1(0)[I_2(l) - I_3(0)]} \pm \sqrt{RI_3^2(0)} \}^2.
 \end{aligned} \tag{4}$$

En combinant les équations 2, 3 et 4, l'intensité de l'oscillation 3 est déterminée implicitement par [1, 5] :

$$e^{\frac{\gamma l Q}{I_0}} = \frac{|c|^2 - I_1(0)I_2(l) + I_3(0)I_2(l) + I_3(0)\sqrt{\Delta^2 + 4|c|^2}}{|c|^2 - I_1(0)I_2(l) + I_3(0)I_2(l) - I_3(0)\sqrt{\Delta^2 + 4|c|^2}}. \tag{5}$$

3 Cycle d'hystérésis

Dans cette section, nous considérons des paramètres pour lesquels la cavité fonctionne en régime dégénéré. Les valeurs de R et γl étant fixées, deux types de simulations numériques peuvent être menées avec les équations (1) afin de déterminer les variations I_3 en fonction du rapport $r = \frac{I_2(l)}{I_1(0)}$:

- un calcul conduit en prenant comme valeur initiale pour le réseau d'indice de faibles variations spatiales aléatoires d'amplitude inférieure à 10^{-3} . Pour chaque valeur de r le processus est reconduit. Ceci revient à simuler la dynamique du phénomène en partant pour chaque valeur de r d'un cristal vierge de tout réseau d'indice et à démarrer l'oscillation uniquement à partir du bruit dû à la lumière diffusée dans le milieu,
- un calcul mené en prenant comme valeur initiale celle atteinte pour le rapport r précédent. Ainsi, on simule une dynamique qui s'établit à partir d'un réseau préexistant.

Afin de prendre des valeurs de R et γl en rapport avec l'expérience, nous avons dans un premier temps tracé les variations de I_3 à l'état stationnaire en fonction de r . Le résultat est présenté figure 2 par les cercles. Entre chaque mesure, les réseaux d'indice sont effacés à l'aide d'une lumière blanche incohérente. La courbe expérimentale met en évidence un domaine d'existence $[r_{min}; r_{max}]$ bien défini pour l'oscillation. A l'aide de l'expression (5), on peut établir que les valeurs de r au seuil de l'oscillation, notées r_s vérifient [3] :

$$(\gamma l) = \ln \frac{\sqrt{r_s}(\sqrt{R} + \sqrt{r_s})}{\sqrt{Rr_s} - 1}. \tag{6}$$

Cette relation, appliquée successivement à r_{min} et r_{max} permet d'exprimer R et (γl) :

$$R = \left(\frac{\sqrt{r_{min}} + \sqrt{r_{max}}}{\sqrt{r_{min}r_{max}} - 1} \right)^2 \tag{7}$$

$$(\gamma l) = - \ln \sqrt{r_{min}r_{max}} \tag{8}$$

Ceci permet de déterminer les coefficients R et γl à partir de la mesure expérimentale des seuils. D'après la figure 2, nous en déduisons $R = R_{eff} \simeq 0,24$ et $(\gamma l) \simeq 3,13$. Le coefficient R est en réalité un coefficient effectif R_{eff} car sa valeur inclut les pertes de la cavité telles que l'absorption du cristal, les pertes par diffraction au niveau du miroir et

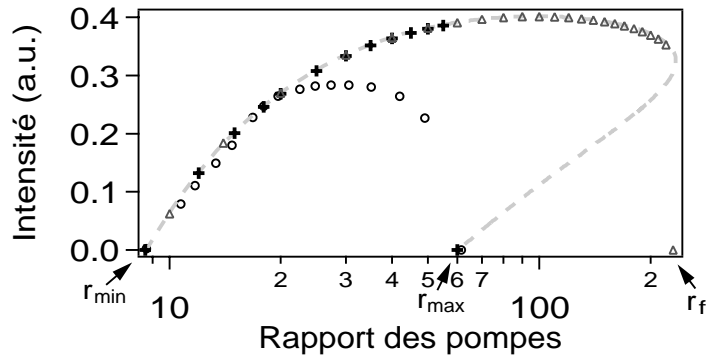


FIG. 2 – Intensité de l'oscillation 3 à l'état stationnaire en fonction du rapport des pompes avec $R=1$ et un diaphragme de $0,7$ mm.

du diaphragme inséré dans la cavité afin de rendre l'oscillation monomode. Avec les valeurs numériques précédentes de R et (γl) , la solution analytique donnée par l'équation (5) est tracée en pointillés (cf. fig 2). L'intervalle d'existence $[r_{min}; r_{max}]$ coïncide bien avec l'expérience. Cette courbe présente un cycle d'hystérésis. L'existence de ce cycle est confirmé par les simulations numériques (triangles fig.2) utilisant des conditions initiales du deuxième type mentionné précédemment. Il apparaît qu'avec de telles conditions, on obtient donc un domaine d'existence de l'oscillation plus grand $[r_{min}; r_f]$. Ceci met en évidence l'importance des conditions initiales. Sur la même figure, les valeurs numériques calculées avec des conditions initiales du premier type sont représentées par des croix. Dans les deux simulations numériques précédentes, nous avons fait varier r par valeurs croissantes. Si les calculs s'effectuent par valeurs de r décroissantes depuis $r > r_f$, quel que soit le type de condition initiale, l'oscillation n'existe qu'à partir de $r=r_{max}=61,5$. Dans l'intervalle $[r_{max}; r_f]$, on a une branche instable. Les deux solutions de l'intensité ne sont pas observables simultanément et leur existence respective dépend des conditions initiales.

4 Domaine d'existence de l'oscillation

Dans ce paragraphe, nous envisageons que le régime d'oscillation peut être quelconque, c'est-à-dire dégénéré ou non-dégénéré. Nous cherchons à déterminer le domaine d'existence de l'oscillation et son régime. Il s'agit donc de trouver les valeurs seuils du paramètre r ce qui sous-entend que les calculs sont menés dans l'hypothèse des faibles signaux pour les amplitudes des ondes d'oscillation $A_3(z,t)$ et $A_4(z,t)$ et par conséquent les amplitudes des ondes de pompes sont constantes: $A_1(z,t) \simeq A_1(0)$, $A_2(z,t) \simeq A_2(l)$. Le système (1) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_4^*}{\partial z} &= -\nu^* A_1^* \\ \frac{\partial A_3}{\partial z} &= -\nu^* A_2 \\ (\tau \frac{\partial}{\partial t} + 1)\nu &= \frac{\gamma l}{l_0} (A_1^* A_4 + A_2 A_3^*) \end{aligned} \tag{9}$$

Les solutions sont recherchées sous la forme :

$$\begin{aligned} A_4(z,t) &= a_4(z) e^{st} + b_4(z) e^{s^*t} \\ A_3^*(z,t) &= a_3^*(z) e^{st} + b_3^*(z) e^{s^*t} \\ \nu(z,t) &= n_1(z) e^{st} + n_2(z) e^{s^*t} \end{aligned} \quad (10)$$

où a_4 et b_4 (resp. a_3^* et b_3^*) sont les amplitudes de l'onde 4 (resp. 3), n_1 et n_2 sont les amplitudes du réseau de réfraction, s se met sous la forme $s' + is''$.

En reportant les expressions (10) et en appliquant les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} A_3(z=l,t) &= 0 \quad \forall t \\ A_4(z=0,t) &= \sqrt{R}A_3(0,t) \quad \forall t, \end{aligned} \quad (11)$$

on trouve la condition pour que des solutions non triviales existent :

$$e^{\frac{\gamma l}{1+\tau s}} = \frac{\sqrt{r}(\epsilon\sqrt{R} - \sqrt{r})}{\epsilon\sqrt{Rr} + 1} \quad (12)$$

où $\epsilon = \pm 1$. Cette relation permet de prévoir le régime dans le domaine où l'oscillation peut se développer.

Si ϵ vaut 1, la relation (12) peut de mettre sous la forme :

$$\frac{\gamma l}{1 + \tau s} = \ln \frac{\sqrt{r}(\sqrt{R} - \sqrt{r})}{\sqrt{Rr} + 1} \quad (13)$$

Dans la région $R > r$, l'argument du logarithme est positif, s est donc réel : les ondes sont dégénérées. Dans la région $R < r$, l'argument du logarithme est négatif, s possède une partie réelle s' et une partie imaginaire s'' données par :

$$\frac{\gamma l}{1 + \tau s'} = L + \frac{\pi^2}{L} \quad (14)$$

$$\frac{\gamma l}{\tau s''} = \pm \frac{L^2 + \pi^2}{\pi} \quad (15)$$

avec $L = \ln \frac{\sqrt{r}(\sqrt{R} - \sqrt{r})}{\sqrt{Rr} + 1}$.

Les ondes sont donc non-dégénérées. D'après l'équation (14), la valeur minimale de $|\gamma l|$ est 2π : afin d'obtenir des ondes non dégénérées, il faut un coefficient de couplage supérieur à 2π .

Si ϵ vaut -1, le raisonnement est le même, L est remplacé par $L' = \ln \frac{\sqrt{r}(\sqrt{R} + \sqrt{r})}{\sqrt{Rr} - 1}$ et la borne délimitant le type d'ondes ne sera plus R mais $1/R$.

Ainsi le domaine d'existence de l'oscillation se scinde en trois parties bornées par R et $1/R$. A présent, il nous est possible de déterminer la fréquence au voisinage du seuil de l'oscillation. Elle est donnée par la partie imaginaire de s c'est-à-dire s'' et vaut $f = s''/\pi$.

Les figures 3 représentent les domaines d'existence et les fréquences de l'oscillation pour $R=0,1$ et $\gamma l = 7$. Le domaine débute à $r \approx 3$ par des ondes non-dégénérées et se termine par des ondes dégénérées à $r \approx 1,2 \cdot 10^{+5}$. Pour r compris entre 9 et 10, il n'y a pas d'oscillation.

L'accord entre le domaine d'existence prédit par l'analyse précédente et celui obtenu par simulation du système 1 est remarquable. D'après la figure 3, les deux régimes, dégénéré et non-dégénéré existent. Pour $r < 10$ c'est-à-dire à $1/R$, l'oscillation est non-dégénérée. La valeur de la fréquence pour $r=6$ vaut 0,32 Hz (figure 3 b)). Cette valeur est en accord avec celle déduite de la simulation des équations 1 (figure 4 a)). Pour $r > 1/R$, l'oscillation est de type dégénéré. Par exemple, pour $r=80$, la figure 4 b) confirme l'absence de décalage de fréquence.

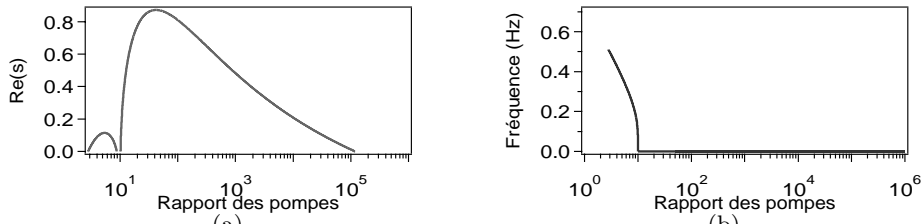


FIG. 3 – (a) Domaines d'existence de l'oscillation, (b) Fréquence de l'oscillation en fonction du rapport des pompes.

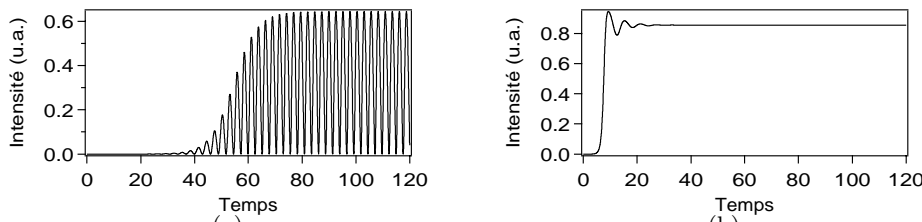


FIG. 4 – Intensité de l'oscillation pour (a) un rapport des pompes de 6 (b) pour un rapport des pompes de 80.

5 Conclusion

La simulation d'une cavité photoréfractive basée sur l'oscillateur optique semi-linéaire permet d'observer un cycle d'hystérésis sur l'intensité de l'oscillation en fonction du rapport des pompes. Au seuil de l'oscillation, nous avons développé un modèle permettant de prévoir le domaine d'existence de l'oscillation. Il scinde également ce domaine en trois parties bornées par R et $1/R$. Les prédictions de ce modèle avec les résultats des simulations des équations 1 sont en parfait accord.

Références

- [1] A.A. Zozulya and V.T. Tikhonchuck *Investigation of stability four-wave mixing in photorefractive media*, Physics Letters A **135**,447-452, (1989).
- [2] M. Grapinet, P. Mathey, S. Odoulov and D. Rytz, *Phase diagrams for semilinear photorefractive coherent oscillator*, Applied physics B, **79** 345-350 (2004).
- [3] P. Mathey, S. Odoulov and D. Rytz *Oscillation spectra of semilinear photorefractive coherent oscillator with two pump waves*, J. Opt. Soc. Am; B **19**, 12 (2002).
- [4] M. Cronin-Golomb, B. Fischer, J.O. White and A. Yariv, *Theory and Applications of Four-Wave Mixing in Photorefractive Media*, IEEE Journal of Quantum Electronics, **20** (1), 12-29 (1984).
- [5] P. Mathey, P. Jullien, S. Odoulov and O. Shinkarenko *Second-order optical phase transition in a semilinear photorefractive oscillator with two counterpropagating pump waves*, J. Opt. Soc. Am. B **19** 3, 405-411, (2002).

Oscillations sous-seuil et réponse stationnaire dans des modèles neuronaux simples à conductance

B. Ibarz¹, Miguel A.F. Sanjuán¹ et K. Aihara²

¹*Grupo de Dinámica no Lineal y Teoría del Caos*

*Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza
Universidad Rey Juan Carlos, Tulipán s/n, 28933 Móstoles, Madrid, Espagne*

²*Department of Complexity Science and Engineering,*

*Graduate School of Frontier Science, The University of Tokyo, 113-8656 Tokyo,
Japan*

`bibarz@escet.urjc.es`

Résumé

Le travail présenté essaie de clarifier certains aspects des modèles neuronaux simples à conductance. Au moyen de l'étude des bifurcations d'un modèle générique de conductance qui couvre quelques modèles neuronaux très utilisés [1], [2], [3], nous montrons qu'il existe un compromis entre l'habilité à présenter des oscillations sous-seuil - propriété qui détermine la sélectivité en fréquence de plusieurs neurones - et l'habilité à répondre à des variations stationnaires du courant externe - qui est une des propriétés fondamentale des modèles de conductance. Ce compromis montre les limitations de ces modèles simplifiés, et nous aide à mieux comprendre les mécanismes sous-seuil des neurones.

1 Introduction

Les modèles dynamiques neuronaux simples essaient d'extraire les mécanismes fondamentaux qui régissent le comportement des neurones: la génération de potentiels d'action (*spikes*) et de bouffées (*bursts*), la synchronisation ou la sélectivité en fréquence. Les modèles de conductance présentent une variable correspondante au voltage de la membrane cellulaire, et d'autres variables modelant des canaux et concentrations ioniques déterminant les courants qui chargent ou déchargent la dite membrane. Ces variables, ou quelques-unes d'entre elles, évoluent souvent sur une échelle de temps notamment plus lente que celle du voltage. On parle donc des sub-systèmes rapide et lent, et l'analyse se simplifie avec cette décomposition.

Pour introduire dans ces modèles des potentiels d'action, au moins deux variables sont nécessaires: une pour le voltage, qui doit perdre la stabilité à partir d'une certaine valeur seuil (générant un *spike*), et une autre plus lente pour activer, quand le potentiel d'action s'est généré, un courant de récupération qui ramène le voltage au niveau sous-seuil. Néanmoins, les modèles *Integrate and Fire* (IF) n'emploient qu'une variable, le voltage. Quand celui-ci dépasse une valeur préfixée, on considère le potentiel d'action comme généré, et le voltage retourne au valeur sous-seuil. On perd ainsi toute information sur la dynamique des *spikes*, mais dans plusieurs cas c'est une approximation pleinement justifiée.

Pour modéliser des bouffées de potentiels d'action autonomes, il faut ajouter une troisième variable (deuxième dans le cas IF) gouvernant la transition entre l'état du *spiking* et celui de silence. Le modèle est alors enrichi avec une dynamique sous-seuil qui, en

plus des bouffées, peut inclure adaptation, oscillation et résonance [5]. Deux modèles bien connus dans cette catégorie sont ceux proposés par N. Rulkov et E. Izhikevich respectivement.

2 Les modèles de Rulkov et d'Izhikevich

Ces deux modèles partagent beaucoup de caractéristiques. Ils possèdent deux variables, une rapide pour le voltage et autre lente, de porte. Pour certaines valeurs de la variable lente le voltage tend au repos; pour des autres, il perd la stabilité et croit jusqu'à ce qu'il atteigne une valeur où l'on considère qu'un potentiel d'action s'est généré, moment où le voltage est forcément ramené à la région sous-seuil. La variable lente évolue en fonction du voltage, alternant entre les valeurs correspondant au repos et à la instabilité. On présente ici les deux modèles en temps discret, mais les caractéristiques discutées sont les mêmes en temps continu, comme on verra.

La forme du modèle proposé par N. Rulkov [1] qui nous intéresse correspond aux équations:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{-\alpha^2}{4} - \alpha + y_n + I_n & \text{if } x < -1 - \frac{\alpha}{2} \\ \alpha x + (x+1)^2 + y_n + I_n & \text{if } -1 - \frac{\alpha}{2} \leq x \leq 0 \\ y_n + 1 + I_n & \text{if } 0 < x < y + 1 + I_n \\ -1 & \text{if } x \geq y + 1 + I_n \end{cases} \quad (1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \mu(x_n + 1 - \sigma_n) \quad (2)$$

Dans ce modèle μ est un paramètre de petite magnitude, et alors x_n est la variable rapide, représentant le voltage, et y_n est une variable de porte lente. Le modèle présente deux types d'excitations externes: I_n entraîne directement la variable rapide vers des voltages plus élevés, donc équivalant au courant injecté dans des neurones réels, tant que σ appartient à la dynamique lente et peut modéliser des effets de modulation.

La figure 1 montre le diagramme des nullclines. La nullcline rapide a deux branches, une stable (N_s) et autre instable (N_u). Pour valeurs de y à gauche du sommet le sous-système rapide a deux points d'équilibre, l'un d'entre eux stable, où le neurone se repose. Mais si y_n (ou la stimulation externe I_n) surpasse le sommet, les points d'équilibre disparaissent; x_n s'envole alors jusqu'à atteindre la valeur $y + 1 + I_n$, où elle retourne à $x = -1$ et recommence: la neurone est en état de *spiking*. Pour sa part, y_n augmente quand x_n est en bas de la nullcline lente $x = -1 + \sigma_n$ et diminue autrement. Alors si l'état est au-dessous de cette nullcline, il suivra de près la branche stable de la nullcline rapide vers le sommet; il s'arrêtera s'il trouve le point d'intersection avec l'autre nullcline avant de surpasser le sommet, ou s'élancera en haut produisant un ou plusieurs potentiels d'action.

Le système de Rulkov n'a qu'un état stationnaire. Si $\mu \approx 0$, cet état est stable s'il est sur la branche stable de la nullcline de x_n , et instable autrement. La perte de la stabilité arrive suite à des variations de la valeur de σ_n . Par contre, les variations de I_n , en déplaçant la nullcline rapide horizontalement, n'ont pas d'effet sur la position relative des nullclines, et alors ne peuvent modifier que provisoirement l'état du système.

Les équations du modèle neuronal proposé par Izhikevich [2] sont:

$$\left. \begin{aligned} v_{n+1} &= 0.04v_n^2 + 6v_n + 140 - u_n + I_n \\ u_{n+1} &= u_n + a(bv_n - u_n) \\ v_{n+1} &= c \\ u_{n+1} &= u_n + d \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{if } v_n < 30 \\ \text{if } v_n \geq 30 \end{array} \quad (3)$$

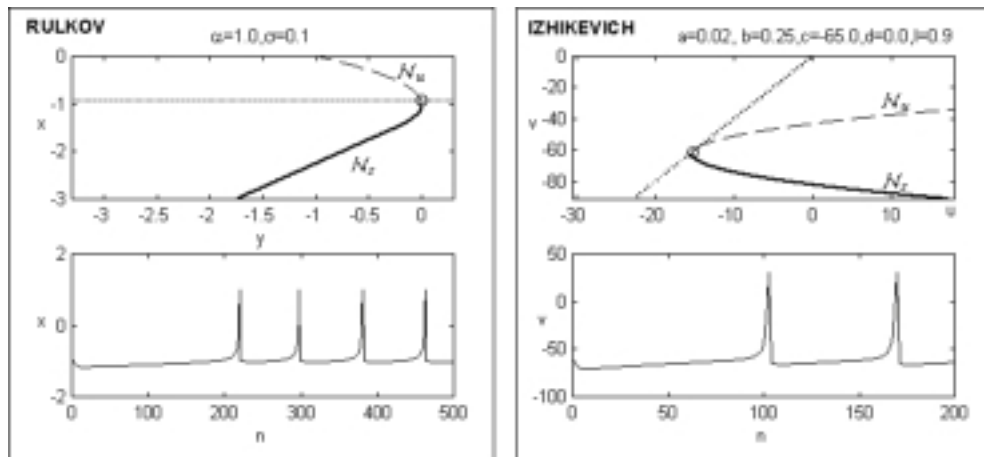


FIG. 1 – Plan des phases (en haut) et exemple d'évolution (en bas) des modèles de Rulkov (à gauche) et Izhikevich (à droite)

Dans la figure 1 on voit la similitude avec le modèle de Rulkov. La variable v_n est rapide (le paramètre a est petit) et représente le voltage, alors que u_n est lente et module la dynamique de v_n . La nullcline rapide a aussi une branche stable N_s et une autre instable N_u ; la nullcline de la variable lente est une droite. Toutefois, à la différence du modèle de Rulkov, cette droite n'est pas horizontale, et donc coupe la nullcline rapide en deux points. Que la pente ne soit pas nulle signifie que la variable lente est asymptotiquement stable, alors que dans le modèle de Rulkov elle est neutralement stable. C'est le paramètre b qui décide la pente de la nullcline. Il pourrait être vaguement assimilé à l'entrée externe σ_n dans le modèle de Rulkov: des valeurs petites de b situent l'intersection des nullclines sur la branche stable de la nullcline rapide, tandis que des valeurs plus grandes de b provoquent la perte de stabilité (comme dans le modèle de Rulkov lorsque l'on augmente σ_n). Mais un effet similaire se produit si l'on augmente I_n (i.e., en déplaçant la nullcline rapide horizontalement), car maintenant la nullcline lente est inclinée. Les paramètres c et d ne sont pas importants pour notre discussion.

3 Oscillations sous-seuil

Tant dans le modèle de Rulkov comme dans le modèle de Izhikevich la bifurcation qui donne lieu à la perte de stabilité du point de repos (par la variation des courants considérés comme paramètres) est de type Neimark-Sacker (Hopf en temps discret). Si cette bifurcation est sous-critique, le neurone sautera immédiatement à un cycle complètement développé (*spiking*). Mais si la bifurcation est supercritique, un petit cycle apparaîtra. C'est ainsi que se forment des oscillations sous-seuil.

Pour des valeurs typiques des paramètres, la bifurcation dans le modèle de Izhikevich est sous-critique, pendant que celle du modèle de Rulkov est supercritique [1]. Alors le modèle d'Izhikevich ne peut pas soutenir des oscillations sous-seuil. Mais les deux modèles sont localement identiques au niveau de la variable rapide (quadratique par rapport à elle-même et linéaire par rapport à la variable lente); la différence repose dans la dynamique de la variable lente, c'est à dire, dans la pente de la nullcline lente.

Pour mieux comprendre cette relation, nous prenons un modèle générique:

$$v_{n+1} = f(v_n) - u_n + I_v \quad (4)$$

$$u_{n+1} = u_n + pv_n - qu_n + I_u \quad (5)$$

Ici paramètres adimensionnels p et q sont positifs et petits ($p, q \ll 1$). Soit (v^*, u^*) un point fixe du système. La condition nécessaire pour qu'il perde la stabilité via une bifurcation de Neimark-Sacker, c'est:

$$f'(v^*) = \frac{1-p}{1-q}, \quad p - q^2 \equiv \omega^2 > 0$$

La criticalité de cette bifurcation dépend du premier coefficient de Lyapunov, l_1 , que se peut obtenir de manière relativement simple pour un système bidimensionnel [6], résultant:

$$l_1 = \frac{1-q}{8p} \left[f'''(v^*) - \left(1 - \frac{q}{\omega^2}\right) (1-q)[f''(v^*)]^2 \right]$$

Si $l_1 > 0$ la bifurcation sera sous-critique; si $l_1 < 0$, supercritique. Alors, pour l'existence des oscillations sous-seuil il faudra que le terme en $[f''(v^*)]^2$ soit aussi positif que possible; on voit bien que cela équivaut à ce que q soit aussi petit que possible. On achève un résultat similaire sur un système en temps continu. Dans le modèle

$$\dot{v} = f(v) - u + I_v \quad (6)$$

$$\dot{u} = pv - qu + I_u \quad (7)$$

la condition de Hopf est:

$$f'(v^*) = q, \quad p - q^2 \equiv \omega^2 > 0$$

et le premier coefficient de Lyapunov est:

$$l_1 = \frac{1}{8p} \left[f'''(v^*) + \frac{q}{\omega^2} [f''(v^*)]^2 \right]$$

À différence du cas discret, l_1 ne peut pas être négatif si $f'''(v^*)$ ne l'est pas; mais il est également convenable, pour la super-criticalité de la bifurcation, que q soit aussi petit que possible, puisque son terme est croissant avec q .

L'analyse linéaire manifeste la même relation. En effet, avant de perdre la stabilité (soit à travers d'une bifurcation sous-critique ou supercritique) le point fixe, ayant deux valeurs propres complexes, est une spirale, autour de laquelle le système tourne en tombant. Quoique les oscillations résultantes ne soient pas stables, elles peuvent se tenir longtemps si la partie imaginaire des valeurs propres du point fixe en est beaucoup plus grande que la partie réelle; cela suffit pour observer des phénomènes de résonance [4]. Alors une mesure raisonnable de la capacité de production des oscillations sous-seuil est l'extension des valeurs du courant I_v pour lesquelles les valeurs propres du point fixe restent proches à l'axe imaginaire. Par exemple, dans le système 4, 5, les valeurs propres satisfaisant $\lambda_1 + \lambda_2 = f'(v^*) - q$, $\lambda_1 \lambda_2 = p - qf'(v^*)$, on peut trouver les valeurs de $f'(v^*)$ qui leur confèrent un angle θ préfixé avec l'axe imaginaire. Ensuite, puisque $\frac{df'(v^*)}{dI_v} = \frac{qf''(v^*)}{p - qf'(v^*)}$ et $f''(v^*)$ reste pratiquement constante pour $p, q \ll 1$ dans l'intervalle de v considéré, on trouve une relation $\Delta I_v = \frac{F(p, q, \theta)}{f''(v^*)}$ décroissante avec q pour chaque valeur de p .

Nous pouvons étendre ces conclusions à des modèles avec 3 variables, comme celui de Hindmarsh-Rose [3]. Ayant compte que la troisième variable, qui est rapide, ne dépend

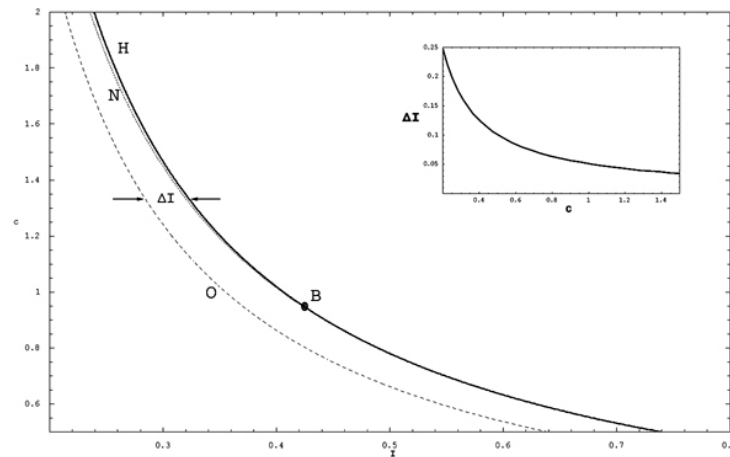


FIG. 2 – Diagramme de bifurcations du modèle de Hindmarsh-Rose pour les paramètres I et c . H - bifurcation de Hopf; B - point de Bautin; O - oscillations soutenues; N - noeud-col de cycles. Médaille: intervalle de courant pour oscillations soutenues en fonction de c

pas de la variable lente, on peut la remplacer par sa valeur asymptotique pour étudier la dynamique sous-seuil:

$$\begin{cases} \dot{v} = -v^3 + 3v^2 + 0.125 - r - h - I \\ \dot{r} = -r + 5v^2 - 1 \\ \dot{h} = 0.025(-h + 2v + 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v} = -v^3 - 2v^2 + 1.125 - h - I \\ \dot{h} = 0.025(-ch + 2v + 3) \end{cases}$$

On a ajouté le paramètre c – équivalent à q dans le modèle générique (5) – pour varier la pente de la nullcline lente. La figure 2 montre le diagramme de bifurcations du point de repos du système simplifié en fonction I et c . On voit (trait continu) la courbe de bifurcation de Hopf avec le point de Bautin (changement supercritique–sous-critique) et la courbe de bifurcations noeud-col de cycles qui l’accompagne. En trait pointillé on montre la courbe non-bifurcationnelle où les valeurs propres se situent à un angle $\tan \theta < .1$ de l’axe imaginaire avant de perdre la stabilité. Comme on verra, la distance horizontale (intervalle des courants) entre cette courbe et la courbe de Hopf est rapidement décroissant avec c : plus c augmente, plus la possibilité des oscillations diminue. En même temps, la perte de la supercriticalité a lieu avec des valeurs de c croissantes.

4 Simulations et conclusion

Les raisonnements précédents mènent à la conclusion suivante: il existe un compromis entre la sensibilité à des courants externes et la possibilité de soutenir des oscillations sous-seuil dans les modèles bidimensionnels de conductance avec des échelles de temps rapide et lente. Si la variable lente est fortement stable, le modèle sera très sensible au courant, mais incapable de soutenir des oscillations sous-seuil. Si par contre la variable lente est proche de la neutralité, des oscillations stables ou de longue durée seront observables, mais la réponse à des changements dans le courant externe diminuera.

Nous corroborons cette conclusion en simulant le système discret de Izhikevich pour divers valeurs de a , conservant ab constant (c’est à dire, nous varions q en conservant p constant dans le modèle générique). L’entrée se compose d’un courant stationnaire $I(a,b)$

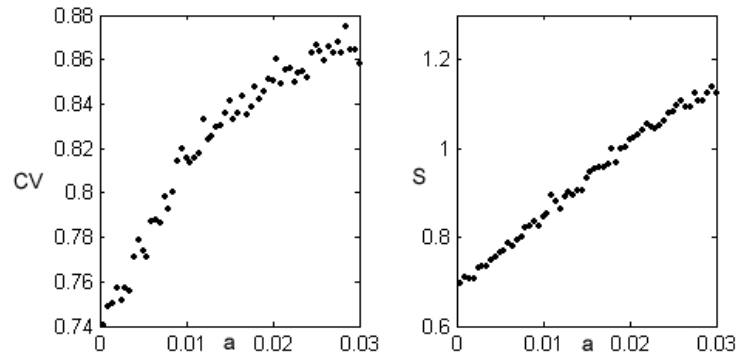


FIG. 3 – Coefficient de variation CV et sensibilité S en fonction de a pour le modèle de Izhikevich

qui assure que le point de repos du système se trouve en $v = -62.7$ dans tous les cas, auquel nous superposons un courant de bruit blanc et un courant poissonien de fonctions alpha simulant la stimulation synaptique. Le bruit provoque la génération de potentiels d'action. Nous mesurons le coefficient de variation des spikes ($CV = \sigma_T / \langle T \rangle$) et la sensibilité à des accroissements du niveau des courants bruyants ($S = d \ln f_{spiking} / d \ln I_{bruyant}$). La figure 3 montre le résultat: avec a croissant (q croissant dans le modèle générique 5) la sensibilité augmente, mais le coefficient de variation augmente aussi, à la suite de la perte progressif des oscillations sous-seuil.

Remerciements

Nous remercions le soutien financier du Ministère des Sciences et Technologie de l'Espagne, projet BFM2003-03081, et l'Universidad Rey Juan Carlos pour une Bourse de stage predoctoral pour l'Université de Tokyo où partie de ce travail a été développée.

Références

- [1] A. L. Shilnikov et N.F. Rulkov, *Subthreshold oscillations in a map-based neuron model*, Physics Letters A, **328**, (2-3), 177-184, (2004).
- [2] E. M. Izhikevich, *Simple model of spiking neurons*, IEEE Transactions on Neural Networks, (2004).
- [3] J. L. Hindmarsh and R. M. Rose, *A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations*, Proc R. Soc. Lond. B, **221**, 87-102, (1984).
- [4] M. J. E. Richardson, N. Brunel and V. Hakim, *From subthreshold to firing-rate resonance*, J. Neurophysiol, **89**, (2003).
- [5] H. R. Wilson, *Spikes, decisions and actions*, Oxford University Press, (1999).
- [6] J. Guckenheimer et P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Springer, (1983).
- [7] B. Ibarz, M. A.F. Sanjuán et K. Aihara, *Trade-off between stationary response and subthreshold oscillations in simple conductance models*, en préparation (2005).

Expérience réalisant un oscillateur en longueur d'onde d'un laser accordable pour l'étude des dynamiques non linéaires à retard

Laurent Larger, Damien Nirouset, Vladimir Udaltsov

FEMTO-ST / Dép. d'Optique, UMR 6174, 16 route de Gray, 25030 Besançon cedex, France

GTL-CNRS Telecom / FEMTO-ST, 2-3 rue Marconi, 57070 Metz cedex, France
laurent.larger@univ-fcomte.fr

Résumé

Nous proposons un montage expérimental opto-électronique, dont le but est de permettre l'investigation pratique des comportements nombreux et variés de la classe des dynamiques non linéaires à retard.

Abstract

We report an optoelectronic experimental setup, with which various and numerous dynamical behaviors can be practically investigated for the class of nonlinear delay differential dynamics

1 Introduction

Les dynamiques à retard ont, entre autres choses, l'intérêt surprenant de proposer des comportements extrêmement complexes, à partir de modèles dynamiques d'expression très simple. Dans le cas de l'équation (1), nous sommes en présence d'un système différentiel du premier ordre faisant intervenir une variable dynamique scalaire $y(t)$. Le membre de gauche est connu dès le premier cycle universitaire, lors de l'apprentissage des équations différentielles linéaires, ou encore des phénomènes transitoires de charge et de décharge d'une capacité dans un circuit RC . Le second membre est moins familier quoique d'expression assez simple, il s'agit d'une fonction non linéaire $f[\cdot]$ en général bornée dans le cas d'un système physique, et s'appliquant à la variable dynamique retardée d'une quantité τ_R ; le tout est multiplié, ou amplifié, par un facteur β .

$$y(t) + \tau \cdot \frac{dy}{dt}(t) = \beta \cdot f[y(t - \tau_R)]. \quad (1)$$

En l'absence de retard ($\tau_R = 0$), le système est de type multi-stable, selon le nombre et la nature des points d'intersection de $z = \beta \cdot f[y]$ avec la première bissectrice $z = y$. Une rapide analyse linéaire de stabilité montre que les points d'intersection à pente ($\beta \cdot f'[y_F]$) inférieure à 1 sont stables, les autres étant instables. La donnée d'une condition initiale unique permet de déterminer sans ambiguïté l'évolution de la dynamique vers un des points fixes stables existants. En présence d'un retard, les choses se compliquent rapidement : la taille des conditions initiales passe de un à une infinité de valeurs sur un intervalle de temps de durée τ_R , soit une fonctionnelle $y_0(t)$, $t \in [-\tau_R; 0]$. Les conditions de stabilité du point fixe sont également modifiées, puisqu'elles s'expriment cette fois par la valeur absolue de la pente qui doit être inférieure à 1 (les pentes fortement négatives correspondent à des points fixes stables quand $\tau_R = 0$, alors qu'elles impliquent des points très instables pour $\tau_R > 0$). On voit alors ici clairement que l'augmentation du facteur β conduit inévitablement à la perte de stabilité d'un point fixe (sauf aux points particuliers ou $f' = 0$). La condition

d'instabilité du point fixe de (1) est exactement celle qui concerne les systèmes itératifs (à temps discret) dont la loi dynamique est très semblable, $y_n = \beta \cdot f[y_{n-1}]$. Le passage de (1) à l'application à temps discret est d'ailleurs bien connu ; il fait intervenir une approximation dite adiabatique, pour laquelle on néglige d'une part l'importance du terme différentiel $\tau(dy/dt)$ (e.g., transitions infiniment rapide $\tau \rightarrow 0$, ou encore variations (dy/dt) "presque toujours" nulles), et d'autre part on assimile la durée τ_R à un pas d'itération n à $n + 1$. On observe ainsi des bifurcations en fonction de β très semblables à celles de l'application logistique (cascade de dédoublement). Bien que les comportements dynamiques du flot à retard (1) et du map soient très similaires dans le cas $\tau \ll \tau_R$ et β faible (premières bifurcations en fonction de β), ils peuvent aussi être très différents, en particulier dans le cas des régimes chaotiques, où le flot développe des solutions de très grande complexité (dimension d'attracteur de plusieurs centaines selon certaines études [1, 2]).

Toute cette diversité de comportements est encore loin d'être cernée dans sa globalité, et c'est pourquoi encore de nombreuses études concernent ces dynamiques à retards. Récemment, il a été montré analytiquement et expérimentalement dans quelles conditions portant sur la forme de la non linéarité, la première bifurcation de Hopf peut être de nature super-critique ou sous-critique [3, 4]. Les propriétés particulières des systèmes à faible retard sont aussi étudiées numériquement [5]. L'influence du type de processus dynamique (ordre de la dynamique, nature différentielle ou intégral-différentielle [6] du membre de gauche de (1),...) connaît également un regain d'intérêt dans divers types d'applications (générateur d'impulsions, oscillateur ultra-stable, cryptographie par chaos [7], applications radar à l'aide de signaux à large spectre).

Le montage proposé a pour but de permettre une approche expérimentale de ces systèmes à retard, avec la possibilité de pouvoir agir sur un grand nombre de paramètres, dans une large plage de valeurs. Ce système physique s'inspire d'un certain nombre d'expériences antérieures réalisées en optique [8, 9, 10, 11], domaine pour lequel le retard temporel est typiquement facile à réaliser par une simple longueur d'un milieu de propagation de l'onde lumineuse. Cette onde porte, quant à elle la dynamique de la variable $y(t)$, au travers d'une de ses caractéristiques, l'intensité, la longueur d'onde, la phase, ou encore la polarisation. Dans notre cas, il s'agira de la longueur d'onde lumineuse émise par un laser semi-conducteur accordable.

2 Réalisation pratique

Le système expérimental proposé permet d'explorer de manière assez souple la classe des flots à retard pouvant se mettre sous la forme intégrale suivante :

$$y(t) = \beta \cdot \{h(\theta) \star f[y(\theta - \tau_R)]\}(t) = \beta \cdot \int_{-\infty}^t h(t - \theta) \cdot f[y(\theta - \tau_R)] d\theta, \quad (2)$$

où $h(t)$ correspond à la réponse impulsionnelle d'une processus dynamique linéaire. Dans le cas de (1), $h(t) = u(t) \cdot \exp(-t/\tau)$ (avec $u(t)$ la fonction échelon unité valant 1 pour $t \geq 0$, et 0 pour $t < 0$). Un tel processus dynamique non linéaire à retard apparaît alors structuré physiquement de manière séquentielle, en une boucle d'oscillation comprenant les éléments suivants représenté schématiquement sur la figure 22.1(a) :

- une fonction non linéaire agissant sur une variable d'entrée $y(t)$ et fournissant une variable de sortie $z(t) = f[y(t)]$;
- un retard temporel pur τ_R agissant sur $z(t)$, et fournissant $f[y(t - \tau_R)]$ en sortie ;

- un processus dynamique linéaire, ou encore un filtre linéaire de fréquences électroniques (dans le cas de (1), un filtre passe-bas du premier ordre de coupure $f_c = 1/(2\pi\tau)$), dont la réponse impulsionnelle est $h(t)$;
- et un élément de conversion / amplification linéaire, de facteur de sensibilité β . La sortie de ce dernier bloc est rebouclée sur le processus de transformation non linéaire par la fonction $f[\cdot]$.

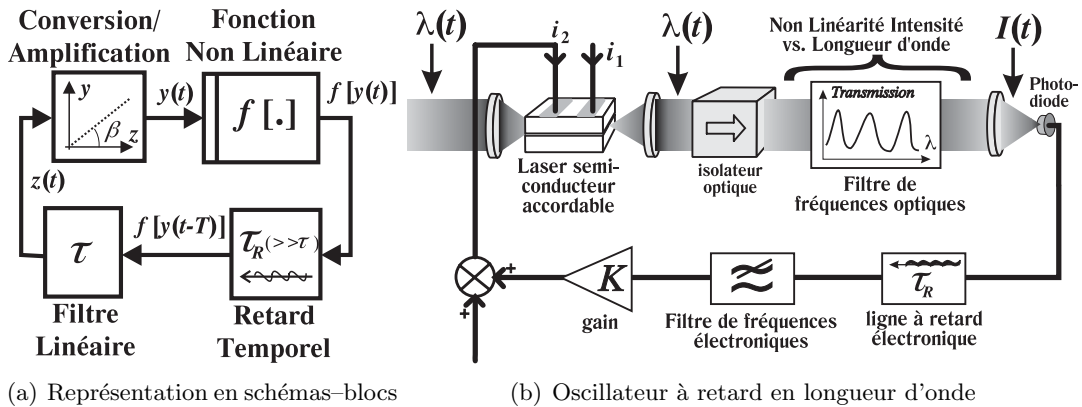


FIG. 1 – Montage expérimental, principe

Ce montage a déjà fait l'objet de nombreuses études, en particulier il a permis une démonstration optique de transmission d'information sécurisée par porteuse chaotique [7, 10]. Le montage que nous proposons est une amélioration du précédent système, dont le but est plus orienté vers l'étude fondamentale des propriétés des systèmes dynamiques décrits par (2). Comme illustré par le schéma du montage à la figure 22.1(b), la fonction non linéaire peut être a priori quelconque ; elle doit correspondre pratiquement à la courbe de transmission d'un filtre optique, à l'intérieur de la plage d'accordabilité d'une source laser ajustable en longueur d'onde par un courant d'injection (plage d'accordabilité $\Delta\lambda \simeq 1,5$ nm autour de $\lambda_0 = 1550$ nm, pour une variation de courant de quelques mA). Cette non linéarité a déjà été implémentée à l'aide de deux types différents de filtres optiques ; un filtre biréfringent qui donne lieu à une fonction $f[y] = \sin^2[y + \phi_0]$ (7 périodes du sinus sont atteintes dans la plage de variation de longueur d'onde, ce qui correspond à une non linéarité polynomiale équivalente d'ordre de 15 environ) ; un filtre de type Fabry-Pérot qui permet d'obtenir une fonction d'Airy $f[y] = (1 + m \sin^2[y + \phi_0])^{-1}$ (également plus d'une dizaine de pics de transmission du Fabry-Pérot sont pratiquement accessibles). Les fluctuations d'intensité optique résultant de la transformation non linéaire selon le profil du filtre spectral optique, sont ensuite détectées par une photodiode. On obtient ainsi une version sous forme de courant électrique des variations dynamiques de grandeurs optiques. Le signal électrique, après retardement, amplification, et filtrage par la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un filtre électronique, est finalement appliquée sur l'électrode de modulation de la longueur d'onde du laser accordable. La boucle d'oscillation est fermée, et le système réalise ainsi une dynamique non linéaire à retard du type de l'équation (2).

Les phénomènes dynamiques sont pratiquement limités en vitesse de variation par le filtre de fréquences électroniques (de réponse impulsionnelle $h(t)$). Celui-ci opère dans le domaine des basses fréquences (jusqu'à une vingtaine de kHz environ), et la dynamique obtenue est facilement observable à l'aide d'appareils d'acquisition relativement classiques

(oscilloscope numérique BF, avec FFT). Ceci impose par contre une contrainte particulière au niveau de la réalisation du retard temporel. Celui-ci doit en effet intervenir avec des valeurs de l'ordre de grandeur (plus ou moins une décade) du temps de réponse du processus dynamique (τ , de l'ordre de la dizaine de μs). La mise en oeuvre par voie optique de ce retard imposerait l'utilisation de plusieurs dizaines de km de fibre optique; de plus, une telle réalisation ne permet pas une modification souple de ce retard τ_R . La principale originalité de ce nouveau montage de dynamique non linéaire en longueur d'onde, réside dans la mise en oeuvre d'une ligne à retard électronique par voie numérique. Cette ligne à retard utilise des circuits électroniques dédiés à base de convertisseurs analogique / numérique 12 bits rapides, de mémoires FIFO numériques (First In First Out 2x9bits), et de convertisseurs numérique / analogique 12 bits. Le choix de cette réalisation est essentiel pour pouvoir disposer d'une ligne à retard extrêmement souple d'emploi, puisque la valeur de τ_R peut être ajustée très simplement par une fréquence d'horloge sur presque trois décades, permettant de réaliser de manière très précise des retards de 0,5 ms à près de 0,5 s.

3 Résultats expérimentaux

À l'aide de systèmes d'acquisition automatique (Labview®), il est possible d'enregistrer en continu une série temporelle d'un régime dynamique, en fonction de l'évolution d'un des paramètres dynamiques; la valeur de ce dernier est également fixée de manière automatisée. Les séries temporelles sont traitées, soit en temps réel, soit ultérieurement, pour obtenir une représentation de type diagrammes de bifurcation. Compte tenu de la grande variété de régimes dynamiques et de leur complexité, il est en général difficile de définir une section de Poincaré dans un espace des phases de dimension réduite, afin d'en extraire une trace "classique" de diagramme de bifurcation. Pour cette raison, nous représentons souvent les diagrammes de bifurcation de ce type de dynamique à l'aide de la densité de probabilité de la variable dynamique pour chacun des régimes, ces derniers étant obtenu pour une valeur précise du paramètre de bifurcation. Les diagrammes de bifurcation concernent en général le paramètre gain β , et permettent d'observer une route vers le chaos de type cascade de dédoublement de période. Grâce à la souplesse du montage expérimental, nous avons pu effectuer un premier relevé de diagramme de bifurcation expérimental en fonction du paramètre retard temporel τ_R (figure 22.2(a)), dans le cas d'une dynamique du premier ordre (dynamique décrite par l'équation (1) avec une fonction \sin^2). La plage de variation du retard s'étale de part et d'autre de la valeur du temps de réponse τ du filtre passe-bas, plage pour laquelle on sait que les instabilités dépendent fortement des valeurs relatives de τ_R et τ . Le gain β a été fixé à une valeur (environ 3) permettant les instabilités de type chaotique dans le cas $\tau_R \gg \tau$. Nous observons effectivement que pour des retards faibles de τ_R/τ , un régime de point fixe stable est obtenu. Pour des valeurs proches de 1, une bifurcation de Hopf a lieu. Autour de la valeur 2, la forme d'onde du cycle périodique initialement proche d'une sinusoïde, devient distordue, faisant apparaître des petites ondulations secondaires à l'intérieur d'une période. La structure interne de ces cycles devient de plus en plus complexe avec l'augmentation du retard, jusqu'à atteindre assez brutalement des régimes chaotiques peu après la valeur de 2τ . Ce type de diagramme de bifurcation en fonction du retard temporel est significativement différent de ce qui est observé avec le paramètre gain β .

À titre de comparaison, un diagramme de bifurcation numérique a été représenté à la figure 22.2(b). Il a été obtenu par intégration numérique (Runge-Kutta d'ordre 4) du modèle

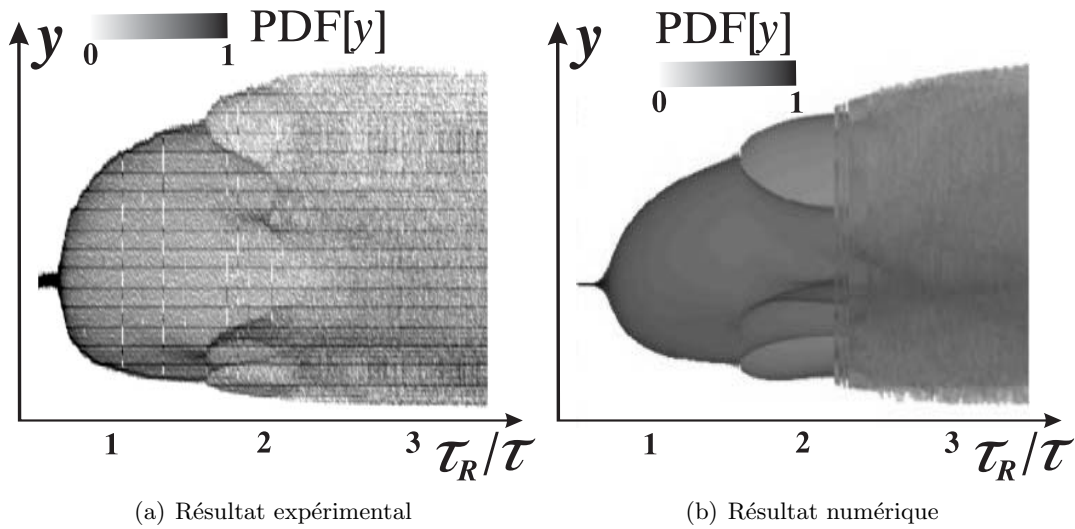


FIG. 2 – Diagrammes de bifurcation en fonction du paramètre retard τ_R

dynamique, avec des valeurs de paramètres correspondant à celles mesurées dans le cas du diagramme de bifurcation expérimental. Une très bonne adéquation peut être relevée entre les résultats numériques et expérimentaux, confirmant ainsi le bon comportement du système expérimental par rapport au modèle dynamique à retard initialement espéré.

4 Conclusions, perspectives

Nous avons présenté un montage opto-électronique capable de réaliser un grand nombre de dynamiques non linéaires à retard, afin d'en étudier les propriétés dynamiques nombreuses et variées, en fonction de plusieurs paramètres dynamiques : le type de processus dynamique (passe-bas, passe-bande, ordre n quelconque, ...), le type de fonction non linéaire (\sin^2 , fonction d'Airy, ...), la valeur relative du retard temporel par rapport aux temps caractéristiques du processus dynamique. Un premier exemple de relevé expérimental original a été présenté. Il consiste en un diagramme de bifurcation expérimental à partir du paramètre retard temporel. Une très bonne adéquation qualitative et quantitative est obtenue en comparant avec le résultat d'un tracé similaire obtenu à partir d'une intégration numérique du modèle dynamique.

Les études se poursuivent pour explorer plus en détails la diversité effective de ce type particulier de dynamique non linéaire. La souplesse du montage permet également d'envisager de manière très directe la réalisation de dynamiques à retards multiples, en imbriquant plusieurs boucles d'oscillation non linéaires à retard.

Références

- [1] J.D. Farmer, *Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system*, Physica D, **4**, 366 (1982).
- [2] B. Dorizzi, B. Grammaticos, M. Le Berre, Y. Pomeau, É. Ressayres et A. Tallet, *Statistics and dimension of chaos in differential delay systems*, Phys. Rev. A, **35**, 328 (1987).
- [3] L. Larger, T. Erneux et J.-P. Goedgebuer, *Experimental and analytical investigation of sub-critical Hopf bifurcation in time delayed dynamics*, Physical Review E, **69**, 036210 (2004).
- [4] T. Erneux, L. Larger, M. W. Lee et J.-P. Goedgebuer, *Ikeda Hopf bifurcation revisited*, Physica D, **194**, 49 (2004).
- [5] V.S. Udaltsov, J.-P. Goedgebuer, L. Larger et W.T. Rhodes, *Dynamics of nonlinear feedback systems with short time delays*, Optics Communications, **195**, 187 (2001).
- [6] V.S. Udaltsov, L. Larger, J.-P. Goedgebuer, M. W. Lee, É. Genin et W.T. Rhodes, *Chaotic bandpass communication system*, IEEE Trans. On Circuits And Systems, **49**, 1006 (2002).
- [7] J.-P. Goedgebuer, L. Larger, H. Porte, *Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laser diode*, Phys. Rev. Lett., **80**, 2249 (1998).
- [8] H. M. Gibbs, F.A. Hopf, D.L. Kaplan et R.L. Schoemacker, *Observation of chaos in optical bistability*, Phys. Rev. Lett., **46**, 474 (1981).
- [9] A. Neyer et E. Voges, *Dynamics of electrooptic bistable devices with delayed feedback*, IEEE J. of Quantum Electron., **18**, 2009 (1982).
- [10] L. Larger, J.-P. Goedgebuer, J.-M. Merolla, *Chaotic Oscillator in Wavelength: A New Setup for Investigating Differential Difference Equations Describing Nonlinear Dynamics*, IEEE J. of Quantum Electron., **34**, 594 (1998).
- [11] P. Glorieux et A. Le Floch, *Nonlinear Polarization Dynamics in Anisotropic Lasers*, Optics Communications, **79**, 229 (1990).

Mode d'instabilité primaire dans un anneau cylindrique vertical soumis à un gradient radial de température

V. Lepiller, A. Prigent, F. Dumouchel et I. Mutabazi

LMPG, Université du Havre, 25 rue Philippe Lebon, bp 540, 76058 Le Havre cedex
valerie.lepiller@univ-lehavre.fr

Résumé

Ce papier traite d'une étude expérimentale sur le couplage des mécanismes de déstabilisation induits par la force centrifuge et la stratification radiale de la masse volumique d'un liquide confiné entre deux cylindres coaxiaux et verticaux soumis à un gradient radial de température. Le cylindre intérieur est en rotation. Lorsqu'un faible écart de température est imposé, un motif de rouleaux inclinés propagatifs apparaît dans une région confinée de la partie inférieure du système à partir d'une valeur critique du nombre de Reynolds. Au-delà de cette valeur critique, le motif croît. Pour des écarts de température plus élevés, le motif apparaît alors au centre. L'inclinaison du motif dépend du signe du produit entre le nombre de Reynolds et le nombre de Grashof. Les grandeurs caractéristiques, telles que le nombre d'onde et le nombre de Reynolds critiques diminuent avec le nombre de Grashof.

Abstract

In this experimental work, we have investigated the coupling between the centrifugal force and the heat transfer mechanism for a liquid confined in a vertical rotating cylindrical annulus with a radial temperature gradient. Depending on the value of the radial temperature gradient, inclined propagative rolls occur in the bottom or in the center of the system giving rise to a finite extent pattern. The vortex inclination depends on the sign of the product between the Reynolds number and the Grashof number. The characteristic parameters, such as the critical wavenumber and the Reynolds number, decrease with the Grashof number.

1 Introduction

Nous nous intéressons aux effets induits par un gradient radial de température sur les modes d'instabilité du système de Couette-Taylor avec seul le cylindre intérieur en rotation. Ce type de configurations est rencontré dans de nombreuses applications industrielles comme les échangeurs thermiques, les systèmes de refroidissement des machines tournantes ou des composants électroniques, les circuits d'isolation des réacteurs nucléaires [1]. Il est également présent dans des modèles géophysiques expliquant la circulation de fluides dans le manteau supérieur ou dans l'atmosphère [2]. La stabilité d'un fluide confiné entre deux cylindres coaxiaux verticaux avec un gradient radial de température a fait l'objet de nombreuses études numériques, théoriques et expérimentales [3, 4, 5]. Il a été montré que les modes critiques sont axisymétriques et oscillants. Des études théoriques et numériques [6, 7] se sont intéressées à l'ajout de la rotation pour mieux comprendre le couplage entre la force centrifuge et le couple de forces induit par la stratification radiale de la masse volumique. Toutefois, peu d'études expérimentales [8, 9] se sont intéressées au problème du système de Couette-Taylor couplé avec un gradient de température. Ces études se sont limitées à une visualisation de l'écoulement et peu de données quantitatives en ont été extraites. Dans ce qui suit nous décrirons ces différents motifs observés et en déduirons

les propriétés de l'écoulement en fonction de deux paramètres de contrôle, le nombre de Reynolds Re et le nombre de Grashof Gr . Le nombre de Reynolds est défini comme le rapport du temps caractéristique de diffusion visqueux $\tau_\nu = d^2/\nu$ sur le temps caractéristique d'advection $\tau_a = (a\Omega)/d$. Le nombre de Grashof est défini comme le rapport du temps caractéristique de diffusion visqueuse τ_ν au carré sur le temps de la poussée d'Archimède au carré $\tau_A^2 = (g\alpha\Delta Td)/\nu$.

2 Dispositif expérimental

Le système se compose de trois cylindres coaxiaux verticaux de même longueur $H = 57$ cm : un cylindre intérieur en aluminium anodisé noir de rayon $a = 2$ cm, un cylindre extérieur en verre transparent de rayon $b = 2,5$ cm et un cylindre d'isolation en verre transparent de rayon $c = 5$ cm (Fig. 1). Le liquide étudié, l'eau déminéralisée, se trouve confiné dans l'espace entre les deux premiers cylindres dont la distance est $d = b - a = 0,5$ cm. Ainsi le rapport d'aspect est $\Gamma = H/d = 114$ et le rapport des rayons est $\eta = a/b = 0,8$. Le cylindre intérieur et l'espace compris entre les cylindres extérieur et d'isolation peuvent être maintenus à des températures différentes respectivement T_1 et T_2 grâce à deux circulations d'eau provenant de deux cryo-thermostats. Un gradient radial de température $\delta T = \mu * (T_1 - T_2) = \mu * \Delta T$ est ainsi créé dans l'entrefer, où le coefficient μ dépend de la conductivité des matériaux des cylindres et de l'eau. Dans notre expérience, μ vaut 0,6. Afin de visualiser l'écoulement, on ajoute 2 % de Kalliroscope AQ-1000 [10], qui est une suspension de 1-2 % de plaquettes réfléchissantes de dimensions $30 \mu\text{m} \times 6 \mu\text{m} \times 0,07 \mu\text{m}$. Deux miroirs plans entourent le dispositif expérimental pour permettre une visualisation complète de l'écoulement dont nous enregistrons une hauteur de 32 cm à l'aide d'une caméra 2D [11, 12]. Un faisceau monochromatique issu du laser He-Ne ($\lambda = 638$ nm) est transformé par une lentille cylindrique en une nappe plane verticale perpendiculaire à l'axe des cylindres. L'intersection de cette nappe avec l'entrefer permet de visualiser une section droite verticale de l'écoulement. Une caméra CCD linéaire de 2048 pixels enregistre, à intervalles de temps réguliers, un signal de distribution de l'intensité lumineuse le long d'une ligne verticale de la section. Le signal est représenté sous forme de 256 niveaux de gris. Les lignes ainsi enregistrées sont disposées les unes à la suite des autres et forment un diagramme spatio-temporel (Fig. 2).

3 Visualisation

Nous étudions le mécanisme de déstabilisation de l'écoulement de base faisant intervenir la stratification radiale du moment cinétique et de la masse volumique. Dans cette perspective, nous imposons au départ la même température aux deux bains thermostatés. Puis, nous créons un écart radial de température constant avec une température du cylindre extérieur $T_2 = 30$ °C. Nous augmentons progressivement la vitesse de rotation du cylindre intérieur. Près du seuil du motif, cette vitesse est augmentée par pas de 1 mHz. Ainsi seul un paramètre de contrôle, le nombre de Reynolds, varie tandis que le nombre de Grashof est fixé.

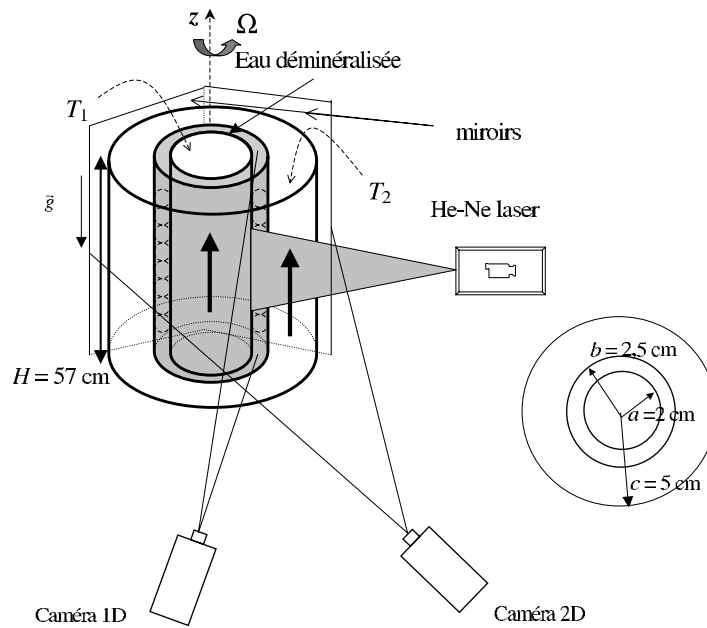


FIG. 1 – Description du dispositif expérimental.

4 Résultats

Deux types de motifs ont été observés en fonction de l'écart de température. Lorsque nous appliquons un faible écart de température $|\delta T| < 1,8 \text{ }^\circ\text{C}$, un motif de rouleaux inclinés propagatifs apparaît dans la partie inférieure du système à partir d'une valeur critique du nombre de Reynolds. Les figures 2 (a-d) représentent des photos d'un quart de la circonférence du système pour une température du cylindre intérieur $T_1 = 28 \text{ }^\circ\text{C}$ ($|\delta T| = 1,2 \text{ }^\circ\text{C}$) et un nombre de Reynolds variant de 46 à 73. La taille du motif augmente avec le nombre de Reynolds.

Pour des écarts de température compris entre $|1,8 \text{ }^\circ\text{C}|$ et $|3,7 \text{ }^\circ\text{C}|$, au seuil, le motif de rouleaux inclinés propagatifs apparaît près du centre du système. Une très faible augmentation du nombre de Reynolds suffit pour que le motif envahisse tout le système. Les figures 2 (e-h) représentent des photos du motif pour une température du cylindre intérieur $T_1 = 34 \text{ }^\circ\text{C}$ ($|\delta T| = 2,4 \text{ }^\circ\text{C}$) et un nombre de Reynolds variant de 21 à 27. Au seuil, la dynamique spatio-temporelle du motif est caractérisée par une seule fréquence et un seul nombre d'onde axial (Fig. 2 c). Au-dessus du seuil (Fig. 2 d), le motif devient modulé dans l'espace et dans le temps.

Par ailleurs, nous avons observé que l'hélicité des rouleaux propagatifs inclinés dépend à la fois des deux paramètres de contrôle. Cette constatation est en accord avec l'étude théorique de Ali et Weidman [7]. Le sens d'inclinaison du motif par rapport à l'horizontale dépend du signe du produit entre le nombre de Grashof Gr et le nombre de Reynolds Re . Son sens de propagation ne dépend que du signe du nombre de Grashof. Ainsi quand la paroi du cylindre intérieur est chauffée, le motif se propage vers la partie inférieure du système (Fig. 2 d). Par contre, quand celle du cylindre extérieur est chauffée, le motif se propage vers la partie supérieure (Fig. 2 b).

La figure (5a) représente le nombre de Reynolds critique Re_c en fonction du nombre de Grashof Gr . Nous constatons qu'il diminue avec $|Gr|$. Ainsi l'écart de température déstabilise l'écoulement.

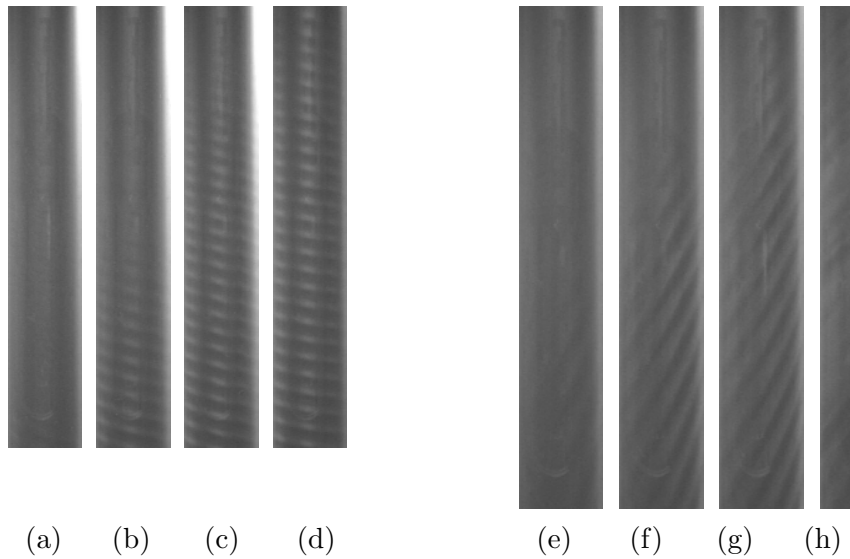


FIG. 2 – Photos représentant l’augmentation de la taille du motif pour $T_1 = 28 \text{ }^\circ\text{C}$ quand (a) $Re = 46$, (b) $Re = 58$, (c) $Re = 66$ et (d) $Re = 73$, pour $T_1 = 34 \text{ }^\circ\text{C}$ quand (e) $Re = 21$, (f) $Re = 22$, (g) $Re = 24$ et (h) $Re = 27$.

A partir de l’étude des diagrammes spatio-temporels, nous avons extrait des informations concernant la dynamique de l’écoulement. Les spectres de puissance spatiale et temporelle permettent d’avoir accès respectivement au nombre d’onde k et à la fréquence f des motifs. La figure (5b) représente le nombre d’onde critique $q = kd$ en fonction du nombre de Grashof. Nous constatons qu’il diminue avec le nombre de Grashof $|Gr|$. Le chauffage radial augmente la taille des rouleaux. La figure (4) représente le rapport de la fréquence adimensionnée f sur le nombre d’onde azimutal m en fonction du nombre de Reynolds Re . Nous constatons que f/m augmente de façon linéaire avec le nombre de Reynolds Re .

5 Conclusion

Les propriétés du motif dépendent du gradient radial de température. Nous avons constaté que le nombre de Reynolds et le nombre d’onde critiques diminuent avec le nombre de Grashof. Deux types de motifs ont été observés. Pour de faibles écarts radiaux de température, le motif de rouleaux inclinés apparaît près de la partie inférieure du système et sa taille croît avec le nombre de Reynolds. Pour des écarts de température $1,8 \text{ }^\circ\text{C} < |\delta T| < 3,7 \text{ }^\circ\text{C}$, le motif se forme près du centre avant d’envahir le reste du système avec l’augmentation de Re . Les motifs ont été étudiés pour une certaine gamme de température. Il serait intéressant de poursuivre cette étude pour des écarts de température plus importants. De plus, on pourrait étudier l’ajout d’une faible rotation du cylindre intérieur lorsque un motif de rouleaux inclinés propagatifs est déjà présent dans le système à cause seulement de la stratification de la masse volumique.

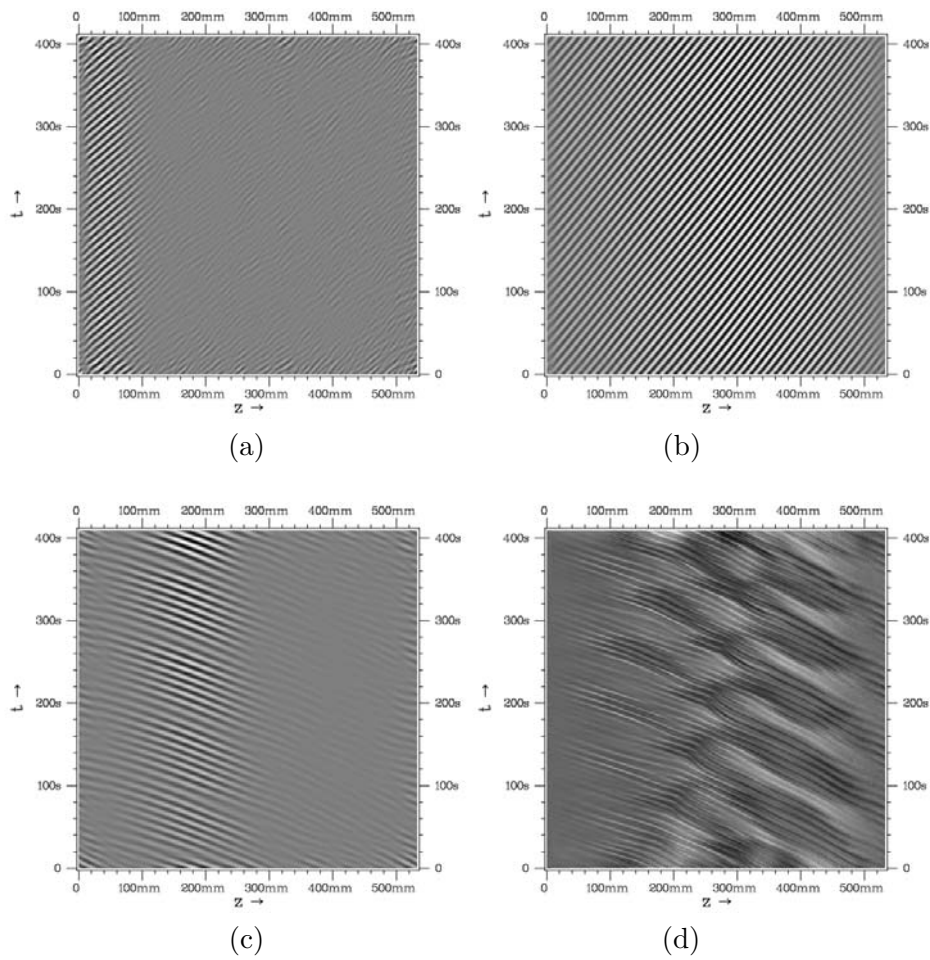


FIG. 3 – Diagrammes spatio-temporels du motif pour $T_1 = 28 \text{ }^\circ\text{C}$ quand (a) $Re = 46$, (b) $Re = 73$ et pour $T_1 = 34 \text{ }^\circ\text{C}$ quand (c) $Re = 21$, (d) $Re = 27$.

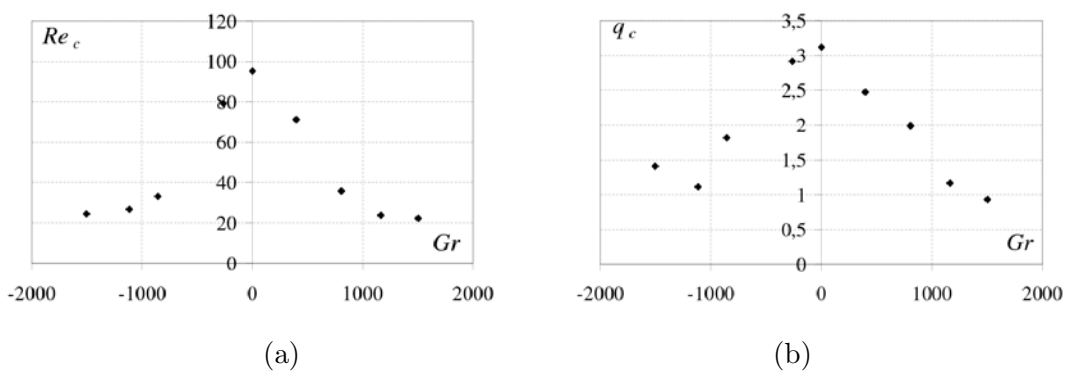


FIG. 4 – Variations (a) du nombre de Reynolds critique Re_c et (b) du nombre d'onde critique q_c en fonction du nombre de Grashof Gr .

Références

- [1] Y. Kikuchi, Y. Shigemasa A. Oe et T. Ogata, *Steady-state freezing of liquids in laminar flow between two parallel plates*, J. Nucl. Sci. Tech., **23**, 979-991, (1986).

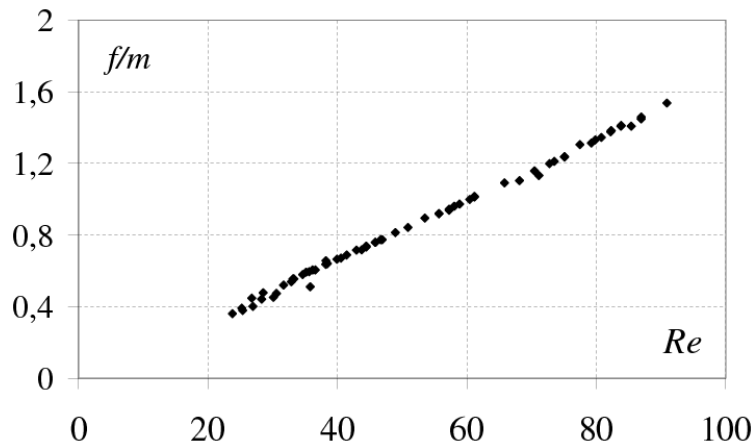


FIG. 5 – Variation du rapport de la fréquence sur le nombre d'onde azimuthal f/m en fonction du nombre de Reynolds Re .

- [2] M. Auer, F.H. Busse et E. Gangler, *Instabilities of flows between differentially rotating coaxial cylinders in the presence of a radial temperature gradient*, Eur. J. Mechanics B/Fluids, **15**, 605 (1996).
- [3] I. G. Choi et S.A. Korpela, *Stability of conduction regime of natural convection in a tall vertical annulus*, J. Fluid Mech., **99**, 725-738, (1980).
- [4] A. Bahloul, I. Mutabazi et A. Ambari, *Codimension 2 points in the flow inside a cylindrical annulus with a radial temperature gradient*, Eur. Phys. J. AP, **9**, 253-264, (2000).
- [5] V. Lepiller, A. Prigent, F. Dumouchel et I. Mutabazi, *Convection naturelle dans un anneau cylindrique vertical*, Compte-rendus de la 7ème rencontre du Non-Linéaire Paris, 167-172, (2004).
- [6] K. S. Ball et B. Farouk, *Bifurcation phenomena in Taylor-Couette flow with buoyancy effects*, J. Fluid Mech., **197**, 479-501, (1988).
- [7] P. D. Weidman et M.E. Ali, *On the stability of circular Couette flow with radial heating*, J. Fluid Mech., **220**, 53 (1990).
- [8] H. A. Snyder et S. K. F. Karlsson, *Experiments on the stability of Couette motion with a radial thermal gradient*, Phys. Fluids, **7**, 1696-1706, (1964).
- [9] K. S. Ball, B. Farouk et V.C Dixit, *An experimental study of heat transfer in a vertical annulus with a rotating inner cylinder*, J. Heat Mass Transfer, **32**, 1517-1526, (1989).
- [10] M. A. Dominguez-Lerma, G. Ahlers et D.S. Cannell, *Effects of 'kalliroscope' flow visualization particles on rotating Couette-Taylor flow*, Phys. Fluids, **28**, 1204-1206, (1985).
- [11] A. Prigent et O. Dauchot, *Visualization of a Taylor-Couette flow avoiding parasitic reflections*, Physics of Fluids, **12**, 2688-2690, (2000).
- [12] H. Litschke et K. G. Roesner, *New experimental methods for turbulent spots and turbulent spirals in the Taylor-Couette flow*, Exp. Fluids, **24**, 201 (1998).

Topologies inéquivalentes de chaos dans des systèmes tri-dimensionnels

Christophe Letellier¹, Elise Roulin¹ et Otto E. RöSSLer²

¹ CORIA UMR 6614, BP 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

² Division of Theoretical Chemistry, University of Tübingen, D-72076 Tübingen, Allemagne

Christophe.Letellier@coria.fr

Résumé

La ménagerie des attracteurs chaotiques plongés dans des espaces tri-dimensionnels en est encore au stade de la botanique, attendant une classification plus complète. Bien que ces prototypes de “fleurs” n’ont ni odeur ni couleur, il est possible, par exemple, de les écouter tout en les regardant se développer. Dans ce qui suit, seule leur anatomie, c’est-à-dire leur topologie, sera présentée selon une nouvelle classification reposant sur les applications de premier retour, les gabarits et les frontières toroïdales.

Abstract

In the 1970, one of us introduced a few simple sets of ordinary differential equations as examples showing different types of chaos. Most of them are now more or less forgotten with the exception of the so-called Rössler system published in 1976. In the present paper, we review most of the original systems and classify them using the tools of modern topological analysis, that is, using the templates and the bounding tori recently introduced by Tsankov and Gilmore. Thus, examples of inequivalent topologies of chaotic attractors are provided in modern spirit.

1 Introduction

Bien que les conditions sur la structure algébrique des équations différentielles ordinaires qui leur assurent une solution chaotique soient encore manquantes, il y a de nombreux exemples connus de ces équations produisant du chaos. Toutefois, les différents types de chaos, entendons par là de topologie différente, ne sont pas si nombreux, au moins dans des espaces de dimension trois. Ceci résulte du fait que, dans des espaces tri-dimensionnels, il y a de sévères contraintes topologiques qui restreignent ainsi les possibilités. De ce fait, il est naturel de caractériser et de classifier les attracteurs chaotiques sur la base d’une analyse topologique utilisant les gabarits [1] et des frontières toroïdales récemment introduites [2].

Toutefois, une classification complète de tous les types d’attracteurs chaotiques — même restreints à des espaces tri-dimensionnels — avec leurs propriétés topologiques est encore manquante. A notre connaissance, la seule tentative — à l’aide des propriétés des applications de premier retour à une section de Poincaré — a été proposée par l’un de nous au milieu des années 1970 [3]. L’objet de cet article est donc de proposer une classification plus complète reposant sur les résultats les plus récents de l’analyse topologique. Nous nous limiterons ici au cas des attracteurs bornés par des tores de genre 1 et dont l’application de premier retour est unimodale, c’est-à-dire constituée de deux branches monotones uniquement.

2 Gabarit et frontières toroïdales

2.1 Gabarit et application de premier retour

Les attracteurs chaotiques peuvent être caractérisés par des surfaces branchées, appelées *gabarit* qui décrivent l'ensemble de leurs propriétés topologiques. La structure des attracteurs chaotiques est principalement basée sur des mécanismes d'étirement et de repliement — ou comme nous le verrons de déchirement. Grossièrement, l'étirement induit la sensibilité aux conditions initiales tandis que le repliement produit le mélange des trajectoires, le déchirement réalisant plus ou moins ces deux actions simultanément. De là résulte l'impossibilité de prévoir à long terme l'évolution des comportements chaotiques. Un exemple de gabarit est représenté Fig. 1.a. Un tel gabarit permet de prévoir les invariants topologiques — quantités invariantes sous une isotopie, soit une déformation continue sans découpage — tels que les nombres d'enlacement ou les nombres de rotation relatifs [1].

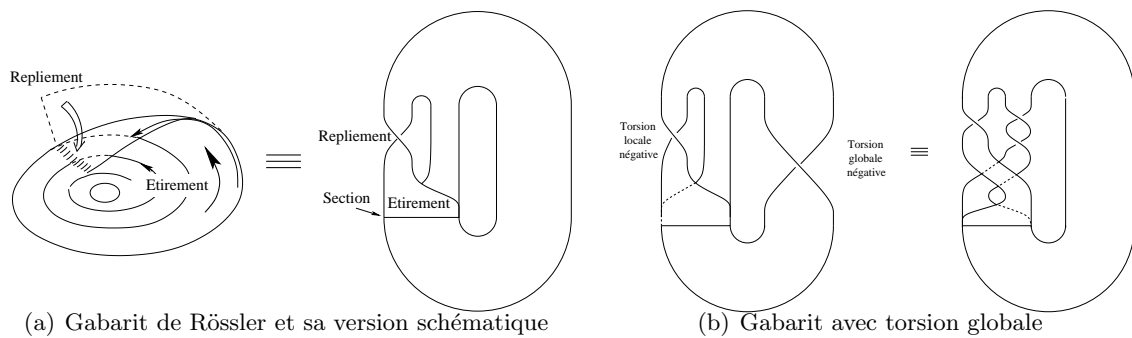


FIG. 1 – (a) *Gabarit adapté de celui dessiné par Rössler en 1976 [4] et sa représentation plus schématique. Les deux décrivent les deux ingrédients principaux nécessaires à la production d'attracteurs chaotiques, soit l'étirement et le repliement.* (b) *Gabarit avec une torsion globale d'un demi-tour, inversant l'application de premier retour.*

Le point important est que le gabarit de la Fig. 1.a peut être associé à deux types différents d'application de premier retour unimodale représentés Fig. 2. Ces deux applications sont associées à un repliement (Fig. 2.a) et à un déchirement (Fig. 2.b).

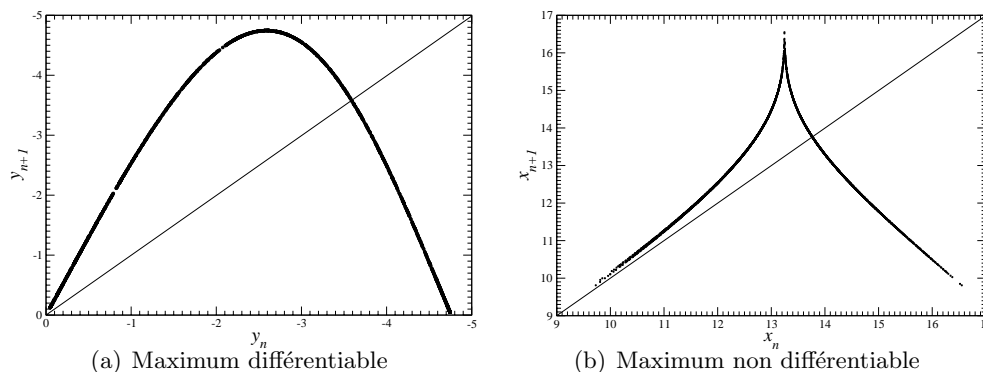


FIG. 2 – *Deux applications de premier retour différentes qui peuvent être associées au gabarit représenté Fig. 1.a.*

2.2 Frontières toroïdales

Les attracteurs peuvent être bornés par des surfaces fermées semi-perméables : une fois à l'intérieure, la trajectoire ne peut en ressortir. Récemment, Tsankov et Gilmore [2] ont montré que ces surfaces pouvaient prendre la forme de tore de genre g . La sphère est un tore de genre 0, le tore usuel a un genre égal à 1. Selon le genre, il existe un nombre limité de formes canoniques. Ainsi, pour un genre $g = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, il y a respectivement $0, 1, 0, 1, 1, \dots$ formes canoniques inéquivalentes [2]. A titre d'exemple, la forme canonique pour le genre $g = 3$ (Fig. 3.a) peut être associée au système de Lorenz (Fig. 3.b). Les propriétés de ces frontières toroïdales sont complètement décrites Ref. [2].

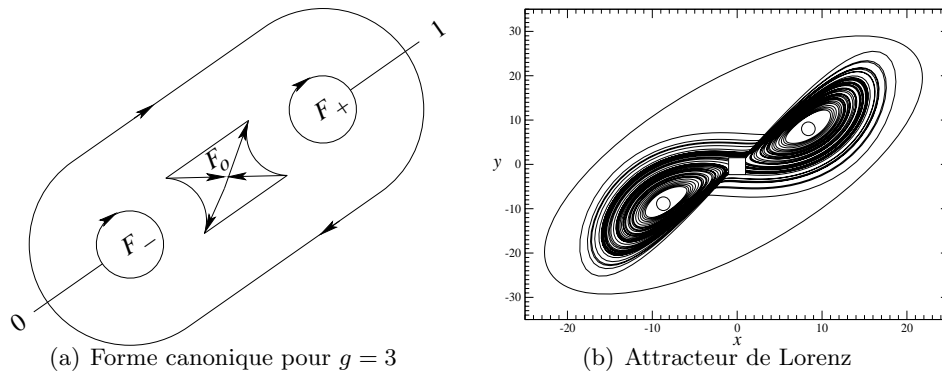


FIG. 3 – Forme canonique pour les tores de genre $g = 3$. Les trous intérieurs entourent des singularités : le trou central entoure une singularité du type col, les deux autres entourant des singularités de type foyer.

3 Chaos unimodal borné par des tores de genre 1

Les attracteurs nécessite au moins une application unimodale, c'est-à-dire une application de premier retour constituée de deux branches monotones séparées par un point critique, différentiable ou non. Dans ce cas, il existe un unique mode pour les possibles bifurcations que subissent les solutions du système lorsqu'un paramètre est varié. Nous désignons ce type de comportement par "chaos unimodal". Le cas du chaos multimodal ne sera pas discuté ici et nous renvoyons le lecteur à un article plus complet [5].

3.1 Chaos unimodal replié

Un chaos unimodal replié est caractérisé par un gabarit tel que celui représenté Fig. 1.a et une application de premier retour avec un maximum différentiable (Fig. 2.a). Le premier exemple d'un tel attracteur a été proposé dès le début de l'année 1976 [4] comme solution du système

$$\begin{cases} \dot{x} &= k_1 + k_2x - \frac{(k_3y + k_4z)x}{x + K} \\ \dot{y} &= k_5x - k_6y \\ \mu\dot{z} &= k_7x + k_8z - k_9z^2 - \frac{k_{10}z}{z + K'} \end{cases} \quad (1)$$

L'attracteur chaotique solution de ce système est représenté Fig. 4. Ensuite, suivrons plusieurs autres systèmes produisant des attracteurs de topologies équivalentes, dont celui qui porte maintenant le nom de *système de Rössler* [6].

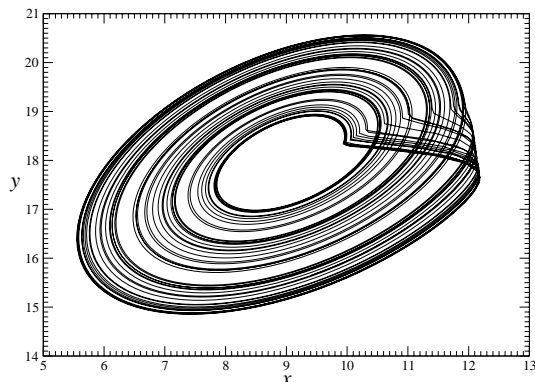


FIG. 4 – *Chaos unimodal replié solution du système (1). Paramètres : $k_1 = 37.8$, $k_2 = 1.4$, $k_3 = 2.8$, $k_4 = 2.8$, $k_5 = 2$, $k_6 = 1$, $k_7 = 8$, $k_8 = 1.84$, $k_9 = 0.0616$, $k_{10} = 100$, $K = 0.05$, $K' = 0.02$, $\mu = 1/25$.*

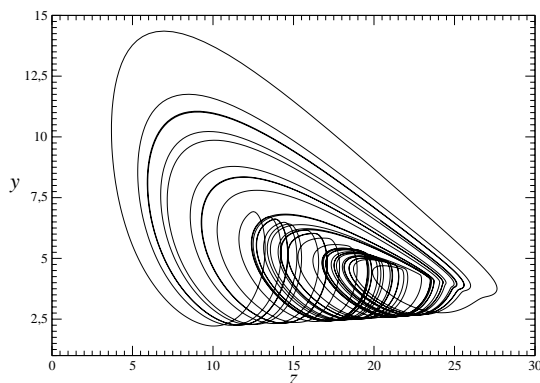


FIG. 5 – *Chaos unimodal avec repliement inversé solution du système (2). Paramètres : $k_1 = 2$, $k_2 = 0.9$, $k_3 = k_4 = 1$, $k_5 = 0.5$, $k_6 = 0.005$, $k_7 = 1.95$ et $K = 0.1$.*

3.2 Chaos unimodal avec repliement inversé

Un type d'attracteur légèrement différent peut être obtenu : il possède globalement les mêmes propriétés que le gabarit représenté Fig. 1.a avec la différence notable qu'il présente une torsion globale d'un demi-tour qui a pour effet d'inverser l'application de premier retour (Fig. 1.b). Un tel attracteur est par exemple solution du système d'équations suivantes [7]:

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1 + k_2x - \frac{k_3yx}{x + K} \\ \dot{y} = k_4x - k_5y + k_6zy^2 \\ \dot{z} = k_7 - k_6zy^2 \end{cases} \quad (2)$$

3.3 Chaos unimodal déchiré

Le chaos unimodal déchiré correspond à un attracteur chaotique borné par un tore de genre 1, un gabarit tel que celui de la Fig. 1.a et une application de premier retour avec une cuspide comme maximum (Fig. 2.b). Le premier système d'équations ayant pour solution ce type de comportement chaotique a été proposé par Rössler et Ortoleva [8]:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by - cxy - \frac{(dz + e)x}{x + K_1} \\ \dot{y} = f + gz - hy - \frac{jxy}{y + K_2} \\ \dot{z} = k + lxz - mz \end{cases} \quad (3)$$

L'attracteur correspondant est représenté Fig. 6. Ce système a la particularité de présenter une évolution continue d'un chaos de type unimodal replié à un chaos de type unimodal

déchiré au fur et à mesure que le point singulier de type col se rapproche de l'attracteur sous diminution du paramètre l [5]. Ce type de chaos est également solution de l'image du système de Lorenz, c'est-à-dire du système de Lorenz une fois la symétrie de rotation réduite [9].

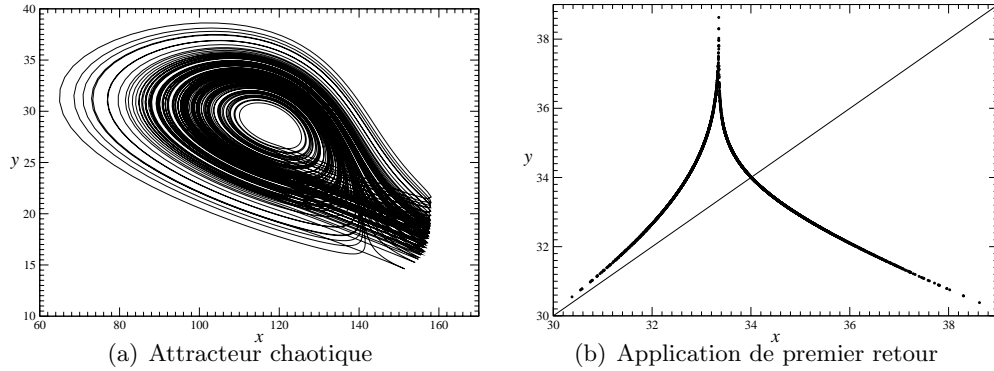


FIG. 6 – Chaos unimodal déchiré solution du système (3). Paramètres : $a = 33$, $b = 150$, $c = 1$, $d = 3.5$, $e = 4815$, $f = 410$, $g = 0.59$, $h = 4$, $j = 2.5$, $k = 2.5$, $l = 5.29$, $m = 750$, $K_1 = 0.01$ et $K_2 = 0.01$.

3.4 Chaos unimodal déchiré semi-inversé

Le chaos unimodal déchiré semi-inversé se présente un peu comme le chaos unimodal déchiré à la différence majeure qu'une des branches de l'application de premier retour est inversé, conduisant à une application constituée de deux branches dont les pentes sont de mêmes signes. Le système d'équations ayant pour solution ce chaos est de la forme [10] :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy - z \\ \dot{y} = x^2 - ay \\ \dot{z} = bx - cz + d \end{cases} \quad (4)$$

c'est-à-dire une sorte de système de Lorenz dont la symétrie est brisée. L'attracteur chaotique est présenté avec son application de premier retour Fig. 7.

4 Conclusion

L'introduction des gabarits et des frontières toroïdales dans l'analyse topologique et les études numériques des attracteurs chaotiques a permis l'obtention d'une nouvelle représentation plus consistante. Nous avons proposé ici ce que nous pensons être une liste exhaustive des différents types de chaos unimodal borné par des tores de genre 1. Tous les autres types dérivent de combinaisons de ces quatre types de bases pour fournir des chaos de type multimodal bornés par des tores de genre 1 ou supérieur.

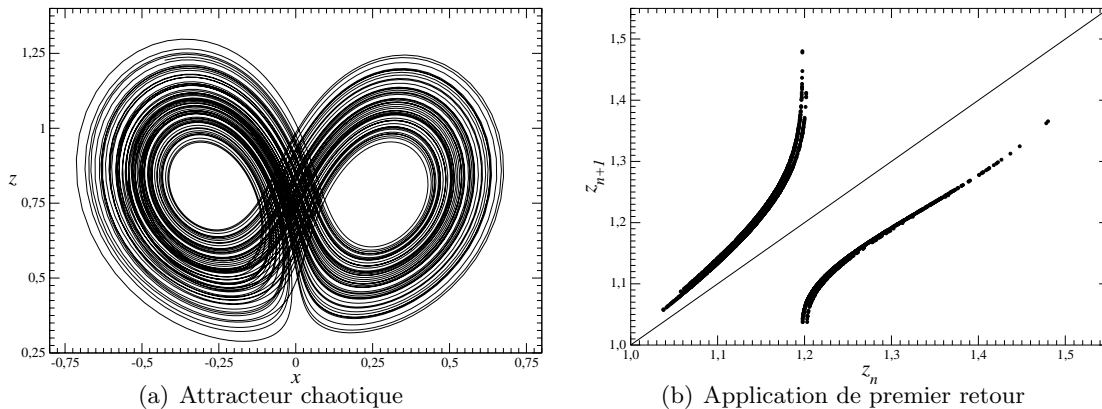


FIG. 7 – *Chaos unimodal déchiré semi-inversé solution du système (4). Paramètres : $a = 0.1$, $b = 0.09375$, $c = 0.38$ et $d = 0.0015$.*

Références

- [1] R. Gilmore, *Topological analysis of chaotic dynamical systems*, Rev. Mod. Phys., **70**, 1455-1529, (1998).
- [2] T. D. Tsankov & R. Gilmore, *Topological aspects of the structure of chaotic attractors in \mathbb{R}^3* , Phys. Rev. E, **69**, 056206, (2004).
- [3] O. E. Rössler, Continuous chaos, In *Synergetics* (H. Haken, ed.), Proc. Int. Workshop on Synergetics at Schloss Elmau, Springer-Verlag, pp. 184-197, (1977).
- [4] O. E. Rössler, *Chaotic behavior in simple reaction systems*, Zeit. Natur. A, **31**, 259-264, (1976).
- [5] C. Letellier, E. Roulin & O. E. Rössler, *Inequivalent topologies of chaos in simple equations*, Chaos, soumis.
- [6] O. E. Rössler, *An equation for continuous chaos*, Phys. Lett. A, **57**, 397-398, (1976).
- [7] O. E. Rössler, *Chaos in abstract kinetics: two prototypes*, Bull. Math. Biol., **39**, 275-289, (1977).
- [8] O. E. Rössler & P. J. Ortoleva, *Strange attractors in 3-variable reaction systems*, Lect. Notes Biomath., **21**, 67-73, (1978).
- [9] C. Letellier & R. Gilmore, *Covering dynamical systems: Two-fold covers*, Phys. Rev. E, **63**, 16206, (2001).
- [10] O. E. Rössler, *Different types of chaos in two simple differential equations*, Zeit. Natur. A, **31**, 1664-1670, (1976).

La digitation lors du décollement d'un fluide newtonien

A. Lindner*, D. Derks† et M.J. Shelley+

* *PMMH, ESPCI, 10, rue Vauquelin, F-75231 Paris Cedex 05*

† *Debye Institute, Utrecht University, Princetonplein 5, NL-3584 CC Utrecht*

+ *Applied Math Lab, Courant Institute, NYU, New York City, NY 10012, USA*

`lindner@ccr.jussieu.fr`

Résumé

Nous étudions le décollement d'un fluide newtonien confiné entre deux plaques circulaires. Pour cela nous nous intéressons à l'évolution de l'interface initialement circulaire lorsque nous soulevons la plaque supérieure à vitesse constante. Nous commentons la relation entre les motifs observés et la force de décollement mesurée en fonction du déplacement de la plaque [1].

Nous comparons les résultats expérimentaux aux simulations numériques utilisant une loi de Darcy modifiée [2] et pouvons ainsi décrire l'évolution non-linéaire des motifs observés. On remarque d'abord une déstabilisation de l'interface circulaire par une instabilité du type Saffman-Taylor. On observe ensuite un "coarsening" des motifs conduisant à la réapparition d'une interface circulaire jusqu'au décollement complet des deux interfaces.

Les simulations numériques montrent que pour relier les motifs observés aux forces de décollement il ne suffit pas seulement de considérer le nombre de doigts, mais également leur taille. Ceci est en accord avec les observations expérimentales.

1 Introduction

Lors du décollement de deux surfaces on peut observer différents mécanismes de décollement qui dépendent des propriétés de l'adhésif utilisé. Notamment on observe souvent la pénétration de doigts d'air entre les deux surfaces qui accélère ainsi le décollement. Il est donc important de caractériser les motifs observés et de les lier directement à la performance de l'adhésif.

On étudie un adhésif modèle très simple: un liquide newtonien [3, 4, 5, 6]. Nous comparons les observations expérimentales des motifs de digitation lors du décollement d'un tel fluide à des simulations numériques utilisant un modèle de loi de Darcy [1]. Nous mesurons également la force de décollement que nous pouvons ainsi lier aux motifs observés. La comparaison des données expérimentales et des simulations numériques permet ainsi de mieux comprendre la relation entre les motifs observés et la performance de l'adhésif.

2 Équations modèles

Nous étudions une goutte de liquide newtonien de viscosité η et de tension de surface σ confinée entre deux plaques parallèles de rayon R_0 (Fig. 1). Le déplacement vertical de la plaque supérieure à vitesse constante V_0 aboutit à un écart croissant entre les deux plaques: $b(t) = b_0 + V_0 t$. La goutte de liquide se contracte donc avec une vitesse de l'interface $U(t)$ jusqu'au décollement total des deux plaques. Considérant la conservation

du volume du liquide $\Lambda = \pi R_0^2 b_0$, le rayon de la goutte est donné par $R(t) = R_0 \sqrt{b_0/b(t)}$, et $U(t) = -\frac{V_0 R(t)}{2b(t)}$.

Lors de cette contraction l'interface circulaire se déstabilise et la formation de doigts de type Saffman-Taylor peut être observée. Paterson [7] a effectué une analyse de stabilité linéaire pour une cellule de Hele-Shaw circulaire à épaisseur fixe lorsqu'on aspire le liquide visqueux par le centre de la cellule. Shelley *et al.* [2] ont démontré que ce résultat s'applique aussi à la géométrie que nous utilisons ici. Si on remplace U par la vitesse de décollement V_0 on obtient pour le nombre de doigts au début du décollement :

$$n_{max} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{6\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\sigma b_0^3}{12V_0 \eta R_0^3} \quad (1)$$

où τ est une tension de surface adimensionnelle et peut être identifiée comme le paramètre de contrôle du système. On peut tenter d'introduire les variations de R et b avec le temps dans ce résultat linéaire :

$$n_{max} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{6\tau(1+t')^{9/2}}} \quad (2)$$

avec $t' = t \frac{V_0}{b_0}$. Cette approche simpliste nous montre déjà une particularité de ce système : si t' est suffisamment grand, l'interface de la goutte devient de nouveau stable. L'augmentation de l'écart entre les deux plaques mène, en effet, à une contraction de la goutte et à une diminution de la vitesse U d'avancement du front. Par conséquent, les forces visqueuses diminuent et sont finalement dominées par les forces capillaires.

Pour tenir compte de l'évolution non-linéaire du système des simulations sont effectuées en utilisant une loi de Darcy adaptée à un écoulement en cellule de Hele Shaw à épaisseur variable. Ces simulations suivent la méthode de "boundary integral" [2].

3 Montage expérimental

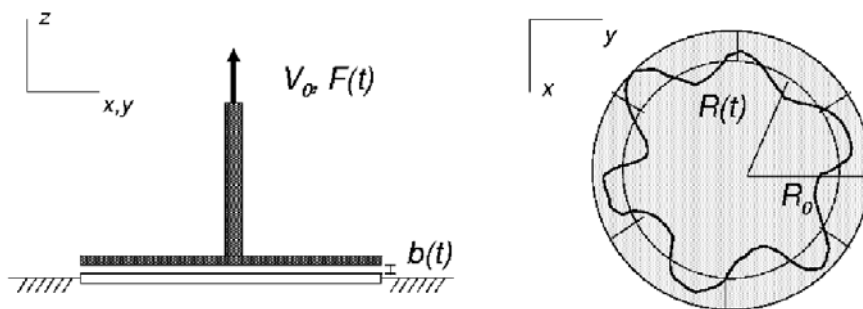


FIG. 1 – Montage expérimental: vue de côté (gauche) et vue du dessus (droite).

Pour nos expériences (Fig. 1) nous utilisons la géométrie plan-plan d'un rhéomètre Stress-Tech avec $R_0 = 20 \text{ mm}$ et nous travaillons avec des écarts initiaux b_0 entre 0.1 mm et 0.4 mm . La plaque supérieure est soulevée à vitesse constante $V_0 = 0.73 \text{ } \mu\text{m/s}$. La plaque inférieure fixe est en verre ce qui permet de visualiser l'évolution de l'interface de la goutte de liquide lors du décollement. Nous pouvons également mesurer la force et le

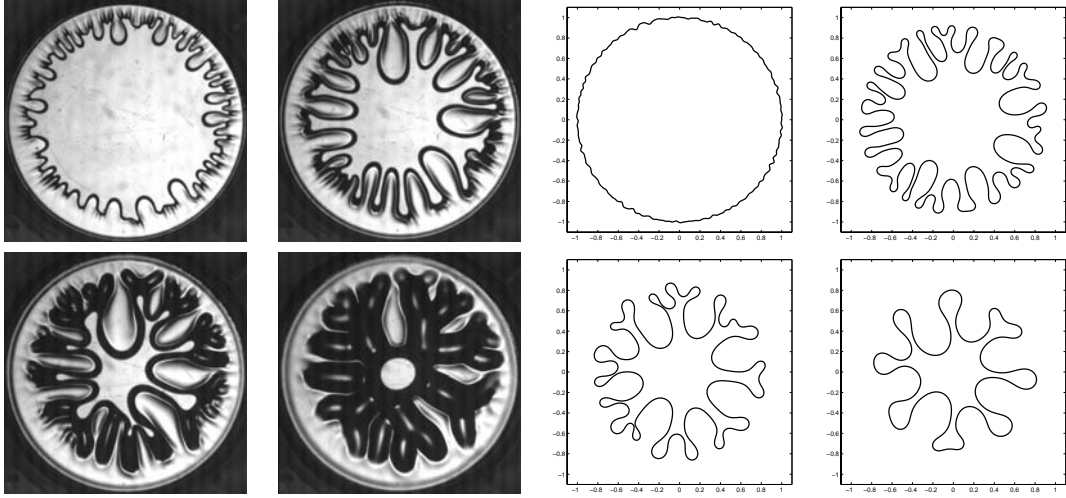


FIG. 2 – Exemple d'évolution de motifs lors du décollement observé expérimentalement (gauche) et en simulations numériques (droite).

déplacement au cours du temps. Nous utilisons des huiles de Silicone (PDMS de Aldrich) de viscosité $\eta = 92 \text{ Pas}$, $\eta = 11.5 \text{ Pas}$ et $\eta = 28.5 \text{ Pas}$. La tension de surface de ces huiles est de $\sigma = 20 \text{ mN/m}$.

4 Motifs observés

Si on compare l'évolution des motifs observés expérimentalement (Fig. 2 gauche) aux simulations numériques (Fig. 2 droite) on constate qu'elles sont très similaires. Dans les deux cas, l'interface initialement circulaire se déstabilise par une instabilité du type Saffman-Taylor. On observe ensuite la croissance de doigts. Lorsque leur taille augmente leur nombre diminue ce qui mène finalement de nouveau à la contraction de l'interface vers un cercle (non présenté pour les simulations).

Caractérisons les motifs en détail. La théorie linéaire indique que le nombre de doigts dépend uniquement du paramètre de contrôle τ et on peut penser qu'il en est de même pour l'évolution non-linéaire du motif en fonction de t' . Nous étudions ici une série d'expériences en faisant varier l'écart initial ($b_0 = 0.2 \text{ mm}$, 0.3 mm , et 0.4 mm) pour une huile de silicone de viscosité $\eta = 92 \text{ Pas}$. Tous les autres paramètres restent inchangés ($R_0 = 20 \text{ mm}$ et $V_0 = 0.73 \mu\text{m/s}$). Nous trouvons ainsi $\tau = 2.5 \cdot 10^{-5}$, $8.4 \cdot 10^{-5}$ et $2 \cdot 10^{-4}$ pour le paramètre de contrôle du système.

Le nombre de doigts en fonction de t' est représenté sur la figure 3. Pour τ donné on observe une décroissance au cours du temps comme on peut le voir sur la figure 2 et comme prédite par les résultats de l'analyse de stabilité linéaire. Par contre, nous précisons que l'évolution du nombre de doigts ne suit pas une loi de puissance comme donnée par l'équation 2 mais plutôt une loi exponentielle. Nous allons discuter de cette évolution non-linéaire lors de la comparaison avec les simulations numériques. D'après la figure 3, il est clair que le nombre de doigts augmente quand on diminue la tension de surface.

Nous allons maintenant vérifier si l'évolution du nombre de doigts en fonction de t' est uniquement déterminée par la tension de surface τ . Pour cela nous reproduisons le paramètre de contrôle $\tau = 8.4 \cdot 10^{-5}$ pour d'autres conditions initiales en utilisant une huile de viscosité plus faible $\eta = 11.5 \text{ Pas}$ et un écart initial $b_0 = 0.15 \text{ mm}$. Les résultats sont

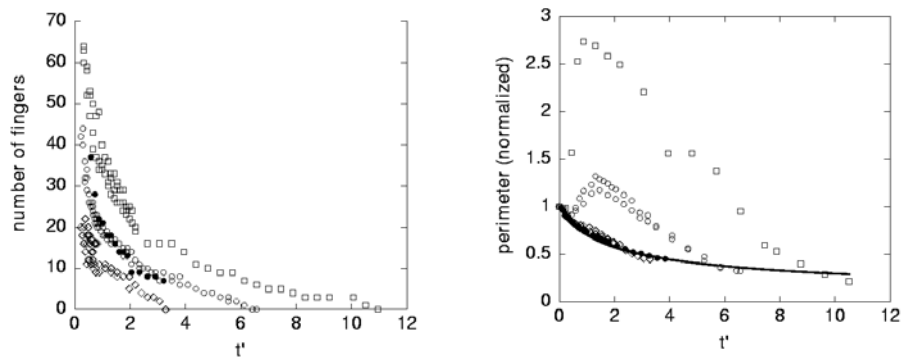


FIG. 3 – Expériences effectuées pour une huile de silicone de viscosité $\eta = 92$ Pas et différents écarts initiaux $b_0 = 0.2$ mm (\square), $b_0 = 0.3$ mm (\circ) et $b_0 = 0.4$ mm (\diamond) et pour une huile de viscosité $\eta = 11.5$ Pas et $b_0 = 0.15$ mm (\bullet). Gauche: Nombre de doigts en fonction de t' . Droite: Évolution du périmètre en fonction de t' . La ligne représente l'évolution d'une interface circulaire.

également montrés sur la figure 3 et on constate un bon accord. On peut donc conclure que les données se replacent bien en fonction de τ .

Un autre paramètre important est la taille des doigts. Cette taille peut être quantifiée en mesurant le périmètre des motifs au cours du temps. Les résultats sont montrés sur la figure 3 (droite) où nous avons normalisé le périmètre courant par le périmètre initial. Au début de l'expérience l'évolution du périmètre est proche de celle d'une interface circulaire, mais il augmente fortement par la suite. Pour des temps plus grands on observe une diminution du périmètre vers un cercle contractant. Quand la tension de surface diminue on observe plus de déviations par rapport à l'interface circulaire et les motifs deviennent donc plus ramifiés.

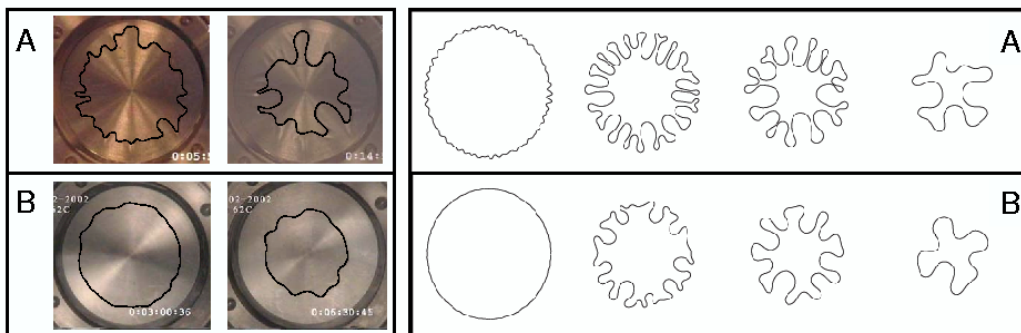


FIG. 4 – Gauche: Motifs observés pour les deux expériences à $\tau = 8.4 \cdot 10^{-5}$. A: $\eta = 92$ Pas et $b_0 = 0.3$ mm, B: $\eta = 11.5$ Pas et $b_0 = 0.15$ mm. Les images sont prises à $t' = 0.88$ (droite) et $t' = 2.19$ (gauche). Droite: Évolution des motifs simulés pour $\tau = 8.4 \cdot 10^{-5}$ pour des conditions initiales différentes. Les images sont montrées à $t' = 0, 1, 2,$ and 4 .

Intéressons nous à l'effet sur le périmètre d'un changement des conditions initiales pour τ constant. Contrairement aux observations faites pour le nombre de doigts nous observons dans ce cas une évolution très différente pour les deux expériences. L'expérience avec l'écart initial le plus faible montre une digitation beaucoup moins prononcée à même

nombre de doigts. Ceci est illustré par la figure 4 qui montre les motifs observés, dans les deux cas, aux mêmes temps t' .

Notre interprétation de ces résultats est que le nombre de doigts est effectivement un paramètre robuste qui dépend uniquement de τ , mais que l'amplitude des doigts n'est pas seulement fonction de τ mais dépend d'une façon plus subtile des conditions initiales. Cette croissance est donc difficile à contrôler expérimentalement. Nous n'avons actuellement pas encore d'explication précise sur l'origine de ces différences, mais nous pensons qu'elle est liée aux fluctuations de l'interface initiale. Des expériences systématiques sont en cours actuellement.

Nous nous concentrons ici sur les simulations numériques avec $\tau = 8.4 \cdot 10^{-5}$ en faisant varier la longueur d'onde de la perturbation initiale ainsi que son amplitude. Une discussion plus longue peut être trouvée dans [1]. La figure 4 (droite) montre les résultats de deux simulations avec le même nombre de perturbations initiales distribué autour de n_{max} , avec une amplitude plus élevée dans le cas A. On constate alors que la simulation avec la plus grande amplitude des perturbations initiales montre un motif plus ramifié. Ceci est en accord qualitatif avec les observations expérimentales (Fig. 4 gauche).

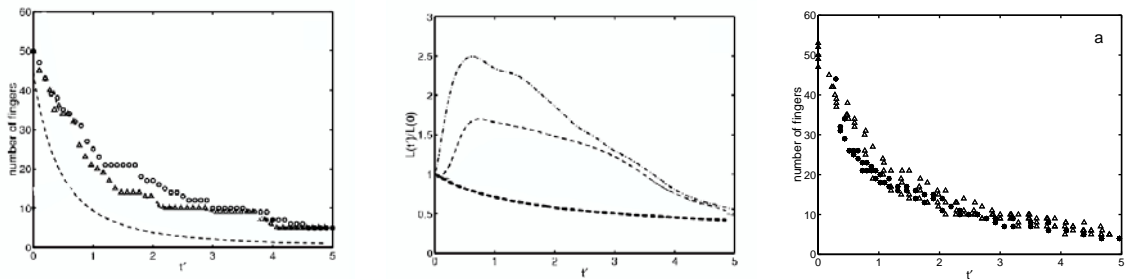


FIG. 5 – a: Nombre de doigts en fonction du temps pour $\tau = 8.4 \cdot 10^{-5}$ pour les simulations montrées sur la figure 4: A (Δ) et B (\circ). La ligne en pointillés montre n_{max} . b: Périmètre en fonction du temps pour A (dotted) et B (dot-dashed). La ligne dashed montre la solution pour un cercle contractant. c: Nombre de doigts mesuré dans les simulations (Δ) et dans les expériences (\bullet) pour $\tau = 8.4 \cdot 10^{-5}$.

Analysons ces motifs en détail. Le nombre de doigts est représenté sur la figure 5 pour les deux simulations. Notons d'abord que pour cette valeur de τ , la théorie linéaire prédit $n_{max} = 45$. On constate que la diminution de n_{max} avec t' est en assez bon accord avec le nombre de doigts observé dans les simulations à temps court, mais que n_{max} le sous-estime pour des temps plus longs. Dans les simulations, le nombre de doigts en fonction de t' semble de nouveau être un paramètre robuste du système qui dépend uniquement de τ . Pour les simulations, le périmètre (Fig. 5 milieu) est clairement lié à l'amplitude des perturbations initiales.

Pour $\tau = 8.4 \cdot 10^{-5}$, la figure 5 (droite) montre une comparaison entre le nombre de doigts obtenu dans les expériences et dans les simulations. On observe un bon accord. En ce qui concerne l'évolution du périmètre, une comparaison directe n'est pas possible, car nous n'avons pas accès aux perturbations initiales dans les expériences. Cependant, nous observons un accord quantitatif qui semble indiquer que l'amplitude des doigts dépend fortement des conditions initiales.

5 Conclusion

Dans cet article nous avons étudié le décollement d'un fluide newtonien confiné entre deux plaques circulaires, en comparant les résultats expérimentaux à des simulations numériques. En particulier nous avons étudié l'évolution de l'interface d'une goutte initialement circulaire quand une des deux plaques est soulevée à vitesse constante.

Les motifs de digitation sont caractérisés par le nombre de doigts et l'amplitude de ces derniers. Nous avons montré que l'évolution du nombre de doigts en fonction de t' est un paramètre robuste uniquement déterminé par le paramètre de contrôle du système τ . Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec les simulations numériques. Ceci indique qu'on peut utiliser, pour ce système, le formalisme de l'instabilité de Saffman-Taylor adapté à la géométrie d'une cellule de Hele-Shaw à épaisseur variable.

Nous avons trouvé que l'amplitude des doigts, et donc la longueur du périmètre du motif ramifié est un paramètre moins robuste qui ne dépend pas seulement de τ mais aussi d'une façon plus subtile des conditions initiales. Les simulations suggèrent que la taille des doigts est fonction de l'amplitude des perturbations initiales de l'interface. Elle est donc expérimentalement difficile à contrôler.

Par contre c'est justement la taille des doigts qui influence la force de décollement. Les simulations numériques ont ainsi montré une diminution de la force de décollement par rapport au cas d'une simple goutte circulaire qui se contracte, cette diminution étant proportionnelle à la taille des doigts.

Remerciements A.L. et D.D. remercient Daniel Bonn et Martine Ben Amar pour des discussions utiles.

Références

- [1] A. Lindner, D. Derks et M.J. Shelley, *Stretch flow of thin layers of Newtonian liquids: Fingering Patterns and lifting forces* accepté à Phys. Fluids
- [2] M.J. Shelley, F.-R. Tian and K. Wlodarski, *Hele-Shaw flow and pattern formation in a time-dependent gap*, Nonlinearity, **10**, 1471-1495 (1997).
- [3] D. Derks, A. Lindner, C. Creton and D. Bonn, *Cohesive failure of thin layers of soft model adhesives under tension*, J. Appl. Phys., **93**, 1557-1566 (2003).
- [4] S. Poivet, F. Nallet, C. Gay and P. Fabre, *Cavitation induced force transition in confined viscous liquid under traction*, Europhys. Lett., **62**, 244-250 (2003).
- [5] R.D. Welsh, MSc thesis supervised by J. Bico and G.H. McKinley, Mass Inst Tech, Cambridge, MA (2001).
- [6] M. Ben Amar and D. Bonn *Fingering instabilities in adhesive failure* accepté à Physica D
- [7] L. Paterson, *Radial fingering in a Hele-Shaw cell* J. Fluid Mech. **133**, 513- (1981).
- [8] P.G. Saffman and G. I. Taylor, *The penetration of a fluid in a porous media or Hele-Shaw cell, containing a more viscous liquid* Proc. R. Soc. A, **173**, 73 (1956).

Interactions à retard et attracteurs (quasi-)périodiques dans les circuits de régulation positifs et négatifs

A. Meyroneinc, B. Fernandez, R. Lima, R. Coutinho
*Centre de Physique Théorique (FRUMAM),
CNRS, Luminy Case 907, 13288 Marseille CEDEX 09, France*
meyroneinc@cpt.univ-mrs.fr

Résumé

Un modèle à temps discret d'applications contractantes affines par morceaux couplées est proposé afin de rendre compte de la dynamique des réseaux de régulation génétique. Dans le cas des circuits, deux faits remarquables de la dynamique sont: la possibilité d'un *attracteur* (quasi-)périodique dans un circuit positif, en plus de deux points fixes; et la possibilité de la *coexistence d'attracteurs* (quasi-)périodiques dans un circuit négatif, dans lequel des points fixes sont impossibles. Nous discutons ces régimes dynamiques en fonction des paramètres du modèle et expliquons leurs causes (essentiellement dûs à la formalisation à temps discret qui peut être interprétée comme une modélisation d'un délai dans les interactions) dans deux cas simples, les circuits positif et négatif à deux gènes.

1 Introduction

Les réseaux d'interactions et de régulation sont de véritables paradigmes en biologie du développement. Ils permettent de formaliser, et ainsi de mieux comprendre et prédire, la régulation de l'expression génétique et du métabolisme nécessaires au développement des organismes vivants et à leur adaptation à l'environnement. En particulier, il s'avère que certains motifs dans ces réseaux sont déterminants pour la dynamique de l'expression: les circuits positifs et les circuits négatifs en font partie. On entend par circuit positif une chaîne de gènes en interactions telle que l'action d'un gène sur lui même à travers les autres gènes de la chaîne correspond à une activation. De même, le circuit est dit négatif si l'action d'un gène sur lui même à travers les autres correspond à une inhibition. Pour ce qui est de la dynamique, il y a essentiellement deux comportements reconnus d'importance pour la biologie, la convergence vers les états d'équilibre stables fixes (différentiation) et (quasi-)périodiques (homéostasie, rythme circadien). Nous discutons ici des comportements oscillants dans les circuits positifs et négatif dans le cadre d'une dynamique à temps discret.

2 Retards dans les réseaux de régulation génétiques et modélisation en temps discret

La régulation de l'expression génétique se fait à travers une cascade de réactions bio-chimiques mettant en jeu des entités moléculaires dont chacune nécessite un temps de production et possède un temps de vie. Une séquence d'ADN (un gène) transcrit des ARNm qui à leurs tour sont traduits en protéines qui opèrent comme régulateurs de l'expression d'un ou plusieurs autres gènes. La figure 1 est une illustration dans un cas

simple avec deux gènes. Les temps de transcription sont en moyenne de l'ordre de 2 min 30 s chez les procaryotes et de 5 min chez les eucaryotes (10000 paires de base à ~ 40 nucleotides/seconde). Les temps de traduction sont de l'ordre de 30 s pour les procaryotes et ceux de transport (ARNm et protéines) sont de l'ordre de la seconde chez les procaryotes et 20 min chez les eucaryotes (du noyau au cytoplasme). Il est donc nécessaire quand on s'intéresse à l'expression génétique de considérer, sinon tout ces temps de synthèse et transport, au moins certains délais dans les interactions entre gènes. En outre les temps de demi-vie des ARNm sont de l'ordre de 2 min chez les procaryotes et vont de 1 min à 24 h chez les eucaryotes, et celui des protéines est de 1 h en moyenne chez les procaryotes (voir [1] pour plus de détails sur les ordres de grandeur temporels).

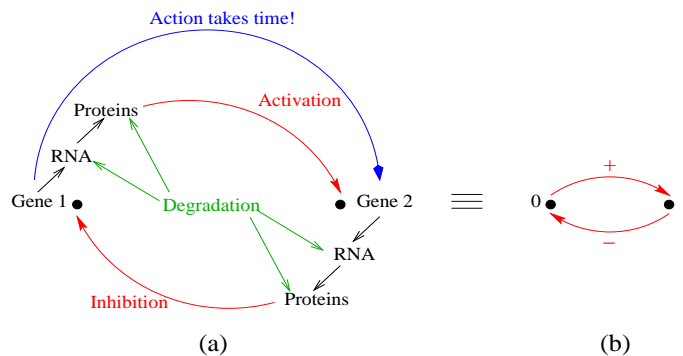


FIG. 1 – (a) Schéma simplifié de la chaîne d'expression et de régulation entre deux gènes formant (b) un circuit négatif.

Il est possible de rendre compte de certains comportements de la dynamique d'expression, notamment des oscillations, avec autant d'équations différentielles ordinaires (non-linéaires) que d'espèces moléculaires. Il est aussi possible, et peut être plus réaliste, de formaliser la dynamique avec des équations intégro-différentielles pour tenir compte des délais. Mais ces systèmes relèvent de l'analyse fonctionnelle et ils sont difficiles à étudier quantitativement autrement que par des moyens numériques, ou pour lesquels il existe des résultats à portés purement qualitatifs (existence, unicité d'orbites périodiques, ...) [5].

Une autre approche consiste à étudier des itérations d'applications couplées. La loi donnant la dynamique ne dérive pas directement, comme pour les ODE, des "lois" de bases de la cinétique chimique. Plutôt, l'"updating" de la densité de la concentration d'une protéine se fait à intervalle de temps régulier et en tenant compte du couplage à la dynamique d'autres protéines et donc du délai nécessaire à l'interaction. Toute l'information inconnue sur les détails de la chaîne d'expression est "absorbée" dans cette intervalle de temps, et la cinétique de la dynamique entre deux instants est contenue dans un paramètre, noté a , proportionnel au taux de dégradation de la protéine. C'est également ce paramètre qui fixe (par rapport au pas de temps) l'importance des délais. Pour une comparaison détaillée des modèles à temps continu et discret, se référer à [6].

3 Dynamique des oscillations dans deux cas simples

3.1 Le modèle

Le modèle a déjà été présenté dans [4]. L'état du système à l'instant t est donné par un vecteur $\{x_i^t\}_{i \in \{0, n-1\}} \in \mathbb{R}^n$ (où n est le nombre de gène considéré), et la dynamique est

définie par l'application $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ telle que $\{x_i^{t+1}\} = F(\{x_i^t\})$, avec:

$$x_i^{t+1} = a x_i^t + \sum_{j \in I_i} K_{ij} H(s_{ij}(x_j^t - T_{ij})). \quad (1)$$

Le symbole $a \in [0,1)$ est le taux de contraction de la dynamique (ou le taux de dégradation du produit de l'expression), le symbole I_i désigne l'ensemble des noeuds qui ont une action sur i et le symbole H représente la fonction de Heaviside: $H(y) = 1$ si $y \geq 0$ et $H(y) = 0$ si $y < 0$. De plus, K_{ij} représente l'intensité de l'action du gène j sur le gène i , s_{ij} le signe de l'interaction (cf. figure 1 avec $s_{ij} = +1$ pour une activation et $s_{ij} = -1$ pour une inhibition), T_{ij} la valeur seuil qui détermine l'effectivité de l'action suivant sa position relative à x_j^t à l'instant t . Il est commode de représenter un tel système par un graphe où les noeuds sont associés aux gènes et les flèches aux interactions (cf. figure 1(b)).

3.2 Le circuit positif à deux noeuds

Les résultats formels de l'étude de la dynamique du circuit positif à deux noeuds, i.e $n = 2$ et $s_{01} = s_{10} = -1$ dans la relation (1), ont eux aussi été présentés dans [4]. Notre discussion sera donc ici davantage portée sur l'interprétation de la dynamique. Ce circuit, appelé "toggle-switch", correspond au système synthétisé et étudié expérimentalement par Gardner & al. [3]. Dans ce cas, la dynamique (1) se réduit à une application affine par morceaux du carré $[0,1]^2$, les morceaux correspondant aux atomes de la partition de la figure 2(b). En outre, ces atomes correspondent aux différentes valeurs des paires de symboles $\theta_{01}\theta_{10}$, où θ_{ij} est la valeur que prends la fonction de Heaviside (1) dans l'atome correspondant: soit 00, 01, 10 et 11.

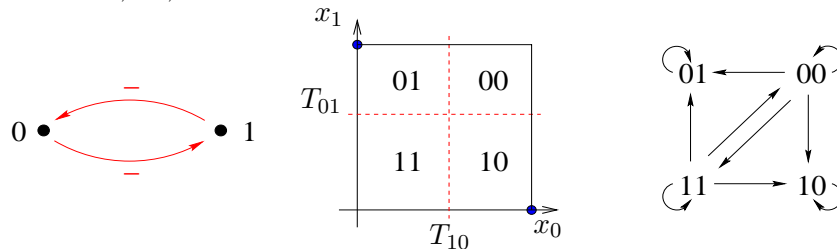


FIG. 2 – (a) Circuit positif. (b) Espace de phase et sa partition. (c) Graphe des transitions éventuellement possibles.

Etudiant la dynamique de cette application [2], on obtient que les suites symboliques admissibles (i.e les codes des orbites globales appartenant à l'attracteur) sont certains chemins infinis dans le graphe de la figure 2(c). On sait de plus que ces suites correspondent à des chemins infinis qui ne se terminent pas par 00^∞ ni par 11^∞ . En d'autres termes, pour tout x^t dans l'atome correspondant à 00 ou à 11, il existe $\tau > 0$ tel que $x^{t+\tau}$ et x^t sont dans des atomes différents.

Une analyse plus fine de la dynamique [2], basée sur des résultats de dynamique d'applications contractantes du cercle, démontre que les seules suites admissibles sont de fait les suites suivantes:

- les suites constantes 01^∞ et 10^∞ . Ces suites sont les codes des points fixes stables. Les points fixes ont pour coordonnées $(0,1)$ et $(1,0)$ respectivement (cf. figure 2(b))
- si les paramètres sont bien choisis, des suites telles que $\theta_0^t = \theta_1^t = \theta^t$ pour tout t , et $\{\theta^t\}$ est le code d'une rotation (contractante affine par morceau) sur le cercle. Les orbites correspondantes sont alors données, modulo un changement de variable, par

une rotation d'angle ν , appelé nombre de rotation.¹ Ces orbites sont périodiques si le nombre de rotation est rationnel, quasi-périodiques sinon.

Ainsi, en plus des solutions stationnaires mises en évidence par le modèle différentiel proposé par Gardner & al. [3], le système à temps discret présente, dans certaines régions des paramètres, des oscillations permanentes dans un voisinage (dépendant de a) de la diagonale. Ces oscillations sont imputables aux délais, et absentes des équations différentielles ordinaires. Leur interprétation est la suivante. Lorsque les deux gènes ont des seuils d'action et des niveaux d'expression initialement proches, le retard de chacun à réagir au niveau d'expression de l'autre permet aux deux de franchir les seuils avant d'intégrer l'information sur l'état de l'autre. La situation peut alors se répéter en sens inverse avec un retour au niveau de départ et un accrochage de fréquence comme décrit ci-dessous.

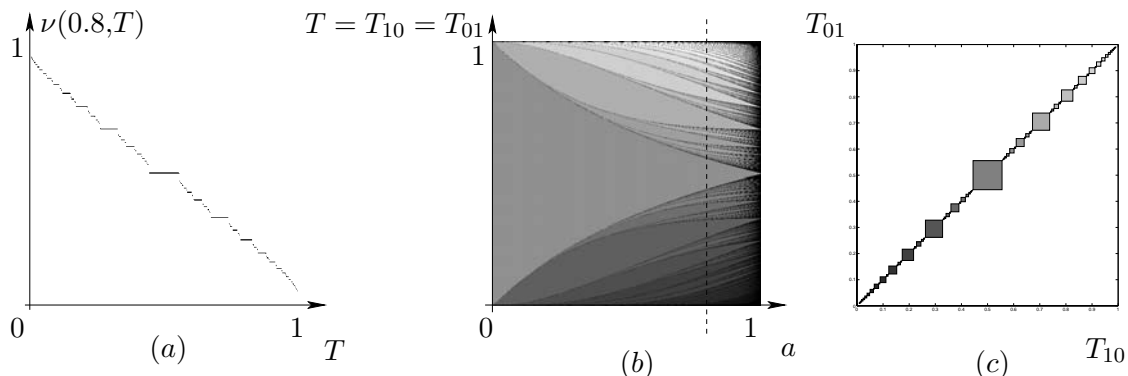


FIG. 3 – (a) Graphe de l'application $T_{10} = T_{01} = T \mapsto \nu(a = 0.8, T)$. (b) Plot en niveau de gris de l'application $(a, T) \mapsto \nu(a, T)$ (Blanc $\equiv \nu = 0$ - Noir $\equiv \nu = 1$). (c) Plot des domaines dans la section $a = 0.8$ de l'espace des paramètres.

Les régions des paramètres d'existence de ces oscillations sont explicitement connues suite à un calcul analytique, cf. figure 3. Sur cette figure 3(c) on a représenté, en niveau de gris, pour une valeur de a fixée 3(b), les régions des paramètres T_{10} et T_{01} d'existence d'oscillations de nombre de rotation ν . Ces régions sont des carrés autour de la diagonale principale, ayant une structure fractal. En particulier, la fonction qui associe à un point de la diagonale $T_{10} = T_{01} = T$, le nombre de rotation de l'oscillation, soit $\nu(T)$, est une fonction décroissante et continue, en forme d'escalier du diable 3(a). De la forme des domaines dans l'espace des paramètres (figures 3(b) et 3(c)), on voit que les dynamiques donnant des attracteurs périodiques sont structurellement stables.

3.3 Le circuit négatif à deux noeuds

Dans cette section, nous présentons une partie des résultats de l'étude du circuit négatif à deux noeuds, i.e $n = 2$ et $s_{01} = -1$, $s_{10} = +1$ dans la relation (1) (cf. figure 1(b)) [2]. Cette différence avec le circuit positif dans le signe de s_{10} a une conséquence significative puisque, comme le montre le graphe des transitions possibles (cf. figure 4(c)), la dynamique ce fait cette fois en visitant successivement les quatre atomes dans le sens trigonométrique. Le dépendance des caractéristiques du système en fonction des paramètres (a, T_{10}, T_{01}) du modèle est ici moins bien connue que dans le cas positif. La raison en est que l'on peut

1. Précisément ces orbites ont pour expression $x_1^t = x_2^t = \phi(\nu t + \alpha)$, où α est arbitraire et où le nombre de rotation ν est unique et complètement déterminé par les paramètres. De plus, le changement de variable ϕ est un endomorphisme du cercle qui préserve l'orientation.

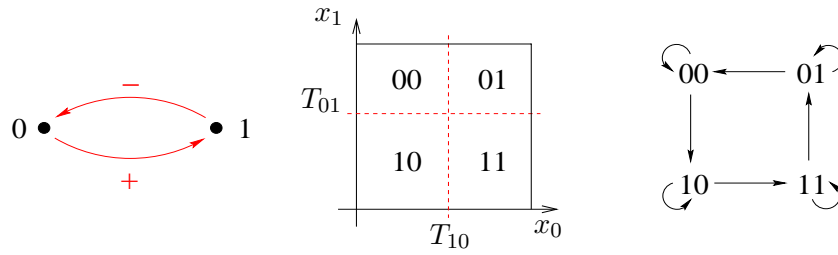


FIG. 4 – (a) Circuit négatif. (b) Esp. de phase et partition. (c) Graphe des transitions possibles.

classer les composantes de l'attracteur en deux classes: celles engendrées par des applications du carré qui peuvent être conjuguées à des rotations du cercle² (les composantes sont alors dites régulières), et celles qui ne peuvent pas l'être (composantes dites irrégulières).

Les premières sont bien comprises dans la mesure où l'on connaît explicitement (i.e analytiquement) les caractéristiques des composantes (fréquence ν et temps de séjour par atome) en fonction des valeurs (en fait domaines) des paramètres. On montre que ces domaines (classes d'équivalence de dynamiques assurant leur stabilité structurelle) de paramètres associés à des composantes régulières sont distribués dans tout l'espace des paramètres (cf. figure 5 pour certaines d'entre elles et commentaires). Le même type d'étude que pour le circuit négatif quand à la dépendance du nombre de rotation ν vis-à-vis des paramètres peut être menée [2] (cf. figure 3(a)).

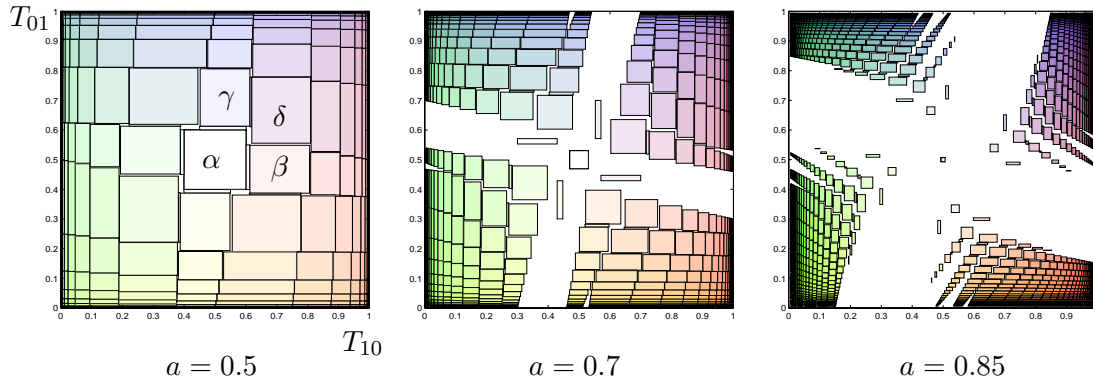


FIG. 5 – Domaines des paramètres (T_{10}, T_{01}) correspondant à des applications du carré conjuguées à des rotation du cercle pour trois sections de l'espace des paramètres: $a = 0.5, 0.7$ et 0.85 . A chaque domaine est associé un nombre de rotation $\nu(a, T_{10}, T_{01})$ et un temps de séjour par atome (ici un seul itéré dans 01 et 00 et un nombre arbitraire d'itérés dans 10 et 11). Le domaine α correspond aux orbites de code $(01001011)^\infty$, β à $(0100(10)^2 11)^\infty$, δ à $(0100(10)^2 (11)^2)^\infty$, γ à $(010010(11)^2)^\infty$, etc. Il existe dans les régions non recouvertes (i.e en blanc) d'autres domaines non représentés correspondant à des composantes régulières, certains pouvant se recouvrir selon la valeur de a .

De plus, ce système a la particularité de permettre la coexistence de plusieurs composantes périodiques. Par exemple, la figure 6(a) montre le cas le plus simple (pour $T_{10} = T_{01} = 0.5$) avec coexistence de 4 composantes ($\nu = 4, 8, 12, 16$) parfaitement symétriques par rapport à l'intersection des seuils. La figure 6(b) montre un cas de cascade de bifurcation et d'accumulation ($a_i \rightarrow 1$).

2. Il s'agit en fait du cercle partitionné en quatre et sur lequel les orbites décrivant les composantes de l'attracteur ont pour expression $x_1^t = \eta(\nu t, L(01) + L(00), \nu)$ et $x_2^t = \eta(\nu t - L(10), L(00) + L(10), \nu)$, où $L(\dots)$ est la longueur de l'arc de cercle correspondant à l'atome de la partition, et η un endomorphisme du

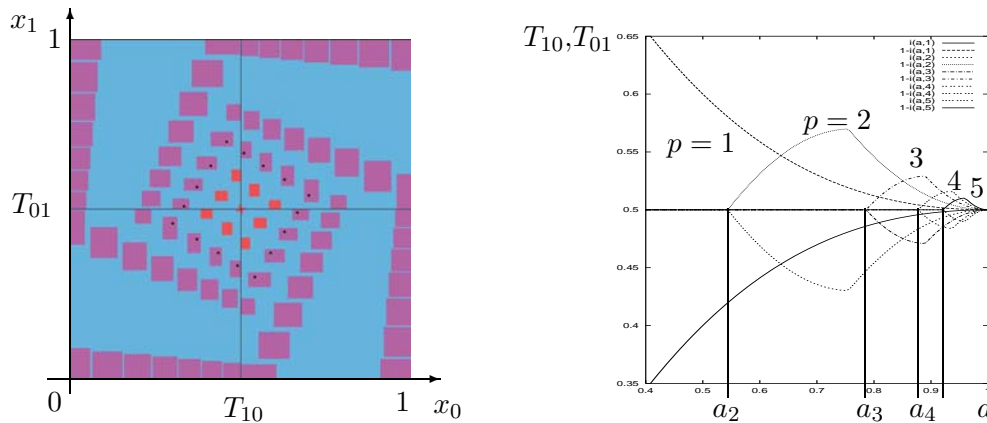


FIG. 6 – (a) Bassins d'attraction des composantes de l'attracteur pour $a = 0.9$ et $T_{10} = T_{01} = 0.5$ (coexistence de 4 composantes dont seule la période 16 est tracée (points noirs), celle de période 12 est la seule à avoir un bassin connexe (gris clair)). (b) Projection bidimensionnelle des domaines des paramètres (intérieur des paires de courbes symétriques par rapport à la droite $T_{10} = T_{01} = 1/2$) d'admissibilité des codes uniformes de période $4p$, avec p de 1 à 5. Le domaine pour $p = 1$ correspond au carré blanc central de la figure 5, les autres valeurs de p n'y étant pas représentées.

4 Conclusion

Nous avons ici présenté des résultats de l'étude détaillée de la dynamique menée dans deux cas simples de circuits, les circuits positif et négatif à deux noeuds. Bien qu'ils ne disent pas tout sur la dynamique des circuits de taille quelconque, ils sont représentatifs de la phénoménologie de la dynamique des circuits dans le cadre de la dynamique à temps discret proposée [2]. Nous avons mis en évidence les effets sur la dynamique de retards dans les interactions, en comparaison à des modèles à temps continu sans retards. Il en ressort une dynamique plus riche qu'il est possible de décrire quantitativement en fonction des paramètres du modèle.

Références

- [1] B. Lewin, *Genes VIII*, p.119-122, Pearson Prentice Hall, (2004).
- [2] R. Coutinho, B. Fernandez, R. Lima, A. Meyroneinc, *A discret time piecewise affine model for genetic regulatory networks*, in preparation.
- [3] T.S. Gardner, C.R Cantor, J.J Collins, *Construction of a genetic toggle switch in Escherichia coli*, Nature, **403**, 339-342, (2000).
- [4] A. Meyroneinc & al., *Un modèle d'applications couplées pour la dynamique des réseaux de régulation génétique*, Compte-rendus de la 7^e Rencontre du Non-Linéaire, édité par Y. Pomeau et R. Ribotta (Non Linéaire Publications, Orsay, (2004).
- [5] R. Wang, Z. Jing, L. Chen, *Modelling periodic oscillation in gene regulatory networks by cyclic feedback systems*, Bull. Math. Biol., in press.
- [6] H. de Jong, R. Lima, *Modeling the dynamics of genetic regulatory networks: Discrete and continuous approaches*, Proc. of Coupled Map Lattices 2004, Springer-Verlag, Berlin, à paraître.

Un nouveau formalisme pour l'analyse topologique du chaos déterministe

Pierre-Emmanuel Morant, Michel Nizette et Marc Lefranc

*Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes, Molécules (UMR CNRS 8523)
Centre de Recherches Lasers et Applications, UFR de Physique, Bât. P5,
Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex,
FRANCE*

morant@phlam.univ-lille1.fr, mnizette@ulb.ac.be,
marc.lefranc@univ-lille1.fr

Résumé

La méthode d'analyse du chaos basée sur une caractérisation des orbites périodiques instables par la théorie des noeuds est une approche puissante mais est limitée par le fait que la théorie des noeuds n'a de sens que dans un espace à trois dimensions. Cependant, les principes fondamentaux sur lesquels cette approche repose, à savoir le déterminisme et la continuité, sont valides en dimension arbitraire. Nous proposons ici un nouveau formalisme dans lequel ces principes sont réalisés sur des surfaces triangulées plutôt que sur des courbes. Comme premier pas vers un formalisme applicable en dimension supérieure, nous montrons que cette approche simplifie considérablement le calcul des entropies topologiques des orbites périodiques en dimension trois.

Abstract

The topological analysis of deterministic chaos based on a knot-theoretic characterization of unstable periodic orbits has proved a powerful method, however knot theory can only be applied to three-dimensional systems. Still, the core principles upon which this approach is built, determinism and continuity, apply in any dimension. We propose an alternative framework in which these principles are enforced on triangulated surfaces rather than curves. As a first step toward a formalism applicable in higher dimensions, we show that our approach simplifies significantly the computation of topological entropies of three-dimensional periodic orbits.

1 Introduction

Si les signaux temporels associés à un régime “chaotique” paraissent généralement désordonnés et erratiques, une représentation géométrique de la dynamique, où chaque état est représenté par un point dans un *espace des phases*, permet d'en mettre en évidence la nature déterministe [1]. Comme l'état d'un système à un instant donné détermine entièrement son futur, par un point de l'espace des phases ne peut passer qu'une seule trajectoire. L'examen d'un attracteur chaotique montre ainsi que des trajectoires voisines ne sont pas disposées au hasard et ont des vecteurs vitesses presque identiques (Fig. 1a).

On sait que tout attracteur chaotique contient une infinité d'orbites périodiques instables, associées à des trajectoires fermées dans l'espace des phases [1, 2] (Fig. 1b). Comme pour les autres trajectoires, le déterminisme interdit à ces orbites périodiques de se croiser en un point. Or, il existe une branche des mathématiques qui s'intéresse naturellement aux courbes fermées sans intersections : il s'agit de la théorie des noeuds.

Cette observation forme le point de départ de *l'analyse topologique du chaos* [2, 3], qui se propose de caractériser l'enchevêtrement des orbites périodiques instables à l'intérieur

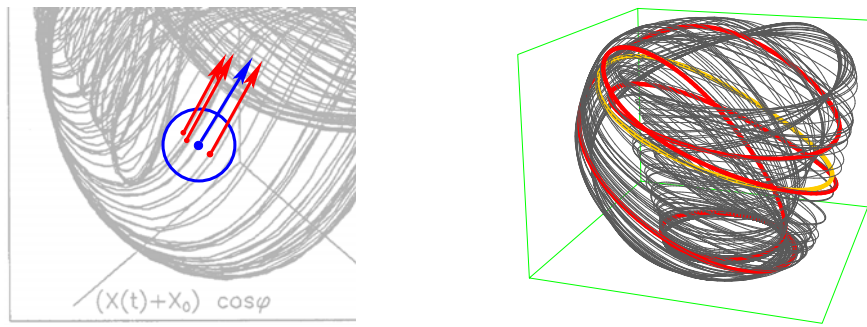


FIG. 1 – (a) Des trajectoires voisines dans l'espace des phases ont des vecteurs vitesse semblables. (b) L'enchevêtrement d'orbites périodiques peut être caractérisé par la théorie des nœuds.

de l'attracteur chaotique (Fig. 1b). Ce qui rend cette approche particulièrement pertinente est que l'entrelacement des orbites n'est pas quelconque, mais organisé de manière systématique par les processus d'étirement et de repliement qui façonnent l'attracteur chaotique. C'est ce que montre le théorème de Birman et Williams, qui établit que toutes les orbites périodiques d'un flot chaotique peuvent être projetées sur une surface bidimensionnelle à plusieurs branches (un *gabarit*), sans modifier aucun de leurs invariants topologiques [4]. Ce théorème forme la base d'une méthode de caractérisation qui consiste à extraire un certain nombre d'orbites périodiques d'une série temporelle donnée, et à déterminer le gabarit le plus simple compatible avec leurs invariants topologiques [2, 3]. Cette méthode s'est révélée extrêmement puissante et a non seulement permis de classifier les différents régimes chaotiques que peut présenter un système [2], mais également d'étudier les contraintes topologiques qui pèsent sur les séquences de bifurcations [5], de construire des codages symboliques d'attracteurs étranges [6], et de mettre en évidence la présence de chaos déterministe dans des séries temporelles courtes ou non stationnaires [7].

Cependant, cette approche souffre d'une limitation importante : *la théorie des nœuds n'est bien définie que dans des espaces de dimension trois* : en dimension supérieure, deux courbes fermées peuvent toujours être déformées l'une dans l'autre sans induire de croisement. Or, les principes de déterminisme et de continuité valent en dimension arbitraire, et les contraintes qu'ils imposent à la structure des trajectoires dans l'espace des phases doivent dans tous les cas pouvoir être caractérisées de manière topologique. Il doit donc être possible de construire une analyse topologique en dimension arbitraire, à condition de réaliser que la théorie des nœuds, aussi élégante soit-elle, n'est qu'une auxiliaire pratique en dimension trois, et de savoir la sacrifier.

2 Formulation “intégrale” du principe de déterminisme

Interdire l'intersection de trajectoires de dimension $d = 1$ ne mène à des configurations topologiquement distinctes qu'en dimension trois, car ce n'est qu'alors que la codimension $D - 2d$ de ce problème géométrique est égale à 1. Il a été proposé récemment de baser l'analyse topologique du chaos sur une autre formulation du principe de déterminisme, plus précisément sur le fait que l'orientation d'un élément de volume de l'espace des phases n'est pas modifiée sous l'action du flot [8]. En termes plus concrets, la surface d'une particule de fluide dans un écoulement ne se retourne pas au cours du temps : l'intérieur et l'extérieur restent distincts au cours du temps. Cette formulation du principe

de déterminisme est au théorème de non-intersection de deux courbes ce que le théorème de Gauss de l'électromagnétisme est à l'équation de Maxwell dont il dérive, c'est-à-dire sa forme intégrale. Elle s'adapte naturellement à des espaces des phases de dimension arbitraire, puisqu'il s'agit d'interdire qu'un point ne croise une hypersurface, qui est toujours de codimension 1.

Lorsque l'attracteur peut être plongé dans $\mathbb{R}^n \times S^1$ (par exemple, dans un système forcé), c'est-à-dire quand on peut le découper en sections de Poincaré n -dimensionnelles paramétrées par $\varphi \in S^1$, il est plus simple d'appliquer cette formulation du principe de déterminisme à une hypersurface de la section de Poincaré (Fig. 2).

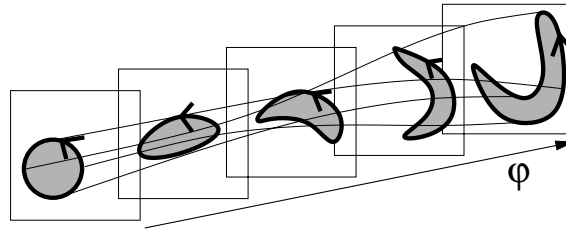


FIG. 2 – Sous l'action du flot, les éléments de volume des sections de Poincaré ainsi que leurs bords gardent leur orientation.

3 Orbites périodiques, triangulations et substitutions

De manière à construire une analyse topologique de signaux expérimentaux, éventuellement de courte durée, nous devons continuer à baser notre approche sur les orbites périodiques, qui sont en effet les seules trajectoires d'un attracteur chaotique dont la dynamique asymptotique puisse être obtenue en un temps fini. Elle ne peut donc dépendre que de la donnée des p intersections d'une orbite avec chaque section de Poincaré, à partir desquelles nous devons déterminer l'évolution de surfaces attachées à ces p intersections.

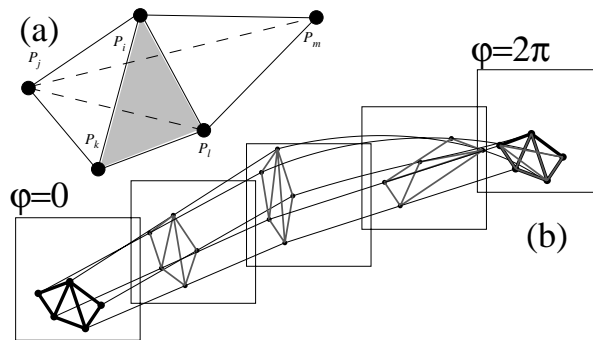


FIG. 3 – (a) espace triangulé basé sur des points périodiques P_i dans une section de Poincaré. (b) Le flot induit une application de cet espace dans lui-même, ici pour une orbite de période 5.

Pour cela, nous représentons la dynamique dans un espace triangulé dont les noeuds sont les p points périodiques P_i dans une section de Poincaré (avec $F(P_i) = P_{i+1}$, F étant l'application de premier retour dans la section). Dans cet espace, les points sont les points

périodiques P_i , les courbes sont formées de segments de droite $\langle P_i, P_j \rangle \equiv \langle ij \rangle$ reliant deux points périodiques, les surfaces bidimensionnelles sont construites à partir de triangles $\langle P_i, P_j, P_k \rangle \equiv \langle ijk \rangle$, etc (Fig. 3a). De manière générale, une surface m -dimensionnelle est constituée de simplexes basés sur $m + 1$ des points périodiques. Lorsque l'on passe de section de Poincaré en section de Poincaré, les points périodiques P_i se déplacent dans le plan de section et donc également les simplexes qui leur sont attachés (Fig. 3b). On peut espérer que la dynamique de ces simplexes reflète celle des surfaces de l'espace des phases sous l'action du flot. Chaque application F_m induite dans l'espace S_m des simplexes à m dimensions doit être continue, inversible et *préserver l'orientation*.

On se limite ici au cas de $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Le plus petit élément de volume d'un espace triangulé de points périodiques dans une section de Poincaré à 2D est un triangle $\langle P_i, P_j, P_k \rangle$ basé sur trois points périodiques P_i, P_j, P_k . Soit $P_i(\varphi)$ la position du point P_i dans la section repérée par φ , avec $P_i(0) = P_i$ et $P_i(2\pi) = P_{i+1}$. La manière la plus simple de décrire l'évolution de $T = \langle P_i, P_j, P_k \rangle$ de section en section est donnée par

$$T(\varphi) = \langle P_i(\varphi), P_j(\varphi), P_k(\varphi) \rangle, \quad (1)$$

ce qui mènerait à une application de premier retour triviale

$$F_2(T) = T(2\pi) = \langle P_{i+1}, P_{j+1}, P_{k+1} \rangle, \quad (2)$$

s'il ne fallait pas introduire des règles supplémentaires pour préserver l'orientation. Tant que $T(\varphi)$ garde son orientation initiale, (1) convient parfaitement. Cependant, il est fréquent qu'à un instant $\varphi = \varphi_0$, l'un des trois points [disons $P_k(\varphi)$] passe entre les deux autres, changeant l'orientation du triangle $\langle P_i(\varphi), P_j(\varphi), P_k(\varphi) \rangle$ (Fig. 4). Appliquer naïvement (1) ferait alors que $T = T(0)$ et $F_2(T) = T(2\pi)$ aient des orientations différentes, ce qui violerait le principe de déterminisme : il nous faut donc modifier la représentation de la dynamique. Il se trouve qu'il existe une solution élégante à ce problème.

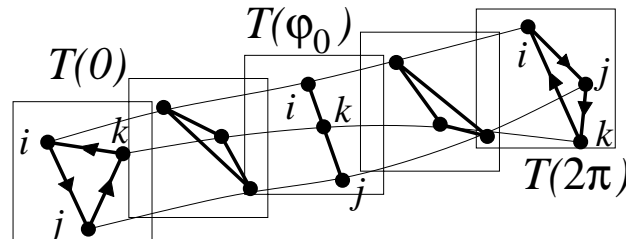


FIG. 4 – Lorsque des points périodiques changent de position dans des sections de Poincaré successives, le triangle qu'ils forment peut changer d'orientation.

Un triangle dégénéré (tel que $T(\varphi_0)$ à la Figure 4) est semblable à un ballon aplati dont la surface peut être décomposée en deux faces superposées. L'évolution du triangle viole apparemment le déterminisme quand les faces semblent se traverser et donc être échangées. Il faut alors garder à l'esprit que seul le mouvement des points périodiques est fixé par les données expérimentales, la dynamique des “surfaces” étant ensuite interpolée. Pour préserver le déterminisme, il faut supposer que les deux faces ne se croisent pas et nous pouvons l'imposer en les intervertissant au moment du retournement, annulant ainsi le changement d'orientation.

Cette “astuce” est illustrée à la Figure 5 où les deux surfaces qui se font face au moment de l'inversion sont représentées en traits plein et pointillés. Le point clé est de

construire la dynamique de manière à ce que la surface de gauche (trait plein) reste à gauche et la surface de droite (trait pointillé) reste à droite, ce qui est conforme au bon sens. Etant donné que la surface de gauche (resp. droite) est constituée du chemin $\langle ik \rangle + \langle kj \rangle$ (resp. $\langle ij \rangle$) avant l'inversion et du chemin $\langle ij \rangle$ (resp. $\langle ik \rangle + \langle kj \rangle$) après, leur position relative est préservée en associant l'inversion du triangle avec la règle dynamique suivante:

$$\langle ij \rangle \rightarrow \langle ik \rangle + \langle kj \rangle \quad (3)$$

$$\langle ik \rangle + \langle kj \rangle \rightarrow \langle ij \rangle \quad (4)$$

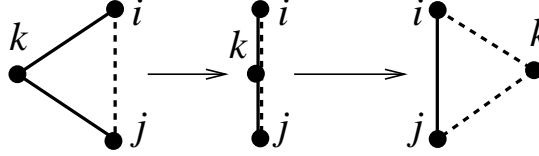


FIG. 5 – Inversion d'un triangle. L'identification des chemins en trait plein (resp. pointillé) dans les configurations de départ et d'arrivée conduit à la substitution (3)-(4)

Pour mettre en application cette dynamique, on peut se représenter les chemins visitant les segments $e_{ij} = \langle ij \rangle$ dans un ordre donné comme des mots dans un langage \mathcal{A}^* d'alphabet $\mathcal{A} = \{e_{lm}\}$, et (3)-(4) comme une substitution σ_{ij}^k qui dans chaque mot w remplace la lettre e_{ij} par la chaîne $e_{ik}e_{kj}$ et la chaîne $e_{ik}e_{kj}$ par la lettre e_{ij} [donc $(\sigma_{ij}^k)^2 = 1$]. Par exemple,

$$\sigma_{ij}^k e_{kl} e_{li} \overbrace{e_{ij}} \overbrace{e_{jl} e_{li}} \overbrace{e_{ik} e_{kj}} \overbrace{e_{ji}} \dots = e_{kl} e_{li} \overbrace{e_{ik} e_{kj}} e_{jl} e_{li} \overbrace{e_{ij}} \overbrace{e_{jk} e_{ki}} \dots$$

Les σ_{ij}^k engendrent une dynamique non triviale, car l'image d'un chemin dépend de la manière dont les points périodiques tournent l'un autour de l'autre. Malgré sa simplicité, cette dynamique reflète fidèlement celle du flot autour de l'orbite, comme on peut le montrer par le fait qu'elle permet de calculer l'entropie topologique de l'orbite.

En énumérant les intersections d'une orbite P avec des plans de section consécutifs, on construit une liste de l inversions de triangle $\sigma_{i_m j_m}^{k_m}$, et à partir de là un système dynamique substitutif F_1 qui transforme un mot $w \in \mathcal{A}^*$ en un autre mot :

$$F_1 : w \rightarrow w' = N \sigma_{i_l j_l}^{k_l} \dots \sigma_{i_2 j_2}^{k_2} \sigma_{i_1 j_1}^{k_1} w \quad (5)$$

où $N e_{ij} \dots = e_{(i+1)(j+1)} \dots$. Prenons l'exemple de l'orbite périodique de la Figure 3b. On trouve que $F_1 = N \sigma_{23}^4 \sigma_{25}^4 \sigma_{13}^4 \sigma_{15}^4$, qui conduit au système de règles asymptotiques :

$$e_{14} \rightarrow e_{25}, e_{15} \rightarrow e_{25} e_{51}, e_{25} \rightarrow e_{35} e_{51}, e_{35} \rightarrow e_{41}. \quad (6)$$

On voit facilement que quand on itère (6) en partant d'un mot w , la longueur $|F_1^m(w)|$ du m -ième itéré diverge quand $m \rightarrow \infty$. Cela indique que les trajectoires dans le voisinage de l'orbite sont indéfiniment étirées par le flot. La quantité :

$$h(P) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |F_1^m(w)|}{m} \quad (7)$$

devrait être égale à l'entropie topologique de l'orbite [9] et est obtenue comme le logarithme de la valeur propre dominante de la matrice de transition $(M_{ee'})$, dont les éléments indiquent combien de fois un segment e' apparaît dans $F_1(e)$.

Orbite	Ce travail	TT	Orbite	Ce travail	TT
01101 $\frac{0}{1}1$	0.4421	0.4421	00010 $\frac{0}{1}1$	0.3822	0.3822
001011 $\frac{0}{1}1$	0.3460	0.3460	000101 $\frac{0}{1}1$	0.5686	0.5686
00101 $\frac{0}{1}1$	0.4768	0.4768	0001 $\frac{0}{1}1$	0.6329	0.6329
001010 $\frac{0}{1}1$	0.4980	0.4980	000111 $\frac{0}{1}1$	0.5686	0.5686
001 $\frac{0}{1}1$	0.5435	0.5435	00011 $\frac{0}{1}1$	0.3822	0.3822
001110 $\frac{0}{1}1$	0.4980	0.4980	000010 $\frac{0}{1}1$	0.4589	0.4589
00111 $\frac{0}{1}1$	0.4768	0.4768	00001 $\frac{0}{1}1$	0.6662	0.6662
001111 $\frac{0}{1}1$	0.3460	0.3460	000011 $\frac{0}{1}1$	0.4589	0.4589
001101 $\frac{0}{1}1$	0.4980	0.4980	000001 $\frac{0}{1}1$	0.6804	0.6804

TAB. 1 – Entropies topologiques obtenues pour les orbites d’entropie positive et de période inférieure ou égale à 8 de l’application du fer à cheval de Smale, avec l’approche décrite ici (colonne 2) et avec l’algorithme “train-track” (“TT”, colonne 3). [9, 10].

Pour les 746 orbites de l’application du fer à cheval [2], nous avons calculé l’entropie topologique obtenue au moyen de l’expression (7) et celle obtenue par un algorithme basé sur la théorie des noeuds [9, 10]. Comme l’illustre la table 1, nous avons obtenu un accord parfait entre les deux approches pour toutes les orbites. Ce résultat ne peut être le fruit du hasard et montre que le formalisme que nous proposons est équivalent à celui basé sur la théorie des noeuds, tout en présentant l’immense avantage de pouvoir en principe être étendu aux systèmes de dimension supérieure, car interdire le changement d’orientation des éléments de volume a un sens en dimension arbitraire. Nous espérons pouvoir bientôt proposer un formalisme en dimension quatre, même si certains points restent à éclaircir.

D’ores et déjà, nos travaux préliminaires indiquent que le nouveau formalisme représente un progrès dès la dimension trois. En effet, un système tel que (6) peut être associé à un mot invariant vérifiant $F_1^5(w_\infty) = w_\infty$, et la structure de ce mot invariant semble contenir des informations sur la dynamique symbolique de l’orbite et sur le gabarit le plus simple compatible avec les invariants de l’orbite.

Références

- [1] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [2] R. Gilmore and M. Lefranc, *The Topology of Chaos* (Wiley, New York, 2002) — R. Gilmore, Rev. Mod. Phys., **70**, 1455 (1998).
- [3] G. B. Mindlin *et al.*, Phys. Rev. Lett., **64**, 2350 (1990) — G. B. Mindlin *et al.*, J. Nonlinear Sci., **1**, 147 (1991).
- [4] J. S. Birman et R. F. Williams, Topology, **22**, 47 (1983).
- [5] T. Hall, Phys. Rev. Lett. **71**, 58–61 (1992).
- [6] M. Lefranc *et al.*, Phys. Rev. Lett. **72**, 1364–1367 (1994) — J. Plumecoq et M. Lefranc, Physica D **144**, 231–258 (2000).
- [7] A. Amon et M. Lefranc, Phys. Rev. Lett., **92**, 094101 (2004).
- [8] M. Lefranc, *Alternative determinism principle for topological analysis of chaos*, *subm.* to Phys. Rev. Lett.
- [9] P. Boyland, Topology Appl. **58**, 223 (1994).
- [10] M. Bestvina et M. Handel, Topology, **34**, 109 (1995).

Mesure lagrangienne de l'accélération dans un écoulement turbulent

N. Mordant¹, A. M. Crawford² et E. Bodenschatz²

¹ LPS, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond 75231 Paris cedex 05

² LASSP, Clark Hall, Cornell University, Ithaca NY 14853

nmordant@ens.fr

Résumé

A Cornell University, nous avons développé un système de mesure lagrangienne de trajectoire de particules advectées par un écoulement turbulent. En utilisant des "silicon strip detectors", on obtient la résolution temporelle nécessaire pour estimer l'accélération. La statistique des composantes d'accélération est fortement non gaussienne et celle de l'amplitude est proche d'une distribution lognormale. On observe une dépendance statistique entre accélération et vitesse par l'étude de la variance de l'accélération conditionnée à la vitesse. Finalement on présente les corrélations temporelles de l'accélération: les composantes sont corrélées sur un temps court dissipatif tandis que l'amplitude reste corrélée sur des temps longs. Cette dernière observation ainsi que la dépendance vitesse/accélération sont en contradiction avec la théorie classique de la turbulence énoncée par Kolmogorov en 1941.

Abstract

In Cornell University, we have developed an experimental setup to obtain Lagrangian measurements of the trajectories of particles advected by a turbulent flow. By using silicon strip detectors, we had the enough temporal resolution to resolve the Lagrangian acceleration. The statistics of the acceleration components is strongly non gaussian and that of the magnitude is close to lognormal. We observed a statistical dependence of acceleration on velocity by studying the acceleration variance conditioned on the velocity. Finally, we show the temporal correlations of acceleration: the components are correlated on a short dissipative time scale whereas the magnitude remains correlated over long times. The latter observation and also the acceleration/velocity dependence are at odds with the classical theory of turbulence as described by Kolmogorov in 1941

1 Introduction

L'approche lagrangienne de la turbulence consiste à étudier les trajectoires de particules de fluides se déplaçant dans un écoulement turbulent. L'espace est alors paramétrisé par les positions initiales des particules. Cette approche est naturelle dans les problématiques de dispersion ou de mélange. En effet, on peut décrire les moments successifs de la concentration d'un scalaire passif à diffusivité nulle à partir des probabilités de déplacement des particules de fluide [1]. Ainsi la concentration moyenne d'un scalaire à diffusivité nulle s'écrit

$$\langle \theta(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_{s \leq t} \int_V p(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s) S(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds \quad (1)$$

où $S(\mathbf{y}, s)$ est la fonction source du scalaire et $p(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s)$ est la probabilité qu'une particule de fluide en \mathbf{y} à s soit en \mathbf{x} à l'instant t . On étend le raisonnement aux ordres supérieurs en considérant les probabilités à plusieurs particules. Lorsque la diffusivité du scalaire est non

nulle, on peut montrer qu'il faut alors étudier les trajectoires de particules se déplaçant sous l'influence de la vitesse du fluide et d'un mouvement aléatoire moléculaire. Dans la limite des hauts nombres de Reynolds et de Péclet, la différence est négligeable, pour la moyenne, tant que l'on est suffisamment éloigné d'une paroi ou d'une source.

Nous nous situons dans une approche expérimentale dans laquelle les difficultés sont nombreuses. D'un part il faut marquer des particules de fluides pour les suivre individuellement. Par ailleurs il faut avoir la résolution spatiale et temporelle pour résoudre le mouvement à haut nombre de Reynolds. Du fait de ces exigences, les mesures lagrangiennes à haut nombre de Reynolds sont encore rares malgré les développements technologiques récents. Très récemment, on a été capable de suivre le mouvement individuel de particules en turbulence pleinement développée par une technique acoustique [2]. Cette technique a permis de suivre une particule pendant des temps comparables à l'échelle intégrale du mouvement et ainsi d'étudier en détail les propriétés d'intermittence temporelle [3, 4]. Pour étudier l'accélération des particules de fluide, la résolution temporelle indispensable a été obtenue à Cornell University dans le groupe de E. Bodenschatz en utilisant des "silicon strip detectors" issus de la physique des hautes énergies [5, 6]. Cette technique a permis une étude statistique très fine de l'accélération lagrangienne, de sa dynamique temporelle [7]. On a également mis en évidence une dépendance statistique entre le champ de vitesse et l'accélération, en contradiction avec la théorie classique de Kolmogorov 1941 [8]. Nous présenterons ces résultats après avoir décrit brièvement le dispositif expérimental.

2 Dispositif expérimental

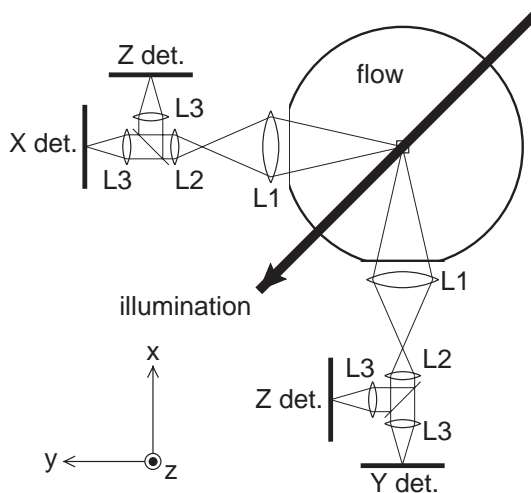


FIG. 1 – Coupe schématique du dispositif expérimental. On fait l'image d'un petit volume situé au centre de l'écoulement sur quatre "silicon strip detectors". Le volume est éclairé par un laser YAG pulsé de 30W. l'axe de rotation des disques est selon l'axe z .

Les détails du dispositif peuvent être trouvés dans [5]. L'écoulement considéré est de type Von Kármán: l'eau est mise en mouvement par deux disques coaxiaux de 20 cm de diamètre et distants de 33 cm. Le tout est enfermé dans un cylindre et les disques tournent en sens contraire. Onensemence le liquide avec des particules de polystyrène de 25 μm de diamètre, de même densité que l'eau. On suit le mouvement de ces particules

en en faisant l'image sur les "silicon strip detectors". Il s'agit de détecteurs 1D constitués de 512 pixels et fonctionnant jusqu'à 70000 images/s. Chaque détecteur enregistre donc une seule composante de la position. On obtient les trajectoires complètes en utilisant 4 détecteurs, positionnés par paires de façon à observer le volume de mesure sous deux incidences orthogonales (fig. 1). On étudie ainsi un volume de $4.1 \times 4.1 \times 2.05 \text{ mm}^3$. On reconstitue les triplets de coordonnées en corrélant les intensités lumineuses mesurées par chaque détecteur au sein de chaque paire (x,z) et (y,z) puis en utilisant la redondance de la coordonnée z .

3 Statistique du vecteur accélération

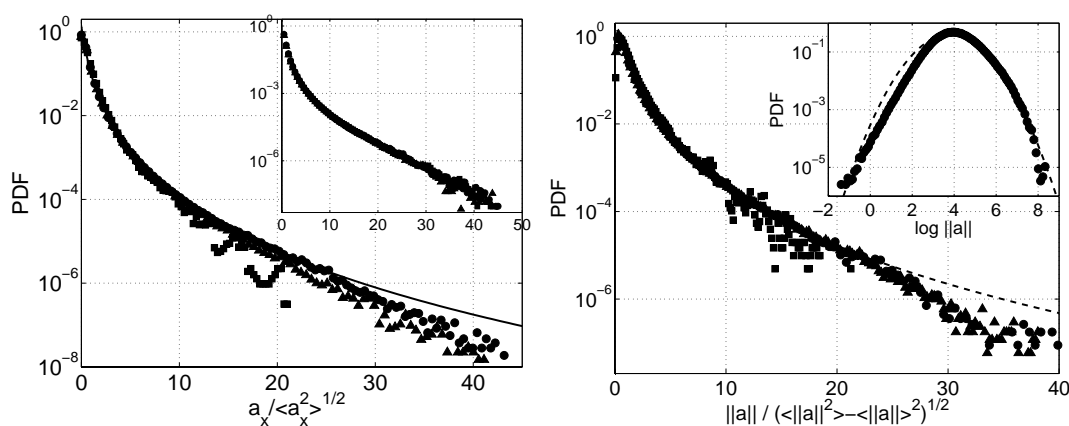


FIG. 2 – Fonction densité de probabilité (PDF) de l'accélération. A gauche: PDF d'une composante pour trois nombres de Reynolds ($R_\lambda = 285$ (carrés), 485 (triangles) et 690 (ronds)). La ligne est le cas d'une PDF lognormale de l'amplitude. L'encart montre la superposition des PDF des trois composantes de l'accélération pour $R_\lambda = 690$. A droite: PDF de l'amplitude aux trois mêmes nombres de Reynolds. Les pointillés sont une PDF lognormale. L'encart montre la PDF du logarithme de l'amplitude pour $R_\lambda = 690$.

Les fonctions densité de probabilité (PDF) des composantes d'accélération sont tracées sur la figure 2. Les PDFs sont très larges avec des ailes extrêmement développées: on observe des événements dépassant 40 fois la variance. Cette intermittence croît avec le nombre de Reynolds. Au nombre de Reynolds le plus élevé, le champ d'accélération est quasi isotrope (malgré un forçage anisotrope à grande échelle), les trois composantes ayant des variances très proches et des PDF superposables. L'amplitude de l'accélération est proche d'une distribution log-normale sauf pour les événements les plus intenses peut-être à cause d'un manque de résolution. Un ajustement par une loi lognormale fournit une variance du logarithme proche de 1. On notera que l'écart à la loi log normale pour les très faibles valeurs de l'accélération est probablement due à l'existence de bruit expérimental qui pollue les mesures de petites accélérations. Si l'on suppose la distribution de l'amplitude lognormale et l'accélération isotrope alors la PDF d'une composante est

$$P(a_i) = \frac{\exp(s^2/2)}{4m} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\ln \left(\frac{|a_i|}{m} \right) + s^2}{\sqrt{2}s} \right) \right]. \quad (2)$$

où m est la moyenne du logarithme et s la variance, prise égale à 1 dans la figure 2. On voit que l'accord avec les mesures est très bon, sauf pour les valeurs extrêmes. La loi lognormale semble reproduire très convenablement les observations [7].

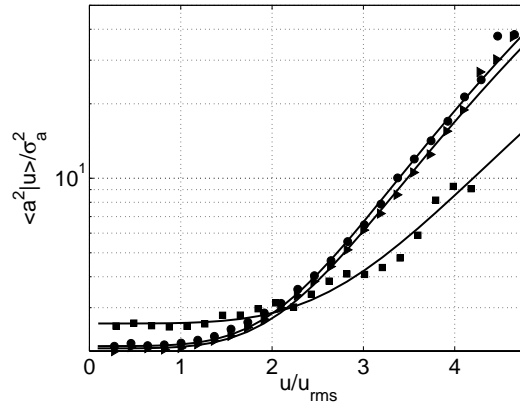


FIG. 3 – Variance de l'accélération conditionnée à l'amplitude de la vitesse pour trois nombres de Reynolds ($R_\lambda = 285$ carrés, 485 triangles et 690 ronds). Les lignes sont des ajustements par $\alpha + \beta u^{9/2}$. $\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{3}\langle \mathbf{a}^2 \rangle}$ et $u_{rms} = \sqrt{\frac{1}{3}\langle \mathbf{u}^2 \rangle}$

Le dispositif expérimental permet d'enregistrer les trajectoires pendant suffisamment longtemps afin d'avoir assez de données pour étudier des statistiques jointes de l'accélération et la vitesse. A la précision de la mesure on observe que la moyenne d'accélération conditionnée à l'amplitude de la vitesse est nulle mais la variance dépend fortement de la vitesse (fig. 3). La prédiction dimensionnelle basée sur des arguments à la Kolmogorov 1941 est $\langle a^2 \rangle = a_0 \epsilon^{3/2} \nu^{-1/2}$ (ϵ est le taux de dissipation, ν est la viscosité cinématique, a_0 est une constante). Une extension de ces prédictions notant que $\epsilon \propto u^3/L$ (où L est l'échelle intégrale) suggère le comportement suivant: $\langle a^2 | u \rangle \propto u^{9/2}$. Un ajustement $\langle a^2 | u \rangle / \langle a^2 \rangle = \alpha + \beta (u / \langle u^2 \rangle^{1/2})^{9/2}$ reproduit très précisément les données (fig. 3) [8]. Ceci contredit l'hypothèse d'homogénéité locale formulée par Kolmogorov en 1941 dans sa théorie de la turbulence [9].

4 Dynamique temporelle

L'accélération a une dynamique temporelle assez complexe (fig. 4) [7]. Les composantes d'accélération ont un temps de corrélation très court et comparable au temps dissipatif de Kolmogorov $\tau_\eta = \sqrt{\nu/\epsilon}$ qui est le temps caractéristique le plus court dans un écoulement turbulent. Par contre, l'amplitude reste corrélée sur des temps beaucoup plus long, peut-être comparable au temps intégral caractéristique des grandes échelles de l'injection d'énergie. Cette observation est compatible avec les observations acoustiques [3] qui ont montré l'existence de telles corrélations. Ceci est à nouveau en contradiction avec la théorie classique de Kolmogorov 1941 qui suppose une séparation d'échelle entre l'injection et la dissipation de l'énergie. Dans ce cadre, l'accélération ne devrait pas présenter de telles corrélations sur des échelles intégrales.

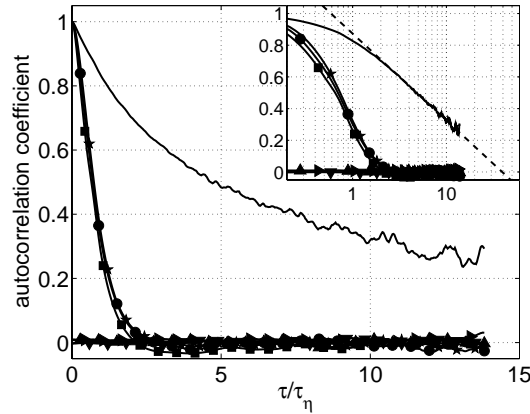


FIG. 4 – *Corrélations temporelle de l'accélération lagrangienne. Les carrés sont les auto-corrélations de composantes de l'accélération et les triangles leurs corrélations croisées. La ligne sans symbole est l'autocorrélation de l'amplitude de l'accélération.*

5 Conclusion

Les "silicon strip detectors" offrent la résolution temporelle indispensable à l'étude de l'accélération lagrangienne. La PDF de composantes d'accélération est très fortement non gaussienne et présente des événements supérieurs à 40 fois la variance. Ceci est susceptible d'avoir un impact dans des écoulements réactifs ou dans le phénomène de formation de gouttes d'eau dans les nuages [10]. On observe que la distribution de l'amplitude de l'accélération est très proche d'une loi lognormale. Par ailleurs la distribution des composantes dépend de la vitesse. Ceci est compatible avec une extension de la théorie de Kolmogorov 1941 où l'on fait intervenir l'intermittence due aux fluctuations de vitesse. Néanmoins cette extension ne parvient pas à expliquer l'intermittence observée. La dynamique temporelle est également en contradiction avec la théorie de Kolmogorov car on observe des corrélations longues de l'amplitude de l'accélération. Cette méthode de mesure lagrangienne est très performante mais ne permet pas vraiment d'envisager effectuer des mesures de dispersion de paires de particules du fait du caractère 1D des capteurs. En effet, pour pouvoir obtenir des paires de particules, il faut pouvoir mesurer les trajectoires de plusieurs centaines de particules simultanément. La seule méthode qui permette de façon efficace de faire des mesures lagrangiennes à plusieurs particule semble être, à ce jour, la méthode de velocimétrie par suivi de particule à 3D déjà utilisée pour des mesures à nombre de Reynolds modéré [11]. On utilise 4 caméras pour effectuer des vues stéréoscopiques de l'écoulement, dont on extrait les positions puis les trajectoires des particules. L'extension de cette méthode à haut de nombre de Reynolds impose des investissements assez lourds car il est nécessaire de se doter de caméras ultrarapides (>10000 images/s) et de moyens informatiques assez conséquents pour traiter les données (10 GB/s).

Références

- [1] B. Sawford, *Turbulent relative dispersion*, Annu. Rev. Fluid Mech., **33**, pp. 289–317, (2001),
- [2] N. Mordant, P. Metz, O. Michel et J.-F. Pinton , *Measurement of Lagrangian velocity in fully developed turbulence*, Phys. Rev. Lett., **87**(21), 214501, (2001),
- [3] N. Mordant, J. Delour, E. Lévêque, A. Arnéodo et J.-F. Pinton , *Long time correlations in Lagrangian dynamics: a key to intermittency in turbulence*, Phys. Rev. Lett., **89**(25), 254502, (2002),
- [4] L. Chevillard, S. G. Roux, E. Levêque, N. Mordant, J.-F. Pinton, et A. Arneodo , , *Lagrangian Velocity Statistics in Turbulent Flows: Effects of Dissipation*, Phys. Rev. Lett., **91**, 214502, (2003),
- [5] G.A. Voth, A. La Porta, A.M. Crawford, J. Alexander, E. Bodenschatz, *Measurement of particle accelerations in fully developed turbulence*, J. Fluid Mech. **469**, 121-160 (2002).
- [6] A. La Porta, G.A. Voth, A.M. Crawford, J. Alexander, E. Bodenschatz, *Fluid particle accelerations in fully developed turbulence*, Nature **409**, 1017-1019 (2001).
- [7] N. Mordant, A. M. Crawford et E. Bodenschatz , *The 3D structure of the Lagrangian acceleration in turbulent flows*, Phys. Rev. Lett., **94**, 214501, (2004),
- [8] A. M. Crawford, N. Mordant and E. Bodenschatz , *Joint statistics of the Lagrangian acceleration and velocity in fully developed turbulence*, Phys. Rev. Lett., **87**(21), 024501, (2005),
- [9] U. Frisch, J. Bec et E. Aurell , “*Locally homogeneous turbulence*” *Is it an inconsistent framework?* , soumis à Phys. Fluids.
- [10] R.A. Shaw, *Particule-turbulence interactions in atmospheric clouds*, Ann. Rev. Fluid Mech. **35**, 183–227 (2003).
- [11] S. Ott et J. Mann, *An experimental investigation of the relative diffusion of particle pairs in three-dimensional turbulent flow*, J. Fluid Mech. **422**, 207–223 (2000).

Un réseau cellulaire non linéaire pour le traitement d'images

S. Morfu, J. Bossu, P. Marquié

Université de Bourgogne, LE2I, UMR C.N.R.S. 5158

BP 47870 - 21078 DIJON cedex, FRANCE

smorfu@u-bourgogne.fr

Résumé

Nous nous proposons de réhausser le contraste d'images faiblement contrastées à l'aide d'un réseau d'oscillateurs non linéaires. Nous montrons théoriquement et en simulation que deux oscillateurs avec une faible différence de condition initiale peuvent présenter un déplacement relatif maximum, minimum ou nul. L'extension de cette propriété au cas d'un réseau d'oscillateurs à deux dimensions permet d'envisager le réhaussement de contraste ou l'inversion d'une image. Un réseau électronique d'oscillateurs est également proposé.

Abstract

We propose an electrical network realized with nonlinear oscillators. We show theoretically and experimentally that the oscillations in the network are driven by the initial amplitude, that is the signal amplitude. This property can be extended to image processing to enhance a weak contrasted picture.

1 Introduction

Ces dernières années, un regain d'intérêt a été accordé aux systèmes non linéaires à des fins de traitement du signal et des images [1]. En effet, l'efficacité des systèmes non linéaires à traiter l'information provient d'une dimension supplémentaire incluse dans l'amplitude du signal, ce qui donne naissance à des propriétés fort intéressantes et parfois paradoxales que ne possèdent pas les systèmes linéaires. Le filtrage du bruit [2], la détection ou la transmission d'un signal de faible amplitude à l'aide de bruit via le phénomène de résonance stochastique [3, 4, 5], ou le traitement d'images à l'aide de réseaux cellulaires non linéaires (CNN) [1, 6, 7, 8] sont quelques exemples où les systèmes non linéaires ont su palier aux limitations des procédés linéaires classiques de traitement.

En traitement d'images, la détection de contours à l'aide de réseaux électroniques de Nagumo [9, 10], ou l'extraction du squelette d'une image à l'aide d'un processeur du type réaction-diffusion, réalisé avec un milieu chimique photosensible [11], sont des tâches dont s'acquittent parfaitement les systèmes non linéaires dans de nombreux problèmes de reconnaissance de forme [12]. Du fait de leur redoutable efficacité à résoudre des problèmes d'une forte complexité algorithmique, les réseaux cellulaires non linéaires ont fait l'objet de nombreuses implémentations électroniques [6].

Jusqu'à présent, la plupart des CNN implémentés électroniquement sont inspirés des systèmes de réaction-diffusion. Contrairement au CNN existant, nous présentons un CNN à une dimension inspiré des systèmes non linéaires inertiels. Ce CNN permet d'améliorer une faible différence d'amplitude ce qui, dans un contexte de traitement d'image, correspondrait à réaliser un réhaussement de contraste.

Nous présentons tout d'abord, le réseau électronique constitué d'oscillateurs non linéaires

découplés. Puis, nous montrons que deux oscillateurs avec une faible différence de conditions initiales peuvent présenter à un instant particulier une différence d'amplitude maximum.

Cette propriété est confirmée expérimentalement et permet d'envisager le réhaussement d'une échelle de gris faiblement contrastée.

2 Présentation du réseau

Nous considérons un réseau de N cellules élémentaires constituées chacune d'un circuit non linéaire et d'une diode 1N4148 comme représenté figure 1.

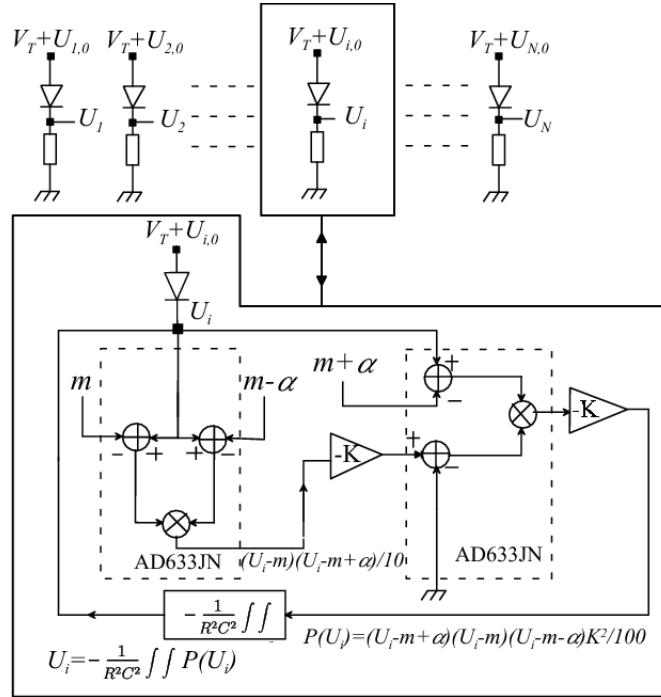


FIG. 1 – Schéma du réseau 1D et de sa cellule élémentaire

Chaque circuit comprend une source polynomiale $P(U) = K(U - m + \alpha)(U - m)(U - m - \alpha)/100$ obtenue à l'aide de multiplieurs analogiques AD633JN et d'amplificateurs classiques d'amplification $-K$ pour compenser le facteur d'échelle $1/10 V^{-1}$ des multiplieurs. Pour assurer une bonne homogénéité dans le réseau, la valeur des zéros $m + \alpha$, $m - \alpha$ et m est ajustée avec les trois mêmes sources extérieures. De plus, un montage intégrateur double réalisé avec des amplificateurs opérationnels TL081CN des résistances R et condensateurs de capacité C assure une contre-réaction entre l'entrée et la sortie de la source polynomiale (figure 1). D'après le schéma de la figure 1, la tension U_i à la cathode de la diode de la i^{eme} cellule obéit à:

$$\frac{d^2 U_i}{dt^2} = -\frac{K^2}{100R^2 C^2} (U_i - m + \alpha)(U_i - m - \alpha)(U_i - m). \quad (1)$$

De plus la condition initiale $U_{i,0}$ de la i^{eme} cellule est introduite à l'anode de la diode en ajoutant un offset égal au seuil de déclenchement de la diode $V_T = 0.7V$. La distribution de conditions initiales est considérée linéaire et croissante en fonction du numéro de cellule

i tel que $U_{i,0} = (i - 1) \times 0.5 / (N - 1)$. On remarquera que dans un contexte de traitement d'images, cette distribution de conditions initiales pourrait être vue comme une échelle discrète de niveaux de gris.

3 Etude des oscillations dans le réseau

En posant $x_i = U_i - m$, l'équation (1) se normalise sous la forme

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{K^2}{100R^2C^2} x_i (x_i - \alpha)(x_i + \alpha). \quad (2)$$

Les solutions de l'éq.(2) pour une vitesse nulle sont données par les fonctions elliptiques de Jacobi:

$$x_i(t) = x_{i,0} \operatorname{cn}(\omega_i t, k_i), \quad (3)$$

où $x_{i,0}$, ω_i et $0 \leq k_i \leq 1$, correspondent respectivement à l'amplitude des oscillations de la cellule numéro i , la pulsation et le module de la fonction elliptique cn .

En utilisant les propriétés des fonctions cn [13] et en dérivant deux fois l'équation (3), nous obtenons

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{2 k_i \omega_i^2}{x_{i,0}^2} x_i \left[x_i^2 - \frac{2 k_i - 1}{2 k_i} x_{i,0}^2 \right], \quad (4)$$

ce qui fournit, après identification avec l'éq.(2), la pulsation ω_i de la fonction cn

$$\omega_i(x_{i,0}) = \frac{K}{RC} \sqrt{x_{i,0}^2 - \alpha^2}, \quad (5)$$

et son module

$$k_i(x_{i,0}) = \frac{1}{2} \frac{x_{i,0}^2}{x_{i,0}^2 - \alpha^2}. \quad (6)$$

Si on écrit la condition initiale sous la forme $U_{i,0} = x_{i,0} + m$, les solutions de l'éq. (1) se déduisent rapidement des équations (3), (5), (6):

$$U_i(t) = m + (U_{i,0} - m) \operatorname{cn}(\omega_i t, k_i), \quad (7)$$

avec

$$\omega_i(U_{i,0}) = \frac{K}{RC} \sqrt{(U_{i,0} - m)^2 - \alpha^2}, \quad (8)$$

$$k_i(U_{i,0}) = \frac{1}{2} \frac{(U_{i,0} - m)^2}{(U_{i,0} - m)^2 - \alpha^2}. \quad (9)$$

Les deux paramètres ω_i et k_i de la i^{eme} cellule sont contrôlés par la condition initiale $U_{i,0}$ appliquée à cette cellule.

Afin d'illustrer le comportement de la chaîne 1D, nous avons reporté figure 2 les oscillations des cellules correspondant aux deux extrémités de la chaîne, soient les cellules $i = 1$ et $i = N$, de conditions initiales respectives $U_{1,0} = 0 V$ et $U_{N,0} = 0.5 V$.

Les oscillations ont lieu dans l'intervalle $[0 V; 5.16 V]$ pour la cellule 1 et dans $[0.5 V; 4.66 V]$ pour la cellule N , c'est à dire d'après eq. (7), dans l'intervalle $[U_{i,0}; 2m - U_{i,0}]$ pour $i \in \{1, N\}$. De plus, les deux oscillateurs sont très rapidement en opposition de phase quand $U_N = 4.66 V$ et $U_1 = 0 V$, ce qui implique une différence d'oscillation maximum $U_N - U_1 = 4.66 V$ à l'instant $t_{opt} = 0.66 ms$ (pointillés de la figure 2). La faible différence de condition initiale $\epsilon = U_{N,0} - U_{1,0} = 0.5 V$ est alors fortement accrue à l'instant $t_{opt} = 0.66 ms$.

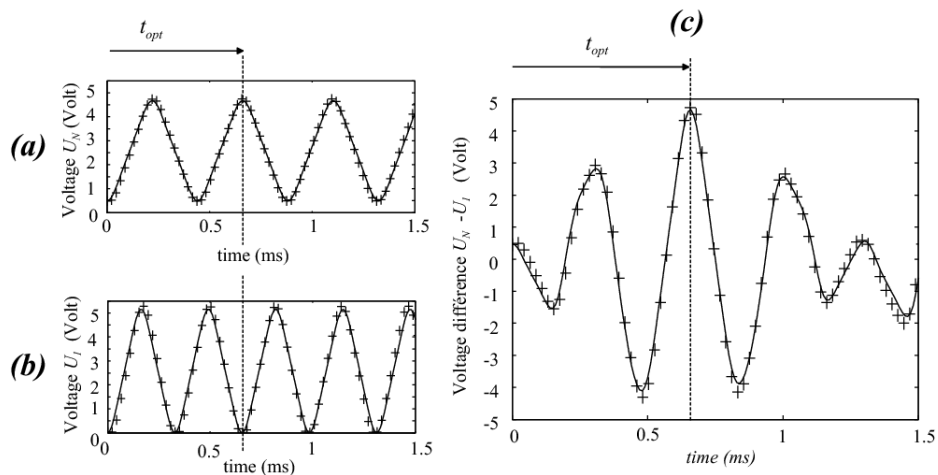


FIG. 2 – Evolution temporelle des cellules 1 (a) et N (b) et de leur différence d'oscillation (c). Paramètres: $\alpha = 1.02$ V, $m = 2.58$ V, $K = 10$, $U_{1,0} = 0$ V, $U_{N,0} = 0.5$ V, $R = 10$ K Ω , $C = 10$ nF. (+): Résultats expérimentaux; trait plein: résultats théoriques obtenus avec les équations (7-9). Le temps pour obtenir une parfaite opposition de phase est $t_{opt} = 0.66$ ms.

4 Réhaussement du contraste d'images

Afin de comprendre le comportement de l'ensemble de la chaîne, nous avons tracé la tension $U_i(t_{opt})$ atteinte par chaque cellule à l'instant t_{opt} en fonction de sa condition initiale $U_{i,0}$ (figure 2).

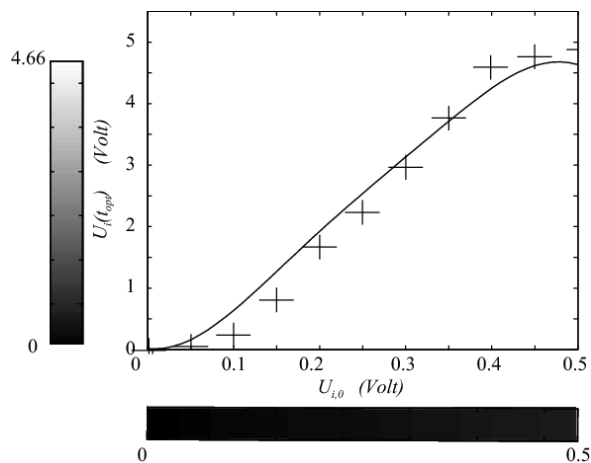


FIG. 3 – Etat de la chaîne à l'instant $t_{opt} = 0.66$ ms en fonction de son état initial. Paramètres: $m = 2.58$ V, $\alpha = 1.02$ V, $K = 10$, $R = 10$ K Ω , $C = 10$ nF. (+): Résultats expérimentaux; trait plein: résultats théoriques obtenus avec (7-9). Dans un contexte de traitement d'images, chaque axe correspond à une échelle de gris.

En raison de la non linéarité $P(U)$ du système, la courbe obtenue n'est pas linéaire, ce qui implique que chaque condition initiale n'est pas multipliée par le même facteur d'échelle. Cette propriété peut être étendue dans un contexte de traitement d'images en considérant un réseau à deux dimensions. En effet la condition initiale $U_{i,0}$ représenterait le niveau

de gris d'un pixel d'une image faiblement contrastée, tandis que $U_i(t_{opt})$ correspondrait au niveau de gris du même pixel après un temps de traitement t_{opt} . Par conséquent, en traitement d'image l'axe horizontal de la figure 2 représenterait l'échelle de gris de l'image faiblement contrastée tandis que l'axe vertical correspondrait à l'échelle de gris de l'image traitée (la dynamique des deux échelles étant définie par $0 V$ pour le noir et $4.66 V$ pour le blanc).

Un tel système à deux dimensions est décrit par $N \times M$ équations différentielles du type:

$$\frac{d^2 V_{i,j}}{dt^2} = -\frac{K^2}{100R^2C^2}(V_{i,j} - m + \alpha)(V_{i,j} - m - \alpha)(V_{i,j} - m), \quad (10)$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

où $N \times M$ est la taille de l'image, i, j et $V_{i,j}$ sont respectivement les coordonnées d'un pixel et son niveau de gris. Le comportement du réseau électronique 2D peut être prédit numériquement en chargeant l'image de la figure 3.a comme condition initiale et en simulant l'eq. (10) avec un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4. De plus, comme le montre l'histogramme de l'image de la figure 3.a, la plage de conditions initiales demeure $[0, 0.5]$. Après un temps de simulation $t_{opt} = 0.66 \times 10^{-3}$, la plage de niveaux de gris de l'image résultante est fortement augmentée et devient $[0, 4.66]$ comme pour le réseau 1D (cf histogramme de la figure 3.b). Par conséquent pour le temps de traitement $t_{opt} = 0.66 \times 10^{-3}$, un réhaussement de contraste permet de révéler le Colisée (figure 3.b) à peine perceptible figure 3.a. Comme pour le réseau 1D, il est important de noter que le traitement réalisé par le système décrit par l'eq. (10), ne correspond pas à une simple multiplication par un facteur d'échelle de tous les niveaux de gris de l'image.

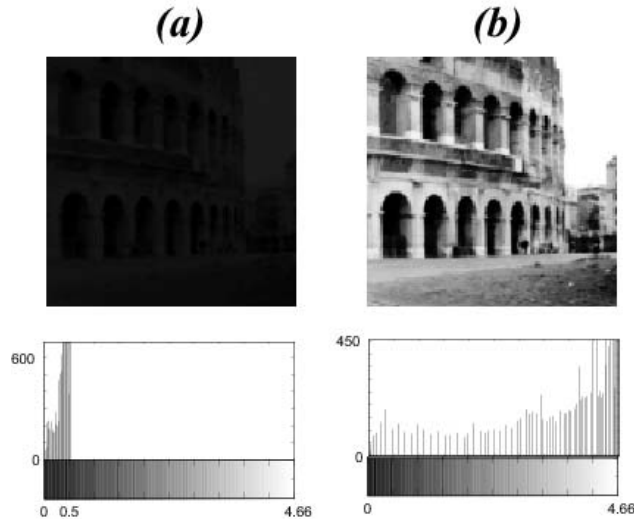


FIG. 4– *a*: Image faiblement contrastée du Colisée et son histogramme. *b*: Image réhaussée et son histogramme après une simulation numérique directe des Eqs. (10). Paramètres: $\alpha = 1.02V$, $m = 2.58 V$, $K = 10$, $N = M = 128$, temps de simulation $t_{opt} = 0.66 \times 10^{-3} s$, $R = 10 K\Omega$, $C = 10 nF$.

5 Conclusion:

Nous avons implémenté électroniquement un *CNN* à des fins de traitement du signal. Contrairement aux *CNNs* existant principalement basés sur les propriétés des systèmes de Réaction-Diffusion, ce nouveau *CNN* est inspiré des propriétés des systèmes physiques inertiels. D'autres tâches de traitement d'images, non présentées ici, peuvent être réalisées pour différents temps de traitement, telles que l'inversion d'image, l'extraction de niveaux de gris ... [14]. De plus, comme tous les *CNNs* électroniques, le temps de traitement peut être réduit de façon significative en changeant la valeur de la résistance R , de la capacité C , mais aussi en ajustant la valeur de l'amplification K des circuits d'amplification.

Pour finir, on peut penser que coupler les cellules entre elles peut fournir de nouvelles propriétés potentiellement exploitables pour réaliser d'autres tâches de traitement d'images. Par conséquent, le *CNN* proposé présente un certain intérêt pour développer de nouvelles applications des sciences non linéaires dans le domaine du traitement du signal et des images.

Références

- [1] Chua L.O., *A Paradigm for Complexity*, (World Scientifique) (1998).
- [2] Marquié P., Binczak S., Comte J.C. and Bilbault J.M., *Diffusion effects in a nonlinear electrical lattice*, *Phys. Rev. E*, (1998), **57**, 6075-6078.
- [3] Godivier X., Rojas-Varela J., Chapeau-Blondeau F., *Noise assisted signal transmission via stochastic resonance in a diode nonlinearity*, *Electron. Lett.*, (1997), **33**, 1666-1668.
- [4] J.C. Comte, S. Morfu, *Stochastic resonance: another way to retrieve subthreshold digital data*, *Phys. Lett. A*, **309** (2003) 39-43.
- [5] Morfu S. *Propagation failure reduction in a nagumo chain*, *Phys. Lett. A*, (2003), **317**,73-79.
- [6] Julián P., Dogaru R., Chua L., *A piecewise-Linear Simplicial Coupling Cell for CNN Gray-Level Image Processing*, *IEEE Transaction on circuits and systems-I: Fundamental theory and applications*, (2002), **49**, 904-913.
- [7] Lumsdaine A. , Jr Wyatt J.L., Elfadel I.M. *Nonlinear analog networks for image smoothing and segmentation J. VLSI Sign. Process.*, (1991), **3**, 53-68.
- [8] S. Morfu, J.C. Comte, *A nonlinear oscillators network devoted to image processing*, *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **14** 1385-1394, (2004).
- [9] Perona P. and Malik J., *Scale-space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion*, *IEEE Trans. on Patt. Anal. and Mach. Intell.*, (1990), **12**, 629-639.
- [10] Comte J.C., Marquié P. and J.M. Bilbault, *Contour detection based on nonlinear discrete diffusion in a cellular nonlinear network*, *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, (2001), **11**, 179-183.
- [11] Adamatzky A., de Lacy Costello B., Ratcliffe N. M., *Experimental reaction-diffusion pre-processor for shape recognition*, *Phys. Lett. A*, (2002), **297**, 344-352.
- [12] Rambidi N.G. and Yakovenchuk D., *Chemical reaction-diffusion implementation of finding the shortest paths in a labyrinth*, *Phys. Rev. E*, (2001), **63**, 026607.
- [13] Abramowitz M. and Stegun I.A, *Handbook of Mathematical functions*, Dover New York, (1965).
- [14] S. Morfu, *Phys. Lett. A*, (submitted)

La turbulence en rotation : spectres et transferts d'énergie.

Cyprien Morize, Frédéric Moisy & Marc Rabaud

Laboratoire FAST (Fluides, Automatique et Systèmes Thermiques)

Bât. 502 - Campus Universitaire - 91405 Orsay Cedex, France.

morize@fast.u-psud.fr

Résumé

La transition entre la turbulence tridimensionnelle et la turbulence quasi-bidimensionnelle sous l'effet d'une rotation d'ensemble est étudiée expérimentalement. Un écoulement turbulent est généré par la translation d'une grille dans une cuve d'eau en rotation, et un système de vélocimétrie par images de particules est utilisé pour mesurer les champs de vitesse instantanés dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Les spectres d'énergie des fluctuations spatiales de vitesse présentent une loi de puissance, $E(k) \sim k^{-n}$, dont l'exposant n augmente continûment de $n \simeq 5/3$ vers $n \simeq 2,3$ pendant le déclin, à mesure que diminue le nombre de Rossby. Le coefficient d'asymétrie des dérivées de vitesse diminue avec Ro_ω , reflétant l'inhibition des transferts d'énergie par la rotation d'ensemble, tandis qu'une cascade inverse d'énergie se développe aux grandes échelles.

Abstract

The transition between three-dimensional and quasi-two-dimensional turbulence in a rotating frame is experimentally investigated. Turbulence is generated by towing a grid in a rotating water tank, and the velocity field in a plane perpendicular to the rotation axis is measured by means of particle image velocimetry. During the energy decay, energy spectrum shows a power-law behavior, $E(k) \sim k^{-n}$, with an exponent n that gradually increases as the Rossby number decreases, from $n \simeq 5/3$ to $n \simeq 2.3$. The velocity derivative skewness decreases with Ro_ω , reflecting the inhibition of the energy transfers by the background rotation, with a net inverse cascade that develops at large scales.

1 Introduction

Les écoulements turbulents en présence de rotation, présents dans un large domaine d'application (dans l'industrie, en géophysique ou encore en astrophysique), représentent un problème complexe qui reste largement incompris, et fait l'objet actuellement d'un grand nombre d'études théoriques, numériques et expérimentales [1, 2, 3]. L'importance de la rotation peut-être mesurée par le nombre de Rossby, $Ro = U/2\Omega L$, où U et L sont respectivement une vitesse et une longueur typiques de l'écoulement. Ce nombre évalue le rapport entre le terme non-linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}$ et la force de Coriolis $2\Omega \times \mathbf{u}$. Dans les écoulements atmosphériques ou océaniques, le nombre de Rossby vaut typiquement 0.2, et la turbulence se différencie sensiblement de la turbulence tridimensionnelle (3D). A travers la force de Coriolis, la rotation affecte la dynamique et la structure de la turbulence en tendant à bidimensionnaliser l'écoulement. En effet, le théorème de Taylor-Proudman prévoit que la rotation inhibe toute variation de vitesse selon l'axe parallèle à l'axe de rotation. Cependant ce théorème est basé sur l'hypothèse que les effets non-linéaires sont négligeables devant la force de Coriolis et ne peut donc pas expliquer la transition 3D-2D, durant laquelle les effets non-linéaires doivent jouer un rôle majeur.

2 Dispositif expérimental

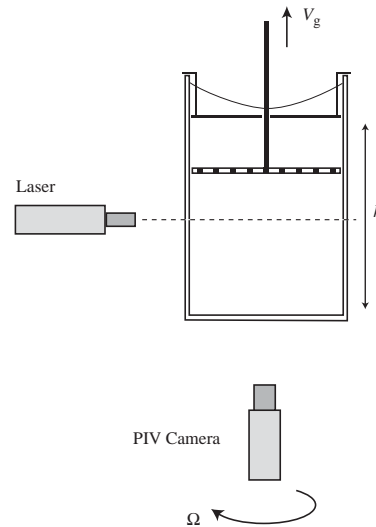


FIG. 1 – Schéma du dispositif expérimental. La cuve, la grille et la caméra sont placées dans le référentiel tournant, tandis que le laser reste fixe dans le référentiel du laboratoire.

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 1. Il se compose d'une cuve de section carrée, de 35 cm de largeur et de 55 cm de hauteur, disposée sur une plaque tournant à vitesse angulaire Ω , qui peut être ajustée entre 0 et $4,8 \text{ rad.s}^{-1}$. Un plafond est placé sous la surface libre de façon à éviter que les ondes de surface n'affectent l'écoulement et pour éliminer les variations de hauteur du fluide, dues à la surface parabolioïde.

Un écoulement turbulent est généré par la translation verticale d'une grille sur toute la hauteur de la cuve. La turbulence générée dans le sillage de la grille est approximativement homogène et isotrope. La grille que nous utilisons a une solidité de 45% et est caractérisée par une maille carrée $M = 39 \text{ mm}$ avec des barreaux de 1 cm de largeur. Des vitesses de grille de $V_g = 0,8 \text{ m.s}^{-1}$ à $1,6 \text{ m.s}^{-1}$ ont été utilisées (voir Table 1). La vitesse de la grille est constante sur toute la hauteur de la cuve, excepté pour le cas $V_g = 1.6 \text{ m.s}^{-1}$, pour lequel les phases d'accélération et de décélération limitent le domaine de vitesse constante à approximativement $0.3h$. La dimension M de la maille de la grille détermine l'échelle d'injection de l'énergie. Les fluctuations de vitesse que nous obtenons sont de l'ordre de $u' \simeq 0.2V_g$ juste après le passage de la grille.

Les mesures sont effectuées au moyen d'un système de vélocimétrie par images de particules (PIV, logiciel LaVision), permettant d'accéder au champ de vitesse instantané dans le plan horizontal (x,y) normal à l'axe de rotation. L'acquisition des images est réalisée à l'aide d'une caméra CCD double exposition de résolution 1280×1024 pixels. La caméra est embarquée sur la plaque tournante, tandis que le laser reste fixe dans le référentiel du laboratoire.

La translation de la grille est assurée par un moteur et est synchronisée avec l'acquisition des images. Nous sommes donc en mesure de générer des écoulements de turbulence en déclin dans des conditions contrôlées et reproductibles. De ce fait, nous pouvons assurer la convergence et la stabilité de nos résultats en faisant des moyennes d'ensemble de plusieurs expériences statistiquement indépendantes.

Symbole	Vitesse rotation Ω (rad/s)	Vitesse grille V_g (m/s)	Re_g $= V_g M / \nu$	Ro_g $= V_g / 2\Omega M$
★	0.1	1.2	4.7×10^4	150
◇	0.5	0.8	3.1×10^4	20
○	1.5	0.8	3.1×10^4	7
●	1.5	1.6	6.2×10^4	14
□	4.5	0.8	3.1×10^4	2

TAB. 1 – *Récapitulatif des conditions expérimentales.*

Les conditions initiales d’une expérience sont définies par deux paramètres, la vitesse de la grille V_g et la vitesse de rotation Ω . Deux nombres sans dimension peuvent être définis pour caractériser l’écoulement, le nombre de Reynolds de grille, $Re_g = MV_g/\nu$, et le nombre de Rossby de grille, $Ro_g = V_g/2\Omega M$. En table 1, Re_g varie dans la gamme $3 \times 10^4 - 6 \times 10^4$ et garantit une turbulence développée dans le sillage de la grille. Le nombre de Rossby, Ro_g , est relativement grand, même pour des vitesses de rotation élevées, entre 2 et 150. Ainsi la production d’énergie turbulente dans le sillage proche de la grille n’est pas affectée par la rotation. Par conséquent, le début du déclin peut être considéré comme isotrope 3D, mais la rotation d’ensemble va affecter progressivement l’écoulement au cours du déclin de l’énergie. Cette expérience nous permet ainsi d’étudier la transition entre une turbulence isotrope 3D et une turbulence quasi-bidimensionnelle dominée par la rotation.

3 Spectres d’énergie

Les spectres d’énergie horizontaux des fluctuations de vitesse, $E(k)$, sont calculés à partir des champs de vitesse dans le plan (x,y) normal à l’axe de rotation. Le spectre d’énergie d’un champ de vitesse instantané est calculé comme la moyenne des composantes x et y des spectres 1D longitudinaux $E_x(k_x)$ et $E_y(k_y)$. Des moyennes d’ensemble de ces spectres individuels sont ensuite réalisées à partir de 50 champs de vitesse statistiquement indépendants obtenus pour un temps T fixé après le passage de la grille.

La figure 2(a) présente trois spectres d’énergie obtenus à 3 instants successifs au cours du déclin de l’énergie. Tout juste après la translation de la grille, pour $\tau = TV_g/M \simeq 20$, le spectre d’énergie présente une loi de puissance sur plus d’une décade, proche de $k^{-5/3}$, comme attendu en turbulence isotrope 3D sans influence de la rotation. Toutefois, il faut noter que la limite de résolution de la PIV ne nous permet pas de résoudre le régime dissipatif à grand nombre d’onde. Nous nous focaliserons donc à des petits nombres d’onde, $k < 1 \text{ mm}^{-1}$. Plus tard, pour $\tau \simeq 100$ et 250, un régime inertiel est toujours présent, mais la loi de puissance devient de plus en plus raide, avec un exposant qui augmente progressivement avec le temps, reflétant l’importance grandissante des grandes échelles par rapport aux petites échelles. Notons que la loi de puissance s’étend pour des nombres d’onde inférieur au nombre d’onde d’injection, $k_i = 2\pi/M \simeq 0.16 \text{ mm}^{-1}$ (où M est la maille de la grille). Cet effet, qui est lié à l’augmentation de l’échelle intégrale, est général à la turbulence de grille en déclin, même en l’absence de rotation, et n’implique pas nécessairement une cascade inverse d’énergie.

La figure 2(b) représente l’exposant n des lois de puissance des spectres d’énergie en fonction du nombre de Rossby microscopique $Ro_\omega = \omega'/2\Omega$, où ω' est la fluctuation rms de vorticité, pour les 5 expériences répertoriées en table 1. L’exposant est déterminé en

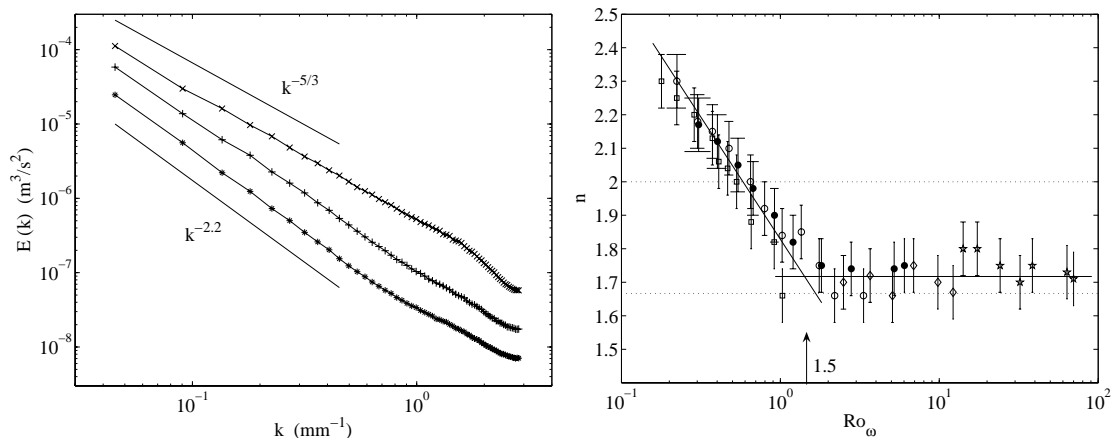


FIG. 2 – (a) Spectres d'énergie pour différents nombres de Rossby à 3 instants au cours du déclin, pour $\Omega = 4.5 \text{ rad s}^{-1}$ et $V_g = 0.8 \text{ m s}^{-1}$ (symbole \square dans Tab 1). \times , $T = 1 \text{ s}$, $Re_M = 1750$, $Ro_\omega = 1.1$; $+$, $T = 5 \text{ s}$, $Re_M = 1250$, $Ro_\omega = 0.53$; $*$, $T = 12 \text{ s}$, $Re_M = 900$, $Ro_\omega = 0.29$. (b) Exposant n des lois de puissance en fonction de Ro_ω , pour les 5 expériences répertoriées en table 1. La ligne du bas en pointillé correspond à l'exposant $5/3$ caractéristique des écoulements turbulents isotrope 3D, et celle du haut montre un exposant 2.

traçant le spectre compensé $k^n E(k)$ et en ajustant la valeur de n afin d'obtenir un plateau bien défini sur la première décade des nombres d'onde. Les barres d'erreur sur n , de l'ordre de 0.1, sont estimées à l'aide de cette procédure comme la gamme acceptable pour laquelle un plateau peut être défini.

Bien que la dispersion des points soit assez importante, une tendance nette apparaît pour n . Pour des grands Ro_ω , n prend des valeurs $\simeq 1.7 \pm 0.1$, proche du $5/3$ attendu pour les spectres en l'absence de rotation (K41). Cet écart systématique des valeurs de n par rapport à $5/3$ est un effet classique de l'intermittence [4]. Au fur et à mesure de la diminution de Ro_ω au cours du déclin de l'énergie, n augmente progressivement de 1.7 jusqu'à 2.3 ± 0.1 , avec une transition pour $Ro_\omega \simeq 1.5 \pm 0.5$. Au niveau de cette transition, le nombre de Reynolds turbulent, $Re_M = u'M/\nu$, couvre une gamme de valeurs allant de 200 à 2000 pour les différentes expériences. Il semble donc que l'augmentation de la pente des spectres ne soit pas liée à un effet de faible Reynolds, mais plus probablement à un effet de la rotation d'ensemble.

4 Les transferts d'énergie

Les spectres d'énergie étudiés précédemment nous renseignent sur la distribution de l'énergie selon les échelles, mais n'apportent aucune information en ce qui concerne les flux d'énergie. En admettant l'hypothèse d'isotropie de l'écoulement dans le plan (x, y) , les transferts d'énergie à une échelle r sont caractérisés par les statistiques des incréments longitudinaux des fluctuations de vitesse $\delta_r u = [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{r}/r$. Le moment d'ordre 2 de cette quantité, $\langle \delta_r u^2 \rangle$, est une mesure de l'énergie cinétique à l'échelle r , tandis que le moment d'ordre 3, $\langle \delta_r u^3 \rangle$, caractérise le flux moyen d'énergie à une certaine échelle r . En particulier, le signe de $\langle \delta_r u^3 \rangle$ nous renseigne sur la direction des transferts d'énergie

à travers les échelles : positif lorsque l'énergie est transférée vers les grandes échelles, et négatif lorsque l'énergie est transférée vers les petites échelles [5].

Pour une turbulence isotrope 3D à grand nombre de Reynolds (en l'absence de rotation), l'énergie se transfère à un taux constant, ε , à travers toutes les échelles du régime inertiel, et $\langle \delta_r u^3 \rangle$ satisfait la loi des 4/5 de Kolmogorov :

$$\langle \delta_r u^3 \rangle = -\frac{4}{5}\varepsilon r,$$

où ε est la dissipation de l'énergie. Puisque cette dissipation d'énergie ε diminue au cours du temps avec le déclin de l'énergie, à un taux qui peut d'ailleurs dépendre du nombre de Rossby dans le cas de la turbulence en rotation, il convient d'introduire le coefficient d'asymétrie (ou skewness) :

$$S(r) = \frac{\langle \delta_r u^3 \rangle}{\langle \delta_r u^2 \rangle^{3/2}}.$$

Ce coefficient d'asymétrie est représenté sur la figure 2(a). A temps court, $S(r)$ est approximativement constant pour des échelles $r < 6$ cm et prend des valeurs proches de -0.45 ± 0.03 . De telles valeurs sont caractéristiques des transferts d'énergie vers les petites échelles en turbulence 3D isotrope en l'absence de rotation [4]. Cependant au cours du temps, l'amplitude de $|S(r)|$ diminue, caractérisant l'inhibition des transferts d'énergie par la rotation. Pour la deuxième et troisième courbe, le nombre de Reynolds Re_M vaut respectivement 750 et 320, valeurs pour lesquelles $S(r) \simeq -0.4$ en l'absence de rotation, ce qui semble confirmer que la diminution de $|S(r)|$ n'est pas un effet de faible Reynolds mais un véritable effet de la rotation. On remarque également qu'à grande échelle le coefficient d'asymétrie prend des valeurs positives, $S(r) \simeq 0.06 - 0.10$, ce qui semble indiquer la présence d'une cascade inverse d'énergie.

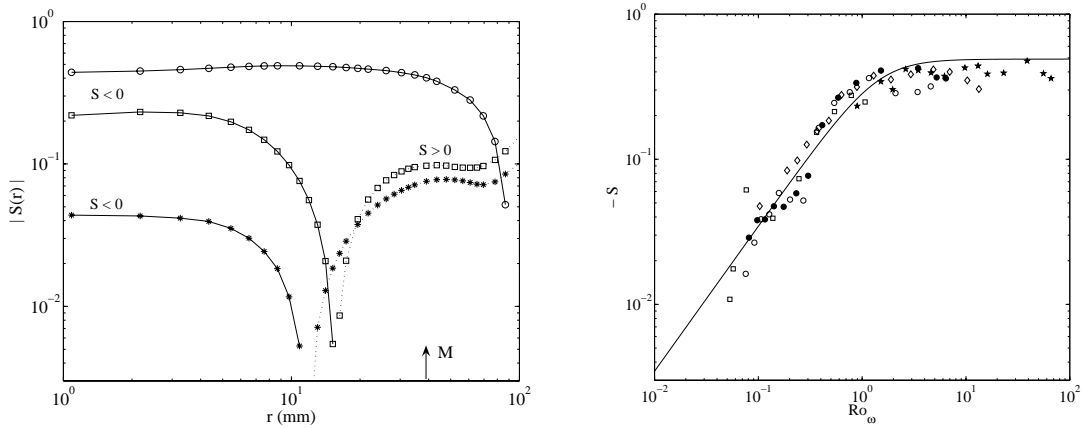


FIG. 3 – (a) Coefficient d'asymétrie des incréments de vitesse longitudinaux (valeurs négatives représentées en trait plein et positives en pointillé) en fonction de l'échelle r , correspondant à l'expérience \bullet dans la table 1. \circ , $\tau = TV_g/M \simeq 80$; \square , $\tau = 820$; \star , $\tau = 2200$. (b) Coefficient d'asymétrie des dérivées de vitesse longitudinales en fonction de Ro_ω pour les 5 expériences de la table 1. Le trait plein est un ajustement proposé en référence [2].

Afin de caractériser l'influence des nombres de Reynolds et de Rossby sur les transferts d'énergie, nous avons tracé sur la figure 2(b) le coefficient d'asymétrie des dérivées de vitesses longitudinales,

$$S = \frac{\langle (\partial u / \partial r)^3 \rangle}{\langle (\partial u / \partial r)^2 \rangle^{3/2}},$$

en fonction du nombre de Rossby microscopique Ro_ω . Pour des grandes valeurs de Ro_ω , S est approximativement constant, $S \simeq -0.40 \pm 0.05$, alors que pour des valeurs plus petites de Ro_ω , S décroît comme $|S| \propto Ro_\omega$. Il est important de remarquer que la frontière entre ces deux régimes est en très bon accord avec la frontière trouvée pour l'exposant n des lois de puissance des spectres, $Ro_\omega \simeq 1.5 \pm 0.5$ (voir figure 2(b)).

5 Conclusion

Une série d'expériences de turbulence de grille ont été réalisées dans un repère tournant. L'objectif de ces travaux consiste à étudier l'influence d'une rotation d'ensemble sur une turbulence en déclin, initialement homogène et isotrope. Deux quantités ont été étudiées systématiquement en fonction du nombre de Rossby, Ro_ω , au cours du déclin : l'exposant des spectres d'énergie et le coefficient d'asymétrie des dérivées de vitesse, caractérisant les transferts d'énergie à travers les échelles. Sur la base des résultats obtenus, il est possible de définir deux régimes, au cours du déclin, pour lesquels la dynamique de la turbulence est différente :

- (i) Juste après le passage de la grille, l'écoulement turbulent est approximativement 3D homogène et isotrope. L'écoulement n'est pas encore dominé par la rotation, le nombre de Rossby est dans la gamme $Ro_\omega \simeq 1 - 100$, les spectres d'énergie et le coefficient d'asymétrie des dérivées de vitesse S conservent leurs propriétés de la turbulence 3D en l'absence de rotation, $E(k) \simeq k^{-5/3}$ et $S \simeq -0.4$.
- (ii) Plus tard au cours du déclin, à mesure que le nombre de Rossby diminue, l'influence relative de la rotation augmente et en dessous d'une limite $Ro_\omega \simeq 1.5$, les spectres d'énergie deviennent de plus en plus raides et le coefficient d'asymétrie commence à diminuer comme $|S| \propto Ro_\omega$, reflétant la diminution des transferts d'énergie vers les petites échelles. Aux grandes échelles, une cascade inverse d'énergie, caractérisée par un coefficient d'asymétrie positif, prend place.

Références

- [1] C. N. Baroud, B. B. Plapp, Z.-S. She et H. L. Swinney, *Anomalous Self-Similarity in a Turbulent Rapidly Rotating Fluid*, Phys. Rev. Lett., **88**, 114501, (2002).
- [2] C. Cambon, R. Rubinstein et F.S. Godeferd, *Advances in wave turbulence: rapidly rotating flows*, New J. Phys., **6**, **73**, (2004).
- [3] C. Morize, F. Moisy et M. Rabaud. soumis à Phys. Fluids, (2004).
- [4] U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press, (1995).
- [5] P. A. Davidson, *Turbulence*, Oxford University Press, (2004).

Modélisation stochastique des gradients de vitesse en turbulence

Aurore Naso et Alain Pumir
Institut Non Linéaire de Nice
 1361, route des Lucioles, 06560 Valbonne
 Aurore.Naso@inln.cnrs.fr

Résumé

Nous nous intéressons à un modèle de turbulence qui permet de décrire les propriétés statistiques du tenseur de gradient de vitesses moyenné sur une échelle r en fonction de r . L'objet fondamental de cette étude est un ensemble de quatre particules lagrangiennes (un tétraèdre) dont l'échelle caractéristique est dans la zone inertielle. Nous discutons les propriétés des solutions en fonction des paramètres physiques du modèle.

Abstract

This communication deals with a model of turbulence which allows to describe the statistical properties of the velocity gradient tensor averaged on a scale r as a function of r . The fundamental object of this study is a set of four Lagrangian particles (a tetrahedron) which characteristic scale lies in the inertial range. Properties of the solutions as a function of the model physical parameters are discussed.

1 Introduction

Depuis plusieurs décennies l'étude de la turbulence est basée sur la mesure d'un signal (tel qu'une composante de la vitesse) en un ou deux points de l'écoulement. En particulier les fonctions de structure, définies comme étant les moments d'ordre n des différences de vitesse, ainsi que leur dépendance en fonction de l'échelle de longueur, ont été beaucoup étudiées [1]. Bien que ces grandeurs soient très commodes pour l'étude des lois d'échelles, elles ne fournissent aucune information sur la géométrie locale de l'écoulement, et donc sur les processus dynamiques, parce qu'elles ne donnent accès qu'à une seule des huit composantes indépendantes du tenseur de gradient de vitesse.

C'est pourquoi Chertkov, Pumir et Shraiman ont proposé [2, 3] de décrire la dynamique du tenseur de gradient de vitesse entier, et en particulier sa moyenne sur un petit volume dont l'échelle caractéristique est dans la gamme inertielle (tenseur de gradient de vitesse *coarse-grained*). L'introduction de cette quantité moyennée permet de décrire l'écoulement en terme de champ moyen. La construction du modèle passe d'abord par la paramétrisation de ces petits volumes. Or, la paramétrisation minimale d'un volume tridimensionnel est un ensemble de quatre points. L'objet fondamental de l'étude est donc un tétraèdre dont les sommets sont des particules lagrangiennes. En pratique, le modèle phénoménologique introduit dans [2] décrit la dynamique de M , le tenseur de gradient de vitesse coarse-grained, en tenant compte de la déformation géométrique du tétraèdre. Dans ce but le tenseur g est introduit: $g = \rho\rho^+$, où ρ est le tenseur des coordonnées réduites des sommets du tétraèdre. Le modèle se présente finalement sous la forme d'un système d'équations différentielles stochastiques dont les variables sont M et g . Dans [2, 3], une solution approchée est calculée dans la limite classique. Dans un formalisme d'intégrale

de chemin, la méthode consistait à construire la fonction de Green en suivant simplement la trajectoire déterministe, ce qui revient à négliger les effets du bruit. Bien que cette approximation soit très grossière, elle conduit à des résultats numériques en accord acceptable avec ceux obtenus par simulation numérique directe (DNS), mais aussi avec des mesures expérimentales ultérieures [4]. Ces résultats se présentent sous la forme de distributions de probabilité jointes de deux grandeurs Q et R ainsi que des probabilités de quantités telles que l'enstrophie ou l'étirement conditionnées sur ces quantités: $Q = -Tr(M^2)/2$ et $R = -Tr(M^3)/3$ caractérisent entièrement la nature des valeurs propres de M , et par là même la topologie locale de l'écoulement [5].

Dans cette communication, nous proposons d'améliorer la solution en incorporant en partie l'effet du bruit dans une approche semi-classique.

2 Construction et définition du modèle

Afin de construire l'approximation moyennée du champ de vitesse sur une région de petite taille en mouvement avec le fluide, il est nécessaire de paramétrer ce petit volume. La paramétrisation minimale d'un volume tridimensionnel étant un ensemble de quatre points, il suffit de modéliser les trajectoires de quatre particules lagrangiennes, qui définissent les sommets d'un tétraèdre. Le mouvement du centre de masse de ce tétraèdre résulte de l'advection à grande échelle d'une parcelle de fluide, et n'est donc d'aucun intérêt pour l'étude des propriétés à petite échelle de la turbulence. Par la suite on considère le tenseur des coordonnées réduites ρ , et plus particulièrement le tenseur moment d'inertie g défini par:

$$g = \rho^+ \rho \quad (1)$$

La dynamique de ce tenseur peut être dérivée de celle de ρ . Le tenseur des vitesses réduites v peut s'écrire comme la somme d'une composante cohérente, due aux échelles de l'ordre de celles du tétraèdre, et d'une autre fluctuante, due à la contribution des plus petites échelles. En approximant la première par le meilleur ajustement linéaire (qui définit le tenseur de gradient de vitesse coarse-grained M), on obtient l'équation suivante:

$$\frac{dg}{dt} - gM - M^+g = \zeta \quad (2)$$

où ζ est un terme fluctuant, par hypothèse un bruit gaussien blanc en temps.

La dynamique de M est supposée être de la même forme que celle de $m_{ij} \equiv \partial_i v_j$, elle-même dérivée de l'équation de Navier-Stokes, $\frac{dm}{dt} + m^2 = H$, où H est un terme incluant les effets de pression et de viscosité. Cette équation a été étudiée dans le cas où $H_{ij} = \frac{1}{3}Tr(m^2)\delta_{ij}$. Ce modèle, connu sous le nom de *dynamique d'Euler Restreinte*, conduit à une singularité en temps fini [6, 5].

Dans le modèle présent, l'objet fondamental est le tenseur de gradient de vitesse moyenné, et le tenseur g est introduit afin de tenir compte de la déformation géométrique du tétraèdre. La dynamique de M s'écrit ainsi sous la forme:

$$\frac{dM}{dt} + (1 - \alpha) (M^2 - \Pi Tr M^2) = \eta \quad (3)$$

où $\Pi \equiv g^{-1}/Tr g^{-1}$.

Dans l'équation (3), les effets de pression non locale sont modélisés comme la somme d'une composante cohérente, qui renormalise la dynamique par un facteur α ($0 < \alpha < 1$),

et d'un terme fluctuant η . Π , terme de couplage des dynamiques de M et g , permet de conserver l'incompressibilité à tout temps. Sa forme a été choisie de façon à ce que le terme de pression ne travaille pas, comme ce doit être le cas pour un écoulement homogène et isotrope. Le terme de bruit ζ est choisi gaussien et blanc en temps.

Dans cette communication les premiers résultats de ce modèle sont exposés dans une version simplifiée. En effet, on peut raisonnablement supposer que l'effet majeur du bruit dans l'équation (2) est de restaurer l'isotropie du tétraèdre, l'accroissement de g étant assuré par le terme multiplicatif gM . Dans ces conditions, l'action du bruit ζ peut être exprimée en terme de champ moyen, ce qui permet d'importantes simplifications techniques (cf section 3.2). Dans cette approximation la dynamique de g est gouvernée par l'équation:

$$\frac{dg}{dt} - gM - M^+g - \beta \left(g - \frac{1}{3} \text{Tr}(g) \text{Id} \right) = 0 \quad (4)$$

Pour compléter la définition du modèle il est nécessaire de définir la variance de η . Afin qu'elle obéisse au scaling K41, on l'écrira sous la forme:

$$\langle \eta_{ab}(\rho; t) \cdot \eta_{cd}(0; 0) \rangle = \gamma \left(\delta_{ac} \delta_{bd} - \frac{1}{3} \delta_{ab} \delta_{cd} \right) \frac{\varepsilon}{\rho^2} \delta(t) \quad (5)$$

où ε est le taux de dissipation d'énergie massique introduit dans la théorie de Kolmogorov.

Le modèle est donc caractérisé par deux paramètres dimensionnels, L et ε , qui peuvent être fixés à 1, et par les trois paramètres adimensionnels, α , β et γ . L'objectif de ce travail est de comprendre le comportement qualitatif du modèle en fonction de α , β et γ .

3 Résolution du système - Intégrales de chemin et approximation semi-classique

3.1 Intégrales de chemin

Le système (3,4,5) définit un problème stochastique bien posé. Une équation de Fokker-Planck pour la fonction distribution de probabilité (PDF) eulérienne des vitesses peut donc en être dérivée:

$$\partial_t P(M, g, t) = LP(M, g, t) \quad (6)$$

La solution cherchée est stationnaire. Il faut également imposer la condition de normalisation pour la PDF. Enfin, le système doit être résolu en tenant compte de la condition au bord suivante: le champ de vitesse doit être gaussien à grande échelle (échelle intégrale L), cette dernière contrainte étant consistante avec de nombreuses observations expérimentales.

Les PDF solutions de (6) vérifiant ces contraintes peuvent s'exprimer en fonction de la fonction de Green du système. Cette formulation permet d'exprimer la PDF de M et g en fonction de la PDF correspondante de M' et g' , à l'échelle intégrale. La fonction de Green peut s'écrire à l'aide d'une représentation en intégrales de chemin, dans laquelle toutes les trajectoires connectant (M, g) à (M', g') doivent être considérées, d'où l'expression de la PDF:

$$P(M, g) = \int dM' \int dT \int_{M(-T)=M'}^{M(0)=M} [\mathcal{D}M''] \int_{g(-T)=g'}^{g(0)=g} [\mathcal{D}g''] \exp - [S(M''; g'') + Tr(M' M'^+)] \quad (7)$$

où S est l'action usuelle sur chaque trajectoire.

Phénoménologiquement, on part d'un point (M', g') , à l'échelle intégrale, et on intègre le système en temps jusqu'à une échelle donnée dans la gamme inertielle. En principe, il est nécessaire de tenir compte de toutes les trajectoires, ce qu'il est possible de faire numériquement avec un algorithme de Monte-Carlo. Pourtant, à cause du grand nombre de degrés de liberté (grande dimension de l'espace des phases), ceci apparaît comme une tâche trop ardue. C'est pourquoi une approximation simplificatrice est utilisée pour résoudre l'équation (7).

Si on ignore un moment le terme de bruit, la dynamique devient déterministe. Il suffit alors d'intégrer les équations déterministes en arrière dans le temps. Les résultats du modèle dans cette approximation, dite classique, sont présentés dans [2, 3]. Les statistiques ainsi calculées présentent un accord acceptable avec celles calculées par DNS, mais aussi avec des mesures expérimentales plus récentes [4].

3.2 Approximation semi-classique

Pour améliorer les solutions, l'équation (7) peut être résolue dans l'approximation semi-classique, qui revient à considérer que le bruit est faible mais non nul. Dans ce cas on peut ne tenir compte que de la trajectoire sur laquelle l'action est minimale. A conditions initiales et finales fixées, cette trajectoire peut être calculée en intégrant l'équation d'Euler-Lagrange. Cependant, en fixant Q , R et une échelle de longueur dans la gamme inertielle il reste 11 paramètres libres pour définir les conditions initiales M , \dot{M} , g et \dot{g} . Rigoureusement, il serait nécessaire de tenir compte de toutes leurs valeurs possibles, ce qui serait extrêmement coûteux en temps de calcul. On utilise plutôt l'approximation du col: par la suite seules les conditions initiales qui contribuent le plus à la PDF, c'est-à-dire celles pour lesquelles $\exp - [S(M; g; \dot{M}; \dot{g}) + Tr(MM^+)]$ est maximal (cf équation (7)), sont prises en compte. Cette optimisation sur les conditions initiales est effectuée numériquement en utilisant l'algorithme *amebsa* [7], un mélange de méthode du simplexe et de recuit simulé.

3.3 Résultats numériques

Les résultats présentés dans cette section sont calculés en résolvant le modèle dans l'approximation semi-classique selon la méthode détaillée en 3.2. Le modèle dépend de trois paramètres indépendants: α , qui "diminue" la non-linéarité, et β et γ , les amplitudes des bruits agissant respectivement sur g et M . Seule la dépendance en α est ici présentée, β et γ restant par ailleurs constants.

Le test le plus naturel pour un modèle de turbulence est celui des lois d'échelle. Ainsi, selon le scaling de Kolmogorov $\langle \Delta v \rangle \propto r^{1/3}$, $M(r)$ évolue en $r^{-2/3}$, et donc les seconds moments de l'étirement S (partie symétrique de M) et de la vorticité ω (partie antisymétrique de M) doivent avoir une dépendance en $r^{-4/3}$, alors que les troisièmes moments comme le transfert d'énergie $-Tr(M^2 M^+)$ doivent se comporter en r^{-2} . La Figure 1 représente les lois d'échelles calculées pour $\langle S^2 \rangle$ et $\langle \omega^2 \rangle$ pour différentes valeurs de α . Pour les valeurs présentées le scaling en $r^{-4/3}$ est bien respecté. C'est toujours le

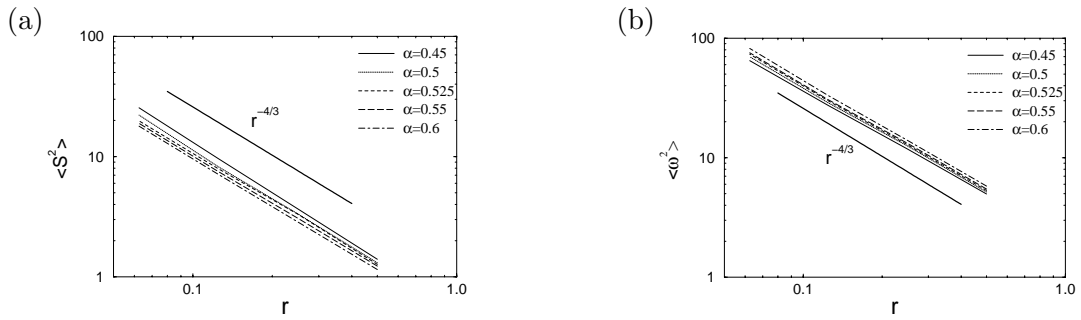


FIG. 1 – Lois d'échelles des seconds moments de (a) l'étirement et (b) la vorticité, pour différentes valeurs de α ($\beta=0.4$, $\gamma=0.25$). La droite $r^{-4/3}$ sert de guide pour l'œil.

cas pour $\langle \omega^2 \rangle$ mais, pour des valeurs plus faibles de α , $\langle S^2 \rangle$ diminue en loi de puissance dont l'exposant diffère largement de $-4/3$. Le modèle n'est donc acceptable que pour des valeurs de α pas trop faibles.

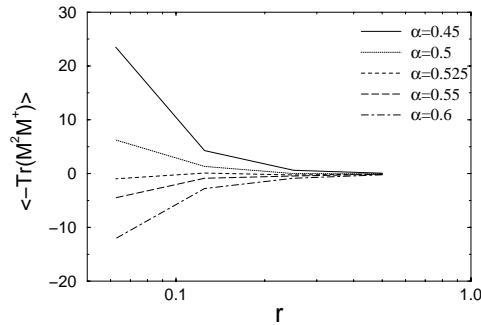


FIG. 2 – Transfert d'énergie $\langle -Tr(M^2 M^+) \rangle$ en fonction de l'échelle pour différentes valeurs de α ($\beta=0.4$, $\gamma=0.25$). Pour les grandes valeurs de α ce transfert devient négatif.

La Figure 2 montre la dépendance du transfert d'énergie en fonction de l'échelle. Cette fois c'est le signe de la quantité qui dépend de α : pour les plus faibles valeurs de α , $\langle -Tr(M^2 M^+) \rangle$ est bien positif, mais il devient négatif lorsque α augmente.

L'intérêt majeur du modèle étant d'apporter une description géométrique de l'écoulement, il est intéressant de présenter des résultats plus fins que les lois d'échelle, et en particulier les distributions de probabilité jointes $P(R, Q)$ des invariants Q et R introduits en section 1. On a représenté sur les Figures 3 et 4 $P(R, Q)$ à deux échelles, respectivement pour $\alpha = 0.45$ et $\alpha = 0.6$. Dans le premier cas la queue de la distribution croît exagérément lorsque r diminue, ce qui n'est pas le cas pour $\alpha = 0.6$. Les distributions présentent alors un bon accord avec celles calculées par DNS [2].

4 Conclusion

Le modèle de fluctuations de vitesses turbulentes exposé se présente sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires stochastiques, qui a été résolu dans une approche semi-classique. Le modèle dépend de trois paramètres. Sa dépendance en l'un d'eux, la "diminution" de non-linéarité α , a été étudiée. Dans un intervalle de valeurs de α le modèle vérifie les lois d'échelles de Kolmogorov, mais reproduit surtout correctement

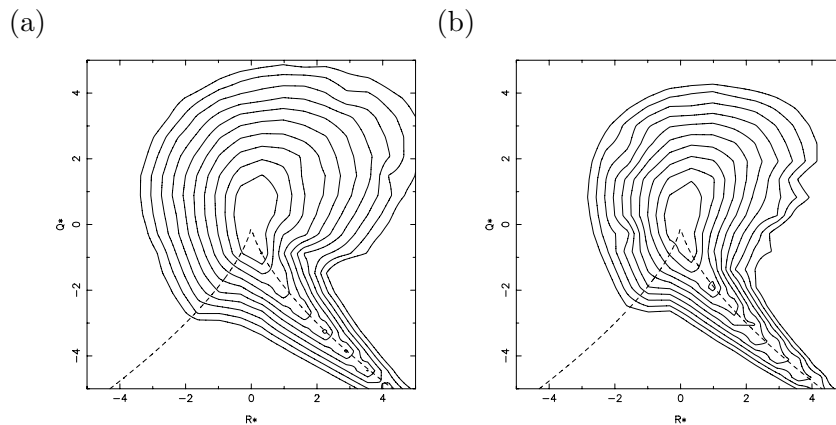


FIG. 3 – Distributions de probabilité jointes $P(R_*, Q_*)$: $\alpha=0.45$, $\beta=0.4$, $\gamma=0.25$. Les quantités Q_* et R_* sont définies ainsi: $Q_* = Q / \langle S^2 \rangle$ et $R_* = R / \langle S^2 \rangle^{3/2}$. (a) $r/L=1/4$, (b) $r/L=1/16$.

des caractéristiques plus fines (géométriques) de l'écoulement. Une étude systématique de la dépendance du modèle en fonction des deux autres paramètres est en cours.

Les auteurs remercient Michael Chertkov et Boris Shraiman.

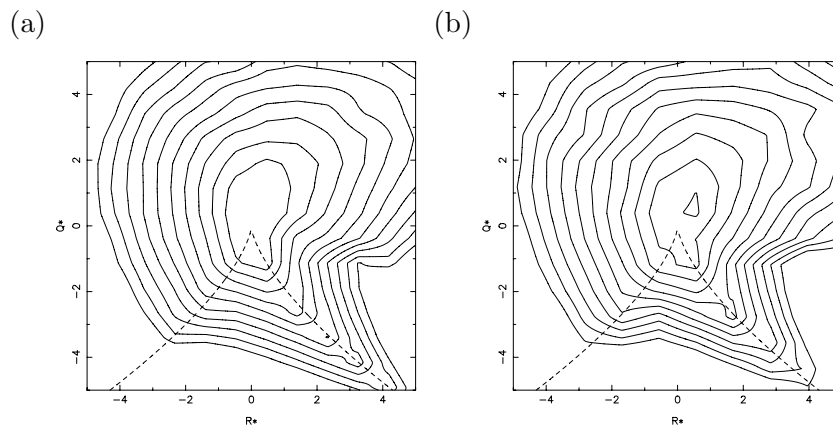


FIG. 4 – Distributions de probabilité jointes $P(R, Q)$: $\alpha=0.6$, $\beta=0.4$, $\gamma=0.25$. Les quantités Q_* et R_* sont définies au bas de la Figure 3. (a) $r/L=1/4$, (b) $r/L=1/16$.

Références

- [1] U. Frisch, *Turbulence: The legacy of AN Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge, (1995),
- [2] M. Chertkov, A. Pumir et B.I. Shraiman, *Phys. Fluids*, **11**, 2394-2410 (1999),
- [3] M. Chertkov, A. Pumir et B.I. Shraiman, in *Intermittency in turbulent flows*, Cambridge University Press, 243-261 (2001),
- [4] F. Van der Bos, B. Tao, C. Meneveau et J. Katz, *Phys. Fluids*, **14**, 2456-2474 (2002),
- [5] B.J. Cantwell, *Phys. Fluids A*, **4**, 782-793 (1992),
- [6] P. Vieillefosse, *Physica*, **125A**, 150-162 (1984),
- [7] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling et B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, (1992).

Dynamique et fragmentation de tiges fragiles : pourquoi les spaghetti cassent en trois morceaux ?

Basile Audoly et Sébastien Neukirch

*Laboratoire de Modélisation en Mécanique,
CNRS/Université Pierre et Marie Curie,
4 place Jussieu, Paris, France*

sebastien.neukirch@lmm.jussieu.aeffacer.fr

Résumé

Lorsqu'on brise en flexion des tiges cassantes, telles que les spaghetti crus, on obtient plus de deux morceaux, souvent trois, quatre ou plus. Dans le but d'expliquer ces brisures multiples, nous étudions la dynamique d'une tige fléchie juste en-deçà de sa courbure de rupture puis soudainement libérée à une extrémité. Nous trouvons que la détente brusque de la courbure induit un train d'onde de flexion dont la dynamique est décrite par une solution auto-semblable sans paramètre ajustable. Ces ondes de flexion *augmentent* localement la courbure et nous montrons que ce mécanisme contre-intuitif est à l'origine de la fragmentation des tiges cassantes en flexion. Nous présentons une expérience simple qui confirme cette assertion.

Abstract

When thin brittle rods such as dry spaghetti pasta are bent beyond their limit curvature, they often break into more than two pieces, typically three or four. With the aim to understand these multiple breakings, we study the dynamics of a rod bent just below its limit curvature et suddenly released at one end. We find that the sudden relaxation of the curvature at the newly freed end leads to a burst of flexural waves, whose dynamics are described by a self-similar solution with no adjustable parameters. These flexural waves locally increase the curvature in the rod et we argue that this counter-intuitive mechanism is responsible for the fragmentation of brittle rods under bending. A simple experiment supporting the claim is presented.

1 Introduction

La fragmentation concerne de nombreux domaines scientifiques et techniques. Plusieurs phénomènes physiques sont à l'œuvre, ce qui explique sans doute pourquoi la fragmentation a surtout été étudiée du point de vue statistique [1, 2, 3, 4, 5]. Des études récentes sont néanmoins fondées sur des considérations mécaniques ou physiques : contribution de l'énergie de surface [6], propriété de croissance et nucléation en théorie de la rupture [7], flambage dynamique [8, 9] et propagation des ondes élastiques [10].

On considère une tige élastique tenue en ses deux extrémités et qui est progressivement courbée uniformément et de manière quasi-statique. Elle casse au temps $t = 0$ lorsque sa courbure κ_0 atteint sa valeur limite κ^* : une fissure dynamique se propage alors transversalement et sépare la tige en deux morceaux. La courbure avant rupture étant uniforme, la position du premier point de rupture est sélectionnée par les défauts. Nous ne discuterons pas plus en détail cette rupture initiale afin de nous concentrer sur l'évolution ($t > 0$) dynamique de chacun des deux fragments ainsi créés : nous montrons qu'elle conduit à des nouvelles ruptures à des temps ultérieurs.

Comme on ne s'intéresse pas à la première rupture, on introduit un modèle simplifié de *catapulte*, que l'on étudie dans toute la suite : la libération d'une tige fléchie sert à simuler la première rupture. On se débarrasse ainsi de l'incertitude sur la position de cette première rupture, la longueur L de la catapulte étant connue par avance. Les deux problèmes (l'évolution de chacun des deux fragments juste après la première rupture d'une tige en flexion d'une part et la libération soudaine d'une tige à une extrémité d'autre part) obéissent aux mêmes équations. Dans l'expérience de catapulte, la tige est initialement courbée et au repos. On obtient cet état initial en encastrant une extrémité et en appliquant sur l'autre extrémité un moment fléchissant M_0 , que l'on fait disparaître au temps initial $t = 0$ en libérant soudainement ce côté de la tige. La tige n'est alors plus en équilibre et on étudie son évolution dynamique.

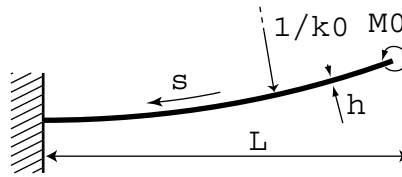


FIG. 1 – L'évolution dynamique d'un fragment qui suit la rupture initiale d'une tige fragile est modélisée par la libération au temps $t = 0$ d'une tige de longueur L fixée, de courbure initiale κ_0 ne possédant pas de vitesse initiale.

2 Modèle

La dynamique des tiges est décrite par les équations de Kirchhoff [11] qui dans la limite des faibles fléchissements planes s'écrivent :

$$L^4 \kappa_{,s^4}(s,t) + T^2 \kappa_{,t^2}(s,t) = 0, \quad (1)$$

où les virgules en indices dénotent les dérivées partielles. Nous avons introduit un temps caractéristique T construit à partir des propriétés mécaniques de la tige : $T = L^2/\gamma$ où $\gamma = \sqrt{EI/(\rho A)}$, avec E le module d'Young, ρ la masse volumique, A l'aire et I le moment principal d'inertie de la section. Pour une tige de section circulaire de rayon r , $I = \pi r^4/4$ et $\gamma = cr/2$, où $c = \sqrt{E/\rho}$ désigne la vitesse du son dans le matériau. Notons que T est directement proportionnel à la période du fondamental pour les petites oscillations libres de la tige, $T_{\text{free}} = 1.79 T$.

Dans l'équation (1), on cherche à déterminer l'inconnue $\kappa(s,t)$, fonction de l'abscisse curviligne s et du temps t . On utilise les équations linéarisées pour les petites oscillations dans le seul but de simplifier l'exposé : nous avons effectué des calculs numériques fondés sur les équations complètes non linéaires de Kirchhoff, et n'avons pas obtenu de différence essentielle avec ce que la théorie linéaire permet de prédire. Les conditions initiales pour l'équation (1) sont des conditions d'encastrement en $s = L$: $\kappa_{,s^2}(L,t) = 0$, $\kappa_{,s^3}(L,t) = 0$, et des conditions de bord libre en $s = 0$: $\kappa(0,t) = 0$, $\kappa_{,s}(0,t) = 0$. Avec les conditions initiales $\kappa(s,0) = \kappa_0$ et $\kappa_{,t}(s,0) = 0$ (courbure uniforme κ_0 , pas de vitesse initiale), on s'attend en principe à une solution unique par intégration de l'équation aux dérivées partielles.

Il n'en n'est rien. Une analyse de ces conditions initiales et aux bords révèle la présence d'une incompatibilité : le problème est mathématiquement mal posé. Il se développe par

conséquent une couche limite aux temps très courts $t \sim T_s \sim r/c$: au bord libéré, la courbure est initialement non nulle mais tend extrêmement rapidement vers zéro. Durant cette phase très rapide les équations de Kirchhoff ne s'appliquent pas, les sections ne restent pas planes. La conséquence [12] est que, pour décrire les temps grands devant ce temps très court de relaxation (régime dit intermédiaire), il faut chercher une solution auto-semblable aux équations de Kirchhoff. Le régime intermédiaire est caractérisé par :

$$T_s \ll t \ll T. \quad (2)$$

3 Solution

Au vue des exposants de L et de T dans l'équation (1), on cherche une solution auto-semblable sous la forme $\kappa(s,t) = \kappa_0 u(\xi)$ avec $\xi = (s/L) \sqrt{t/T}$. Les conditions aux bords pour la fonction $u(\xi)$ s'écrivent alors $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ et $u(+\infty) \rightarrow 1$. Si l'on injecte cette forme auto-semblable dans l'équation (1), on obtient l'équation différentielle ordinaire suivante pour $u(\xi)$:

$$4u''''(\xi) + \xi^2 u''(\xi) + 3\xi u'(\xi) = 0 \quad (3)$$

Cette équation admet l'intégrale première suivante :

$$I = 4\xi u'''(\xi) - 4u''(\xi) + \xi^3 u'(\xi) = \text{cte}. \quad (4)$$

La condition de bord $u(+\infty) \rightarrow 1$ impose $I = 0$. Transposée en $\xi = 0$, cette condition $I = 0$ implique $u''(0) = 0$. Cette troisième condition initiale sélectionne une unique solution (à une constante multiplicative près) de l'équation (3) :

$$\kappa(s,t) = 2\kappa_0 S\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{s}{\sqrt{\gamma t}}\right), \quad (5)$$

où $S(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi}{2} y^2) dy$ est l'intégrale sinus de Fresnel, utilisée en théorie de la diffraction. L'équation (5) ne décrit pas une solution progressive classique, $s \sim ct$, mais une solution auto-semblable $s \sim \sqrt{\gamma t}$. Ceci est relié aux propriétés dispersives de l'équation d'ondes (1).

Le comportement de toute tige libérée soudainement à un bord est décrit par la même solution auto-semblable (5) dans le régime intermédiaire (2), quelles que soient les propriétés du matériau, les détails de la libération initiale (qui doit néanmoins se produire sur un temps très court $T_s \ll T$), et même les conditions imposées sur le bord fixe. Cette solution universelle est tracée en bas de la figure 2, et comparée à une simulation numérique des équations non-linéaires de Kirchhoff. La solution numérique révèle bien, comme attendu, un régime auto-semblable pour $T_s \ll t \ll T$, pendant lequel un train d'onde de flexion parcourt la tige depuis le bord libéré $s = 0$ jusqu'au bord encastré $s = L$, la longueur parcourue croissant avec la racine carrée du temps. La solution auto-semblable (5) décrit fidèlement l'évolution dynamique de la tige jusqu'à ce que des réflexions se produisent sur le bord encastré $s = L$, pour un temps $t \sim T$. Pour décrire ses réflexions, il faudrait alors combiner la solution auto-semblable (5) avec ses réflexions obtenues par la méthode des images.

4 Discussion

Une propriété essentielle de la solution auto-semblable est qu'elle prédit localement un accroissement de courbure par rapport à la courbure initiale κ_0 . L'étude du maximum

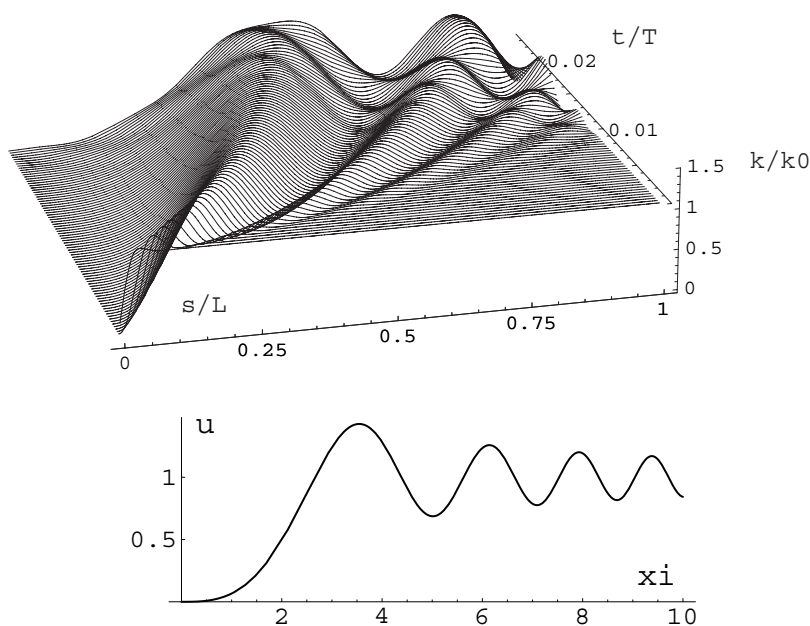


FIG. 2 – En haut : simulation numérique des équations de Kirchhoff dynamiques pour une configuration initiale en demi-cercle $\kappa_0 = \pi/L$. La courbure au bord libéré $\kappa(0,t)$ relaxe vers zéro en quelques pas de temps puis est donnée dans le régime intermédiaire (2) par la solution auto-semblable (5). Aux temps ultérieurs, des réflexions se produisent sur le bord encasté $s = L$. En bas : solution auto-semblable décrivant le régime intermédiaire $\xi = s/\sqrt{\gamma t}$.

de l'intégrale sinus de Fresnel montre qu'un maximum de courbure se produit dans le régime intermédiaire pour $(s/L)/\sqrt{t/T} = 2\sqrt{\pi}$. La valeur de ce maximum de courbure rapportée à la courbure initiale est un nombre universel, $\kappa_m/\kappa_0 = 1.428$. Juste après la libération du bord libre, et jusqu'à ce que des réflexions se produisent, un train d'ondes de courbure traverse la tige de part en part, augmentant la courbure localement de 42.8%. Ce résultat est assez contre-intuitif car on s'attendrait en *libérant* le bord libre (i.e. en diminuant les contraintes) à voir les déformations diminuer de même. Il est vrai que sur le long terme, la tige va retourner à un état rectiligne (sans contrainte ni déformation), mais nous venons de voir grâce à la solution auto-semblable que sa dynamique très particulière aux temps courts exhibe une augmentation locale de la courbure.

Si l'on se souvient que la tige est initialement courbée avec une courbure κ_0 qui coïncide presque avec sa courbure limite de rupture κ^* , on voit que l'augmentation de courbure qui suit la libération d'un bord de la tige est incompatible avec le critère de stabilité à la rupture en flexion, $\kappa < \kappa^*$. On en déduit que si l'état initial est suffisamment chargé, la tige peut rompre uniquement parce qu'elle est relâchée. Autrement dit, une catapulte sans charge embarquée peut rompre uniquement parce qu'elle est déclenchée. Cette assertion plutôt surprenante peut être vérifiée par une expérience relativement simple. On courbe un spaghetti en arc de cercle jusqu'à une courbure proche de sa courbure limite. On le relâche brusquement à un bord. On observe alors souvent que le spaghetti rompt très rapidement, en un endroit plus ou moins éloigné du point de libération, parfois même au bord opposé. En filmant cette expérience à la caméra rapide, nous avons confirmé le rôle du train d'ondes de flexion décrit par l'équation (5). La figure 3 montre des clichés



FIG. 3 – Un spaghetti courbé peut casser lorsque on libère une de ses extrémités. La pâte est d’abord fléchie en arc de cercle jusqu’à une courbure légèrement inférieure à sa courbure de rupture. L’extrémité inférieure est encastrée. L’extrémité supérieure est libérée soudainement, au temps $t_a = 0$. On montre quelques images obtenues à la caméra rapide à 1000 Hz: (a) libération $t_a = 0$, (b) cliché intermédiaire $t_b = 0.0159 T$, (c) cliché immédiatement antérieur à la rupture $t_c = 0.0509 T$, et (d) immédiatement postérieur $t_d = 0.0596 T$. Les simulations numériques fondées sur les équations dynamiques de Kirchhoff sont superposées, sans paramètre ajustable : profil de la tige (pointillés), et cercle osculateur (tirets) au point de courbure maximale (flèche). Noter que la rupture se produit bien au point de courbure maximale.

expérimentaux superposés avec le calcul numérique sans paramètre ajustable. La rupture se produit exactement au point calculé de courbure maximale. En comparant le rayon de courbure initial sur cette figure, et les rayons de courbure beaucoup plus faibles atteints durant l’évolution dynamique de la tige, on voit qu’en effet, et contrairement à l’intuition, la courbure de la tige augmente bien localement.

5 Conclusion

Nous avons expliqué comment une tige fragile casse lorsqu’elle est libérée à la façon d’une catapulte. Dans l’expérience de la catapulte la tige est régie par les mêmes équations qu’une moitié de tige en flexion venant de subir sa première rupture. Cette rupture se traduit par la libération brusque de deux nouveaux fragments. Chacun de ces deux sous-fragments suit une évolution dynamique semblable à celle d’une catapulte, caractérisée par une augmentation locale de la courbure. Cette augmentation locale produit elle-même de nouveaux événements de rupture puisque la courbure initiale, proche de la courbure de rupture, est largement dépassée. On voit ainsi apparaître un mécanisme de rupture en cascade pour les tiges fragiles en flexion.

Pour étudier les ruptures suivantes dans une tige en flexion, il faudrait étudier la dynamique des sous-fragments. La difficulté est qu’alors on ne part pas d’une solution de courbure constante, mais d’une condition initiale plus complexe quant à son profil de courbure. Les courbures ultérieures sont donc plus difficiles à étudier, mais pour une raison purement technique. Le mécanisme que nous avons mis en lumière reste néanmoins

valable. Les seuls éléments susceptibles de limiter la taille finale des fragments sont liés à la dissipation de l'énergie (comportement plastique et/ou visco-élastique de la tige, dissipation de l'énergie durant la propagation d'une fissure transversale, etc.) ou à des phénomènes de retards à la rupture (la tige ne casse pas instantanément quand la courbure κ atteint sa valeur limite κ^*).

L'étude du système modèle de catapulte nous a permis de comprendre pourquoi les tiges ne cassent pas en général en deux morceaux. Il reste maintenant à comprendre ce qui limite en pratique la cascade de rupture vers les petites échelles, et ce qui fixe la statistique des fragments ainsi créés.

6 Remerciements

Les clichés des expériences de catapulte ont été pris avec la caméra rapide du laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes et avec l'aide précieuse et amicale de Luc Lebon et de Denis Vallet.

Références

- [1] N. F. Mott et E. H. Linfoot, Ministry of Supply Report No. AC3348, January 1943, unpublished.
- [2] D. E. Grady et M. E. Kipp, *Geometric statistics et dynamic fragmentation*, Journal of Applied Physics, **58** (3), 1210–1222, (1985).
- [3] R. Englman, *Fragments of matter from a maximum-entropy viewpoint*, J. Phys: Condens. Matter, **3**, 1019–1053, (1991).
- [4] Lene Oddershede, Peter Dimon, et Jakob Bohr, *Self-organized criticality in fragmenting*, Phys. Rev. Lett., **71** (19), 3107–3110, (1993).
- [5] Emily S. C. Ching, S. L. Lui, et Ke-Qing Xia, *Energy dependence of impact fragmentation of long glass rods*, Physica A, **287**, 89–90, (2000).
- [6] L. Griffith, Can. J. Res., **21**, 57, (1943).
- [7] N. F. Mott. Proc. Roy. Soc. London A, **189**, 300, (1947).
- [8] J. R. Gladden, N. Z. Handzy, A. Belmonte, et E. Villermaux, *Dynamic buckling et fragmentation in brittle rods*, preprint, (2004).
- [9] F. Wittel, F. Kun, H. J. Herrmann, et B. H. Kröplin, *Fragmentation of shells*, Phys. Rev. Lett., **93** (3), (2004).
- [10] D. A. Shockey, D. R. Curran, L. Seaman, J. T. Rosenberg, et C. F. Peterson, Int. J. Rock. Mech. Min. Sci., **11**, 303, (1974).
- [11] Bernard D. Coleman, Ellis H. Dill, Marzio Lembo, Zheng Lu, et Irwin Tobias, *On the dynamics of rods in the theory of kirchhoff et clebsch*, Arch. Rational Mech. Anal., **121**, 339–359, (1993).
- [12] B. Audoly et S. Neukirch, *Fragmentation of rods by cascading cracks: why spaghetti do not break in half*, Phys. Rev. Letters (submitted), (2005).

Oscillations carrées d'un système électro-optique à retard

M. Nizette

Université des Sciences et Technologies de Lille, Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, Bâtiment P5, F-59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France ;
`mnizette@ulb.ac.be`

Résumé

Nous proposons une théorie de la stabilité des modes d'oscillation carrée d'un système électro-optique à retard fonctionnant dans le régime de période 2. Notre approche révèle des relations entre la stabilité de ces modes et la dynamique du système à l'approche et au départ des plateaux qui composent les motifs d'oscillation carrée.

Abstract

We propose a theory of the stability of square oscillation modes in a delayed-feedback electro-optical system operating in the period-2 regime. Our approach reveals relations between the stability of these modes and the dynamics of the system at the approach or departure from the plateaus that make up the square oscillation patterns.

1 Introduction

Les systèmes électro-optiques à retard sont, historiquement, les premiers dispositifs optiques où une dynamique chaotique ait été observée expérimentalement [1]. Ils sont également connus pour leur capacité à présenter un très grand nombre de modes d'oscillation différents dans des conditions de fonctionnement identiques [2], un phénomène appelé multistabilité. Cette propriété leur a conféré un vif intérêt par le passé, car elle offrait la perspective de réaliser des dispositifs optiques à mémoire [3]. Les réalisations expérimentales rencontrèrent cependant des obstacles [4] : il reste encore aujourd'hui de grandes difficultés à expliquer pourquoi et dans quelles conditions certains modes sont observables de manière stable et d'autres non. Plus récemment, les systèmes électro-optiques à retard ont connu un regain d'intérêt dans le domaine émergent des télécommunications sécurisées basées sur la synchronisation du chaos [7].

Ces applications nouvelles, ainsi que l'importance croissante des phénomènes non-linéaires à retard en sciences, motive les chercheurs à améliorer leur compréhension fondamentale de ces systèmes, même dans les régimes dynamiques les plus simples tels que des cycles limites [10]. Ceci nous a conduits à ré-examiner d'un point de vue théorique la question de l'observabilité des différents modes d'oscillation périodique qui peuvent apparaître dans le régime multistable. Plus précisément, nous proposons une théorie semi-analytique de la stabilité de ces oscillations dans le *domaine de période 2* (P2). Ce terme désigne un régime de fonctionnement caractérisé par des oscillations carrées avec une période T légèrement plus grande que le double du temps de retard.

Un comportement P2 typique est représenté dans la fig. 1a. Le mode fondamental qui y est montré coexiste souvent avec ses harmoniques impaires (voir la troisième harmonique dans la fig. 1b). Ces modes peuvent subir des doublements de période successifs qui en font

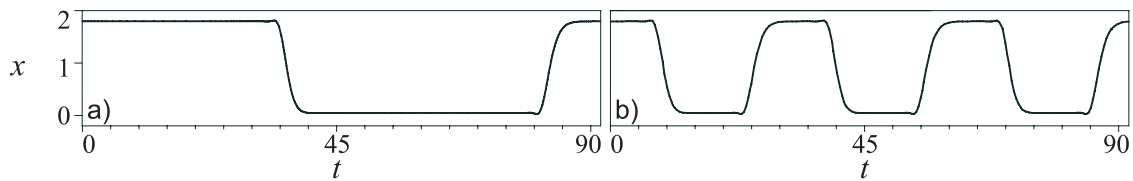


FIG. 1 – Solutions périodiques de l'équation d'Ikeda (2) dans le régime P2 pour $\mu = 0.6$ et $r = 45$. L'axe horizontal parcourt une période fondamentale T , qui est légèrement plus longue que le double du retard.

des précurseurs aux modes de plus grande période utilisés dans les dispositifs à mémoire [4, 5].

Les modèles les plus simples de dispositifs électro-optiques à retard consistent en une équation différentielle à retard de la forme (sans dimension) suivante [6, 7, 8, 9] :

$$\dot{x}(t) + x(t) = f(x(t-r)), \quad (1)$$

où le point représente une dérivée par rapport au temps t , r est le temps de retard, x désigne le signal de sortie, et la fonction f introduit la réponse non-linéaire du dispositif (et peut dépendre d'un certain nombre de paramètres contrôlables). Un modèle bien connu est l'équation d'Ikeda [11], pour laquelle $f(z) \equiv \pi\mu[1 + 2B \cos(z - x_0)]$. L'étude présentée ici est valable pour le modèle générique (1), sous l'hypothèse que le temps de retard est long par rapport au temps de réponse caractéristique du système électro-optique. Cependant, tous les résultats quantitatifs représentés sous forme de diagrammes sont donnés dans le cas particulier de l'équation d'Ikeda avec $B = 0.5$ et $x_0 = -\frac{\pi}{2}$. L'équation (1) se réduit alors à

$$\dot{x}(t) + x(t) = \pi\mu[1 - \sin x(t-r)], \quad (2)$$

où le retard r et le taux de pompage μ sont les seuls paramètres libres restants.

2 Dynamique transitoire

L'étude des équations différentielles à retard est un problème difficile. Cependant, des analogies entre systèmes à retard et systèmes étendus spatialement ont été découvertes [12] et ouvrent la voie vers de nouvelles méthodes d'analyse [13]. Dans la découverte de ces analogies, une représentation bidimensionnelle des séries de données temporelles, telle que celle que nous adoptons dans les fig. 2a–b, s'est révélée utile [14]. Cette figure montre des oscillations transitoires de longue durée de l'éq. (2) : deux solutions numériques pour $\mu = 0.6$ correspondant à des conditions initiales distinctes y sont représentées dans le plan t vs $(t \bmod T)$. Les valeurs de x sont mesurées sur une échelle de gris. La période fondamentale T , qui figure dans l'expression qui apparaît en abscisse, a été préalablement déterminée numériquement à partir de la solution P2 fondamentale de l'éq. (2), représentée dans la fig. 1a. Les fig. 2a–b séparent visuellement les oscillations carrées rapides sur un intervalle de temps T (mesurées le long de l'axe horizontal) de la dynamique transitoire beaucoup plus lente (observable le long de l'axe vertical).

La dynamique est structurée comme une alternance de plateaux connectés par des transitions rapides (ou *parois*) qui dérivent lentement. La fig. 2a montre l'attraction, la collision et l'annihilation de deux paires de parois opposées, avec formation d'un état final périodique contenant seulement deux parois par période, que l'on identifie comme le mode

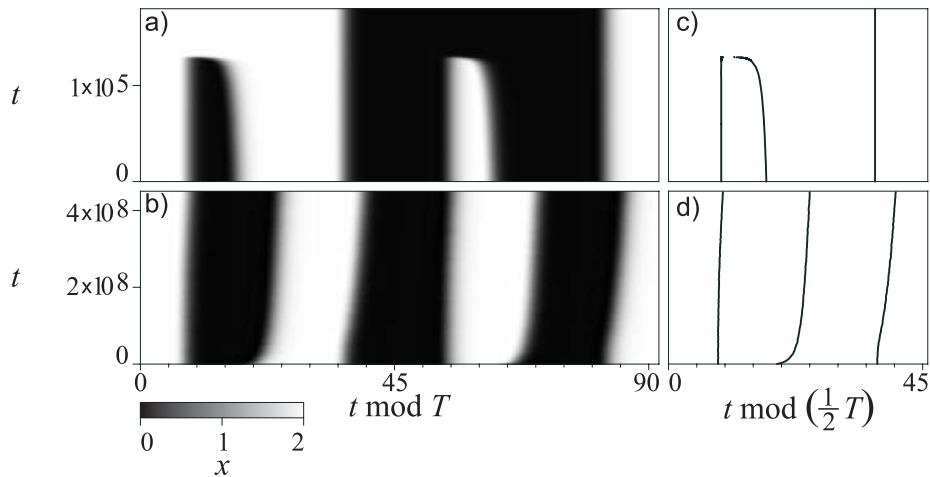


FIG. 2 – a, b) Solutions transitoires de l'éq. (2) dans une représentation bidimensionnelle des données temporelles (voir texte), pour $\mu = 0.6$ et $r = 45$. Les valeurs de x sont représentées sur une échelle de gris. c, d) Distributions des instants de transition extraites de ces données.

fondamental (représenté dans la fig. 1a). Dans la fig. 2b, aucune annihilation n'a lieu car les parois adjacentes se repoussent l'une l'autre. L'état final est identifiable comme la troisième harmonique (montrée dans la fig. 1b).

Les fig. 2c–d donnent une représentation différente de la même dynamique. Là, la distribution des *instants de transition* t_k (k entier) est tracée dans le plan t vs $(t \bmod \frac{1}{2}T)$. Les t_k sont définis précisément comme les instants qui satisfont la condition $x(t_k) = x(t_k - \frac{1}{2}T)$. Remarquons que leur distribution suit le mouvement des parois dans les fig. 2a–b. Ceci suggère que la clé de la stabilité des motifs d'oscillation repose dans l'étude de la manière dont la distribution des instants de transition sur une demi-période détermine leur propre dérive sur une longue échelle de temps. Notre approche a donc consisté à obtenir à partir de l'éq. (1) un ensemble d'équations plus simples qui décrivent la dérive des instants de transition t_k sous l'effet de la dynamique transitoire lente.

3 Profil des parois

Avant de présenter ces équations simplifiées, il est utile d'examiner plus en détail le profil des parois, dont nous verrons qu'il exerce une influence importante sur la dynamique à long terme. Les fig. 3a–b montrent le profil des *parois ascendantes* dans la dynamique P2 de l'équation d'Ikeda (2), calculé numériquement pour deux valeurs distinctes de μ . (On peut vérifier que la fig. 3b reproduit bien le profil des transitions ascendantes dans la fig. 1, où la même valeur de μ est utilisée.) Une caractéristique importante de ces profils, à peine discernable sur les fig. 3a–b, est clairement révélée par les fig. 3c–d, qui montrent la *pente* (c'est à dire, la valeur absolue de la dérivée par rapport au temps) de la paroi ascendante sur une échelle logarithmique, pour les deux mêmes valeurs de μ . Ces diagrammes mettent en évidence l'absence (fig. 3c) ou la présence (fig. 3d) d'oscillations sur les *queues* des parois, c'est à dire, dans la dynamique asymptotique en amont ou en aval des transitions. L'importance de ces oscillations apparaîtra clairement dans ce qui suit.

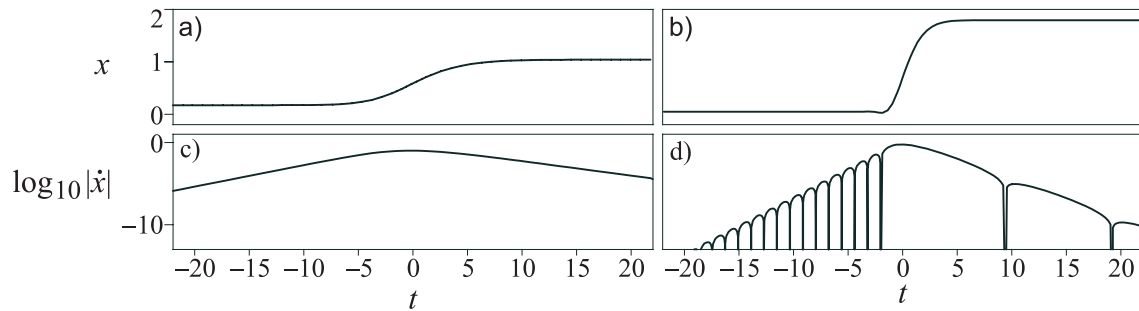


FIG. 3 – a, b) Paroi ascendante pour l'équation d'Ikeda (2), avec a) $\mu = 0.4$ et b) $\mu = 0.6$. c, d) Logarithme de la pente de la paroi ascendante, pour les mêmes valeurs de μ .

Qu'elles présentent ou non des oscillations, on peut montrer que les queues des parois ont une forme exponentielle. Plus précisément, on peut écrire (de manière compacte) que, pour $\pm(t - t_k)$ positif et suffisamment grand :

$$\dot{x}(t) = \text{Re}\{a_k^\pm \exp[\sigma_\mp(t - t_k)]\} \quad (3)$$

où les coefficients σ_- et σ_+ représentent respectivement les taux de décroissance exponentielle des queues *future* (après la transition) et *passée* (avant la transition), et où les a_k^\pm sont des constantes. Notons que l'existence d'une partie imaginaire traduit la présence d'oscillations sur les queues, tandis que des taux de décroissance exponentielle réels indiquent un profil monotone. Nous pouvons montrer que σ_- et σ_+ sont toujours réels au seuil d'oscillation P2, et possèdent toujours une partie imaginaire en un point de bifurcation vers un régime de période 4. De ceci, on déduit que les queues sont monotones au seuil P2, mais deviennent nécessairement oscillantes avant une bifurcation vers un régime de période 4.

4 Analyse

Dans le régime P2, la solution x de l'éq. (1) bascule entre deux valeurs plateaux aux instants t_k . Notons n le nombre de ces transitions qui ont lieu sur une demi-période. La rétroaction force la solution x à se répéter avec une inversion des plateaux toutes les demi-périodes, ce qui implique que n est un nombre impair. (Le mode fondamental de la fig. 1a et sa troisième harmonique, dans la fig. 1b, correspondent à $n = 1$ et $n = 3$, respectivement). Il est commode d'exprimer les temps de transition t_k en termes de nouvelles variables plus directement liées à la représentation bidimensionnelle de la dynamique utilisée dans la fig. 2. Soient $s_k^l \equiv t_{nl+k} - \frac{1}{2}lT$, où $k = 0, \dots, n-1$ et l est un nombre entier quelconque. La variable s_k^l représente alors le *déplacement* de la k -ème transition après l demi-périodes. Dans les fig. 2c-d, s_k^l peut être lu directement comme la k -ème abscisse correspondant à l'ordonnée $t = \frac{1}{2}lT$. Si les déplacements s_k^l diffèrent peu d'une valeur de l à la suivante, il est justifié de remplacer l'indice discret l par la variable temporelle continue $t = \frac{1}{2}lT$ et de réécrire s_k^l comme $s_k(t)$.

Un calcul que nous ne détaillons pas ici (mais dont la démarche est esquissée dans [15] et sera exposée ailleurs de manière plus complète) permet alors d'obtenir des équations qui gouvernent la dérive lente des déplacements $s_k(t)$:

$$\frac{1}{2}T\dot{s}_k = \text{Re}\{c^- \exp[\sigma_- (s_k - s_{k-1})] + c^+ \exp[\sigma_+ (s_k - s_{k+1})]\}, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (4)$$

où nous avons défini $s_{-1} \equiv s_{n-1} - \frac{1}{2}T$ et $s_n \equiv s_0 + \frac{1}{2}T$. Les symboles c^\pm sont des constantes que l'on peut déterminer numériquement (ainsi que la période fondamentale T et les taux de décroissance σ_\pm) à partir des paramètres de l'équation originale (1) (voir [15] pour plus de détails). Les équ. (4) forment un ensemble fini d'équations différentielles ordinaires. Elles relient la dérive lente des transitions, \dot{s}_k , aux intervalles de temps $s_k - s_{k-1}$ qui les séparent. Les solutions P2 stables de l'équ. (1) correspondent aux équilibres stables des équ. (4).

5 Discussion

Les deux termes dans le membre de droite des équ. (4) peuvent être interprétés comme décrivant des interactions effectives entre parois adjacentes. Le signe et l'intensité des interactions dépendent de la distance de séparation des parois. La décroissance des interactions avec la distance est exponentielle, avec des taux $|\sigma_\pm|$, et peut donc être monotone ou oscillante, en relation directe avec les profils des queues des parois. Il est possible de montrer qu'aussi longtemps que les queues restent monotones, les termes d'interaction restent attractifs. Dans ce cas, une analyse de stabilité des équ. (4) révèle que toute solution pour $n > 1$ est instable. Les parois ont donc tendance à collisionner et à s'annihiler par paires jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une paroi par demi-période. Ceci implique que le seul motif stable est le mode fondamental lorsque les queues des parois sont monotones. Il s'agit d'une dynamique comparable à celles de particules attractrices contraintes de se mouvoir sur un cercle : s'il y en a plus d'une, elles vont collisionner par paires jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'une. D'autre part, si les queues des parois oscillent, alors les termes d'interaction oscillent également en fonction de la séparation des parois. Dans ce cas, plusieurs équilibres stables, correspondant éventuellement à différentes valeurs de n , sont possibles. En conclusion, la stabilité des harmoniques supérieures (c'est à dire, celle pour lesquelles $n > 1$) est déterminée par la forme des parois, et plus précisément par leur comportement asymptotique en amont ou en aval des transitions.

Nous pouvons utiliser les équ. (4) pour analyser quantitativement la stabilité des modes d'oscillation P2 de l'équ. (2) avec des transitions équidistantes : $s_k - s_{k-1} = \frac{1}{2}nT$ pour $k = 0, \dots, n-1$. Pour l'équation d'Ikeda (2), le seuil d'oscillation P2, μ_2 , et la bifurcation vers le régime de période 4, μ_4 , sont donnés (pour r grand) par $\mu_2 = 0.374$ et $\mu_4 = 0.626$. De plus, l'apparition d'oscillations sur les queues des parois a lieu en $\bar{\mu}_2 = 0.5$. La fig. 4 montre les limites de stabilité des premiers modes dans le plan μ vs r pour $\mu_2 < \mu < \mu_4$. Notons que le domaine de stabilité, pour une valeur de μ fixée et pour une harmonique spécifique n , est structuré en *bandes* déconnectées de valeurs du retard r . Chaque bande est limitée à gauche par une courbe numérotée en trait plein, et à droite par une courbe identiquement numérotée en traits interrompus. Cette structure en bandes peut être observée le plus facilement pour la troisième harmonique, dont les deux premières bandes de stabilité sont visibles sur la figure. On peut calculer que la largeur et l'écartement des bandes de stabilité pour la n -ème harmonique est donnée approximativement par la durée de n demi-cycles d'oscillation des queues futures des parois. (Comparez les largeurs des bandes en $\mu = 0.6$ dans la fig. 4 et la taille des bosses dans la partie droite de la fig. 3d, qui représentent des demi-cycles successifs dans la queue future.)

A notre connaissance, cette structure en bandes des domaines de stabilité n'a jamais été prédite auparavant. Son identification souligne la nécessité de bien choisir le temps de retard pour stabiliser une harmonique donnée : même si le système est isolé des influences externes, un retard trop petit ou trop grand peut être la cause d'une instabilité.

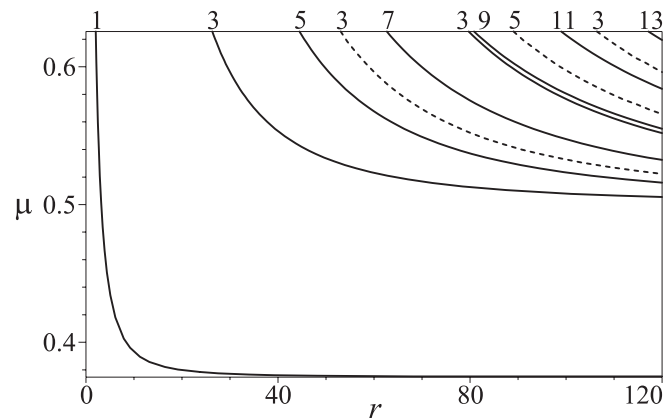


FIG. 4 – Frontières de stabilité des modes d'oscillation réguliers de l'équation d'Ikeda (2), dans le régime P2. Les nombres indiquent l'ordre n de l'harmonique qui subit un changement de stabilité. Les domaines de stabilité sont situés à droite (resp. gauche) des courbes en traits pleins (resp. interrompus).

Remerciements

Ce travail et sa rédaction ont été financés par le Fonds National de la Recherche Scientifique belge, le programme PAI du gouvernement belge, et le Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules de l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

Références

- [1] H.M. Gibbs *et al.*, Phys. Rev. Lett. **46**, 474 (1981).
- [2] M.W. Derstine *et al.*, Phys. Rev. A **27**, 3200 (1983).
- [3] K. Ikeda et K. Matsumoto, Physica D **29**, 223 (1987)
- [4] T. Aida et P. Davis, IEEE J. Quantum Electron. **28**, 686 (1992)
- [5] T. Aida et P. Davis, IEEE Trans. Quantum Electron. **30**, 2986 (1994)
- [6] R. Vallée et C. Delisle, Phys. Rev. A **34**, 309 (1986).
- [7] J.-P. Goedgebuer *et al.*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2249 (1998)
- [8] L. Yaowen *et al.*, Phys. Rev. E **62**, 7898 (2000).
- [9] V.S. Udaltsov *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 1892 (2001).
- [10] L. Larger *et al.*, J. Opt. Soc. Am. B **18**, 1063 (2001).
- [11] K. Ikeda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **49**, 1467 (1982).
- [12] G. Giacomelli et A. Politi, Phys. Rev. Lett. **76**, 2686 (1996).
- [13] M. Nizette, Physica D **183**, 220 (2003).
- [14] F.T. Arecchi *et al.*, Phys. Rev. A **45** 4225 (1992).
- [15] M. Nizette, Phys. Rev. E **70**, 056204 (2004).

Instabilités tridimensionnelles de l'écoulement de von Kármán entre disques contra-rotatifs

C. Nore, O. Daube¹, F. Moisy², L. Quartier³, M. Tartar, L. S. Tuckerman et S. Xin

LIMSI-CNRS, bâtiment 508, BP 133, 91403 ORSAY cedex
nore@limsi.fr

Résumé

Nous étudions numériquement et expérimentalement l'écoulement engendré par deux disques en exacte contra-rotation avec une paroi latérale immobile. Nous avons fait varier deux paramètres adimensionnels : le rapport de forme hauteur sur rayon $\Gamma = H/R$ et le nombre de Reynolds construit avec la vitesse de rotation des disques, leur rayon et la viscosité cinématique du fluide $Re = \Omega R^2/\nu$. Pour $\Gamma = 2$, nous avons numériquement calculé les états stables successivement rencontrés par l'écoulement en fonction de Re : des états stationnaires correspondant au mode azimutal $m = 1$ (dénotés M), des ondes tournantes (TW), des pseudo-cycles hétéroclines (Het) et des états stationnaires correspondant à $m = 2$ (P). Ce scénario est théoriquement décrit par une bifurcation de presque codimension 2 en présence de la symétrie $O(2)$. Pour différents rapports de forme $0.5 \leq \Gamma \leq 3$, l'étude de la stabilité linéaire a montré que les modes tridimensionnels sont dominants et stationnaires et que le mode critique décroît avec Γ . Un montage expérimental utilisant la même géométrie a mené à un diagramme d'existence en (Γ, Re) en bon accord avec les résultats numériques. Parmi les états stationnaires et dépendant du temps, des pseudo-cycles hétéroclines ont été mis en évidence à $\Gamma = 2$, présentant des différences avec ceux numériquement observés.

Abstract

The flow produced in an enclosed cylinder by the exact counter-rotation of the top and bottom disks is numerically and experimentally investigated. The dynamics are governed by two parameters, the Reynolds number Re based on cylinder radius and disk rotation speed and the height-to-radius ratio Γ . For $\Gamma = 2$, when Re is increased, the axisymmetric basic state loses stability and different complex flows appear successively: steady states with an azimuthal wavenumber of 1 (called M), traveling waves (TW), near-heteroclinic cycles (Het), and steady states with an azimuthal wavenumber of 2 (P). This scenario is understood in a dynamical system context as due to a nearly codimension-two bifurcation in the presence of $O(2)$ symmetry. For varying aspect ratios $0.5 \leq \Gamma \leq 3$, the stability analysis shows that non-axisymmetric modes are dominant and stationary and that the critical azimuthal wavenumber is a decreasing function of Γ . An experiment using the same geometry has led to a regime diagram in the (Γ, Re) plane which compares well with the numerical results. Among the steady and time-dependent states found in the experiment, robust near-heteroclinic cycles are found for $\Gamma = 2$ that reveal different from those numerically observed.

1 Introduction

L'écoulement produit dans une cavité cylindrique par l'entraînement de deux disques en rotation a été le sujet d'études théoriques, expérimentales et numériques exhaustives

1. LMEE, Université d'Evry Val d'Essonne, 40 rue du Pelvoux, 91020 Evry Cedex France

2. Fluides, Automatique et Systèmes Thermiques, Bât. 502, 91405 Orsay Cedex, France

3. Laboratoire de Physique Statistique, ENS, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France

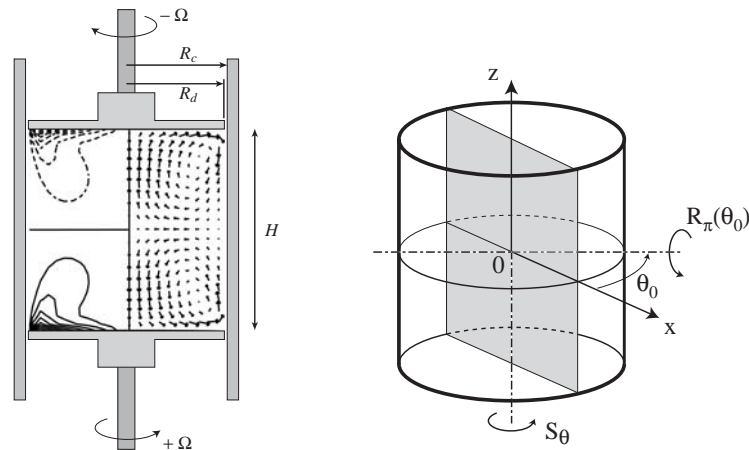


FIG. 1 – Géométrie et symétries: (a) Schéma de la configuration étudiée. Les figures insérées sont des résultats numériques des contours de la vitesse azimutale (à gauche) et des vecteurs du champ méridien (à droite) pour $Re = 300$. (b) Schémas des symétries. D’après [5].

depuis Batchelor [1] et a été baptisé écoulement de von Kármán par Zandbergen et Dijkstra [2]. Parmi ces écoulements, celui engendré par deux disques en contra-rotation avec une paroi latérale immobile a permis d’atteindre des nombres de Reynolds de l’ordre de 10^7 dans l’eau, l’air, l’hélium gazeux ou le sodium liquide. Or, la route vers le chaos de cet écoulement turbulent n’a pas été précédemment étudiée. Nous avons donc entrepris l’étude des bifurcations et des états non linéaires de cet écoulement.

2 L’écoulement de von Kármán à $\Gamma = 2$

2.1 Géométrie de l’écoulement et symétries

Le dispositif étudié est représenté en figure 1 (a) où les notations sont précisées. La dynamique est gouvernée par deux paramètres adimensionnels: le rapport de forme hauteur sur rayon $\Gamma = H/R$ et le nombre de Reynolds construit avec la vitesse de rotation des disques, leur rayon et la viscosité cinématique du fluide $Re = \Omega R^2/\nu$. Dans le code, le rayon du disque R_d est le même que celui du cylindre R_c , c’est-à-dire $R_c = R_d = R$. Cette configuration est invariante par rotation autour de l’axe vertical désignée par S_θ et par rotation d’angle π autour d’un axe horizontal arbitraire notée $R_\pi(\theta_0)$ (fig. 1 b). Ces deux groupes de symétrie confèrent la symétrie $O(2)$ au système pour tout rapport de forme. L’écoulement de base possède toutes les symétries du problème, il est donc stationnaire et axisymétrique. La contra-rotation des deux disques crée une couche de mélange azimutale équatoriale (fig. 1 (a) à gauche). Chaque disque tournant donne lieu à une couche d’Ekman (fig. 1 (a) à droite).

2.2 L’interaction modale 1:2 mise en évidence à $\Gamma = 2$

Nous avons étudié numériquement dans [3] le cas en *exacte* contra-rotation à un rapport de forme $\Gamma = 2$. Nous avons calculé les états stables successivement rencontrés par l’écoulement en fonction de Re : des états stationnaires correspondant au mode azimutal $m = 1$ (dénotés mixed mode M), des ondes tournantes (TW), des ondes tournantes

modulées (MWH), des pseudo-cycles hétéroclines (Het) et des états stationnaires correspondant à $m = 2$ (dénotés pure mode P) (voir fig. 2). La branche des états M apparaissant

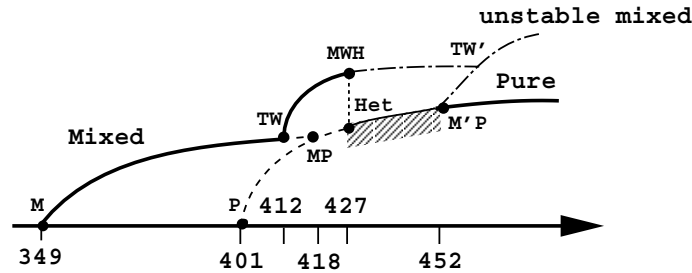


FIG. 2 – Diagramme de bifurcation théorique en fonction de Re . Les solutions stables sont indiquées en trait continu, les instables en tiré et les pseudo-cycles hétéroclines en zone hachurée. Les lignes en point-tiré sont les branches non calculées. Les seuils sont indiqués par des points: $Re_M = 349$, $Re_P \simeq 401$, $Re_{TW} \simeq 412$, $Re_{MP} \simeq 418$, $Re_{MWH} = 427.3$, $Re_{Het} = 427.4$, $Re_{M'P} \simeq 452$. D'après [3].

à Re_M correspond à une modulation azimuthale de la couche de cisaillement équatoriale qui donne naissance à un tourbillon radial stationnaire (voir fig. 3 a). Ces solutions deviennent instables à Re_{TW} et se transforment en ondes tournantes, droites ou gauches. Ces ondes sont elles-mêmes instables à Re_{MWH} vis à vis d'ondes modulées représentées en fig. 4 (a) existant sur une très petite gamme de Reynolds $427.3 \leq Re \leq 427.4$. Le régime le plus exotique apparaît à Re_{Het} où le système oscille entre deux modes $m = 2$ se déduisant l'un de l'autre par une rotation de $\pi/2$. Nous avons observé deux types de pseudo-cycles hétéroclines : des cycles à deux plateaux et d'autres à quatre plateaux (fig. 4 b et c). Ces cycles sont détruits à $Re_{M'P}$ où la branche de solutions devient celle des modes $m = 2$ correspondant à deux tourbillons radiaux co-rotatifs (fig. 3 b).

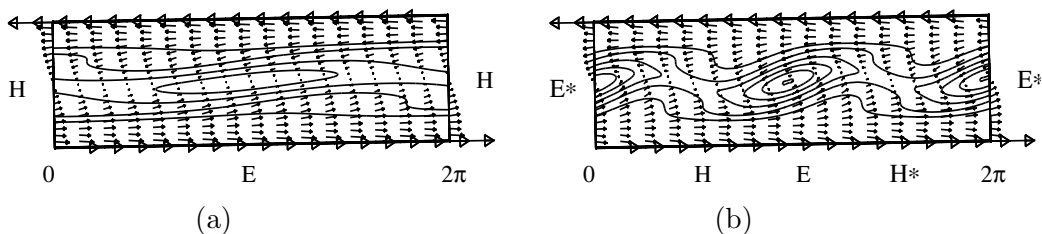


FIG. 3 – Champ de vecteurs et vorticité radiale dépliés de 0 à 2π montrant (a) un tourbillon radial à $Re = 355$, (b) une paire de tourbillons corotatifs à $Re = 500$. D'après [3].

3 Variation du rapport de forme

3.1 Résultats numériques

Nous avons étudié numériquement la stabilité de l'écoulement produit par des disques en exacte contra-rotation en fonction du rapport de forme dans l'intervalle $0.5 \leq \Gamma \leq 3$ [4]. Pour chaque Γ , nous avons calculé le nombre de Reynolds marginal $Re_m(\Gamma)$ pour des

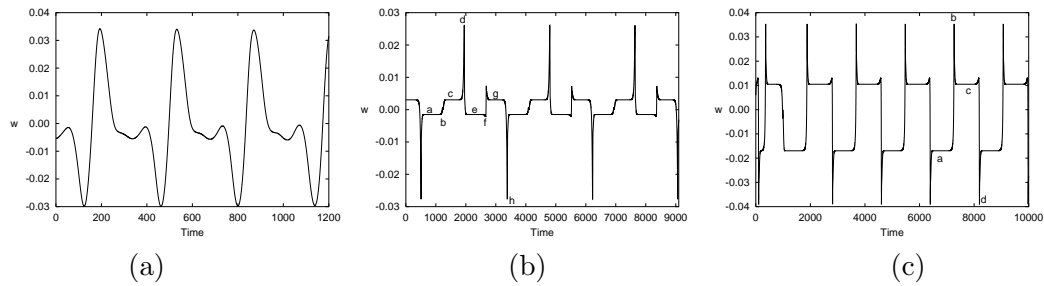


FIG. 4 – Evolution temporelle d'un signal numérique de vitesse verticale pour (a) les ondes tournantes modulées à $Re = 427.35$, (b) les pseudo-cycles hétéroclines à 4 plateaux à $Re = 430$, (c) les pseudo-cycles à 2 plateaux à $Re = 435$. D'après [3].

valeurs entières du nombre d'onde azimutal $0 \leq m \leq 5$ (fig. 5). Tous les modes sont stationnaires au seuil, i.e. les valeurs propres sont nulles au seuil sauf pour les branches notées $m = 0$ (H_1) et $m = 0$ (H_2). Les points de codimension 2 correspondent à l'intersection entre

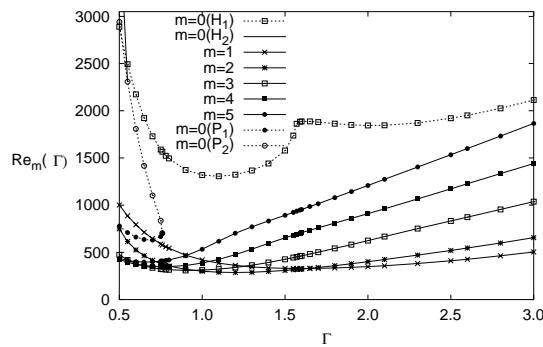


FIG. 5 – Seuils $Re_m(\Gamma)$ pour les modes azimutaux $m = 0$ à 5 en fonction du rapport de forme Γ . Les modes $m = 1$ à 5 sont stationnaires alors que le mode axisymétrique est stationnaire pour $m = 0$ (P_1) et (P_2) et oscillant pour $m = 0$ (H_1) et (H_2). D'après [4].

deux courbes de nombres d'onde différents et sont donnés par $Re(m = 4, m = 3) = 365$ à $\Gamma = 0.63$, $Re(m = 3, m = 2) = 310$ à $\Gamma = 0.95$ et $Re(m = 2, m = 1) = 330$ à $\Gamma = 1.64$.

3.2 Résultats expérimentaux

Notre étude expérimentale utilise deux techniques complémentaires : la visualisation par ensemencement d'iriodine dans de l'huile de silicone et la vélocimétrie par images de particules (PIV). Pour les visualisations, nous avons disposé deux miroirs à 120° degrés de part et d'autre du cylindre et nous avons ensuite traité les images enregistrées par caméra CCD (voir fig. 6). Ces deux techniques nous ont permis de comparer les résultats numériques et expérimentaux de façon précise. L'enveloppe inférieure des seuils en nombre de Reynolds trouvée numériquement est reproduite en figure 7 avec les résultats expérimentaux obtenus à l'aide des visualisations par particules d'iriodine. L'accord entre les seuils numériques et expérimentaux est très satisfaisant. Nous avons aussi déterminé des seuils d'apparition de comportements instationnaires [5].

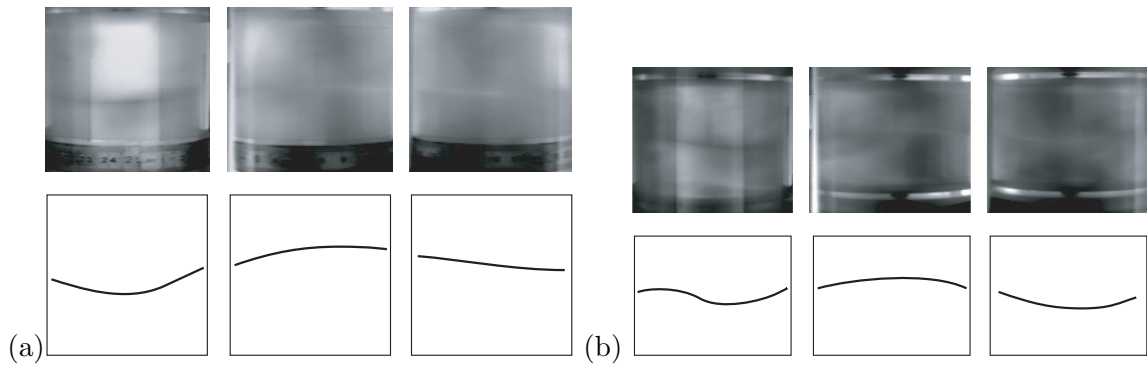


FIG. 6 – Modulation azimuthale de la couche de mélange mise en évidence par les particules d’iriodine pour deux rapports de forme. Les images sont traitées de la façon suivante : l’image directe est présentée à gauche, les images des miroirs sont renversées et disposées au milieu et à droite. Ce montage permet de reconstruire l’image du périmètre. Le mode azimuthal correspond au nombre de maxima le long d’une circonférence. Les schémas inférieurs aident à la lecture des images. (a) $\Gamma = 2$, $m_C = 1$; (b) $\Gamma = 1.5$, $m_C = 2$. D’après [5].

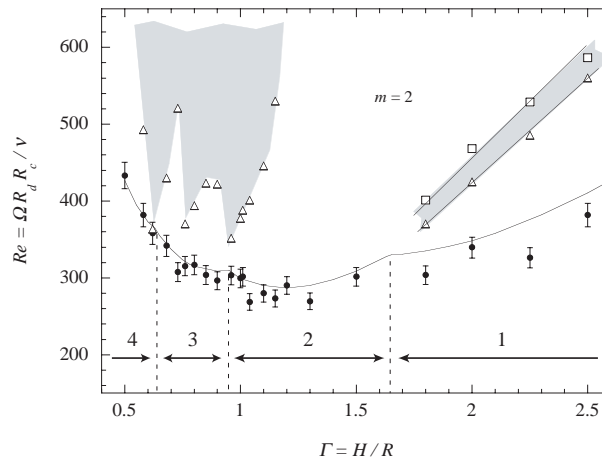


FIG. 7 – Diagramme dans le plan (Γ, Re) [5]. ● : Etat stationnaire non axisymétrique de mode critique m_C (indiqué par le chiffre), △ : état instationnaire, carré : état stationnaire non axisymétrique avec $m \neq m_C$. La partie grisée représente différents états instationnaires. — : Seuils numériques, - - - : Lignes indiquant les points de codimension-2.

4 Cycles hétéroclines numériques et expérimentaux

Nous avons obtenu des pseudo-cycles hétéroclines à $\Gamma = 2$ dans l’expérience à $\Gamma = 2$ pour $450 \pm 8 \leq Re \leq 480 \pm 4$. Des signaux temporels de la vitesse horizontale sont présentés en fig. 8. Les oscillations ont lieu en fait entre trois états stationnaires : deux modes $m = 2$ reliés par une rotation de $\pi/2$ (labels a et c) et un mode $m = 2$ différent (label e). Les états transitoires (labels b et d) correspondent à des modes $m = 1$. Les cycles expérimentaux sont donc distincts des cycles strictement périodiques trouvés numériquement (fig. 4 b et c). La différence semble être due aux bruits et à un défaut géométrique du montage expérimental [5].

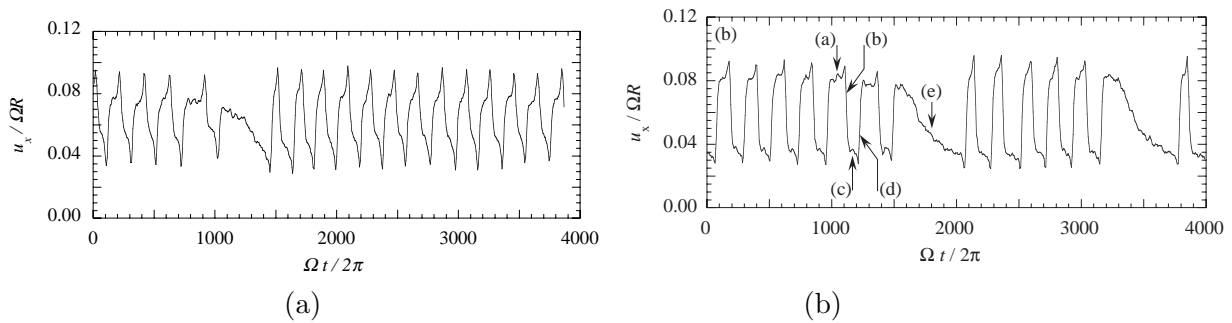


FIG. 8 – Evolution temporelle d'un signal expérimental de vitesse horizontale pour les pseudo-cycles hétéroclines (a) à $Re \simeq 452$, (b) à $Re \simeq 469$. D'après [5].

5 Conclusion

Nous avons mené des études numériques et expérimentales sur l'écoulement de von Kármán en exacte contra-rotation. Elles ont mis en évidence des pseudo-cycles hétéroclines pour une gamme étendue de nombres de Reynolds. L'expérience que nous avons réalisée est la troisième au monde à présenter ce régime exotique à côté d'une expérience de convection thermique en rotation autour d'un axe vertical via l'instabilité de Kuppers-Lorz [6] et une expérience d'instabilité de flammes [7].

Références

- [1] Batchelor G.K., *Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow*, Q. J. Mech. Appl. Math. **4**, 29–41, (1951).
- [2] Zandbergen P. J. & Dijkstra D., *Von Kármán swirling flows*, Annu. Rev. Fluid Mech. **19**, 465–491, (1987).
- [3] C. Nore, L.S. Tuckerman, O. Daube & S. Xin, *The 1 : 2 mode interaction in exactly counter-rotating von Kármán swirling flow*, J. Fluid Mech. **477**, 51–88, (2003).
- [4] C. Nore, M. Tartar, O. Daube & L.S. Tuckerman, *Survey of instability thresholds of flow between exactly counter-rotating disks*, J. Fluid Mech. **511**, 45–65, (2004).
- [5] C. Nore, F. Moisy & L. Quartier, *Experimental observation of near-heteroclinic cycles in the von Kármán swirling flow*, Phys. Fluids, en cours de révision, (2005).
- [6] G. Küppers & D. Lortz, *Transition from laminar convection to thermal turbulence in a rotating fluid layer*, J. Fluid Mech., **35**, 609–620, (1969).
- [7] E. Stone, M. Gorman, M. el-Hamdi & K. A. Robbins, *Identification of intermittent ordered patterns as heteroclinic connections*, Phys. Rev. Lett., **76**, 2061–2064, (1996).

Décollement d'une poutre en adhésion sur un substrat lisse

X. Oyharcabal et T. Frisch

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre
49 rue F. Joliot Curie / Technopôle de Château Gombert 13013 MARSEILLE
oyharcabal@irphe.univ-mrs.fr

Résumé

En utilisant la mécanique des milieux continus, nous étudions le décollement, dû à une force d'étirement verticale, d'une poutre libre inextensible en adhésion sur un substrat lisse. Dans cette étude, nous utilisons le modèle de l'elastica [2] et un potentiel d'adhésion de type Van der Waals. Nous obtenons numériquement la courbe force-hauteur à température nulle et la force critique de décollement en fonction de trois paramètres adimensionnés. Nous obtenons aussi une solution analytique dans le cas d'un potentiel de contact pour l'adhésion [3]. Nous terminons enfin par la présentation du modèle dans le cas où l'effet de la pesanteur est pris en compte.

1 Introduction

L'élasticité et l'adhésion jouent un rôle important en biophysique et en science des matériaux aussi bien du point de vue appliqué que théorique [1]. La nano-manipulation de chaînes de polymères et de macromolécules biologiques nous renseigne sur les propriétés mécaniques de macromolécules tels que l'ADN ou l'Actine. Les outils expérimentaux tels que les pinces optiques [2] ou l'AFM [3], permettent d'imposer des déformations de l'ordre du nanomètre et de mesurer des forces de l'ordre du piconewton. Grâce à ces techniques, les différents mécanismes d'adsorption entre une macromolécule et un substrat peuvent être étudiés. A une échelle plus grande, l'adhésion de certains lézards (geckos) sur une surface se fait par des mécanismes impliquant les forces de van der Waals et l'élasticité. Du point de vue théorique il est important d'étudier des modèles simples dans lesquels élasticité et adhésion sont couplés [4, 5, 6, 8, 7, 9, 10, 11]. Dans cet article, nous étudions une poutre, de rayon R , inextensible, semi-flexible décrite par son énergie de flexion, en adhésion sur un substrat lisse et non polaire. La poutre, dont les extrémités sont libres, est attirée par le substrat et une force d'étirement verticale lui est appliquée à l'une de ces extrémités. La poutre est alors décrit par le modèle de l'elastica [2], ce qui permet de résoudre analytiquement ou numériquement les équations donnant la position d'équilibre statique du système. Nous montrons l'existence de plusieurs branches de solutions de type ressort et anti-ressort. Nous concluons cet article par l'étude de l'effet de la gravité sur la poutre et par une illustration expérimentale.

2 Adhésion de type van der Waals

Comme cela a été précisé dans l'introduction on considère une poutre inextensible décrite par deux paramètres, L sa longueur et κ le coefficient de flexion. Le potentiel d'adhésion est aussi décrit par deux paramètres, W le coefficient d'adhésion et σ le rayon de van der Waals. Nous appliquons à une extrémité de la poutre une force verticale d'étirement (Figure 1). Nous étudions la limite $R \ll \sigma$, limite dans laquelle la section de la poutre ne

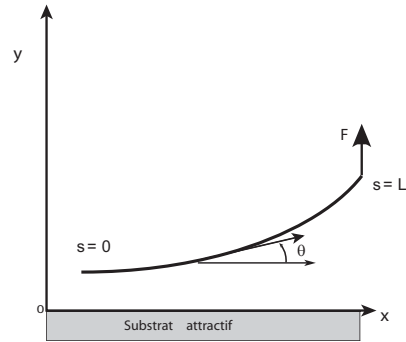


FIG. 1 – Schéma de la poutre en adhésion sur un substrat et soumise à une force verticale.

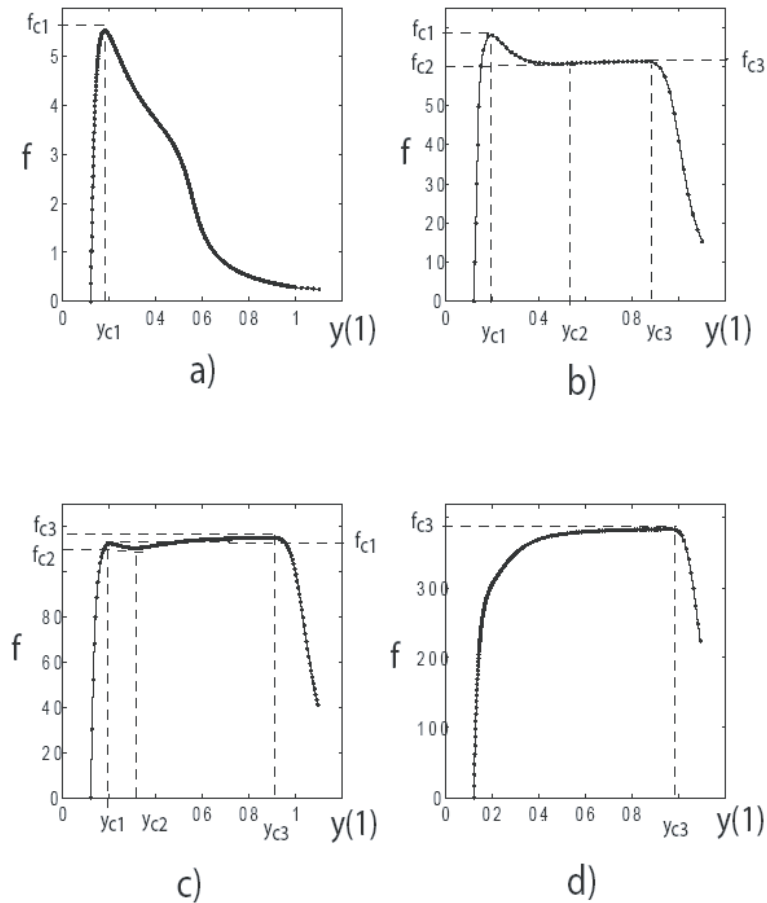


FIG. 2 – Courbe force-hauteur pour $\epsilon = 0.1$, a) $w = 6$, b) $w = 160$, c) $w = 300$, d) $w = 1000$. Ces courbes sont obtenues par résolution numérique des équations (4). f est l'intensité de la force d'étirement à l'extrémité de la poutre et $y(1)$ est la hauteur de cette même extrémité.

se déforme pas contrairement au problème du contact de Hertz [13]. Nous supposons de plus que le rayon de courbure local de la poutre est beaucoup plus grand que son rayon R . Ces hypothèses nous permettent d'utiliser le modèle de l'elastica. L'interaction entre la poutre et le substrat semi-infini peut être modélisée par un potentiel de type van der Waals [14],

$$V(y) = W\left[\left(\frac{\sigma}{y}\right)^9 - \left(\frac{\sigma}{y}\right)^3\right]. \quad (1)$$

W est l'énergie d'adhésion par unité de longueur et σ est le rayon de van der Waals. Nous négligeons les fluctuations thermiques puisque les fluctuations transverses de la poutre L^2/L_p sont petites devant L de telle sorte que $L < L_p = \frac{\kappa}{k_b T}$ où L_p est la longueur de persistance. Enfin, pour nous assurer que la poutre est en adhésion forte avec le substrat, nous supposons que l'énergie d'adhésion est grande de sorte que $W > k_b T/\sigma$. L'énergie totale du système est alors,

$$E = \frac{\kappa}{2} \int_0^L \dot{\theta}^2 ds + \int_0^L V(y) ds - Fy(L), \quad (2)$$

où le premier terme est l'énergie de flexion, le second terme est l'interaction avec le substrat et le dernier terme est le travail de la force verticale. s est l'abscisse curviligne le long de la poutre, le point représente la dérivée par rapport à s , θ est l'angle entre la tangente à la poutre et l'axe x et F est l'intensité de la force appliquée en $s = L$ (Fig. 1). Le profil de la poutre peut être reconstruit dans la base cartésienne en utilisant les relations géométriques suivantes $\partial y = \sin \theta \partial s$ et $\partial x = \cos \theta \partial s$. Le choix pour l'adimensionnalisation est le suivant: $\bar{s} = \frac{s}{L}$, $\bar{x} = \frac{x}{L}$, $\bar{y} = \frac{y}{L}$, $\bar{E} = EL/\kappa$. Le multiplicateur de Lagrange $\gamma(s)$ est introduit car y et θ ne sont pas indépendants [15]. Dans la suite de l'article toutes les variables sont adimensionnées mais la notation de la barre est abandonnée. Nous obtenons donc:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{\theta}^2 ds + w \int_0^1 \left[\left(\frac{\epsilon}{y}\right)^9 - \left(\frac{\epsilon}{y}\right)^3 \right] ds + \int_0^1 \gamma(s) [\dot{y} - \sin \theta] ds - fy(1). \quad (3)$$

Ici $w = WL^2/\kappa$, $\epsilon = \sigma/L$ et $f = FL^2/\kappa$ sont les trois paramètres adimensionnés du système. Les conditions aux limites aux extrémités de la poutre sont: $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\dot{\theta}(1) = 0$ puisqu'aucun couple n'est imposé. La minimisation de la fonctionnelle d'énergie E aboutit au système d'équations non linéaires suivant:

$$\ddot{\theta} + \gamma \cos \theta = 0, \quad \dot{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \dot{y} = \sin \theta, \quad (4)$$

où $v(y) = w\left[\left(\frac{\epsilon}{y}\right)^9 - \left(\frac{\epsilon}{y}\right)^3\right]$. Les conditions aux limites sont $\dot{\theta}(0) = 0$, $\gamma(0) = 0$, $\dot{\theta}(1) = 0$ et $\gamma(1) = f$. Les conditions inconnues sont $\theta(0)$ et $y(0)$. Les équations (4) ont été résolues par une méthode de tir. Nous nous intéressons tout d'abord à la relation entre la hauteur $y(1)$ et la force imposée f . La figure 2 montre la courbe force-hauteur pour 4 valeurs de w . La figure 2a obtenue pour $w = 6$ en résolvant le système d'équations (4) montre qu'il existe au plus 2 valeurs de $y(1)$ pour une force donnée. Cette courbe admet un maximum pour $f = f_{c1}$ et $y = y_{c1}$. La force f_{c1} est la force critique de détachement. Pour des hauteurs supérieures à y_{c1} le système se comporte comme un anti-ressort c'est-à-dire que la force décroît avec la hauteur. Par contre pour $y(1) < y_{c1}$ le comportement est de type ressort. Pour des valeurs plus élevées de w (courbe b et c) un deuxième maximum apparaît pour $f = f_{c3}$ et $y(1) = y_{c3}$. La force critique de détachement est alors $\max(f_{c1}, f_{c3})$. Enfin pour w

grand (courbe d), le maximum (f_{c1}, y_{c1}) disparaît et donc la force critique de détachement est f_{c3} . Le diagramme de phase détaillé dans l'espace des paramètres (f, w) est décrit dans la référence [3].

3 Limite du potentiel de contact

L'étude menée ci-dessus peut-être fait dans la limite d'un potentiel d'adhésion de type adhésion de contact. On considère dans ce cas que l'énergie d'adhésion est proportionnelle à la longueur de la poutre en contact avec le substrat. L'énergie totale du système s'écrit maintenant:

$$E = \frac{1}{2} \int_{s_0}^1 \dot{\theta}^2 ds - ws_0 - fy(1), \quad (5)$$

où s_0 représente l'abscisse curviligne du point de décollement de la poutre. La minimisation de la fonctionnelle d'énergie aboutit au système d'équations suivant:

$$\ddot{\theta} = -f \cos(\theta), \quad \dot{y} = \sin \theta. \quad (6)$$

Les conditions aux limites sont: $\theta(s_0) = 0$, $\dot{\theta}(1) = 0$ et $\dot{\theta}(s_0) = \sqrt{2w}$ comme le démontrent [4, 15]. La résolution de ce système d'équations donne pour s_0 l'expression suivante: $s_0 = 1 - \int_0^{\theta(1)} \frac{\partial \theta}{\sqrt{2[w-f \sin(\theta)]}}$, où $\sin \theta(1) = \frac{w}{f}$. Pour $s > s_0$ le profil de la courbe est donné implicitement par $\int_{\theta(s)}^{\theta(1)} \frac{\partial \theta}{\sqrt{2[w-f \sin(\theta)]}} = 1 - s$, et pour $0 < s < s_0$ nous avons $\theta(s) = 0$. Comme le montre la figure 2, la courbe force-hauteur est monotone décroissante et la poutre se comporte comme un anti-ressort. Dans ce cas, la force est infinie lorsque $y(1)$ tend vers zero puisque nous sommes dans le cas d'un potentiel de contact. Ce résultat est conforme à la limite de ϵ tendant vers zero dans le modèle d'une adhésion de type van der Waals (résultats non présentés ici voir [3]). La poutre se comportant comme un anti-ressort, il existe une force minimale critique de décollement f_m .

4 Effet de la gravité et illustration expérimentale

En présence d'un champ de gravité l'énergie adimensionnée est

$$E = \frac{1}{2} \int_{s_0}^1 \dot{\theta}^2 ds - ws_0 - fy(1) + \alpha_g \int_{s_0}^1 y(s) ds + \int_{s_0}^1 \gamma(s) [\dot{y} - \sin \theta] ds \quad (7)$$

où s_0 représente l'abscisse curviligne du point de décollement de la poutre. Nous avons trois paramètres sans dimensions $\alpha_g = \frac{\rho g L^3}{\kappa}$, $f = FL^2/\kappa$ et $w = WL^2/\kappa$. La minimisation de la fonctionnelle d'énergie aboutit au système d'équations suivant:

$$\ddot{\theta} = -\gamma(s) \cos(\theta), \quad \dot{\gamma} = \alpha_g, \quad \dot{y} = \sin \theta. \quad (8)$$

Les conditions aux limites sont: $\theta(s_0) = 0$, $\dot{\theta}(s_0) = \sqrt{2w}$, $\gamma(1) = f$ et $\dot{\theta}(1) = 0$. La résolution numérique de ce système d'équation permet d'obtenir les profils de la poutre selon la hauteur imposée. La figure 3 montre le profil d'une poutre à laquelle trois différentes hauteurs ont été imposées. Plus la hauteur imposée est grande, moins la force à l'extrémité est grande. Cependant, lorsque la hauteur de l'extrémité $y(1)$ est suffisamment grande apparaît une branche de solutions de type ressort qui est la conséquence des effets de la gravité. Ce comportement est illustré sur la figure 5.

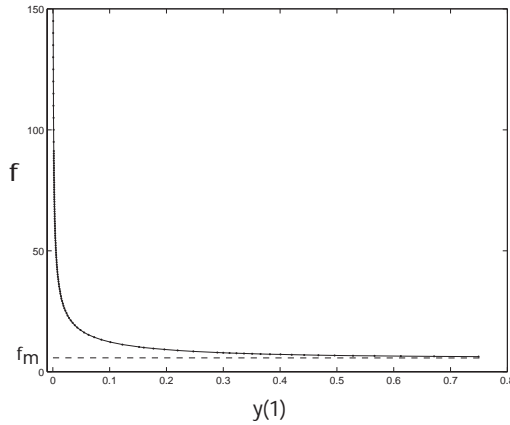


FIG. 3 – Courbe force-hauteur théorique pour $w = 6$ dans le cas du potentiel de contact, obtenue par résolution analytique des équations (6). f_m est la force minimale au décollement.

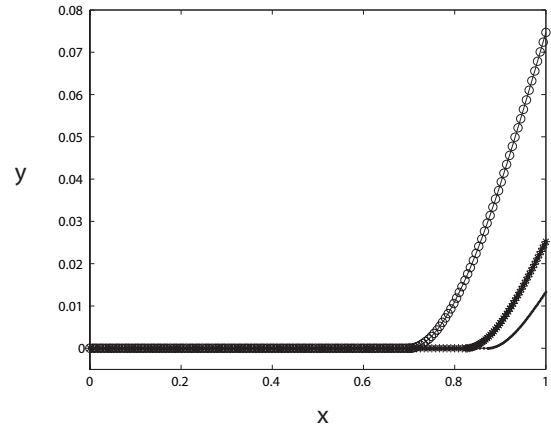


FIG. 4 – Profil de la poutre pour $w = 3$, $\alpha_g = 10$ obtenue par résolution numérique des équations (8). Courbe (—) pour $f = 20$, courbe (*) pour $f = 15$, courbe (o) pour $f = 10$. La branche de solution à laquelle appartiennent ces solutions est de type anti-ressort.

Pour mettre à l'épreuve le modèle de l'elastica pesant, nous menons actuellement, en collaboration avec E. Perez et F. Pincet du Laboratoire de Physique Statistique (ENS-Paris), une expérience de traction de poutre en adhésion. Les poutres sont composées d'un élastomère (PDMA) et mesurent 0.78mm de diamètre et 7cm de longueur. Une fibre de verre de $10\mu\text{m}$ de diamètre est collée à l'extrémité mobile de la poutre. La rigidité de la fibre étant négligeable devant celle de la poutre, nous nous assurons que la force d'étirement n'a pas de composante horizontale en vérifiant que la fibre de verre est toujours verticale. La poutre est initialement déposée sur une lame de microscope sur laquelle elle adhère. La hauteur de la poutre est ensuite augmentée et le profil correspondant à chaque hauteur est photographié. La Figure 4 est une image expérimentale montrant la poutre en adhésion sur la lame de microscope et le témoin assurant la verticalité de la force d'étirement. Une étude quantitative est en cours.

5 Conclusion

Nous avons étudié le décollement d'une poutre à section indéformable en adhésion sur un substrat lisse soumise à une force d'étirement verticale. Nous avons montré qu'il existe une branche de type ressort et une branche de type anti-ressort lorsque l'adhésion est décrite par un potentiel de type van der Waals. Dans la limite d'une adhésion de contact, la branche ressort disparaît. La prise en compte de la pesanteur, permet la mise en évidence d'une branche de type ressort lorsque la hauteur d'étirement est suffisamment grande. Une comparaison quantitative avec l'expérience est en cours.

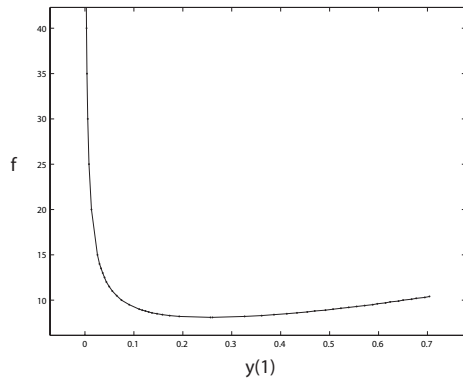


FIG. 5 – Courbe force-hauteur pour $w = 3$ et $\alpha_g = 10$ obtenue par résolution numérique des équations (8). Dans un premier temps, la courbe est décroissante (branche anti-ressort) puis croissante (branche ressort) à cause des effets de la gravité.

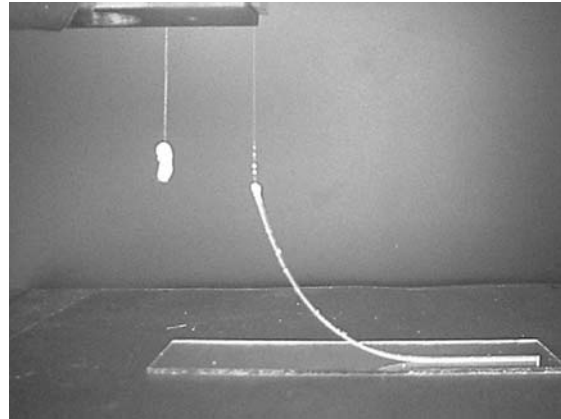


FIG. 6 – Photographie de l'expérience d'étirement d'une poutre de PDMA adhérent sur du verre. Collée à la poutre, on voit la fibre de verre de rigidité négligeable et à côté de la poutre on distingue le témoin de verticalité. Réalisée en collaboration avec E. Perez et F. Pincet.

Références

- [1] J. N Israelachvili, *Intermolecular and Surface Forces*, Academic Press, New York, (1992).
- [2] D. E. Smith, S.J. Tans, S.B. Smith, S. Grimes, D. L. Anderson et C. Bustamante, *Nature* **413**, 748 (2001).
- [3] M. Rief, H. Clausen-Schauman et H.E. Gaub, *Nature Strut. Biol.*, **6**, 346, (1999).
- [4] J. W. Obreimoff, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **127**, 290, (1930).
- [5] K. L. Johnson, K. Kendall et A. D. Roberts, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **324**, 301 (1971).
- [6] D. Maugis et J. Colloid, *Interface Sci.*, **150** (1), 243, (1992).
- [7] P. Attard, *Phys. Rev. E*, **63**, 011601 (2000).
- [8] P. Attard et J. L. Parker, *Phys. Rev. A*, **46**, 7959, (1994).
- [9] A. Ghatak, M. K. Chaudhury, V. Shenoy et A. Sharma, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 4329 (2000).
- [10] R. H. Plaut, A. J. Dalrymple et D. A. Dillard, *J. Adhesion Sci. Technol.*, **15**, 5, 565 (2001).
- [11] J. Bico, B. Roman, L. Moulin et A. Boudaoud, *Nature*, **432**, 690 (2004).
- [12] L. Euler, *De curvis elasticis*, Lausanne (1744).
- [13] L. D. Landau et E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Pergamon, New York (1959).
- [14] J. N Israelachvili, *Intermolecular and Surface Forces*, Academic Press, New York (1992).
- [15] U. Seifert, *Phys. Rev. A*, **43**, 6803 (1991).
- [16] X. Oyharcabal et T. Frisch, *Peeling-off an elastica from a smooth attractive substrate*, *Phys. Rev. E*, A paraître.

Interféromètre radio-fréquence réalisé en optoélectronique, application aux communications sécurisées par chaos

A. Pallavisini, L. Larger, V. Udaltsov
GTL-CNRS Telecom / UMR FEMTO-ST 6174
2-3, rue Marconi 57070 Metz
apallavi@georgiatech-metz.fr

Résumé

Les premiers systèmes de cryptographie par chaos en électronique étaient pénalisés en termes de niveau de confidentialité par la faible dimension de la dynamique chaotique utilisée : une réalisation électronique du système de Lorenz. Des systèmes optiques ont ensuite permis un renouveau de cette application originale, grâce à l'utilisation de dynamiques non linéaires à retard, dont les dimensions d'attracteur étrange peuvent atteindre plusieurs centaines. Nous proposons une transposition originale dans le domaine des radio-fréquences, de ces dynamiques optiques à retard appliquée à la cryptographie par chaos.

Abstract

The first chaos based cryptographic systems suffered in terms of security from the low dimensional chaos initially involved: a Lorenz-type electronic oscillator. Later, optical demonstrators gave a second impulse to the field of chaos secure communications through the use of nonlinear delay dynamics to provide chaotic oscillations; chaotic attractor dimensions of several hundreds were achieved. We propose an original transposition of the same principles in the field of radio-communication systems.

1 Introduction

Une dynamique non linéaire à retard peut être assez simplement réalisée en organisant quelques éléments clés en boucle d'oscillation : une transformation non linéaire, un retard temporel en général grand devant le temps caractéristique de la dynamique limitante (e.g. un filtre linéaire), et un amplificateur rebouclé sur la fonction non linéaire. Dans la perspective d'une réalisation expérimentale, le principal problème réside en général dans la manière de mettre en œuvre la transformation non linéaire. Une solution élégante et efficace retenue dans de nombreux montages optiques consiste en l'utilisation d'un interféromètre accordable par voie électro-optique [1], ou optoélectronique [2]. Dans le cas le plus simple d'un interféromètre à deux ondes, nous obtenons une fonction non linéaire périodique de type *sinus*. De plus l'utilisation, d'une fibre optique permet très facilement de réaliser un retard temporel correspondant au temps de propagation dans la longueur de la fibre. Nous avons cherché à appliquer ces mêmes principes au domaine de l'électronique radio-fréquence (RF). Le but final est de montrer la faisabilité d'un système de communication radio à base d'une porteuse chaotique de très grande dimension, grâce à l'utilisation d'une dynamique à retard réalisée dans le domaine RF.

Toutefois, le passage de l'optique à l'électronique RF n'est pas immédiat, du fait de la grande différence des ordres de grandeur mis en jeu lors d'un phénomène d'interférence. Là où une distance physique de l'ordre du micron suffit à faire passer la

condition d'interférence de destructif à constructif dans le domaine optique (fréquences de l'ordre 200 THz), plusieurs dizaines de centimètres sont nécessaires dans le domaine radio (si $f = \omega/(2\pi) \simeq 1$ GHz, comme dans le cas qui nous concerne). La méthode de balayage dynamique de cette interférence — typiquement en $\sin^2(\omega\Delta/c)$ où Δ est la différence de marche entre les deux chemins de l'interféromètre — doit également être adaptée par rapport à la situation optique (pour laquelle des phénomènes électro-optiques sont utilisés pour agir sur Δ). Il sera en effet plus judicieux d'agir sur la fréquence RF $f = \omega/(2\pi)$ pour balayer la fonction *sinus*: la fréquence devenant une variable dynamique, nous serons amenés à réaliser une dynamique chaotique en modulation RF de fréquence (FM).

2 Description de l'oscillateur chaotique en fréquence

Dans le domaine des applications domestiques, la majorité des transmissions hertziennes sont effectuées pour des fréquences égales à 433 MHz; elles sont entre 900 MHz et 2 GHz pour la téléphonie mobile, et à des fréquences beaucoup plus importantes pour des transmissions par satellites. Nous nous sommes attachés à la réalisation d'un oscillateur chaotique FM dans une gamme de fréquences entre 1 GHz et 1.5 GHz, donc a priori utilisable dans le cas de la téléphonie mobile.

2.1 Synoptique de l'ensemble de l'oscillateur

Le générateur de chaos en fréquence représenté à la figure 36.1(a) est constitué d'une fonction non-linéaire, d'un retard temporel, d'un filtre passe-bande, d'un amplificateur à gain variable, et d'un convertisseur tension / fréquence (VCO sur la figure) permettant d'obtenir la variable dynamique (la fréquence) à partir d'une tension issue de la chaîne d'oscillation électronique. Ces fonctions sont organisées en une boucle fermée formant ainsi un oscillateur, avec lequel nous espérons atteindre des régimes chaotiques lorsque le gain de la boucle d'oscillation est suffisamment élevé (excitation d'une plage suffisamment non linéaire de la fonction d'interférence).

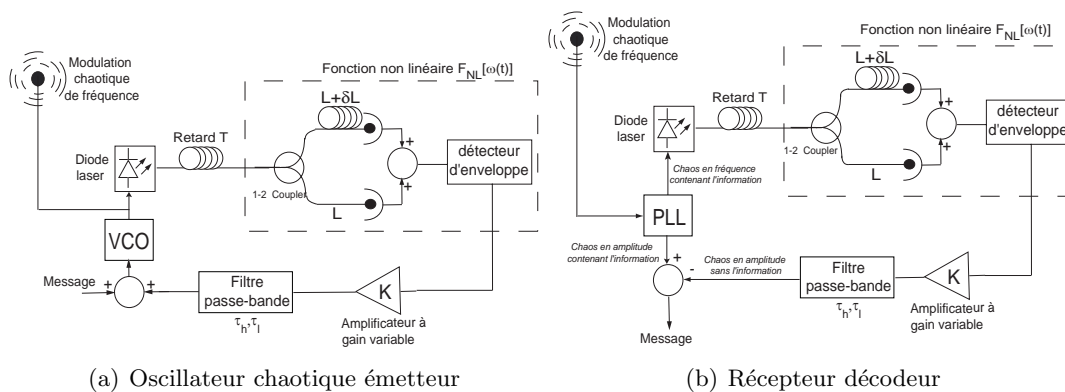


FIG. 1 — Synoptique du système de communication radio sécurisé par chaos

2.2 Interférences RF opto-électroniques

Les interférences RF réalisent la fonction non-linéaire $v(t) = F[\omega(t)]$, où ω est la pulsation RF fournie par le VCO (correspondant à des fréquences de l'ordre de 1.5 GHz),

et v est une tension issue de la détection d'une valeur moyenne de l'interférence. Comme déjà indiqué, la condition d'interférence est modifiée en modulant la fréquence RF. L'amplitude de cette modulation est limitée avec les composants utilisés à une centaine de MHz, et cette limite conjuguée à la contrainte de pouvoir balayer plusieurs extrema de la fonction d'interférence en *sinus*, impose la géométrie de l'interféromètre en termes de différence δL de longueur de bras de l'interféromètre. Avec les valeurs numériques données ($f_0 = \omega_0/(2\pi) \simeq 1.5$ GHz et $\Delta f = \Delta\omega/(2\pi) \simeq 100$ MHz), il est nécessaire d'avoir environ 5 m de différence de marche entre les 2 bras de l'interféromètre. Ces bras sont pratiquement réalisés par des coupleurs optiques fibrés et des fibres optiques. L'extrémité de chaque bras est terminée par une photodiode afin de récupérer la modulation RF de l'onde optique, qui provient initialement du signal RF (sortie FM du VCO) appliqué en modulation directe d'une diode laser (voir la figure 36.1(a)). À la sortie des photodiodes, le moyennage des interférences RF est réalisé par un détecteur d'enveloppe quadratique, qui gomme la porteuse RF pour ne conserver pratiquement que les composantes fréquentielles dite "de la bande de base", et liées à la vitesse de la modulation FM.

La fonction non linéaire $F[\omega]$ est finalement de la forme :

$$F[\omega] = \frac{\kappa^2 V_0^2}{4} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2n \delta L}{c} \cdot \omega \right] \right\} = \frac{\kappa^2 V_0^2}{4} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2n \delta L}{c} \cdot \Delta\omega + \phi \right] \right\}, \quad (1)$$

où κ est un gain opto-électronique prenant en compte les divers coefficients de conversion entre l'électronique et optique à l'entrée et à la sortie de la partie optique de l'interféromètre. La fréquence angulaire instantanée du signal FM produit par le VCO est notée $\omega(t) = \Delta\omega(t) + \omega_0$, où ω_0 est la pulsation RF centrale et $\Delta\omega(t)$ est la déviation. Le paramètre $\phi = 2n \delta L \omega_0 / c$ est un déphasage réglable par l'intermédiaire de la fréquence centrale du VCO.

2.3 Définition des paramètres temporels et de l'amplification du système

L'extension spectrale du signal en "bande de base" de l'oscillateur (le spectre des variations de fréquences), est typiquement déterminé par deux éléments : d'une part il y a la dynamique limitante de la chaîne d'oscillation, c'est-à-dire le filtre passe-bande dont le rôle est d'atténuer toutes les composantes spectrales en dehors de sa bande ; et d'autre part, il y a le gain de la boucle d'oscillation qui, au contraire, a pour but d'amplifier toutes les fréquences présentes dans la boucle, en leur donnant une amplitude suffisante pour exciter au travers des effets non linéaires de la fonction d'interférence, de nouvelles composantes spectrales en dehors de la bande passante du filtre. Plus le gain est élevé, plus le spectre d'une dynamique chaotique est étendu, résultat de la compétition entre le filtrage "dissipatif" de fréquences élevées, et la non linéarité génératrice de fréquences harmoniques. La dynamique limitante correspond pratiquement à un filtre électronique passe-bande du second ordre, dont les fréquences de coupure basse et haute sont respectivement $(2\pi\tau_1)^{-1} = 10$ kHz et $(2\pi\tau_2)^{-1} = 5$ MHz.

Le retard temporel T quant à lui, a un rôle qui peut être interprété de diverses manières. C'est tout d'abord une mémoire intrinsèque de l'oscillateur, qui lui confère son caractère de dynamique à espace des phases infini. Il doit être grand devant le temps caractéristique τ_2 correspondant à la coupure haute de la dynamique limitante passe-bande, de manière à pouvoir contenir un nombre important d'oscillations élémentaires de durée τ_2 . C'est aussi un retard, qui lorsqu'il est grand devant τ_2 , définit un grand nombre

de modes propres d'oscillation (un retard est linéairement déphasant, et si $T \gg \tau_2$, il y a un grand nombre de fréquences qui peuvent être en phase après un tour dans la boucle d'oscillation). Ce retard est réalisé dans la partie optique du montage, à l'aide d'une fibre optique de 2 km permettant d'obtenir un retard $T = 10 \mu\text{s} \gg \tau_2 = 30 \text{ ns}$.

2.4 Modèle dynamique de l'oscillateur

L'ensemble des éléments décrits précédemment est placé en boucle fermée. Le système est ainsi caractérisé par une équation différentielle non-linéaire à retard de la forme :

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 \Delta\omega}{dt^2}(t) + (\tau_1 + \tau_2) \frac{d\Delta\omega}{dt}(t) + \Delta\omega(t) = \beta \tau_1 \frac{dF[\Delta\omega]}{dt}(t - T), \quad (2)$$

où β est un gain normalisé comprenant les différents facteurs de conversion (bande de base, FM, optique, électrique, ...) et les différents gains électroniques. Par l'intermédiaire d'un amplificateur à gain variable dans la boucle d'oscillation, il est possible de contrôler linéairement ce gain normalisé, et ainsi d'explorer les différents régimes dynamiques possibles en fonction de gain.

3 Comportements dynamiques

3.1 Diagrammes de bifurcation

Afin d'éprouver la validité du modèle dynamique relativement simple de l'équation (2), nous avons relevé des diagrammes de bifurcation expérimentaux en fonction du paramètre β "gain de la boucle", et pour deux valeurs différentes du paramètre ϕ .

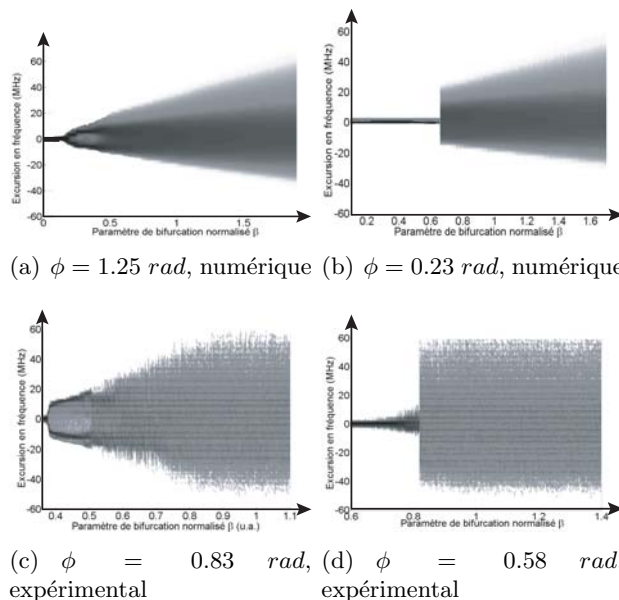


FIG. 2 – Diagramme de bifurcation pour différentes valeurs de déphasage

Nous avons ensuite calculé ces mêmes diagrammes dans des conditions paramétriques similaires, à partir de l'intégration numérique du modèle (méthode de Runge–Kutta d'ordre 4 à pas constant d'environ $0.02 \times \tau_2$). La méthode de représentation de ces diagrammes n'est pas académique puisqu'elle ne fait pas intervenir de coupe de Poincaré. La raison

est liée au fait que le système développe des chaos extrêmement complexes de grande dimension, pour lesquels nous n'avons pas pu établir de section adaptée. Lors du tracé du diagramme, la signature considérée pour un régime dynamique donné est alors constituée par la densité de probabilité de la variable dynamique (ici la fréquence instantanée du signal FM). Cette densité de probabilité est codée en échelle de gris, et évaluée pour chaque échantillonnage du paramètre de bifurcation en abscisse. Les résultats sont représentés à la figure 2. Ils montrent une correspondance qualitative et quantitative satisfaisante, permettant d'espérer en une bonne adéquation entre modèle théorique et système expérimental. Il est à noter que ce système répond à un type particulier de dynamique à retard du fait de la présence du filtrage passe-bande. Cette particularité est soupçonnée conférer à ce type de dynamique un certain nombre de propriétés particulières non présentes dans les systèmes à retard plus classiques, en général décrits par des dynamiques limitantes de type passe-bas. Par exemple, la transition du point fixe s'effectue assez souvent directement vers un régime chaotique, sans nécessairement passer par des cycles limites. En particulier, des transitions en crise sont observées, pour lesquels le point fixe perd sa stabilité au profit d'un régime chaotique de forte amplitude. Des études théoriques plus détaillées sont en cours pour explorer ces transitions.

Il y a toutefois une caractéristique commune avec les dynamiques à retard passe-bas, qui concerne l'obtention pour les fortes valeurs du gain, de régimes chaotiques de grande complexité. Ce sont ces régimes qui sont plus particulièrement visés dans le contexte de l'application aux communications sécurisées par chaos.

3.2 Régimes chaotiques pour la sécurisation

La figure 3 représente différents relevés expérimentaux de trajectoires chaotiques du système dynamique, pour deux couples de valeurs des paramètres β et ϕ .

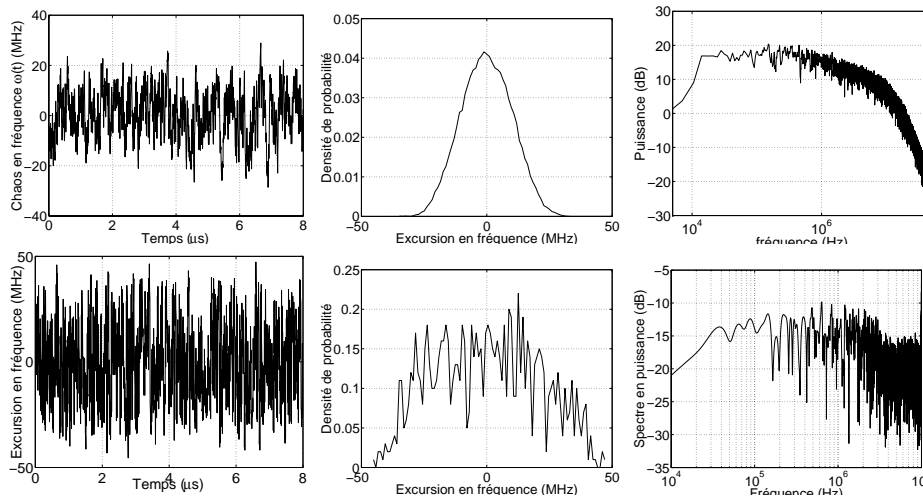


FIG. 3 – Signatures temporelle (gauche), statistique (milieu) et spectrale (droit). En haut : $\phi = 0.41$ rad et $\beta = 2.371$, numériques ; en bas : $\phi = 0.83$ rad et $\beta = 1.8$, expérimentales

Les relevés de gauches correspondent à des traces temporelles du signal en bande base ; on remarque que l'aspect temporel apparaît bien comme bruité. Les graphes situés au centre sont des histogrammes représentant la statistique de la déviation de fréquence

par rapport à la fréquence centrale du VCO ; on remarque également, pour les deux conditions paramétriques, des distributions relativement quelconque sans trace particulière de déterminisme. Enfin, les graphiques de droite sont les spectres des mêmes trajectoires, relevés en bande de base (correspondant par exemple à la tension de commande du VCO). Ces spectres ont une allure relativement constante sur l'ensemble de la bande passante de 10 kHz à 5 MHz environ. C'est à l'intérieur de ce pseudo bruit rose que l'on cherchera à noyer le spectre d'une information à coder sur la porteuse chaotique.

4 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté les premiers résultats d'un nouveau générateur de chaos basé sur une dynamique non linéaire à retard impliquant un processus dynamique passe-bande. Le système opto-électronique proposé est capable de produire un signal radio-fréquence à modulation de fréquence chaotique. Il implique une transformation non linéaire originale consistant en un interféromètre radio-fréquence, dont la condition d'interférence est modulée par la variation de la fréquence de la porteuse RF. Les signaux obtenus ont montré un bon caractère aléatoire et bruité, qui semble les rendre apte à masquer correctement une information. La prochaine étape du travail consistera à appairer les éléments d'un récepteur / décodeur de signal sécurisé par chaos, avec une architecture du type de celle représentée à la figure 36.1(b). Une fois le récepteur apparié, un processus de réplication de chaos [3, 4] devra permettre de reproduire au niveau du récepteur, la porteuse chaotique sans le message ; ensuite, une simple soustraction entre le signal chaotique local et celui détecté et venant de l'émetteur aboutira à la restitution de l'information codée par chaos.

Les auteurs remercient la Communauté Economique Européenne pour le soutien de cette activité de recherche dans le cadre du contrat FET-IST-2000-29683 "OCCULT".

Références

- [1] H. M. Gibbs, F. A. Hopf, D. L. Kaplan, and R. L. Schoemaker, *Observation of chaos in optical bistability*, Phys. Rev. Lett., **46**, 474 (1981).
- [2] L. Larger, J.-P. Goedgebuer, J.-M. Merolla, *Chaotic Oscillator in Wavelength: A New Setup for Investigating Differential Difference Equations Describing Nonlinear Dynamics*, IEEE J. of Quantum Electron., **34**, 594 (1998).
- [3] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Synchronisation in Chaotic Systems* Phys. Rev. Lett., **64**, (1990)
- [4] J.-P. Goedgebuer, L. Larger, H. Porte, *Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laser diode*, Phys. Rev. Lett., **80**, 2249 (1998).

Transition au chaos spatio-temporel dans une expérience d'hydrodynamique à deux dimensions

C. Pirat, A. Naso, J.-L. Meunier, C. Mathis et P. Maissa

Institut Non Linéaire de Nice

1361, Route des Lucioles, 06560 Sophia Antipolis

`Christophe.Pirat@inln.cnrs.fr`

Résumé

Nous étudions la transition au chaos spatio-temporel dans une expérience d'hydrodynamique à deux dimensions où des colonnes de liquide apparaissent lors de la déstabilisation d'un film fluide sous l'effet de la gravité [14]. Le film, continuellement alimenté, se forme sous une grille plane et horizontale qui joue le rôle d'un poreux. Ce système est soit dans un état ordonné (sur un réseau hexagonal), soit dans un état désordonné, suivant le débit d'alimentation. Pour la première fois dans un système initialement structuré, nous observons une transition sous-critique vers le chaos spatio-temporel via intermittence spatio-temporelle. Nous faisons une étude statistique des nombres, des créations et des fusions de colonnes et mettons en évidence un comportement critique proche de celui de la percolation dirigée.

Abstract

We study the transition to spatiotemporal chaos in a two-dimensional hydrodynamic experiment where liquid columns take place due to the gravity induced destabilization of a liquid film [14]. The film, continuously supplied, takes place under a plane et horizontal grid used as a porous media. This system can be in an ordered state (on a hexagonal lattice), or in a disordered state, depending on the flow rate. For the first time in an initially structured system, we observe a subcritical transition to spatiotemporal chaos via spatiotemporal intermittency. We make the statistic of the numbers, the creation et fusion rates et we exhibit a critical behavior close to the directed percolation one.

1 Introduction

De nombreuses études ont porté sur l'apparition du désordre spatio-temporel dans les systèmes spatialement étendus depuis les années 80. En particulier, on a observé la transition de l'état laminaire à l'état chaotique via *intermittence spatio-temporelle* (IST) [1] dans plusieurs systèmes unidimensionnels (1D), et numériquement (réseaux d'applications couplées [2, 3], EDP [4, 5]) et expérimentalement [6, 7, 8]. La transition au chaos via IST a été également étudiée dans les systèmes à deux dimensions (2D) en partant d'états laminaires spatialement homogènes [9, 10]. En 1986, Pomeau a mis en lumière [11] l'analogie entre le mécanisme d'IST et la percolation dirigée (DP), un modèle stochastique de processus de contamination qui prédit que la fraction de domaines turbulents (F_t) évolue comme une fonction de l'écart au seuil ε selon une loi de puissance ε^β . Dans ce papier, nous étudions la transition au chaos via IST dans un système 2D dont l'état laminaire est un réseau hexagonal de colonnes de fluide, et dont le turbulent est caractérisé par des créations et fusions de colonnes. Nous observons directement la coexistence des zones laminaires et turbulentes, fluctuant stochastiquement dans l'espace et le temps. Nous proposons ici d'étudier des observables fortement associés à l'évolution du système,

tel le nombre de colonnes et leurs taux de création et fusion, ces derniers nous permettant d'estimer F_t .

Nous rapportons des résultats expérimentaux sur la transition laminaire/turbulent, concernant la dynamique de colonnes liquides sous un plan poreux horizontal alimenté en continu. Nous suivons et dénombrons toutes les colonnes dans le plan de la grille ainsi que les créations et fusions induites par la dynamique. Comme à 1D [12], deux états distincts caractérisent dynamiquement le système : un état laminaire et un autre associé à un désordre intrinsèque auto-organisé. Néanmoins, la situation est différente puisque l'état turbulent apparaît via IST dans notre système au lieu du "defect mediated turbulence" [13], un mécanisme dans lequel la coexistence de "patches" laminaires et turbulents n'existe pas. De plus, dans notre cas, les deux états ne communiquent pas sans intervention extérieure. L'état désordonné est davantage un état thermodynamique, chauffé par un bruit de phase du type "turbulent". Cette transition de l'état laminaire vers le turbulent est sous-critique et montre les traits caractéristiques d'une transition du premier ordre, incluant hystérésis et bistabilité dues à la compétition entre les écoulements laminaires et turbulents.

2 Etude expérimentale

2.1 Montage expérimental

Le dispositif expérimental, décrit dans [14], consiste en une grille d'acier plane et circulaire, utilisée comme un milieu poreux et fixée horizontalement au fond d'une chambre cylindrique. Le fluide entrant produit un écoulement uniforme et laminaire à travers toute la grille à un débit constant et bien contrôlé q et alimente un film fluide situé sous la grille. Du fait de la compétition entre la gravité et la tension de surface [15], l'écoulement est caractérisé par une grande variété de structures spatio-temporelles. Pour un débit croissant, on peut observer des gouttes, des colonnes de liquides ou des nappes [16]. Nous concentrons notre attention sur le régime de colonnes (voir Fig. 1(a)) rencontré pour une viscosité $\nu > 40$ cSt. Il a été montré en [14] qu'une organisation hexagonale stationnaire avec une longueur d'onde λ (instabilité de Rayleigh-Taylor (RT) avec flux), un état laminaire, existe généralement sur une plage donnée de débit pour chaque viscosité. Pour des valeurs plus élevées du débit, on peut observer la disparition de l'ordre spatial associé à l'évolution chaotique de la position des colonnes.

La surface d'écoulement est de 200 cm^2 . Nous avons utilisé de l'huile de silicone avec une viscosité $\nu = 50$ et 100 cSt , une densité $\rho = 0.97 \text{ g/cm}^3$ et une tension de surface $\gamma = 21 \text{ dyn.cm}^{-1}$. Nous présentons ici les résultats obtenus pour $\nu = 50 \text{ cSt}$, mais nous

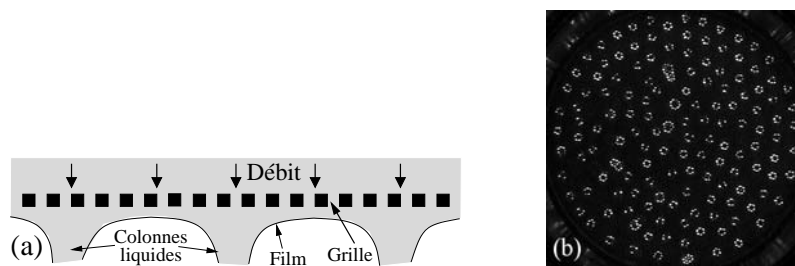


FIG. 1 – (a) Représentation schématique de l'écoulement, (b) une vue typique.

avons qualitativement obtenu les mêmes résultats pour une huile de 100 *cSt*. Un éclairage périphérique nous permet de voir, par le dessus, à travers les trous de la grille, la variation locale de la courbure du film, en utilisant la réfraction de la lumière par l'huile: les colonnes de liquide apparaissent comme de petits anneaux brillants (les objets) (voir Fig. 1(b)). Ces objets sont filmés à une fréquence de 25 images/sec avec une caméra CCD connectée à un ordinateur pour capture vidéo et traitement. Les données sont enregistrées dans des séquences de 32 minutes pour chaque débit (48000 images, environ 7 millions d'objets détectés). Un traitement d'image *ad hoc* permet de faire une détection individuelle de chaque objet, de les compter et d'enregistrer leurs positions à chaque image. Les résultats sont issus du traitement réalisés pour sept débits.

2.2 Observations

L'état de chaos spatio-temporel est caractérisé la variation du nombre N de colonnes, de taille identique et constante (excepté lors d'un bref transitoire lors des créations ou fusions). Selon la densité locale instantanée de ces objets (voir Fig. 1(b)), on peut observer une fusion lorsque deux colonnes se rencontrent, se combinent puis forment une seule colonne identique à toutes les autres, ou une création dans une zone de densité temporairement faible. Ces deux processus agissent en permanence sachant que le nombre de colonnes fluctue autour d'une valeur moyenne pour un débit fixé. Nous avons trouvé un débit critique q_c ($q_c = 31 \pm 2 \text{ cm}^3/\text{s}$) tel que cet état est stable en regard de perturbations externes d'amplitude finie si $q < q_c$ et instable si $q > q_c$ (mais reste stable vis à vis de perturbations infinitésimales (linéairement stable) pour un intervalle de valeurs de q). Ainsi la transition de l'état laminaire à l'état désordonné apparaît être du premier ordre. Dans la suite, nous utiliserons le paramètre de contrôle $\varepsilon = \frac{q - q_c}{q_c}$ et le nombre réduit de colonnes de liquide N/N_{lam} . Considérons la situation dans laquelle $\varepsilon > 0$ lorsque le système a quitté l'état laminaire. Pour ε croissant, le désordre augmente progressivement en utilisant le mécanisme d'IST, le système devenant entièrement chaotique (CST) pour $\varepsilon > \varepsilon_2$ (voir Fig. 2(a)). Pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, il existe une bistabilité entre l'IST (Fig. 2(b)) et un état quasi-laminaire pour lequel le cœur est stationnaire et hexagonal et où les colonnes périphériques glissent erratiquement le long de la frontière, avec des mécanismes de création et de fusion. Ce dernier régime est dû à la compétition entre réseau hexagonal et contrainte circulaire.

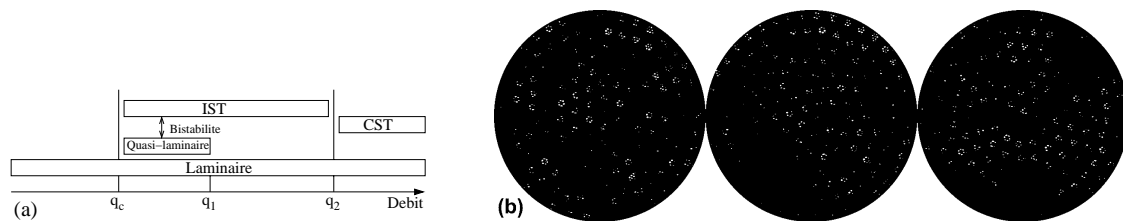


FIG. 2 – (a) Diagramme de phase schématique en fonction du débit. La viscosité est de 50 *cSt*. (b) IST à trois instants différents pour $\varepsilon = 0.72$: chaque vue est le résultat d'une moyenne temporelle sur 4s (100 images) afin de distinguer les zones laminaires (objets brillants) et turbulentes (zones sombres).

3 Résultats

3.1 Diagramme de phase

La caractérisation quantitative de la transition passe par l'étude de la statistique du nombre N de colonnes du système. La Fig. 3 représente la distribution de N/N_{lam} pour différentes valeurs de ε . Les distributions bimodales Fig. 3(b) et (c) illustrent la bistabilité entre l'état quasi-laminaire (petit pic, grandes valeurs de N) et celui plus désordonné (grand pic, petites valeurs de N). Le nombre moyen d'objets décroît clairement avec ε croissant, et N est toujours plus petit que N_{lam} . L'organisation hexagonale avec une longueur d'onde λ permet l'arrangement autorisé le plus compact des colonnes de liquide. Nous choisissons $\langle 1 - N/N_{lam} \rangle$ comme paramètre d'ordre ($\langle \rangle$ indique une moyenne temporelle), qui nous permet de tracer le diagramme de phases du système (voir Fig. 4). Dans ce diagramme, les deux états métastables sont séparés en distinguant les contributions des deux pics avec $N/N_{lam} = 0.93$ comme coupure entre eux (voir Fig. 3(b) et (c)) respectivement pour $\varepsilon = 0.21$ et $\varepsilon = 0.47$. Pour $\varepsilon = 0.05$, il n'est pas possible de séparer les deux états: ce régime apparaît comme un mélange des deux, le désordre venant essentiellement de la frontière, avec des intrusions intermittentes (des "bursts") vers le centre du système. Ce paramètre d'ordre permet une détermination claire de la zone bistable.

3.2 Taux de création et de fusion

La compétition entre créations et fusions de colonnes gouverne la dynamique de N . Ce type de comportement (créations, mouvements et fusions d'objets incessants) est caractéristique de ce type de défauts topologiques [17]. Pour cette raison, nous définissons le taux de création temporel moyen dans un système avec N objets par $\Gamma_+(N) = \langle C_i \rangle_N$ et celui de fusion par $\Gamma_-(N) = \langle F_i \rangle_N$ où C_i est F_i sont respectivement les nombres de créations et de fusions entre les images i et $i+1$ et où $\langle \rangle_N$ indique la moyenne sur toutes les images i où N_i , le nombre de colonnes, vaut N . Ici, les taux d'entrée et de sortie sont nuls puisque les objets ne peuvent que glisser sur la frontière. Nous présentons la méthode employée et nos résultats: pour chaque image nous considérons chaque colonne liquide et,

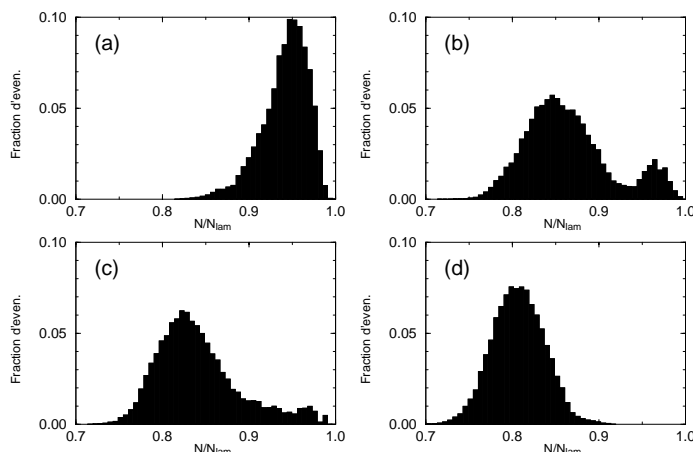


FIG. 3 – Distribution du nombre de colonnes de liquide en unité réduite N/N_{lam} pour $\varepsilon =$ (a) 0.05, (b) 0.21, (c) 0.47 et (d) 0.72. Lorsque $\varepsilon \geq 0.72$, la distribution reste qualitativement identique, seule la moyenne est une fonction décroissante de ε .

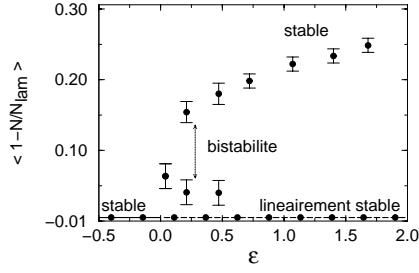


FIG. 4 – Diagramme de phase du système. L'état laminaire (ligne $\langle 1 - N/N_{lam} \rangle = 0$) est stable pour $\varepsilon < 0$ et linéairement stable pour $\varepsilon > 0$. Dans ce cas, suite à une perturbation d'amplitude finie, le système se déstabilise. Pour ε près du seuil il développe une bistabilité entre les branches haute (état désordonné avec IST) et basse (état quasi-laminaire). Pour des ε plus grands il évolue sur la branche haute, la seule stable, le système devenant complètement turbulent pour $\varepsilon > \varepsilon_2$.

en comparant sa position avec celles des colonnes de l'image précédente ($\Delta t = 1/25$ s), déterminons si cet objet est nouveau (juste créé), ou le résultat d'une fusion de deux objets (conduisant à la décroissance d'une unité), ou un objet qui a seulement bougé. Les durées de création et de fusion sont plus grandes que Δt (environ 3 à 4 fois). Le critère que nous avons choisi est le suivant: nous calculons la distance entre tous les objets de l'image précédente et celui considéré, notant $d_1 < d_2 < d_3 < \dots$. Si $d_1 > v_{max} \Delta t$, nous supposons que l'objet vient juste d'être créé; si $d_2 < d_{min}$ alors nous supposons que l'objet est le résultat de la fusion de deux autres. Les valeurs de v_{max} et d_{min} ont été déterminées par des tests préliminaires. Les taux de création et de fusion sont montrés en fonction de N/N_{lam} (Fig. 5), dans deux états différents. Dans l'état désordonné (Fig. 5(b)), le taux de création décroît linéairement avec N ($\Gamma_+(N) = -\alpha_c N + \beta_c$), sauf pour les grandes valeurs de N (dans ce cas, les effets de bord deviennent plus importants). L'intersection des deux courbes correspond au maximum de la distribution de N . Dans l'état bistable (Fig. 5(a)) le taux de création évolue de la même façon que dans l'état désordonné et le taux de fusion caractérise les effets de premier ordre, en coupant trois fois celui de création. Ces trois points correspondent aux deux maxima et au minimum de la distribution de N .

3.3 Degré moyen de désordre et fraction turbulente

Ces nombres de créations et fusions sont également associés à une autre mesure du désordre puisqu'elles apparaissent seulement dans les régions désordonnées. Nous avons

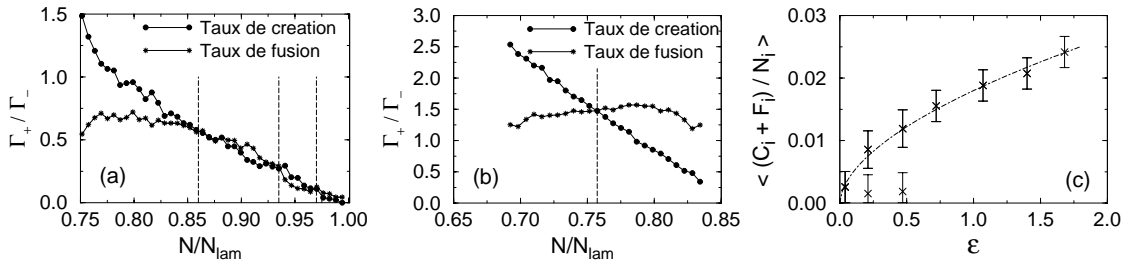


FIG. 5 – Taux de création et de fusion de colonnes de liquide en fonction de N/N_{lam} pour $\varepsilon =$ (a) 0.21 (état bistable), et (b) 1.69 (état chaotique). Les lignes en pointillés indiquent les maxima (gras) et le minimum (fin) des distributions en N correspondantes (cf Fig. 3(b) et qualitativement Fig. 3(d)). (c) Moyenne temporelle de la fraction de création et de fusion de colonnes en fonction de ε .

choisi de mesurer $\langle \frac{C_i + F_i}{N_i} \rangle$, où $\langle \rangle$ indique une moyenne temporelle, qui donne le degré moyen de désordre dans le système. En Fig. 5(c) est représentée l'évolution de cette moyenne en fonction de ε . Comme pour $\langle 1 - N/N_{lam} \rangle$, nous distinguons les deux états métastables dans la région de bistabilité. Les points expérimentaux de la branche du haut peuvent être convenablement ajustés par une loi de puissance dont l'exposant vaut 0.56 ± 0.05 . Considérant, en première approximation, que —au moins près du point critique— la densité de création/fusion est constante à l'intérieur des domaines agités dans le régime d'IST, et sachant que ces quantités sont nulles dans les régions laminaires, on peut supposer que la taille moyenne des domaines agités est proportionnelle au nombre moyen de ces événements. La branche du haut de la Fig. 5(c) reflète alors qualitativement le comportement de la fraction moyenne de domaines désordonnés F_t dans le régime d'IST; de même l'exposant mesuré est en bon accord avec $\beta = 0.58$ obtenu à partir d'un modèle de DP (2+1)D [18].

4 Conclusion

La transition au chaos spatio-temporel dans notre système a été caractérisée au moyen de deux paramètres différents. Nous avons démontré la nature sous-critique de cette transition et, proche du seuil, la présence de bistabilité entre IST et un état quasi-laminaire. Dans le régime d'IST, on a montré que la fraction turbulente, décrite en termes de créations/fusions d'objets, varie selon une loi de puissance dont l'exposant est proche de celui de (2+1)D DP. Toutes ces études ont été réalisées pour des viscosités pour lesquelles le désordre apparaît en augmentant le débit, mais pour d'autres valeurs de la viscosité le désordre ne peut survenir qu'en diminuant le débit[14]. Cet autre comportement est en cours d'étude.

Références

- [1] H. Chaté et P. Manneville. In P. Tabelling et O. Cardoso, editors, *Turbulence: A Tentative Dictionary*, page 111, Plenum Press, New York, (1995).
- [2] K. Kaneko. *Prog. Theor. Phys.*, **74**, 1033, (1985).
- [3] H. Chaté et P. Manneville. *Physica D*, **32D**, 409, (1988).
- [4] H. Chaté et P. Manneville. *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 112, (1987).
- [5] L. Gil. *Europhys. Lett.*, **48**, 156, (1999).
- [6] F. Daviaud, M. Dubois, et P. Bergé. *Europhys. Lett.*, **9**, 441, (1989).
- [7] M. Rabaud, S. Michalland, et Y. Couder. *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 184, (1990).
- [8] P. Rupp, R. Richter, et I. Rehberg. *Phys. Rev. E*, **67**, 036209, (2003).
- [9] H. Chaté et P. Manneville. *Europhys. Lett.*, **6**, 591–595, (1988).
- [10] S. Bottin, F. Daviaud, P. Manneville, et O. Dauchot. *Europhys. Lett.*, **43**, 171, (1998).
- [11] Y. Pomeau. *Physica D*, **23**, 3, (1986).
- [12] P. Brunet et L. Limat. *Phys. Rev. E*, **70**, 046207, (2004).
- [13] P. Couillet, L. Gil, et J. Lega. *Phys. Rev. Lett.*, **62**, 1619, (1989).
- [14] C. Pirat, C. Mathis, P. Maissa, et L. Gil. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 104501, (2004).
- [15] D. Sharp. *Physica D*, **12D**, 3, (1984).
- [16] <http://www.inln.cnrs.fr/~pirat>.
- [17] L. Gil, J. Lega, et J. L. Meunier. *Phys. Rev. A*, **41**, 1138, (1990).
- [18] H. Hinrichsen. *Adv. Phys.*, **49**, 815, (2000).

Doubles couches stables et instables dans la chambre de diffusion d'une décharge inductive basse pression en plasma électronégatif

N. Plihon, C.S. Corr, P. Chabert et J.L. Raimbault
Laboratoire de Physique et Technologie des Plasmas
Ecole Polytechnique, Route de Saclay, 91128 Palaiseau
plihon@lptp.polytechnique.fr

Résumé

Il est maintenant bien établi que les décharges inductives à basse pression, en présence d'ions négatifs, peuvent être soumises à deux types de fonctionnement instable: (1) des oscillations de relaxation entre deux modes de couplage de l'énergie électrique (capacitif et inductif), (2) une instabilité liée au transport des particules lorsque une chambre de diffusion est présente. Nous présentons des résultats expérimentaux montrant que l'instabilité de transport est liée à la présence d'une gaine interne (double couche) séparant deux plasmas. Cette double couche peut être stable sous certaines conditions. Cependant, pour la plupart des conditions, celle-ci se forme en sortie de la source et se propage lentement vers l'extrémité de la chambre de diffusion, de manière périodique.

1 Introduction et description du dispositif expérimental

1.1 Décharges basse pression électronégatives

La présence d'ions négatifs modifie grandement la structure électrique d'un plasma par rapport au cas électropositif. En particulier, dans les décharges à basse pression (de l'ordre du Pa - 1 mTorr = 0,13 Pa) plusieurs types de comportement non linéaires ont été observés: stratification d'un plasma confiné [1], instabilités d'ionisation induite par attachement [2], oscillations de relaxations entre modes de couplage de l'énergie [3, 4], et instabilités de transport des particules chargées [5]. La compréhension des décharges basse pression est un enjeu scientifique et industriel puisque les procédés de fabrication microélectronique (gravure, dépôt, traitement de surface) font largement appel aux gaz halogénés, fortement électronégatifs.

1.2 Dispositif expérimental

Le schéma du dispositif expérimental est donné en figure 1. Le réacteur est constitué de deux chambres: une source (cylindre en pyrex) entourée d'une antenne double selle à cheval [6] et d'un blindage radio-fréquence (rf) en aluminium, et une chambre de diffusion de longueur variable. L'antenne est alimentée par un générateur rf (13,56 MHz, 2kW) par l'intermédiaire d'une boîte d'accord en impédance en L (deux capacités variables en parallèle et en série permettent de fixer l'impédance vue par le générateur à 50 Ω). Le système de pompage permet d'atteindre de pressions résiduelles de 10^{-6} mbar. La décharge est opérée en mélange Argon/SF₆, gaz très fortement électronégatif.

Les paramètres plasmas sont mesurés par sondes électrostatiques (sonde de Langmuir compensée et sonde plane avec anneau de garde) [7]. L'analyse des caractéristiques de sondes est menée de telle sorte que les ions négatifs soient pris en compte. Les grandeurs

présentées dans cet article sont les densités d'électrons n_e , d'ions positifs n_+ , d'ions négatifs n_- , la température électronique T_e , le potentiel plasma V_p . L'électronégativité du plasma est mesurée par le rapport $\alpha = \frac{n_-}{n_e}$.

2 Régimes de fonctionnement de la décharge

L'analyse de la stabilité temporelle de la décharge a été menée dans le plan de paramètres (Pression, Puissance). Quatre types de fonctionnement ont été mis en évidence: régime capacitif faible densité électronique stable (le couplage de puissance au plasma est effectué par les champs directs, importants au voisinage de l'antenne), régime inductif haute densité électronique stable (couplage de puissance par les champs induits), relaxations d'oscillations entre les modes capacitifs (E) et inductifs (H), et instabilités de transport des particules chargées. La caractéristique principale de l'instabilité E/H est que les paramètres plasmas évoluent en phase partout dans la décharge, avec un taux de modulation uniforme et pouvant atteindre 100 %. L'instabilité de transport présente un maximum de modulation des paramètres dans la chambre de diffusion et les paramètres plasma n'évoluent pas en phase, montrant très clairement un phénomène propagatif. L'amplitude de la modulation n'est pas uniforme et les taux de modulations sont plus faibles.

Lorsque le plateau mobile est en position basse ($z = 0$ cm), la décharge est instable pour tous les paramètres accessibles. Lorsque le plateau mobile est en position haute ($z=26$ cm), l'instabilité de transport a disparu. Il est à noter que dans les deux cas, la zone du plan (Pression, Puissance) soumise aux oscillations E/H est fortement dépendante des conditions de l'accord en impédance (une décharge fortement désaccordée présentera un domaine d'instabilité plus important dans le plan).

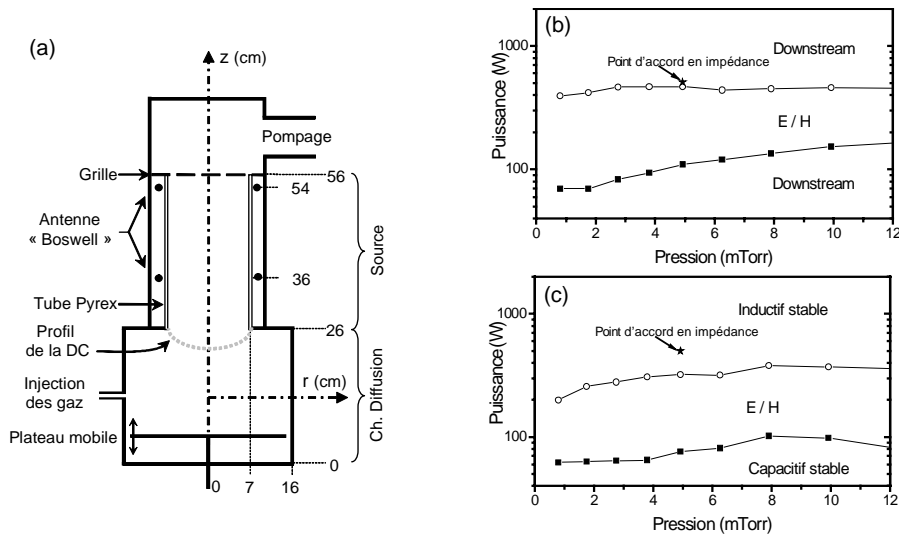


FIG. 1 – (a) Schéma du dispositif expérimental. Fenêtres de stabilité pour un mélange contenant 50% de SF_6 : (a) lorsque le plateau mobile est en $z = 0$ cm, (b) lorsque le plateau mobile est en $z = 26$ cm, i.e. sans chambre de diffusion. Dans les deux cas, les éléments de la boîte d'accord sont fixés tels que la puissance réfléchie soit minimisée à 5 mTorr, 500 W.

2.1 Relaxations d'oscillations E/H

Les fréquences typiques évoluent entre 1 et 5 kHz en fonction des conditions expérimentales. Pour certaines valeurs des paramètres de contrôle, il a été observé des phénomènes d'intermittence. Un modèle a été développé pour expliquer les cycles limites observés. La recherche des solutions du système d'équation $\{\partial_t n_e, \partial_t n_-, \partial_t(n_e T_e)\}$ en remarquant que trois échelles temporelles distinctes sont associées à chacune des grandeurs avec les relations d'ordre suivantes: $\tau_{n_e T_e} \ll \tau_{n_e} < \tau_{n_-}$, permet de modéliser les oscillations observées expérimentalement. Le lecteur intéressé pourra consulter [3, 4] pour une présentation détaillée, dont quelques résultats sont présentés en figure 2.

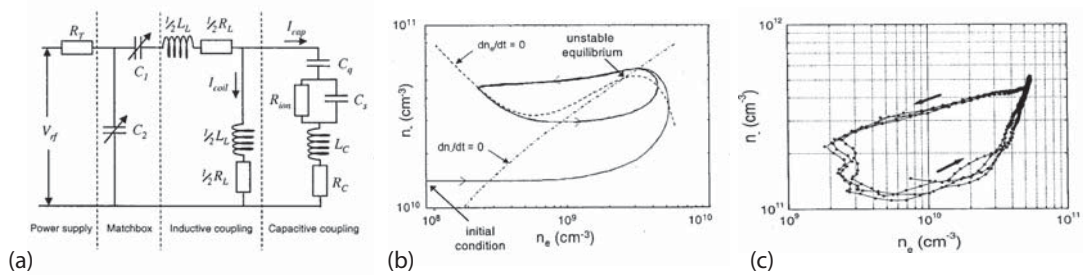


FIG. 2 – Oscillations de relaxation entre les modes de couplage capacitif et inductif: (a) Modèle électrique de la décharge nécessaire à la détermination du bilan de puissance, (b) solution numérique dans le plan (n_e, n_-) , (c) observation expérimentale du cycle limite dans le plan (n_e, n_-) . D'après [3]

2.2 Instabilité de transport

L'instabilité de transport a été observée pour la première fois par Tuszewski et ses collaborateurs [5]. Elle a été nommée "downstream instability" car l'amplitude maximum des oscillations se produit en aval de la zone source du plasma. L'apparition du phénomène est liée au rapport d'aspect de la décharge: la réduction de la longueur de la chambre de diffusion fait disparaître ce mode de fonctionnement (dans notre système lorsque le plateau mobile est entre les positions 24,3 et 26 cm). Les paramètres plasma de la décharge oscillent dès que la concentration de SF_6 dépasse un seuil. La section suivante présente l'étude expérimentale de la transition vers l'instabilité. Les fréquences caractéristiques se situent aussi autour de 1 kHz.

3 Transition vers l'instabilité "downstream"

3.1 Double couche stable

Lors d'une décharge en Ar ou pour de faibles concentrations de SF_6 , le potentiel plasma présente une décroissance continue de la source vers la chambre de diffusion, typique de celle associée à un plasma en expansion en équilibre de Boltzmann (voir figure 3(a)). Au delà de 8% de SF_6 , la structure du potentiel présente une décroissance abrupte de l'ordre de $1,5kT_e$ (5V) sur des distances estimées à quelques dizaines de longueurs de Debye ($\lambda_D = (\frac{\epsilon_0 k T_e}{n_e e^2})^{1/2} \approx 120 \mu m$) dans la chambre de diffusion (voir figure 3(b)). La distribution de charge $\rho = -\epsilon_0 \Delta V_p$ associée à cette structure de potentiel est

constituée de deux couches chargées de signes contraires, structure appelée double couche. Les relevés expérimentaux indiquent que la dynamique des particules chargées est profondément modifiée: les électrons restent en équilibre de Boltzmann, alors que les espèces lourdes sont peu soumises à la variation de potentiel. La double couche agit ainsi comme une gaine interne qui sépare deux plasmas: un plasma haute densité, haute température, faible électronégativité dans la source et un plasma faible densité, faible température, hautement électronégatif dans la chambre de diffusion. La confrontation des observations visuelles aux données expérimentales confirme que la forme de la D.C. soit une surface sphérique attachée à l'interface du tube source et de la chambre de diffusion, diffusant dans la chambre de diffusion. Le processus de formation de la D.C. n'est pas établi. Cependant deux effets sont envisagés pour expliquer l'existence d'un fort gradient de potentiel, solution d'équations non-linéaires (Vlasov-Poisson) [8]. D'une part la présence de composés à forte affinité électronique est un processus de perte très efficace pour les électrons, engendrant de forts gradients de densité et de potentiel (phénomène observé en présence de champs magnétiques divergents de forte amplitude [9]). D'autre part la présence d'ions négatifs diminue la valeur de la vitesse acoustique ionique, et il est maintenant bien établi qu'une condition nécessaire à la formation d'une D.C. soit l'accélération des ions positifs à la vitesse acoustique ionique (vitesse de Bohm). Pour des concentrations de SF₆ supérieures à 13%, la décharge ne peut plus être maintenue dans un régime stable au-delà de 200W. Nous avons développé un système d'acquisition résolu temporellement qui permet d'étudier la dynamique de la décharge instable.

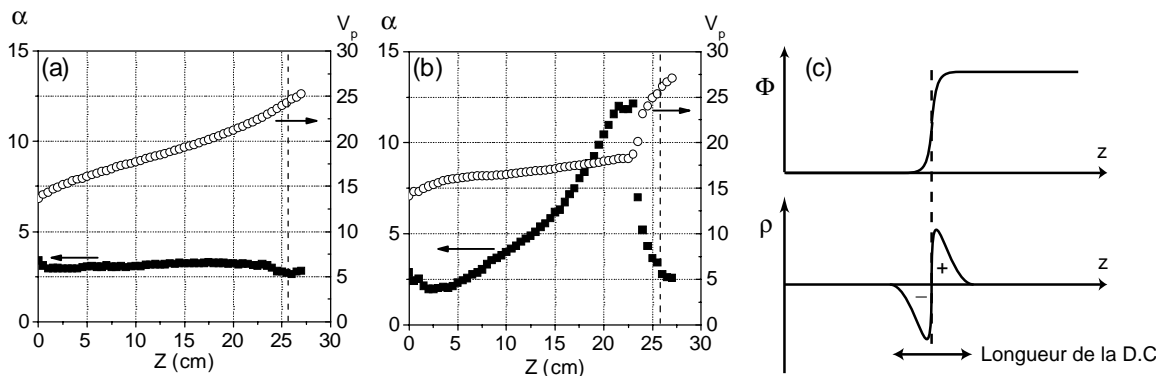


FIG. 3 – Profils axiaux des paramètres plasmas lors de la formation de la double couche stable: (a) cas de diffusion classique (mélange Ar, 6% SF₆); (b) double couche stationnaire (mélange Ar, 9% SF₆), saut de potentiel abrupt de 5 V. à $z = 23$ cm (c) densité de charge ρ dans le cas d'une évolution avec point d'inflexion du potentiel ϕ .

3.2 L'instabilité de transport: Double couche instationnaire

Les profils axiaux du potentiel plasma sont donnés en figure 4, pour un mélange 25% de SF₆, à 1 mTorr, 600W. Le temps est normalisé à la période d'instabilité (1,3 ms) et la position est celle sur l'axe de symétrie de la décharge; l'interface entre la source et la chambre de diffusion est repérée par une ligne tiretée noire. Les résultats montrent une modulation très faible du potentiel plasma dans la source. En sortie de la source nous notons l'existence d'une chute abrupte du potentiel plasma, dont l'amplitude est similaire à celle observée en régime stationnaire. La position de la double couche se déplace vers le

bas de la décharge, suivant une évolution linéaire. La vitesse de propagation et la fréquence d'apparition sont telles que deux D.C. sont présentes dans le système au même instant. La vitesse de propagation est faible, de l'ordre de 250 ms^{-1} . Les électrons semblent rester en équilibre de Boltzmann, leur densité suivant l'évolution du potentiel plasma. Les résultats expérimentaux entre 1 et 10 mTorr montrent une évolution croissante de la fréquence avec la pression. Cependant les tracés des profils spatio temporels restent similaires à celui donné en figure 4: la vitesse de propagation normalisée à la période d'instabilité est constante.

La présence d'un fort gradient de potentiel (double couche) conduit à l'apparition de comportements particuliers pour les particules chargées, pouvant déstabiliser cette double couche. Les ions positifs sont confinés dans la zone de faible potentiel, mais peuvent être accélérés depuis la zone de fort potentiel et ainsi créer un faisceau d'ions dans la zone faible potentiel. Les ions négatifs sont eux confinés dans la zone de fort potentiel, mais peuvent être accélérés depuis la zone de faible potentiel, et créer un faisceau de sens opposé à celui des ions positifs. Les électrons de la zone de fort potentiel, du fait que leur température soit de l'ordre de grandeur de la chute de potentiel, peuvent être décomposés en deux populations: une partie est confinée et réfléchiée par la double couche, une partie peut être transmise à travers la double couche. Les électrons de la zone faible potentiel peuvent être accélérés à travers la double couche et forment un faisceau dans la zone fort potentiel. Il est établi que l'existence de faisceaux peut induire l'apparition d'instabilités. Ces instabilités dans le plasma ambiant peuvent être l'origine de la déstabilisation de la décharge par un phénomène de rétroaction.

Tuszewski [10] a calculé un seuil linéaire d'instabilité des ondes acoustiques ioniques. Les équations fluides de bilans de particules lourdes (considérées froides) associées à l'équation de Poisson permettent d'exprimer un seuil d'instabilité en fonction de la différence des vitesses de dérives des ions positifs et négatifs. Un calcul similaire a été mené avec un modèle cinétique. Il a aussi mis en évidence expérimentalement l'existence de telles ondes dans la source (ondes acoustiques ionique rapides, dont la vitesse de propagation est autour de 7 km.s^{-1}).

4 Conclusion

Nous avons confirmé expérimentalement les observations de deux types d'instabilité dans un réacteur "hélicon" opéré comme source inductive en mélange Argon/SF₆. Nous avons mis en évidence que l'instabilité "downstream" observée dans [5] est liée à la formation et à la propagation périodique d'une double couche séparant deux plasmas. Cette double couche a été observée stable sous certaines conditions. La compréhension de la formation et de la déstabilisation de cette structure de potentiel n'est pas établie. L'analyse approfondie et la compréhension du cas stable semble nécessaire à la compréhension du mécanisme à l'origine de la propagation.

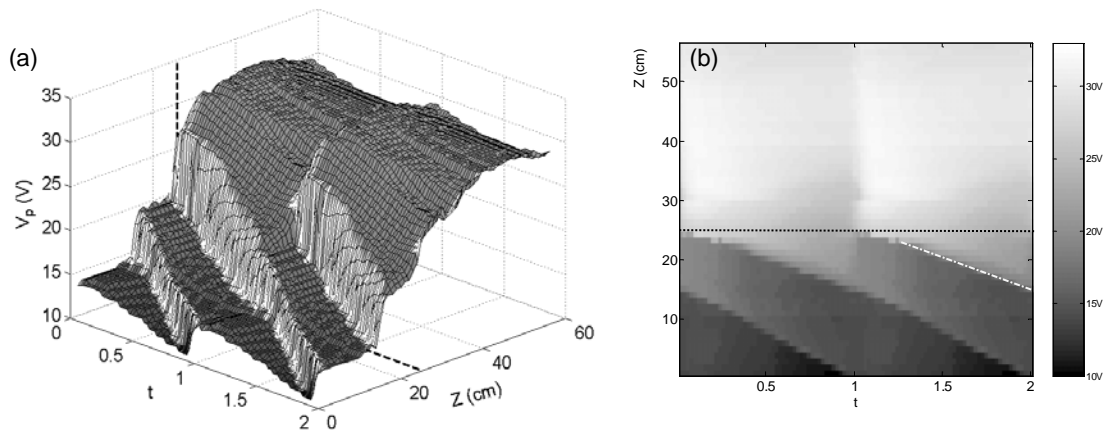


FIG. 4 – Profils axiaux du potentiel plasma résolus en temps lors de l'instabilité de transport (mélange 75% Ar, 25% SF₆), 600 W, 1 mTorr. (a) profil 3D et (b) niveaux de gris, le temps est normalisé à la période de l'instabilité.

Références

- [1] I.G. Kouznetsov, A.J. Lichtenberg et M.A. Lieberman, *Internal sheath in electronegative discharges*, J. Appl. Phys., **86**, 4142-4153 (1999).
- [2] A. Descoedres, L. Sansonnens et C. Hollenstein, *Attachment-induced ionization instability in electronegative capacitive RF discharges*, Plasma Sources Sci. Technol., **12**, 152-157 (2003).
- [3] P. Chabert, A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman et A.M. Marakhtanov, *Dynamics of steady and unsteady operation of inductive discharges with attaching gases*, J. Appl. Phys., **94**, 831-843 (2003).
- [4] P. Chabert, A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman et A.M. Marakhtanov, *Instabilities in low-pressure electronegative inductive discharges*, Plasma Sources Sci. Technol., **10**, 478-489 (2001).
- [5] M. Tuszewski, R.R. White et G.A. Wurden, *Relaxation oscillations of low frequency Ar/SF₆ inductive plasma discharges*, Plasma Sources Sci. Technol., **12**, 396-402 (2003).
- [6] R.W. Boswell, *Plasma production using a standing helicon wave*, Phys. Lett., **33A**, 457-458 (1970).
- [7] N. Hershkowitz, *Plasma Diagnostics*, 113-184, Academic Press, ed. O. Auciello, D.L. Flamm (1989).
- [8] M.A. Raadu, *The physics of double layers and their role in astrophysics*, Phys Rep, **178**, 25-97 (1989).
- [9] C. Charles et R.W. Boswell, *Current-free double-layer formation in a high-density helicon discharge*, Appl. Phys. Lett., **82**, 1356-1359 (2003).
- [10] M. Tuszewski et S.P. Gary, *Downstream instabilities of electronegative plasma discharges*, Phys. Plasmas, **10**, 539-545 (2003).

Bifurcation globale de l'écoulement de von Kármán turbulent : seuil d'apparition du phénomène en nombre de Reynolds.

Florent Ravelet, Arnaud Chiffaudel & François Daviaud

Service de Physique de l'État Condensé

CEA/Saclay

91191 Gif-sur-Yvette Cédex

florent.ravelet@cea.fr

Résumé

Dans un écoulement de von Kármán turbulent ($Re \simeq 10^6$), on observe expérimentalement une bifurcation globale se traduisant par la coexistence de deux régimes turbulents pour une même valeur du paramètre de contrôle [1]. Les transitions entre ces états ont une statistique particulière et posent la question du rôle joué par la turbulence. Nous étudions ici l'évolution des transitions entre les différents états en fonction du nombre de Reynolds. La coexistence apparaît en régime de turbulence pleinement développée ($Re > 10^4$).

Abstract

We study the Reynolds-number dependence of the global bifurcation in a von Kármán flow [1]. We have experimentally evidenced the fact that at high Reynolds number, two different regimes of turbulent flows can be obtained in our system. The statistics of transitions bring the issue of the role of fluctuations. Lowering the Reynolds number down to laminar regimes, we show that the "global bifurcation" does not occur until the flow is highly turbulent.

1 Le dispositif expérimental, les paramètres.

L'écoulement produit dans un cylindre entre deux turbines coaxiales contrarotatives, munies de pales est connu sous le nom d'écoulement de von Kármán et permet d'atteindre des états pleinement turbulents dans un volume réduit et fermé [2].

Notre cuve cylindrique a un rayon $R = 100$ mm. Les deux turbines de diamètre 185 mm sont distantes de $H = 180$ mm et possèdent des pales de hauteur 20 mm. Le fluide utilisé est de l'eau, ou des mélanges eau/glycérol jusqu'à 99% en masse de glycérol. La température du fluide de travail est mesurée au moyen d'une sonde à résistance de platine située en paroi et est réglée à 1 K près. Nous définissons le nombre de Reynolds de notre écoulement de la manière suivante : $Re = 2\pi f R^2 \nu^{-1}$, nous basant sur une fréquence typique de rotation f , ν étant la viscosité cinématique du fluide.

Les turbines sont mues par deux moteurs brush-less indépendants, réglés en vitesse. Nous effectuons le changement de variable suivant dans le plan des paramètres f_1 — f_2 (fréquences de chaque moteur) :

– $f = \sqrt{(f_1^2 + f_2^2)/2}$ caractérise l'intensité du forçage (Re est basé sur cette fréquence f) ;

– $\theta = (f_2 - f_1)/(f_2 + f_1)$ caractérise la dissymétrie du forçage.

La contrarotation exacte correspond à $\theta = 0$, le cas où le moteur 1 tourne seul correspond à $\theta = -1$, et $\theta = 1$ lorsque le moteur 2 tourne seul. La régulation en vitesse maintient f à 0.5% près et θ à ± 0.002 près pour $\theta \simeq 0$.

Nous effectuons des mesures des couples T consommés par les moteurs et de vitesse d'écoulement par vélocimétrie laser Doppler (LDV). Pour un fluide de masse volumique ρ , Nous définissons le facteur de puissance adimensionnel K_p comme suit :

$T(f, \theta, Re) = K_p(\theta, Re) \rho R^5 (2\pi f)^2$. Quant aux vitesses, elles sont adimensionnées par $2\pi Rf$.

2 Transitions entre états à une et deux cellules.

Commençons par considérer la phénoménologie de l'écoulement moyen de von Kármán dans trois cas particuliers :

- Pour $\theta = -1$, on s'attend à avoir un écoulement mis en rotation globale par le moteur 1, avec une seule cellule dans l'écoulement. En régime permanent et stationnaire, on s'attend à ce que le couple fourni par le moteur 1 soit supérieur au couple résistant fourni par le moteur 2, la différence correspondant au frottement du fluide sur la cuve cylindrique : $\Delta K_p = K_{p2} - K_{p1} < 0$. Cet état est noté (b_1) .
- Pour $\theta = 1$, on a l'écoulement symétrique par retournement autour de tout axe radial passant par le centre du cylindre, et une différence des couples sur les moteurs 1 et 2 de même valeur mais de signe contraire. On note cet état (b_2) .
- Dans le cas $\theta = 0$, on aura deux cellules dans l'écoulement, séparées par une couche de fort cisaillement. Les deux moteurs jouent le même rôle et $\Delta K_p = 0$ (état (s)).

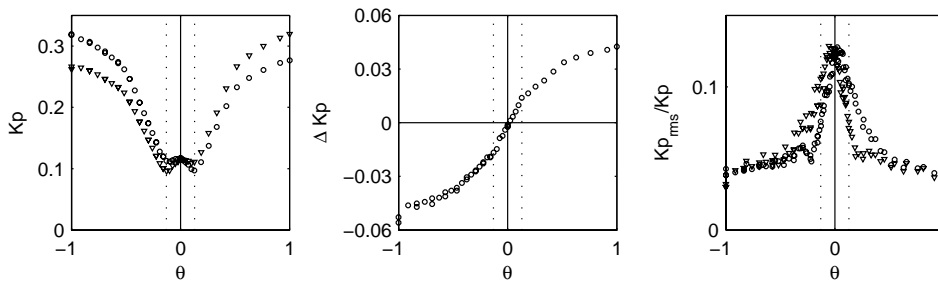


FIG. 1 – Transitions entre les trois états, pour des turbines à pales droites, à $Re = 8 \times 10^5$. A gauche : Couples adimensionnels des moteurs 1 (\circ) et 2 (∇) fonction de θ . Au centre : différence des couples adimensionnels ΔK_p fonction de θ . A droite : taux de fluctuation des couples $\sigma(K_p)/K_p$. Les pointillés verticaux correspondent aux passages de une à deux cellules en $\theta = \pm 0.13$

Nous avons représenté sur la figure 1 les couples adimensionnés, leur différence ainsi que leurs taux de fluctuation en fonction de θ pour des turbines munies de pales droites à $Re = 8 \times 10^5$. On retrouve les différents états décrits ci-dessus pour $\theta = \pm 1$ et $\theta = 0$.

Lorsqu'on parcourt l'intervalle $\theta = [-1 \ 1]$, on observe une courbe continue avec passage de une à deux cellules pour $\theta = \pm 0.13$ (équivalent à $f_1/f_2 = 0.78$). Ce passage de une à deux cellules dans l'écoulement se traduit par une légère rupture de pente sur le diagramme en ΔK_p , et par une croissance du taux de fluctuation du couple correspondant à l'apparition de la couche de mélange séparant les deux cellules.

3 La bifurcation globale.

Pour des turbines à pales fortement courbées tournant face concave des pales en avant (voir Fig. 2 gauche), les transitions entre les différents états peuvent avoir des comportements inattendus. Nous présentons sur la partie centrale de la figure 2 les cycles obtenus pour ces turbines à différents nombres de Reynolds.

Pour $Re = 800$ (\circ), on a une courbe continue similaire à celle de la figure 1. Pour $Re = 5600$ (∇), les transitions sont du premier ordre : on voit apparaître cinq branches, la courbe présentant une discontinuité en $\theta = \pm 0.13$ et une autre en $\theta = \pm 0.075$. Il y a donc apparition d'un état intermédiaire entre (b_1) et (s) puis entre (s) et (b_2). Celui-ci est très fluctuant : son taux de fluctuations est 5.8 fois celui de b_1 en $\theta = -0.13$. Le taux de fluctuation de (s) est lui 3.7 fois celui de (b_1), situation comparable au cas présenté en Fig. 1. Lorsque Re atteint environ 10^4 (*), on observe la coexistence des trois états (b_1), (b_2) et (s) en $\theta = 0$. On a hystérésis, le régime dans lequel on se trouve pour une même valeur du paramètre de contrôle dépend du chemin par lequel on y est arrivé.

Enfin, en augmentant encore le nombre de Reynolds de l'écoulement, on obtient la courbe de droite de la Fig. 2. L'hystérésis est encore plus marquée, avec les branches (b_1) et (b_2) qui traversent $\theta = 0$. Les points de la branche (s) sont métastables. Nous avons retenus ceux dont le temps de vie est supérieur à $20f$. Ce temps diverge pour $\theta = 0$: la branche (s) se réduit donc à un point marginalement stable en $\theta = 0$ [1].

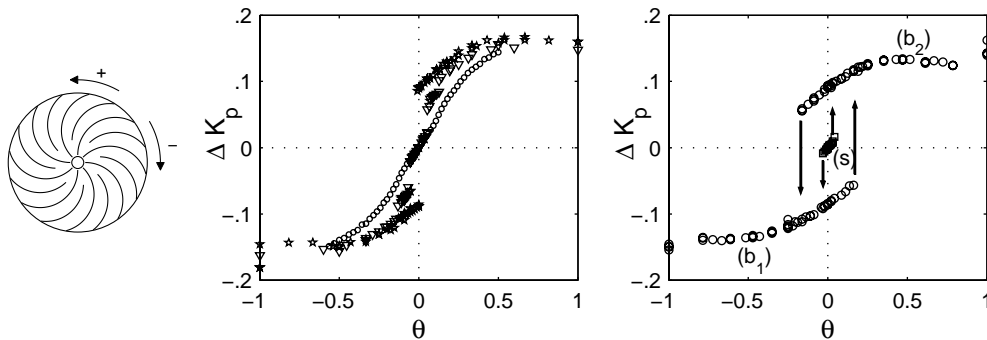


FIG. 2 – Gauche : turbines utilisées par la suite. Noter les deux sens de rotation possibles : face concave des pales en avant sera noté (-). Centre : ΔK_p fonction de θ pour $Re = 800$ (\circ), $Re = 5600$ (∇) et $Re = 10000$ (*). Droite : ΔK_p fonction de θ pour $Re = 2 \times 10^5$.

4 Evolution des grandeurs globales avec le nombre de Reynolds.

Intéressons nous maintenant au développement de la turbulence dans notre écoulement de manière quantitative. Sur la figure 3, nous avons tracé l'évolution du $K_p(\theta = 0)$ en fonction de Re pour différents régimes (voir légende). On remarque tout d'abord que pour $Re < 250$, l'écoulement peut être qualifié de *laminaire* : le coefficient de puissance varie comme Re^{-1} [3], et les deux sens de rotation des turbines sont équivalents. L'épaisseur de la couche limite au moment où les courbes \triangleleft (sens de rotation (+)) et \circ (sens (-)) se séparent est alors de $R \times Re^{-1/2} \simeq 6$ mm à comparer au gap entre la turbine et

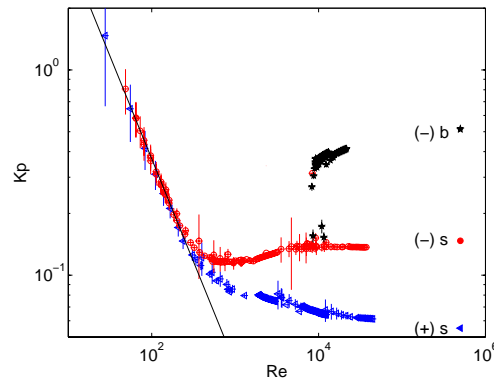


FIG. 3 – $K_p(\theta = 0)$ en fonction de Re en échelle log-log. En (\circ), sens de rotation ($-$) dans l'état (s). En ($*$), $(K_{p1} + K_{p2})/2$ dans l'état bifurqué. En (\triangleleft), sens de rotation ($+$) (aucune bifurcation observée). Incertitude relative de $\pm 10\%$ sur Re ; incertitude absolue de ± 0.1 N.m sur K_p . Fit non linéaire entre $Re = 30$ et $Re = 250$: $K_p = 36.9 \times Re^{-1}$.

la paroi cylindrique qui est de 7.5 mm. Nous faisons donc l'hypothèse qu'en deçà de ce nombre de Reynolds, tout se passe comme si nous avions des disques lisses séparés par $H/R = 1.8 - 0.2 - 0.2 = 1.4$. Une comparaison entre un champ de vitesse mesuré à $Re = 120$ dans expérience ($H = 1.8$ et pales de 0.2) et une simulation numérique de C. Nore [4] en rapport d'aspect 1.4 est présentée figure 4. On note de très faibles différences entre champs expérimentaux et numériques : l'écoulement n'est pas affecté par le fluide embarqué dans les turbines.

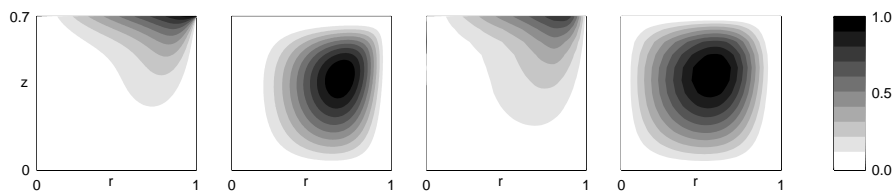


FIG. 4 – De gauche à droite : simulation dans un cylindre de rapport d'aspect $H/R = 1.4$ [4] à $Re = 120$. Demi cylindre d'axe vertical, turbine en haut. Premier graphique : V_θ . Deuxième graphique : fonction de courant. Troisième et quatrième graphiques : les mêmes quantités mesurées par LDV dans notre expérience.

Lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds, la puissance dissipée devient plus importante pour le sens ($-$). On note également que pour $Re > 10^4$, le K_p correspondant a atteint une valeur de saturation, comme on s'y attend dans un régime de turbulence développée [3].

Les étoiles noires correspondent à la valeur moyenne des K_p obtenus pour les états b_1 et b_2 . On retrouve le fait que ces états n'existent pour $\theta = 0$ qu'à partir de $Re \simeq 9000$: pour une même valeur du paramètre de contrôle, en fonction de l'histoire du système, on a coexistence de deux régimes ($*$ et \circ) pour l'écoulement moyen et la puissance dans l'état (b) est 4 fois plus importante que dans l'état (s). Ces deux régimes sont pleinement turbulents comme nous allons le montrer.

Pour ce faire, nous avons étudié l'évolution des fluctuations de vitesse en un point

de l'écoulement situé dans la couche de cisaillement en fonction du nombre de Reynolds (Fig. 5). L'état est (s), et nous nous plaçons en $\theta = 0$. La solution de base stationnaire axisymétrique se déstabilise au profit d'un mode azimuthal $m = 2$ stationnaire pour $Re > 150$. Puis la dépendance temporelle apparaît de manière critique, avec un exposant $1/4$ au delà de $Re = 330$. On a ensuite saturation vers $Re = 1000$, l'écoulement devenant alors turbulent.

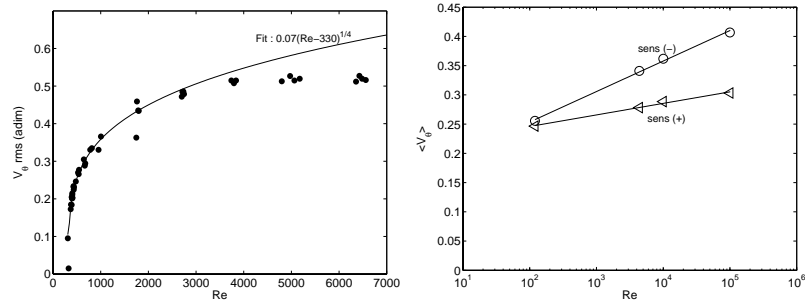


FIG. 5 – Mesures de vitesse par LDV, en $\theta = 0$, en régime (s). A gauche, déviation standard de la vitesse azimuthale mesurée en un point de la couche de cisaillement proche de la paroi ($r = 0.9$) en fonction de Re . Fit non-linéaire en $(Re - Re_c)^{1/4}$ calculé sur les données jusqu'à $Re = 1000$. A droite, valeur moyenne du champ de vitesse fonction du logarithme de Re et fits non linéaires en $a \times \ln(Re) + b$ pour les deux sens de rotation possibles.

Si au moment où on observe la coexistence de deux états turbulents différents ($Re > 10^4$) le caractère turbulent de l'écoulement est pleinement développé, la partie moyenne du champ de vitesse évolue elle aussi avec le nombre de Reynolds. Nous avons tracé sur la droite de la figure 5 l'évolution des moyennes du champ de vitesse pour 4 nombres de Reynolds ($Re = 120, 4000, 10^4$ et 10^5). On remarque que l'efficacité de l'entraînement croît linéairement avec le logarithme de Re . Les différences entre le champ de vitesse moyen susceptible de bifurquer (sens $(-)$) et l'autre résident dans une plus forte vitesse moyenne, et également dans une plus grande proportion d'écoulement toroidal par rapport à l'écoulement poloidal : le profil moyen de rotation est beaucoup plus fort et concentré vers la paroi dans le cas susceptible de bifurquer, et ce changement qualitatif et quantitatif dépend fortement de Re . Ceci va dans le sens des conclusions de [1] évoquant l'équivalence des solutions bifurquées et d'écoulements corotatifs en référentiel tournant.

5 Début de caractérisation des états bifurqués à haut Re .

Dans le cas des écoulements de von Kármán corotatifs et à un disque [5], des mesures locales de fluctuations de pression montrent des comportements périodiques. Nos mesures globales de couples révèlent elles-aussi des composantes périodiques marquées dans les états bifurqués (Fig. 6). Partant de $\theta = 1$, l'état (b_1) conserve une fréquence globale d'environ $0.3f$ jusqu'en $\theta = 0$, puis cette fréquence tend vers zéro pour $\theta \simeq 0.25$. L'état (b_1) perd alors sa stabilité au profit de l'état (b_2). On note également que les deux moteurs sont très fortement corrélés dans l'état bifurqué et que le moteur qui l'emporte est en avance de $0.33f^{-1}$ (soit environ $1/10$ de la période) sur l'autre.

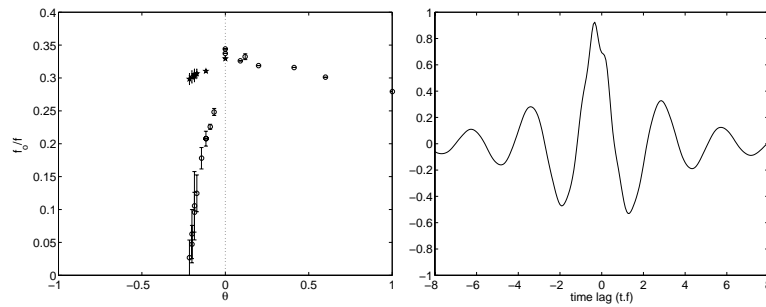


FIG. 6 – *A gauche, fréquence adimensionnelle mesurée sur les signaux de couple fonction de θ . \circ : état (b_2). $*$: état (b_1). A droite, fonction d'intercorrélacion des couples sur les deux turbines, en $\theta = 0$, dans l'état b_1 . $Re > 10^5$.*

6 Conclusions

Le phénomène de la bifurcation globale dans l'écoulement de von Kármán entraîné inertiellément n'existe pas à faible nombre de Reynolds, et l'hystérésis apparaît dans un régime de turbulence pleinement développée.

L'étude des champs de vitesse moyens, et la comparaison entre différentes turbines à différents Re ne nous a pas permis de discriminer si ce phénomène est induit par les fluctuations turbulentes —rôle multiplicatif [6] ?— ou s'il est dû au champ de vitesse moyen —le bruit venant s'ajouter dessus.

L'étude des états bifurqués fait penser à des transitions entre cycles limites à fréquence nulle pour (b_1) vers (b_2). La transition entre (s) et (b) présente un caractère statistique avec une probabilité de temps d'attentes avant bifurcation en exponentielle [1], nous faisant penser à celle des évènements intenses liés à une instabilité de la couche de cisaillement [2], nous souhaitons maintenant caractériser les structures cohérentes de la couche de cisaillement.

Références

- [1] F. Ravelet et al. *Multistability and memory effect in a highly turbulent flow: Experimental evidence for a global bifurcation*, Phys. Rev. Letters, **93**,164501 (2004).
- [2] O. Cadot, S. Douady, and Y. Couder. *Characterization of the low-pressure filaments in a three-dimensional turbulent shear flow*, Phys. Fluids, **7**, 630 (1995).
- [3] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*, Kluwer academic publishers, second revised edition, 1990.
- [4] C. Nore, L. Tuckerman, O. Daube, and S. Xine. *The 1:2 mode interaction in exactly counter-rotating von kármán swirling flow*, J. Fluid Mech., **477**,51 (2003).
- [5] L. Marié. *Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un écoulement tourbillonnaire turbulent: influence de la rotation*, PhD thesis, Université Paris VII, 2003.
- [6] K. Mallick and P. Marcq. *Stability analysis of a noise-induced hopf bifurcation*, Eur. Phys. J. B, **36**,119 (2003).

Modélisation en temps discret d'un convertisseur d'énergie électrique.

Bruno Robert, Abdelali El Aroudi, Maurice Fadel

Université de Reims Champagne-Ardenne

CReSTIC-DeCom, Moulin de la Housse, BP 1039, Reims Cedex 2, France

`bruno.robert@univ-reims.fr`

Résumé

Cet article montre comment prédire les bifurcations dans le fonctionnement d'un hacheur abaisseur à deux cellules et comment analyser la route suivie vers le chaos en utilisant un modèle non linéaire en temps discret. Le comportement global est étudié au moyen de diagrammes de bifurcation montrant les points fixes stables et des frontières dans l'espace. Les points d'équilibre et leur stabilité sont examinés de manière analytique. Les bifurcations par collision de frontières ont leur origine dans les saturations du modulateur MLI.

Abstract

By using a non linear discrete time model, this paper shows how to predict bifurcations in a 2 cells chopper and analyses the road to chaos. Equilibrium points and their stability are investigated in an analogical way to determine the nature of the bifurcations. The global behaviour is studied by using bifurcation diagrams showing collisions between fixed points and border lines. The border collision bifurcations have their origin in the saturations of the PWM modulator.

1 Introduction.

Dans tous les domaines industriels, les convertisseurs statiques jouent un rôle essentiel dans la conversion d'énergie. Une activité de recherche croissante concerne actuellement les convertisseurs multicellulaires car, pourvus d'un contrôle approprié, ils sont bien adaptés au conditionnement des sources d'énergies renouvelables. De plus, en raison de leur structure modulaire, ils peuvent être associés très facilement [1].

Au cours des dernières années, on a découvert que la plupart des convertisseurs statiques étaient le siège de phénomènes non linéaires méconnus en électronique de puissance. En dehors de leurs régimes de fonctionnement normaux, au sens de l'ingénierie, les convertisseurs multicellulaires peuvent eux aussi exhiber des comportements insolites parfois chaotiques. Or les modèles moyens habituels ne permettent pas de prédire les phénomènes non linéaires rencontrés. Par nature, ces modèles masquent les non linéarités essentielles [2]. Pour analyser, prédire et contrôler ces comportements étranges, il est nécessaire de disposer de modèles non linéaires en temps discret [3, 4].

2 Description du convertisseur.

Le convertisseur étudié est représenté sur la figure 1. Il est conçu à partir d'un hacheur série modifié pour supporter une tension d'entrée plus élevée. Deux commutateurs sont associés en série et un condensateur équilibre la répartition de la tension entre eux. Une commande appropriée en Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI) permet à la fois de maintenir la charge du condensateur à une valeur proche de la demi-tension d'entrée

et de contrôler le courant dans la charge. La figure 1 montre aussi l'organisation de la commande et les signaux de contrôle des transistors délivrés par le modulateur MLI. Le cycle de fonctionnement s'établit sur 4 intervalles de temps comme le montre la figure 2.

Intervalle 1 : $u_1 = 0$, $u_2 = 1$. Décharge du condensateur dans le récepteur inductif.

Intervalle 2 : $u_1 = 1$, $u_2 = 1$. Charge de l'inductance et maintien de la tension.

Intervalle 3 : $u_1 = 1$, $u_2 = 0$. Charge du condensateur à travers le récepteur inductif.

Intervalle 4 : Idem intervalle 2 mais la durée peut être différente.

3 Modélisation.

Le modèle est élaboré dans un espace d'état sans dimension. Le vecteur d'état est noté $X = [i \ v]^t$ dans lequel v est la tension sur le condensateur réduite par rapport à la tension d'alimentation E et i est l'intensité du courant réduite par rapport au courant maximal E/R . L'évolution est décrite sur chaque intervalle par un système différentiel linéaire à coefficients constants : $\dot{X} = A_k X + B_k$, $k \in \{1,2,3,4\}$. Le temps, sans dimension, est réduit par rapport à la période fondamentale T . Le modèle en boucle ouverte est obtenu en intégrant sur chaque intervalle de temps et en raccordant les solutions aux instants de commutation pour obtenir une récurrence de la forme : $x_{n+1} = \varphi(d_1, d_2) \cdot x_n + \psi(d_1, d_2)$.

Les commutateurs sont commandés par un modulateur MLI numérique. Le courant et la tension sont échantillonnés en début de période pour évaluer l'erreur de courant $\varepsilon_i = i_n - I_r$ et l'erreur de tension $\varepsilon_v = v_n - \frac{1}{2}$ dans lesquels I_r et 0.5 sont les consignes. Le contrôleur calcule la loi de commande déduite de [5] pour déterminer les rapports cycliques

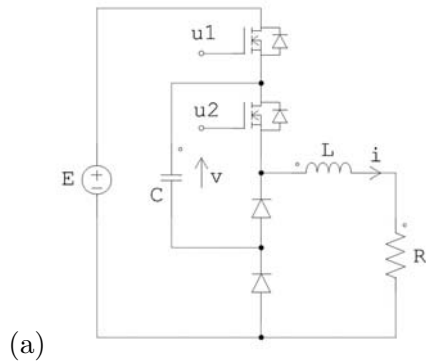


FIG. 1 – (a) Hacheur abaisseur à 2 cellules. (b) Contrôleur de tension et de courant.

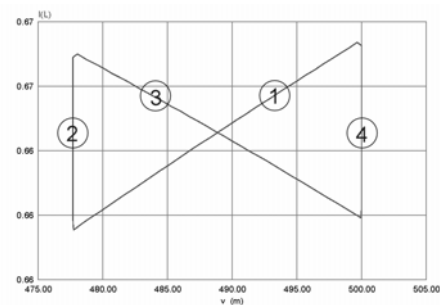
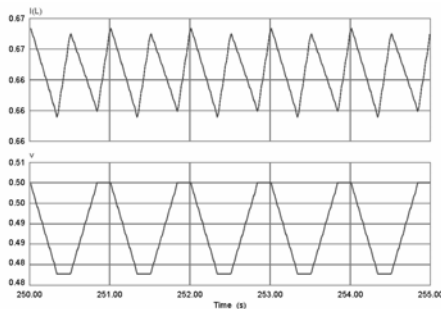


FIG. 2 – Cycle de fonctionnement en régime permanent.

d_1 et d_2 : $d_{1,2}(X_n) = k_i \varepsilon_{in} \pm k_v \varepsilon_{vn}$ dans laquelle $k_i > 0$ et $k_v > 0$ sont les gains en courant et en tension. En posant $\delta_L = \frac{RT}{L} \ll 1$ et $\delta_C = \frac{T}{RC} \ll 1$ de façon à réduire l'ondulation du courant et de la tension, on peut linéariser les exponentielles de matrice et obtenir le modèle en boucle fermée sous la forme d'une récurrence non linéaire bidimensionnelle :

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 - \delta_L (1 + k_i) & 2\delta_L k_v (v_n - 1) \\ -2\delta_C k_v (v_n - 0.5) & 1 \end{bmatrix} X_n + \begin{pmatrix} \delta_L (1 + k_i I_r + \frac{k_v}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le régime de fonctionnement normal correspond au point fixe, noté X_1^* : $X_1^* = [i_1^*, v_1^*]^t = \left[\frac{1+k_i I_r}{1+k_i}, \frac{1}{2} \right]^t$. Il est indépendant de L . La matrice jacobienne est :

$$J(X) = \begin{bmatrix} 1 - \delta_L (1 + k_i) & 2\delta_L k_v (2v_n - 1) \\ -2\delta_C k_v (v_n - 0.5) & -2\delta_C k_v i_n + 1 \end{bmatrix}.$$

Évaluée au point d'équilibre X_1^* , J est diagonale. En supposant que $k_v < \frac{1}{\delta_C}$, alors $|-2\delta_C k_v i_1^* + 1| < 1$ quel que soit i_1^* . On en déduit la condition de stabilité du point fixe : $0 < k_i < \frac{2}{\delta_L} - 1$ et on note k_{i1} la limite de stabilité de X_1^* : $k_{i1} = 2L - 1$.

4 Comportement global.

Les diagrammes de bifurcation de la figure 3 rendent compte du comportement global du convertisseur lorsque l'inductance ou le gain en courant varient. Les paramètres sont : $I_R = 0.6$, $k_v = 1$, $E=1$, $R=1$, $L=10$, $C=40$, $F=1$ donc $\delta_L = 0.1$, $\delta_C = 0.1$.

Le premier diagramme est obtenu avec un gain en courant constant $k_i = 15$ et le paramètre de bifurcation est l'inductance L . Sur sa droite, le convertisseur présente un régime périodique fondamental ($T = 1$) qui est le plus important du point de vue de l'ingénierie. Le point fixe est effectivement indépendant de L . Cependant, en deçà de la limite de stabilité $L = 8$, un régime de période 2 stable apparaît. En réduisant encore l'inductance, un nouveau mode de fonctionnement apparaît, le courant alternant à l'intérieur de 4 bandes chaotiques.

Le second diagramme est calculé avec une inductance constante $L = 10$ et le paramètre de bifurcation est le gain en courant k_i . Sur sa gauche, le convertisseur présente son régime de fonctionnement normal avec un point de fonctionnement stable se rapprochant de la référence lorsque le gain augmente. Au-delà de la limite de stabilité $k_i = 19$, un doublement de période se manifeste puis un régime de fonctionnement chaotique.

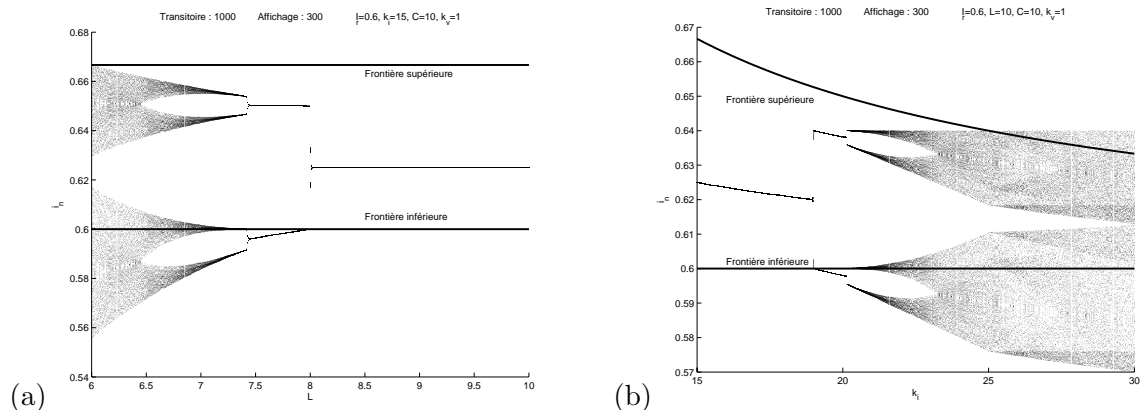


FIG. 3 – Diagrammes de bifurcation du courant (a) Variation de L (b) Variation de k_i .

Il est important de noter que nous avons ici affaire à des bifurcations non standard. On n'observe pas de cascade de doublements de période avec un point d'accumulation conduisant au chaos mais seulement un doublement de période présentant une discontinuité immédiatement suivi d'une bifurcation directe vers le chaos. La section suivante s'attache à montrer que l'une comme l'autre sont des bifurcations par collisions de frontières.

5 Modèle avec saturations.

Dans cette section nous proposons un modèle amélioré du modulateur MLI prenant en compte la saturation naturelle des rapports cycliques: $d_{1,2} \in [0,1]$. Cette approche est essentielle pour expliquer la route inhabituelle vers le chaos observée sur les diagrammes de bifurcation.

Les saturations du modulateur font apparaître deux lignes frontières qui divisent l'espace d'état en trois régions. Dans chaque région, le convertisseur est modélisé par une récurrence spécifique.

En premier lieu, on considère la saturation basse. Dans ce cas, le courant échantillonné est suffisamment petit pour que les deux transistors restent passants durant toute la période: $d_1 = d_2 = 0$. D'où la frontière basse: $\varepsilon_i = 0 \Rightarrow i_n = I_r$. Le deuxième cas se présente quand le courant est assez grand pour que les deux transistors soient bloqués sur toute la période: $d_1 = d_2 = 1$. D'où la frontière supérieure: $\varepsilon_i = \frac{1}{k_i} \Rightarrow i_n = I_r + \frac{1}{k_i}$. Par conséquent, le modèle par morceaux est le suivant :

$$X_{n+1} = F(X_n) = \begin{cases} F_1(X_n) = A_{01}X_n + B_0 & \text{si } i_n \leq I_r \\ F_2(X_n) = AX_n + B & \text{si } I_r \leq i_n \leq I_r + \frac{1}{k_i} \\ F_3(X_n) = A_{01}X_n & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{où: } A_{01} = \begin{bmatrix} 1 - \delta_L & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} \delta_L \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 - \delta_L(1 + k_i) & 2\delta_L k_v(v_n - 1) \\ -2\delta_C k_v(v_n - 0.5) & 1 \end{bmatrix} \text{ et} \\ B = \begin{pmatrix} \delta_L(1 + k_i I_r + \frac{k_v}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant ce nouveau modèle, il est possible d'étudier les conditions d'existence du point fixe X_1^* . Nous avons vu dans la section 3 que $\forall k_i > 0, i_1^*(k_i) > I_r$. De plus, il est facile de vérifier que $\forall k_i > 0, i_1^*(k_i) < I_r + \frac{1}{k_i}$. On en conclut donc que le point fixe X_1^* est situé entre les deux frontières, qu'il existe sur l'intervalle $[0, \infty[$ et qu'il est stable sur l'intervalle $[0, k_{i1}]$.

6 Doublement de période.

Un mode de fonctionnement avec une période double s'établit après la déstabilisation de X_1^* . Il est caractérisé par les deux points fixes de la récurrence $X_{n+2} = F_2 \circ F_1(X_n)$.

$$\text{Le premier point d'équilibre, noté } X_2^*, \text{ est: } X_2^* = [i_2^*, v_2^*]^t = \left[\frac{k_i(I_r - \delta_L) + 2 - \delta_L}{k_i(1 - \delta_L) + 2 - \delta_L}, \frac{1}{2} \right]^t.$$

$$\text{Le second point fixe est: } F_1(X_2^*) = \left[\frac{k_i I_r (1 - \delta_L) + 2 - \delta_L}{k_i(1 - \delta_L) + 2 - \delta_L}, \frac{1}{2} \right]^t.$$

$$\text{Au point de bifurcation: } \begin{cases} X_2^* = [I_r, \frac{1}{2}]^t \\ F_1(X_2^*) = \left[\frac{I_r(2 - 3\delta_L + \delta_L^2) + 2\delta_L - \delta_L^2}{2 - \delta_L}, \frac{1}{2} \right]^t \end{cases}.$$

Puisque $I_r < 1$ alors $i_2^* < F_1(i_2^*)$. Cette bifurcation est donc toujours discontinue. Elle peut être interprétée de la manière suivante. Au point de bifurcation k_{i1} , le point fixe

X_1^* perd sa stabilité, le multiplieur caractéristique passant par la valeur -1. Le courant échantillonné alterne alors entre deux valeurs qui divergent jusqu'au moment où l'une d'entre elles entre en collision avec l'une des deux frontières. A ce moment, la récurrence de second ordre devient valide.

La matrice jacobienne est la suivante :

$$J(X) = \begin{bmatrix} 1 - \delta_L(1 + k_i) & 2\delta_L k_v(2v_n - 1) \\ -2\delta_C k_v(v_n - 0.5)(1 - \delta_L) & 2\delta_L \delta_C k_v(i_n - 1) + 1 - 2\delta_C k_v \end{bmatrix}.$$

Évaluée au point d'équilibre X_2^* , J est diagonale. En supposant que $k_v < \frac{1}{\delta_C(1+\delta_L)}$, alors $|2\delta_L \delta_C k_v(i_2^* - 1) + 1 - 2\delta_C k_v| < 1$ quel que soit i_2^* . Cela conduit à la condition de stabilité : $k_{i1} < k_i < \frac{1+(1-\delta_L)^2}{\delta_L(1-\delta_L)}$ et on note k_{i2} la limite de stabilité de X_2^* : $k_{i2} = \frac{L^2+(L-1)^2}{L-1}$.

On en conclut que le point fixe X_2^* entre en collision avec la frontière exactement lorsque le point fixe X_1^* perd sa stabilité. X_2^* existe dans l'intervalle $[k_{i1}, \infty[$ et il est stable sur l'intervalle $[k_{i1}, k_{i2}[$.

7 Quatre intervalles chaotiques.

Des points fixes de période 4T apparaissent après la déstabilisation de X_2^* et sont instables sur tout leur domaine d'existence. Le diagramme de bifurcation de la figure 3b illustre le phénomène. Au-delà de k_{i2} , l'émergence de ces nouveaux points fixes instables génère un comportement chaotique. Les itérés se répartissent sur quatre intervalles denses notés 1, 2, 3 et 4, dans l'ordre croissant des valeurs des itérés le long de ces intervalles. Les quatre intervalles sont visités alternativement dans l'ordre suivant : 1-3-2-4. On remarque que la frontière basse divise l'intervalle 2 en deux sous-intervalles. Selon la position de l'itéré dans cet intervalle, en-dessous ou au-dessus de I_r , deux formes de la récurrence de quatrième ordre s'appliquent :

$$X_{n+4} = \begin{cases} F_{2121} = F_2 \circ F_1 \circ F_2 \circ F_1(X_n) & \text{si } i_{n+2} < I_r \\ F_{2221} = F_2 \circ F_2 \circ F_2 \circ F_1(X_n) & \text{si } i_{n+2} > I_r \end{cases}$$

En ce qui concerne le point fixe de F_{2121} et sa stabilité, les résultats sont identiques à ceux de F_{21} . Il est donc instable pour tout $k_i > k_{i2}$.

Au point de bifurcation $k_i = k_{i2}$, le nouveau point fixe X_4^* de F_{2221} apparaît. Il est toujours instable. Nous sommes en présence d'une bifurcation entre une solution périodique 2T et une solution chaotique sur quatre intervalles et cette bifurcation est discontinue.

8 Simulations

Avec les mêmes valeurs numériques que précédemment, on détermine les conditions de validité de l'étude : $I_r > 0.474$ et $k_v < 9.09$. Les points de bifurcation sont : $k_{i1} = 19$ et $k_{i2} = 20,11$.

La figure 4 présente une simulation réalisée avec PSIM. Les paramètres de contrôle sont $I_r = 0.6$, $k_v = 1$ et k_i balaye lentement l'intervalle $[15,30]$. Ce diagramme suit le diagramme théorique de la figure 3 calculé à l'aide de Matlab. Les points de bifurcations sont à présent prédits en $k_{i1} = 20.1$ et $k_{i2} = 21.5$. En raison de la linéarisation des exponentielles de matrices au cours de la modélisation, les résultats simulés diffèrent légèrement des résultats théoriques mais en demeurent néanmoins très proches.

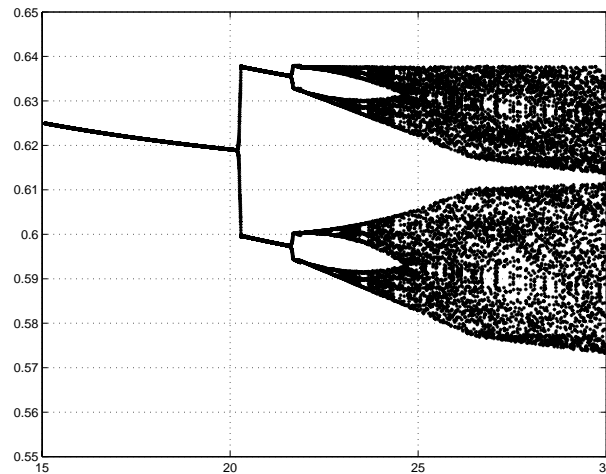


FIG. 4 – Diagramme de bifurcation simulé par PSIM.

9 Conclusion.

De nombreux travaux ont traité des phénomènes de bifurcation dans les convertisseurs statiques. L'originalité de ce travail réside dans la détermination analytique des points fixes, de leur stabilité et des bifurcations. Les résultats simulés montrent qu'il est ainsi possible de prévoir qualitativement l'aspect du diagramme de bifurcation. Nous avons montré que ces bifurcations peuvent être discontinues et en particulier, qu'en raison de l'utilisation d'un contrôleur numérique en temps discret, toutes les bifurcations de ce convertisseur se produisent par collisions de frontières. Nous pensons que ce type de contrôleur simplifie les diagrammes de bifurcation résultants et que cette méthode peut aider à comprendre comment les paramètres du convertisseur influent sur ses dynamiques.

Références

- [1] T. A. Meynard, M. Fadel et N. Aouda, *Modeling of Multilevel Converters*, IEEE Trans. Ind. Electronics, **44** (3), 365-364, (1997).
- [2] C. K. Tse, *Complex Behavior of Switching Power Converters*, Boca Raton, USA. CRC Press, (2003).
- [3] H. H. C. Iu et B. Robert, *Control of Chaos in a PWM Current-Mode H-Bridge Inverter Using a Time-Delayed Feedback*, IEEE Trans on Circuits and System - Part 1, **8**, 1125-1129, (2003).
- [4] B. Robert et C. Robert, *Border Collision Bifurcations in a One-Dimensional Piecewise Smooth Map for a PWM Current-Programmed H-Bridge Inverter*, International Journal of Control, **75**, (16/17), 1356-1367, (2002).
- [5] D. Pinon, M. Fadel et T. Meynard, *Sliding Mode controls for a two-cell chopper*, Proceedings of EPE'99 CD-ROM, (1999).

Instabilité modulationnelle incohérente dans une fibre optique

Alexandre Sauter, Antonio Picozzi *, Stéphane Pitois et Guy Millot

Laboratoire de Physique de l'Université de Bourgogne, UMR CNRS 5027, Equipe solitons et télécommunications optiques, BP 47870, 21078 Dijon, France

**CNRS, Laboratoire de physique de la matière condensée, Université de Nice Sophia-Antipolis, 06108 Nice, France
alexandre.sauter@u-bourgogne.fr*

Résumé

Nous présentons dans cet article nos résultats théoriques, numériques et expérimentaux concernant l'observation d'Instabilité Modulationnelle incohérente dans un milieu non-linéaire à réponse quasi-instantanée (une fibre optique).

Abstract

We report in this article theoretical, numerical and experimental observation of modulational instability in quasi instantaneous nonlinear media (an optical fiber).

1 Introduction

Depuis l'invention du laser en 1964 et son utilisation dans les télécommunications par fibre optique, la connaissance et la maîtrise de la dynamique de propagation d'impulsions lumineuses au sein d'un milieu non-linéaire sont devenues des enjeux d'importance majeure, tant au niveau de la recherche appliquée que de la recherche fondamentale (étude de solitons, de phénomènes paramétriques, etc.). L'instabilité modulationnelle (IM) est un de ces effets : lors de la propagation d'impulsions lumineuses dans un milieu non-linéaire, de petites perturbations d'amplitude ont tendance à croître exponentiellement grâce aux effets combinés de la dispersion et de la non-linéarité. Ceci se traduit par l'apparition de bandes Stokes et anti-Stokes dans le spectre, et conduit à une modulation du profil temporel de l'impulsion. L'IM peut ainsi causer, au cours de la propagation, la dislocation d'impulsions quasi-continues. Depuis sa première observation en 1986 par Tai, Hasegawa et Tomita [1], de nombreux processus mettant en jeu l'IM ont été rapportés : génération de solitons, création de trains d'impulsions ultracourtes [2,3], etc. Les sources utilisées dans ces travaux étaient des sources cohérentes (dont la phase spectrale ne varie pas aléatoirement), la cohérence du faisceau étant supposée être une des conditions sine qua non d'existence de ces phénomènes. Parallèlement, l'existence d'effets non-linéaires générés à partir de sources partiellement incohérentes (dont la phase spectrale varie aléatoirement) a été observée et étudiée depuis quelques années déjà : solitons [4], IM [5,6], interaction paramétrique à trois ondes [7], etc. La plupart de ces études utilisent des matériaux photo-réfractifs à réponse non-instantanée : le temps de réponse non-linéaire τ est beaucoup plus long que la durée de cohérence temporelle τ_t de l'impulsion : $\tau_t \ll \tau$. L'efficacité des effets non-linéaires résulte par conséquent du moyennage des fluctuations de l'impulsion sur le temps de réponse du matériau [5]. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'observation d'un effet non-linéaire, l'Instabilité Modulationnelle, à partir d'une source partiellement incohérente dans un milieu à réponse quasi-instantanée ($\tau_t \gg \tau$), une fibre optique en l'occurrence.

2 Approche théorique

Notre étude théorique est basée sur un modèle d'impulsions présentant une forte fluctuation de leur intensité et une durée de cohérence temporelle supérieure au temps de réponse non-linéaire du milieu. Si la réponse non-linéaire du milieu est plus rapide que les fluctuations de l'impulsion, nous pouvons alors la considérer comme quasi-instantanée. La Fig.1 représente les profils d'intensité temporels d'une impulsion gaussienne partiellement incohérente (traits pleins) et d'une impulsion gaussienne cohérente (pointillés).

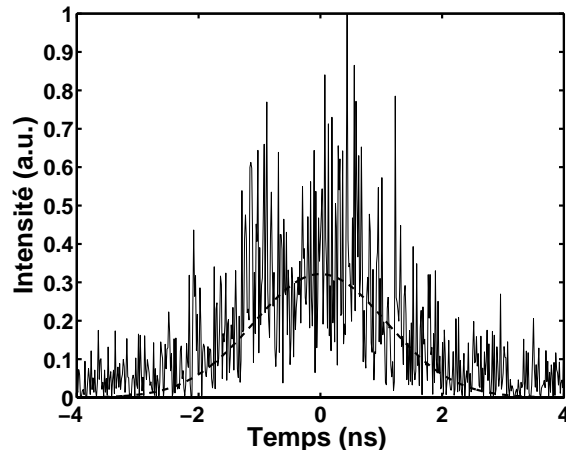


FIG. 1 – Profils d'intensité temporels de deux impulsions gaussiennes, l'une partiellement incohérente (traits pleins) et l'autre cohérente (pointillés)

Bien que les deux impulsions aient la même puissance moyenne, l'intensité de l'impulsion partiellement incohérente fluctue énormément, atteignant des puissances crêtes bien plus élevées que dans le cas cohérent. Dans ces conditions, chaque pic d'intensité de l'impulsion va amplifier le bruit optique présent lors de la propagation par effet d'IM, ce qui donnera naissance dans le domaine spectral à une raie Stokes et une raie anti-Stokes. L'efficacité de l'IM dépendant des intensités maximales atteintes par l'impulsion, le gain et la fréquence de modulation d'IM seront plus importants pour une impulsion partiellement incohérente que pour une impulsion cohérente, pour une même forme d'impulsion et à puissance moyenne identique. Dans l'hypothèse d'un spectre lorentzien et d'une statistique de pompe gaussienne, le gain d'IM incohérente peut être décrit par :

$$g(\Omega) = |\beta_2| \Omega (\Omega_c^2 - \Omega^2)^{\frac{1}{2}} - 2\beta_2 \sigma |\Omega| \quad (1)$$

où β_2 est le coefficient de dispersion d'ordre 2, σ est la largeur du spectre de l'onde incohérente initiale, et

$$\Omega_c^2 = \frac{8\gamma P_0}{|\beta_2|} \quad (2)$$

Il est naturellement nécessaire de se trouver en régime de dispersion anormale ($\beta_2 < 0$) pour observer l'IM. En revanche, et contrairement au cas cohérent, il apparaît une condition de seuil pour l'IM :

$$P_s = \frac{\sigma^2 \beta_2}{2\gamma} \quad (3)$$

où γ est le coefficient non-linéaire, P_s est la puissance de seuil, σ est la largeur du spectre de l'onde incohérente initiale, et β_2 est le coefficient de dispersion d'ordre 2. Concrètement, la puissance de seuil P_s correspond à la puissance minimale nécessaire pour que les raies d'IM "sortent" du spectre de la pompe.

3 Résultats expérimentaux et discussion

Le schéma du dispositif expérimental utilisé pour observer l'IM incohérente est visible sur la Fig.2.

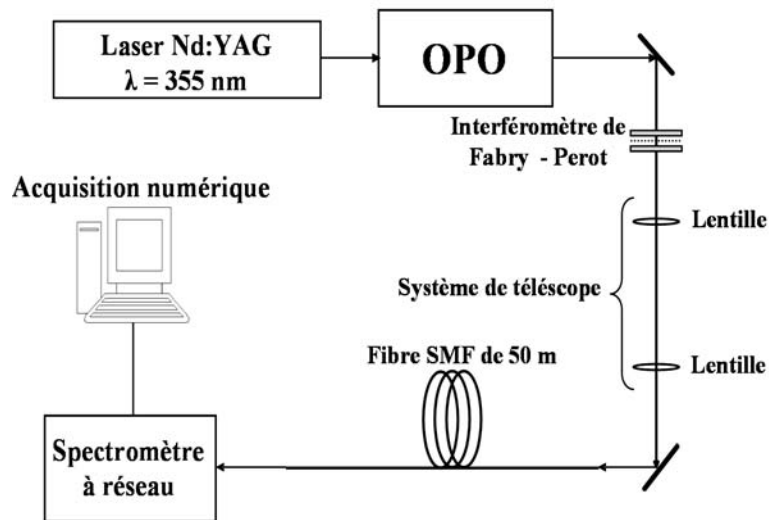


FIG. 2 – *Dispositif expérimental.*

La source partiellement incohérente utilisée est un Oscillateur Paramétrique Optique (OPO) pompé par un laser Nd:YAG à fréquence triplée, avec un taux de répétition de 25 Hz. Le spectre d'émission en sortie d'OPO est large (3.2 nm à mi hauteur) et de forme gaussienne. Les impulsions ont une durée temporelle de 3 ns. Un interféromètre de Fabry-Pérot permet de réduire la largeur du spectre en ne sélectionnant qu'un des modes du FP ($\sigma = 2 \text{ nm}$ largeur du spectre à mi hauteur). Le spectre en sortie de l'OPO étant très large comparé à un mode de l'interféromètre, la forme du spectre en sortie du FP sera le produit du spectre en entrée par la réponse du FP. Dans notre cas, le spectre résultant aura une forme quasi-gaussienne. Le faisceau présentant une forte divergence spatiale, nous utilisons un système de lentilles montées en télescope pour réduire sa taille. L'impulsion est ensuite injectée dans une fibre SMF de 50 m de long, dotée d'une longueur d'onde de dispersion nulle $\lambda_0 = 1312 \text{ nm}$. L'accordabilité de l'OPO nous permet de travailler en régime de dispersion anormale sur une plage de longueurs d'ondes comprises entre 1317.73 nm et 1329.82 nm. L'impulsion est envoyée en sortie de fibre dans un spectromètre à réseau, d'une résolution de 0.133 nm, avec lequel nous effectuons une analyse spectrale.

Pour des longueurs d'onde allant de 1317.73 à 1329.82 nm, nous sommes capables d'observer des raies d'IM dans le spectre de la pompe. Un spectre expérimental typique d'IM incohérente en régime de dispersion anormale de la fibre peut être observé sur la Fig.3, pour une puissance crête de 75 W.

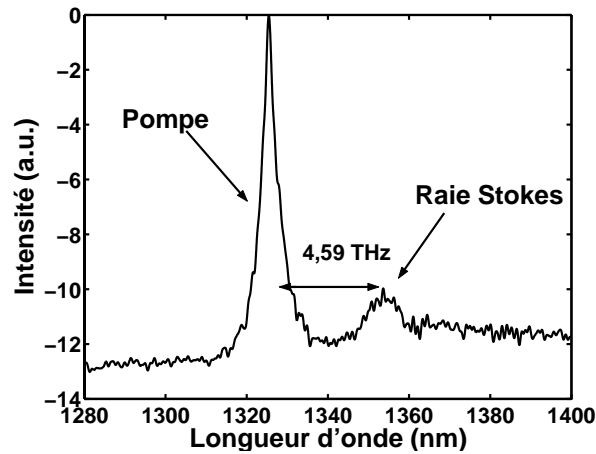


FIG. 3 – Spectre expérimental d'Instabilité Modulationnelle, enregistré à 1326.34 nm en régime de dispersion anormal avec une puissance crête de 75 W, après propagation dans 50 m de fibre optique SMF.

Le pic central correspond à la pompe, à 1326.34 nm. Seule la raie Stokes est observable sur notre spectre. En effet la diffusion Raman stimulée agit sur notre impulsion, ce qui a pour conséquence de dépeupler la raie anti-Stokes et d'amplifier la raie Stokes. Nous pouvons clairement voir sur la Fig.3 une fréquence d'IM de 4.59 THz. La Fig.4 représente un spectre d'IM incohérente obtenu à partir de simulations numériques à 1326.34 nm avec 75 W de puissance crête, tandis que la Fig.5 présente un spectre d'IM cohérente simulé avec les mêmes paramètres. Alors que la Fig.4 présente les mêmes traits caractéristiques que la Fig.3 (asymétrie entre raie Stokes et anti-Stokes, valeur du gain, fréquence d'IM), le cas cohérent représenté sur la Fig.5 est très différent des deux précédents.

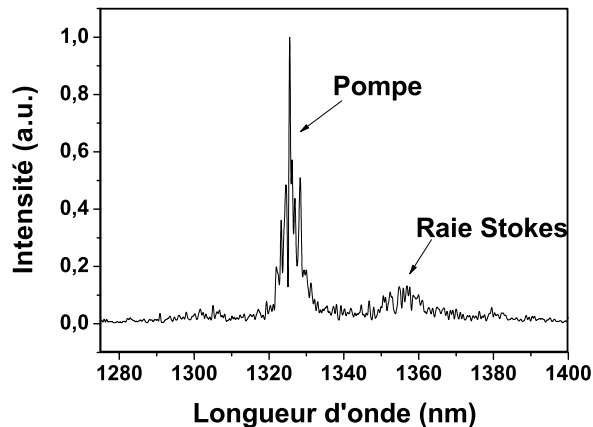


FIG. 4 – Spectre simulé d'Instabilité Modulationnelle incohérente. Simulation effectuée à 1326.34 nm pour 75 W de puissance crête, après 50 m de propagation en régime de dispersion anormal dans une fibre optique SMF.

Conformément à la théorie, la fréquence d'IM et le gain sont nettement inférieurs aux

valeurs du cas incohérent.

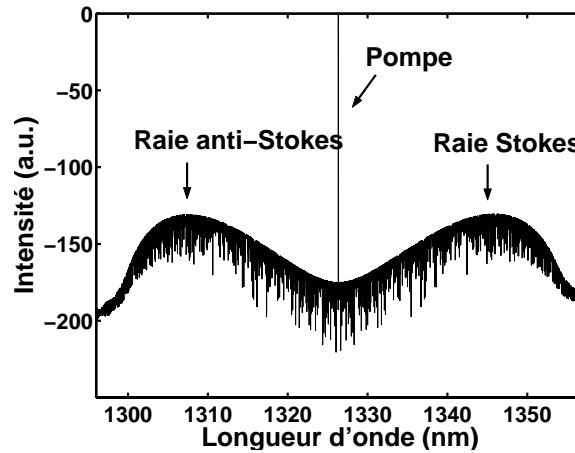


FIG. 5 – Spectre simulé d'Instabilité Modulationnelle cohérente. Simulation effectuée avec une source monochromatique à 1326.34 nm, pour une puissance crête de 75 W, après 50 m de propagation en régime de dispersion anormal dans une fibre optique SMF

La Fig.6 représente les valeurs de fréquence d'IM en fonction de la longueur d'onde de la pompe en régime de dispersion anormal de la fibre : les cercles correspondent aux mesures expérimentales, les traits pleins aux simulations numériques avec une source partiellement incohérente et les pointillés aux simulations numériques avec une source cohérente.

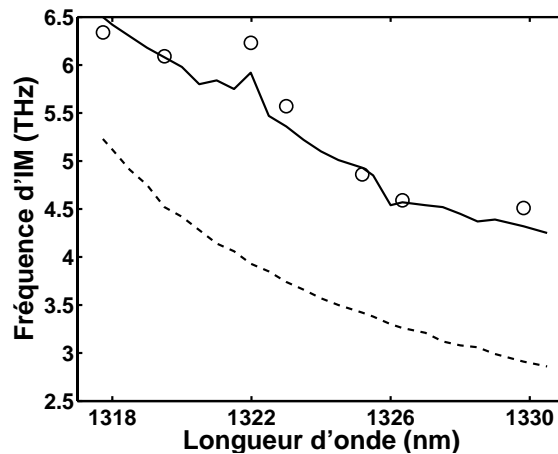


FIG. 6 – Fréquence d'Instabilité Modulationnelle en fonction de la longueur d'onde de la pompe. Les cercles correspondent aux mesures expérimentales, les traits pleins aux simulations numériques avec une source partiellement incohérente et les pointillés aux simulations numériques avec une source cohérente.

Comme nous pouvons le voir les simulations avec une pompe partiellement incohérente sont en bon accord avec les mesures expérimentales. Toutes ces simulations ont été effectuées avec une pompe de 75 W de puissance crête se propageant dans 50 m de fibre SMF, présentant un spectre gaussien ($\sigma = 2$ nm la largeur du spectre à mi hauteur) auquel nous avons ajouté une phase aléatoire pour chaque composante spectrale. Du bruit

blanc a également été ajouté pour donner naissance à l'IM. Chaque spectre a été obtenu en moyennant 50 spectres d'impulsions s'étant propagées dans la fibre. Il est nécessaire de procéder ainsi pour rendre négligeable l'impact des phases aléatoires sur la valeur de la fréquence d'IM. Nous pouvons comparer les résultats obtenus pour une source partiellement incohérente avec ceux donnés par une source parfaitement monochromatique. Comme prédit par la théorie, la fréquence d'IM est nettement plus importante pour la source partiellement incohérente que pour la source cohérente. Les observations faites sur les Fig.3, 4 et 5 se généralisent ici. Mais contrairement aux calculs théoriques, qui prédisent un facteur $2\sqrt{2}$ entre fréquences d'IM cohérentes et incohérentes, nous n'avons qu'un facteur $\sqrt{2}$. Nous avons deux explications à ceci : tout d'abord la statistique d'émission de la pompe utilisée dans les calculs théorique est une statistique gaussienne. Or cette statistique n'est probablement pas adaptée à notre expérience, puisque les longueurs de dispersion et d'interaction non linéaires sont du même ordre. D'autre part le calcul du gain considère un spectre de forme Lorentzienne car c'est le seul qui donne une formule analytique. Notre spectre étant gaussien, nous ne pouvons obtenir de forme analytique pour le gain d'IM.

4 Conclusion

Bien que nous ayons à généraliser notre modèle théorique à d'autres types de statistiques, nous sommes parvenu à générer de l'Instabilité Modulationnelle dans un matériau non linéaire à réponse quasi instantanée en régime de dispersion anormal à l'aide d'une source partiellement incohérente. L'apparition de structures périodiques dans les observations d'IM incohérente générée dans des matériaux non linéaires photo réfractifs avait suscité l'engouement pour ce type d'étude. Nous pensons néanmoins que ce type de phénomène peut se généraliser à tous les cas incohérents, et la génération de motifs d'IM périodiques dans des fibres optiques est une des perspectives à ce travail.

Références

- [1] K. Tai, A. Hasegawa and A. Tomita, *Observation of modulational instability in optical fibers*, Phys. Rev. Letter, **56**, 135 (1986)
- [2] Y. D. Gong, P. Shum, D. Y. Tang, C. Lu and X. Guo, *660 GHz soliton source based on modulational instability in a short cavity*, Opt. Express, **11**, 2480 (2003)
- [3] A. Hasegawa, *Generation of a train of soliton pulses by induced modulational instability in optical fibers*, Opt. Letters **9**, No 7 (1984)
- [4] A. Picozzi and M. Haelterman, *Parametric three-wave soliton generated from incoherent light*, Phys. Rev. Letter, **86**, 2010-2013 (2001)
- [5] J. Klinger, H. Martin, Z. Chen *Experiments on induced modulational instability of an incoherent optical beam*, Opt. Letters, **26**, No 5 271-273 (2001)
- [6] M. Soljacic, M. Segev, T. Coskun, D. N. Christodoulides and A. Vishwanath, *Modulation instability of incoherent beams in noninstantaneous nonlinear media*, Phys. Rev. Letter, **84**, 467-470 (2000)
- [7] A. Picozzi, C. Montes and M. Haelterman *Coherence Properties of the parametric three-wave interaction driven from incoherent pump*, Phys. Rev. E, **66** (2002)
- [8] G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics*, Quantum electronics, Principles and Applications, Academic Press, 1989

Ondes solitaires pulsatoires en milieu discret

Y. Sire et G. James

Mathématiques pour l'Industrie et la Physique, UMR CNRS 5640
Département GMM, INSA,
135 avenue de Rangueil, 31077 Toulouse Cedex 4
sire@insa-toulouse.fr

Résumé

Nous montrons l'existence d'ondes solitaires pulsatoires (travelling breathers) dans des chaînes d'oscillateurs non linéaires. Chaque oscillateur est plongé dans un potentiel anharmonique et linéairement couplé à ses premiers voisins. La partie principale de ces solutions est décrite par l'équation de Schrödinger non linéaire. Cependant les solutions exactes admettent en général des oscillations à l'infini, dont l'amplitude ne tend pas vers 0 et est exponentiellement petite par rapport à la taille du centre.

Abstract

We show the existence of pulsating solitary waves (called travelling breathers) in nonlinear oscillator networks. Each oscillator is embedded in an anharmonic potential and linearly coupled to its nearest neighbors. The principal part of these solutions is described by a nonlinear Schrödinger equation. However, the exact solutions generically possess a nondecaying oscillatory tail, whose amplitude is exponentially small compared to central oscillations.

1 Introduction

Le problème de la localisation d'énergie vibrationnelle dans les milieux discrets et de son transport fait l'objet de recherches intensives dans différentes branches de la physique, par exemple en physique du solide [23], en optique non linéaire [20] ou en biophysique (notamment pour la dénaturation de l'ADN [5] et le transport de charge dans les biomolécules [7]). On peut se référer à [8] pour une revue détaillée de ce domaine de recherches, et à [4] pour un aperçu plus récent incluant des résultats expérimentaux.

Des oscillations spatialement localisées, encore appelées "breathers", apparaissent dans des conditions très générales sous l'effet des nonlinéarités et de la nature discrète du milieu (ce phénomène ne doit pas être confondu avec la localisation d'Anderson due au désordre). Ce type d'oscillations a été étudié d'un point de vue mathématique [17, 15, 3] en considérant des oscillations périodiques dans des chaînes infinies d'oscillateurs couplés (principalement pour des systèmes Hamiltoniens). De ce point de vue leur existence est maintenant bien comprise, mais leur importance dans les systèmes réels (en particulier les biomolécules) fait encore l'objet de nombreux débats [5, 7]. D'un point de vue général, des questions fondamentales sont par exemple si ce type d'oscillations peut exister en présence d'un bruit thermique important, et si leur durée de vie, ainsi que leur fréquence d'oscillation leur permettent de jouer un rôle dans des processus physiques spécifiques.

Le problème de la mobilité des breathers dans un milieu discret fait actuellement l'objet de nombreuses recherches au niveau fondamental. Ces aspects ont des conséquences importantes sur le transport d'énergie dans ce type de milieux. Par exemple, la collision de breathers en mouvement peut conduire à la formation d'oscillations localisées de grande amplitude et à leur piégeage [6].

Les breathers mobiles en milieu discret sont couramment appelés “travelling breathers” ou encore ondes solitaires pulsatoires. D’un point de vue mathématique leur existence est restée un problème ouvert jusqu’à récemment [16, 13, 22], mis à part dans certains modèles intégrables [1].

Dans le régime des petites amplitudes, on peut calculer des solutions approchées correspondant à des breathers mobiles, sous la forme d’ondes planes modulées dont l’enveloppe est spatialement localisée et décrite par l’équation de Schrödinger non linéaire [18]. Cependant cette analyse n’est a priori valide que pour des temps finis [11] et pour des enveloppes faiblement localisées.

Dans ce travail nous montrons, pour une classe de modèles couramment utilisés, qu’il existe des solutions *exactes* correspondant aux breathers approchés décrits par l’équation de Schrödinger non linéaire (nous résumons des résultats obtenus dans [16, 22]). Par ailleurs, ces solutions ne sont pas *génériquement* localisées au sens strict du terme, mais sont superposées à l’infini à une queue oscillante, exponentiellement petite par rapport aux oscillations centrales lorsque leur amplitude tend vers 0. Par ailleurs, en continuant numériquement ces solutions dans le régime des grandes amplitudes, nous montrons que des oscillations très localisées peuvent se propager sans dispersion [24, 2].

Le système que nous étudions par la suite est constitué d’un réseau d’oscillateurs non linéaires linéairement couplés à leurs premiers voisins. Chaque oscillateur est plongé dans un potentiel anharmonique V . Plus précisément, on considère le système

$$\frac{d^2 x_n}{d\tau^2} + V'(x_n) = \gamma(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

où x_n est le déplacement de la n ème particule par rapport à une position d’équilibre et $\gamma > 0$ une constante de couplage. On suppose que le potentiel anharmonique V est analytique sur un voisinage de 0 et admet le développement de Taylor $V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{a}{3}x^3 - \frac{b}{4}x^4 + \text{h.o.t.}$ en $x = 0$. Différentes preuves ont été données pour l’existence d’ondes progressives (solutions satisfaisant $x_n(\tau) = x_{n-1}(\tau - T)$ où T est une constante) dans des réseaux non linéaires (voir [9, 10, 14] et leurs références). Dans ce travail, nous étudions l’existence de solutions plus générales (ondes progressives pulsatoires) vérifiant la condition

$$x_n(\tau) = x_{n-p}(\tau - T), \quad (2)$$

l’entier $p \geq 2$ et $T > 0$ étant fixés. En particulier, les solutions qui vérifient (2) et $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} x_n(\tau) = 0$ sont appelées *travelling breathers*. Dans cet exposé, nous nous limitons au cas $p = 2$ mais le cas général $p \geq 2$ est traité dans [22]. Le changement de variables $(u_1(t), u_2(t)) = (x_1(\tau), x_2(\tau + T/2))$ avec $\tau = Tt$ conduit au système suivant lorsque $p = 2$

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + T^2 \begin{bmatrix} V'(u_1) \\ V'(u_2) \end{bmatrix} = \gamma T^2 \begin{bmatrix} u_2(t - \frac{1}{2}) - 2u_1(t) + u_2(t + \frac{1}{2}) \\ u_1(t + \frac{1}{2}) - 2u_2(t) + u_1(t - \frac{1}{2}) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Il s’agit d’un système d’équations différentielles avec termes d’avance et retard.

Le papier s’organise en deux sections: la première est dédiée à l’étude analytique de l’existence des travelling breathers dans le régime des petites amplitudes. La seconde donne des résultats numériques pour les grandes amplitudes.

2 Etude analytique de l’existence de travelling breathers

Dans cette partie, nous considérons des solutions de petite amplitude de (3). A cette fin, nous utilisons une méthode de réduction à une variété centrale initialement introduite par Iooss et Kirchgässner dans le contexte des équations différentielles avec avance

et retard [14]. Afin de pouvoir utiliser ces théorèmes de réduction, on écrit le système (3) sous forme d'un problème d'évolution dans un espace de fonctions. On pose $U = (u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2, X_1(t, v), X_2(t, v))^T$ où $v \in [-1/2, 1/2]$ et $X_1(t, v) = u_1(t+v), X_2(t, v) = u_2(t+v)$. On définit alors les opérateurs de trace suivants $\delta_{\pm 1/2} X_i(t, v) = X_i(t, \pm 1/2)$ ($i = 1, 2$). Le système (3) s'écrit alors

$$\frac{dU}{dt} = LU + F(U) \tag{4}$$

où la partie linéaire est donnée par

$$LU = (\dot{u}_1, \dot{u}_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2(\delta_{1/2} + \delta_{-1/2})X_2, \alpha_1 u_2 + \alpha_2(\delta_{1/2} + \delta_{-1/2})X_1, \partial_v X_1, \partial_v X_2),$$

avec $\alpha_1 = -T^2(1 + 2\gamma)$, $\alpha_2 = T^2\gamma$. L'opérateur nonlinéaire F est

$$F(U) = T^2(0, 0, f(u_1), f(u_2), 0, 0)$$

avec $f(u) = au^2 + bu^3 + \text{h.o.t.}$ Les solutions de (4) satisfont $U \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{D}) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, où $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4 \times (C^0[-1/2, 1/2])^2$ et $\mathbb{D} = \{U \in \mathbb{R}^4 \times (C^1[-1/2, 1/2])^2 / X_1(0) = u_1, X_2(0) = u_2\}$. L'opérateur L envoie \mathbb{D} dans \mathbb{H} continûment et $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est analytique avec $F(U) = O(\|U\|_{\mathbb{D}}^2)$. La symétrie R sur \mathbb{H} définie par $R(u_1, u_2, \xi_1, \xi_2, X_1(v), X_2(v)) = (u_1, u_2, -\xi_1, -\xi_2, X_1(-v), X_2(-v))$ satisfait $(L + F)R = -R(L + F)$, l'équation (4) est donc réversible. Notons de plus que la symétrie de permutation $S(u_1, u_2, \xi_1, \xi_2, X_1, X_2) = (u_2, u_1, \xi_2, \xi_1, X_2, X_1)$ commute avec $L + F$ (les solutions ondes progressives sont des points fixes de S). Le problème (4) est mal posé en tant que problème aux valeurs initiales dans \mathbb{D} . Toutefois, il est possible de construire des solutions bornées pour tout $t \in \mathbb{R}$. A l'aide de la théorie des variétés centrales [14], il est possible de réduire localement (4) à un système d'équations différentielles en dimension finie (de dimension 8 dans le régime de paramètres considéré plus bas).

On commence par étudier le problème linéaire, i.e le spectre de L . Il consiste en des valeurs propres isolées de multiplicité finie. Le résolution de $LU = \sigma U$ mène à l'équation de dispersion suivante $N(\sigma, T, \gamma) := (\sigma^2 + T^2(1 + 2\gamma))^2 - 4(\gamma T^2)^2 \cosh^2(\sigma/2) = 0$. Comme L est à coefficients réels et à cause de la réversibilité, le spectre est invariant par réflexions par rapport aux axes. Pour la partie centrale du spectre ($\sigma = iq$), la relation de dispersion s'écrit $(-q^2 + T^2(1 + 2\gamma))^2 = 4(\gamma T^2)^2 \cos^2(q/2)$. On montre que cette équation a un nombre fini de solutions $q \in \mathbb{R}$ (dépendant de (γ, T)). Par ailleurs, le spectre de L est non borné des deux côtés de l'axe des imaginaires. Pour l'étude de l'équation de dispersion, on renvoie le lecteur à [16] où cette étude est menée en détail. On définit Δ comme la courbe dans le plan (γ, T) telle que la partie centrale du spectre est $\Sigma = \{\pm iq_1, \pm iq_2, \pm iq_0\}$, où $\pm iq_0$ est une paire de valeurs propres doubles non semi-simple et $\pm iq_1, \pm iq_2$ deux paires de valeurs propres simples. La courbe Δ se décompose en une union de courbes successives Γ_k définissant des "langues" dans le plan (γ, T) [16]. Les bifurcations d'ondes solitaires pulsatoires que nous décrivons plus loin se produisent au voisinage des courbes Γ_{2k+1} (près de Γ_{2k} bifurquent des ondes progressives). Pour $(\gamma, T) = (\gamma_0, T_0) \in \Delta$, on définit P comme la projection spectrale sur le sous-espace central L -invariant (de dimension 8) associé à Σ et on utilise les notations $\mathbb{D}_h = (\mathbb{I} - P)\mathbb{D}$, $\mathbb{H}_h = (\mathbb{I} - P)\mathbb{H}$, $\mathbb{D}_c = P\mathbb{D}$, $U_h = (\mathbb{I} - P)U$, $U_c = PU$. La propriété de régularité optimale (voir [25], hypothèse (ii) p.127) est remplie dans notre cas et on obtient le théorème de réduction suivant.

Théorème 1 Fixons $(\gamma_0, T_0) \in \Delta$. Il existe un voisinage $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ de $(0, \gamma_0, T_0)$ dans $\mathbb{D} \times \mathbb{R}^2$ et une application $\psi \in C_b^k(\mathbb{D}_c \times \mathbb{R}^2, \mathbb{D}_h)$ telle que l'on ait les propriétés suivantes

pour tout $(\gamma, T) \in \mathcal{V}$ (avec $\psi(0, \gamma, T) = 0, D\psi(0, \gamma_0, T_0) = 0$).

- Si $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}$ est solution de (4) et $U(t) \in \mathcal{U} \forall t \in \mathbb{R}$, alors $U_h(t) = \psi(U_c(t), \gamma, T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $U_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}_c$ est une solution de

$$\frac{dU_c}{dt} = P(L + F)(U_c + \psi(U_c, \gamma, T)). \quad (5)$$

- Si U_c est une solution de (5) avec $U_c(t) \in \mathcal{U} \forall t \in \mathbb{R}$, alors $U = U_c + \psi(U_c, \gamma, T)$ est une solution (4).
- L'application $\psi(\cdot, \gamma, T)$ commute avec R et S , et (5) est réversible par R et S -équivariante.

Le problème (4) se ramène donc localement au problème (5) de dimension finie (dimension 8). L'étude de l'équation réduite (5) se fait via une technique de forme normale. Pour ce faire, on exclut de Δ les voisinages de points où $sq_0 + rq_1 + r'q_2 = 0$ pour $s, r, r' \in \mathbb{Z}$ et $0 < |s| + |r| + |r'| \leq 4$ (résonances fortes). On note Δ_0 ce nouvel ensemble. On choisit alors $(\gamma, T) \approx (\gamma_0, T_0)$ ($(\gamma_0, T_0) \in \Delta_0$), de telle sorte que l'opérateur L possède quatre valeurs propres symétriques proches de $\pm iq_0$ et de parties réelles non nulles. On renvoie le lecteur à [16] pour le calcul et une étude complète de la forme normale.

L'existence d'orbites homoclines à 0 pour la forme normale tronquée (en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 4 en U_c) est reliée au signe du coefficient α suivant

$$\left(2 - \frac{q_0}{\tan(q_0/2)}\right)\alpha = T_0^2(6b + 8a^2 - \frac{4a^2T_0^2}{2\gamma_0T_0^2 \cos(q_0) - T_0^2(1 + 2\gamma_0) + 4q_0^2}). \quad (6)$$

L'étude précédente de la forme normale (voir [16]) permet d'aboutir au théorème suivant.

Théorème 2 *Supposons $\alpha(T_0, \gamma_0) < 0$ pour $(T_0, \gamma_0) \in \Delta_0 \cap \Gamma_{2k+1}$ fixé et considérons $(\gamma, T) \approx (\gamma_0, T_0)$ de telle sorte que l'opérateur L possède quatre valeurs propres symétriques proches de $\pm iq_0$ et de parties réelles non nulles. Alors l'équation réduite (5) écrite sous forme normale et tronquée à l'ordre 4 admet des solutions réversibles (par R ou RS) de petite amplitude homoclines à des 2-tores.*

Nous conjecturons que les solutions de l'équation (5) tronquée décrites par le théorème 2 correspondent pour le système (1) à des solutions exactes, qui consistent en des ondes solitaires pulsatoires, superposées à une queue quasi-périodique lorsque $n \rightarrow \pm\infty$. Le problème de la persistance de telles orbites pour l'équation réduite *complète* est très délicat. Le cas qui nous concerne, dans lequel les oscillations sont quasi-périodiques à l'infini, est encore ouvert (le cas périodique a été traité par Lombardi [19]). Par ailleurs, il y a *génériquement* non persistance de la solution réversible homocline à 0 [19]. Notons que des phénomènes analogues ont été étudié par Pomeau *et al.* [21] pour l'équation de KdV perturbée par une dérivée spatiale d'ordre 5.

Dans le cas où le potentiel V est pair, on peut donner un résultat pour l'équation réduite complète. En effet, en se restreignant à un sous-espace invariant de l'équation réduite, on élimine une paire de valeurs propres sur l'axe des imaginaires. On peut alors appliquer les résultats de Lombardi [19] concernant ce type de systèmes.

Théorème 3 *Supposons $\alpha(\gamma_0, T_0) < 0$ pour $(\gamma_0, T_0) \in \Delta_0 \cap \Gamma_{2k+1}$ fixé et considérons $(\gamma, T) \approx (\gamma_0, T_0)$ de telle sorte que l'opérateur L possède quatre valeurs propres symétriques proches de $\pm iq_0$ et de parties réelles non nulles. Supposons de plus V pair. Alors l'équation réduite (5) écrite sous forme normale et restreinte à $\text{Fix}(-S)$ admet des solutions réversibles (par R) de petite amplitude homoclines à des orbites périodiques dont l'amplitude est exponentiellement par rapport au paramètre de bifurcation. Ces solutions correspondent*

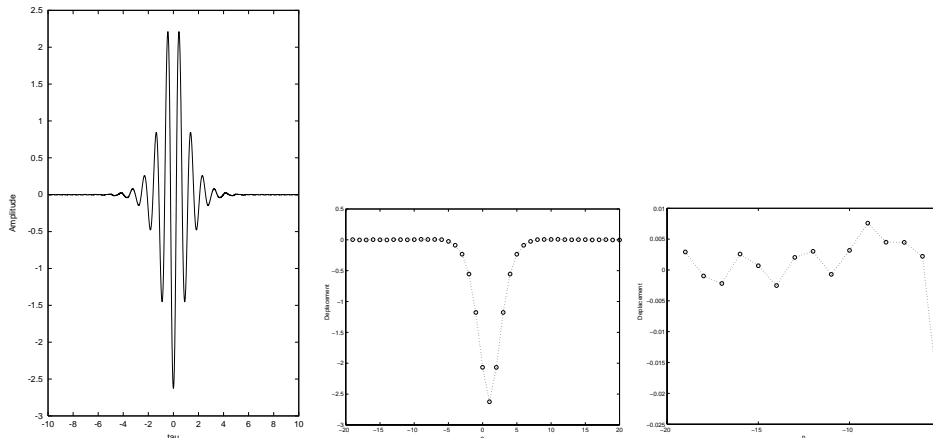


FIG. 1 – Solution de grande amplitude dans le cas du potentiel pair $V(x) = 1 - \cos(x)$ avec $T = 8.1, \gamma = \gamma_0 \approx 0.9, T_0 \approx 6.63$. La figure de gauche montre les déplacements de la masse $n = 1$ en fonction du temps t . Celle de droite montre les déplacements sur tous les sites du réseau à $\tau = 0$.

à des solutions travelling breathers exactes du système (1), superposées à l'infini à une queue périodique.

Dans la section suivante nous donnons quelques résultats numériques qui illustrent la théorie précédente. Ces résultats montrent également l'existence de solutions de grande amplitude, dont la partie centrale est très localisée.

3 Calcul numérique de travelling breathers

Les calculs numériques présentés ci-après ont été obtenus en discrétisant le système (3) par un schéma différences finies. A partir d'ansatz fournis par l'étude de la forme normale associée à l'équation réduite (5), on calcule des solutions de petite amplitude qui bifurquent près de la courbe Γ . Ces solutions sont alors continuées (à γ fixé) pour des valeurs de T plus éloignées de la courbe. Les résultats qui suivent sont extraits d'une étude numérique plus complète menée dans [24].

On considère d'abord le potentiel trigonométrique $V(x) = 1 - \cos(x)$. Ce potentiel étant symétrique, on se restreint aux solutions vérifiant $x_{n+1}(\tau) = -x_n(\tau - \frac{T}{2})$. Les solutions sont alors déterminées par l'équation suivante

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + V'(x_1) = -\gamma(x_1(\tau + T/2) + x_1(\tau - T/2) + 2x_1(\tau)). \quad (7)$$

Les résultats montrent l'existence de travelling breathers fortement localisés (figure 1). Toutefois, un agrandissement de la solution loin du centre montre la présence d'une queue oscillante (figure 1, à droite). Ces résultats sont en accord avec le théorème 3.

Les calculs suivants concernent le potentiel de Morse $V(x) = \frac{1}{2}(\exp(-x) - 1)^2$ (figure 2). On donne deux solutions pour des périodes T différentes. Notons tout d'abord que les solutions sont translatées de 2 sites après le temps T comme prévu par la condition $x_n(\tau) = x_{n-2}(\tau - T)$. Comme dans le cas précédent, le réseau supporte des oscillations fortement localisées (figure de gauche). En particulier, la queue n'est pas visible à l'échelle

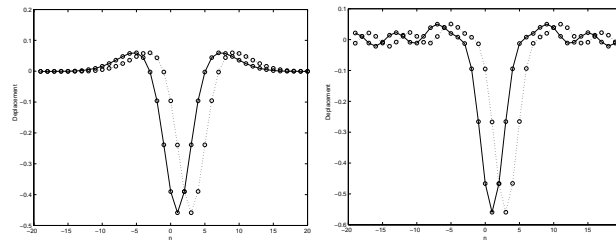


FIG. 2 – Solution numérique de (1)-(2) pour $T = 7.15$ (gauche), $T = 7.45$ (droite). On a $V(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-x})^2$, $\gamma = \gamma_0 \approx 0.9$, $T_0 \approx 6.63$. La solution est représentée comme une fonction de n , pour $\tau = 0$ (trait continu) et $\tau = T$ (trait en pointillés). Ces figures correspondent aux profils $u_1(t)$ dans (3), le profil $u_2(t)$ étant similaire.

considérée pour $T = 7.15$. Par contre, sur la figure de droite ($T = 7.45$), on observe bien une queue oscillante.

Références

- [1] M. J. Ablowitz et J. F. Ladik, *J. Math. Phys.*, **17**, 1011-1018 (1976).
- [2] S. Aubry et T. Cretegny, *Physica D*, **119**, 34-46 (1998).
- [3] S. Aubry, G. Kopidakis et V. Kadelburg, *Disc. Cont. Dyn. Syst. B*, 271-298 (2001).
- [4] D.K. Campbell, S. Flach et Yu.S. Kivshar, *Phys. Today*, **57**, 43 (2004).
- [5] T. Dauxois et M. Peyrard, *Phys Rev E*, **47**, 684-694 (1993).
- [6] T. Dauxois, M. Peyrard et C.R. Willis, *Phys. Rev. E*, **48**, 4768-4778 (1993).
- [7] J. Edler et P. Hamm, *J. Chem. Phys.*, **117**, 2415-2424 (2002).
- [8] S. Flach et C.R. Willis, *Physics Reports*, **295**, 181-264 (1998).
- [9] G. Friesecke et R.L. Pego, *Nonlinearity*, **12**, 1601-1627 (1999) .
- [10] G. Friesecke, J.A. Wattis, *Commun. Math. Phys.*, **161**, 391-418 (1994).
- [11] J. Giannoulis, A. Mielke, *Nonlinearity*, **17**, p. 551-565 (2004).
- [12] G. Iooss, *Nonlinearity*, **13**, 849-866 (2000).
- [13] G. Iooss et G. James, to appear in *Chaos*, focus issue on "Studies of Nonlinear Problems. I" by Enrico Fermi, John Pasta, and Stanislaw Ulam", (2004).
- [14] G. Iooss, K. Kirchgässner, *Commun. Math. Phys.*, **211**, 439-464 (2000).
- [15] G. James, *J. Nonlinear Science*, **13** (1), 27-63 (2003).
- [16] G. James et Y. Sire, *Commun. Math. Phys.* (2005). In press (published online).
- [17] R. S. MacKay et S. Aubry, *Nonlinearity*, **7**, 1623-1643 (1994).
- [18] M. Remoissenet, *Phys. Rev. B*, **33** (4), 2386 (1986).
- [19] E. Lombardi, *Lecture Notes in Mathematics*, **1741**, Springer-Verlag (2000).
- [20] J. Meier et al, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 163902 (2004).
- [21] Y. Pomeau, A. Ramani et B. Grammaticos, *Physica D*, **31**, 127-134 (1988).
- [22] Y. Sire, submitted (2004).
- [23] A. J. Sievers et S. Takeno, *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 970-973 (1988).
- [24] Y. Sire et G. James, submitted (2004).
- [25] A. Vanderbauwhede et G. Iooss, *Dynamics reported*, **1** (new series), 125-163 (1992).

Faisabilité de la gestion de la dispersion dans les lignes électriques de transmission

K.Tse Ve Koon^{*}, P.Marquie^{**} et P.Tchofo-Dinda^{*}

^{*}*Laboratoire de Physique de l'Université de Bourgogne UMR CNRS 5027
9 Avenue Alain Savary 21078 Dijon, Cedex FRANCE*

^{**}*Université de Bourgogne LE2I UMR CNRS 5158
BP47870 21078 Dijon, Cedex FRANCE*

kevin@u-bourgogne.fr

Résumé

Nous examinons l'applicabilité de la technique de gestion de la dispersion, initialement conçue pour les systèmes de télécommunications par fibre optique, aux systèmes de transmission par lignes électriques. Nous montrons par simulation numériques, qu'une association judicieuse de deux types de lignes: passe-bas et passe-bande, conduit à d'intéressantes propriétés de stabilité de propagation qui laissent envisager la faisabilité de lignes électriques à gestion de la dispersion.

Abstract

We examine the applicability of the dispersion management technique, which was initially devised for fiber optics transmission, to electrical transmission lines. Our numerical simulations show that an appropriate combination of two types of lines leads to interesting stability properties that indicate that dispersion-managed electrical transmission lines are conceivable.

1 Introduction

Au cours de la dernière décennie, les lignes de transmission par fibres optiques ont connu des développements spectaculaires en termes d'accroissement des capacités de transmission. Cette percée de la fibre optique résulte d'une part de l'utilisation d'impulsions lumineuses ultra-brèves (que l'on appelle solitons) comme éléments de codage de l'information, et d'autre part, de l'apparition de concepts innovants dans l'ingénierie des systèmes de transmission à solitons. En particulier, la gestion de la dispersion [1, 2] est sans doute le concept le plus innovant apparu au cours de la dernière décennie dans le domaine des télécommunications par fibres optiques, en vue de combattre les effets particulièrement néfastes de la dispersion chromatique sur la propagation d'impulsions. Schématiquement, une ligne de transmission par fibres optiques à gestion de la dispersion est constituée d'une juxtaposition de tronçons de fibres à dispersion alternativement positive et négative. Le but est d'imposer aux impulsions de fortes dispersions locales tout en maintenant une dispersion moyenne très faible voire nulle. Un tel système permet, au premier ordre, de résoudre complètement la problématique des effets de dispersion. De plus, des études ont montré que dans des systèmes de transmission par fibres optiques, la gestion de la dispersion confère aux impulsions des propriétés de robustesse et de haute stabilité pas uniquement vis-à-vis des effets dispersifs, mais aussi vis-à-vis d'autres effets tels que le bruit des amplificateurs, ou le mélange à quatre ondes [2].

Au vu de ces propriétés remarquables, il est naturel de poser la question suivante: Le concept de la gestion de la dispersion est-il applicable à tous les guides d'ondes? En

d'autres termes, est-il possible d'atteindre des propriétés de haute stabilité de propagation en appliquant la gestion de la dispersion dans des systèmes de transmission non-optiques?

Dans cette étude, nous apportons les premiers éléments de réponse à cette question en examinant la faisabilité de la gestion de la dispersion dans les lignes électriques de transmission. Le choix de ce guide d'onde est lié à plusieurs facteurs, avec en premier lieu la possibilité d'accéder expérimentalement au comportement impulsionnel en tout point de la ligne de transmission, alors que les fibres optiques n'autorisent l'accès à l'information qu'en entrée et sortie de ligne. Le deuxième avantage des lignes électriques réside dans le coût relativement modéré et la simplicité du système.

Cette étude s'organise de la manière suivante: Nous présentons d'abord séparément les différents éléments de base permettant la réalisation de la gestion de la dispersion dans un système électrique. Ensuite, nous procéderons à l'agencement de ces différents éléments et à l'exécution des opérations de propagation des impulsions dans le système.

2 Ligne passe-bas

Parmi les éléments de base susceptibles d'être utilisés dans l'agencement d'une ligne électrique de transmission, figure la ligne passe-bas dont nous allons examiner ci-après la courbe de dispersion. La ligne passe-bas standard est composée d'une répétition de cellules élémentaires composées chacune d'un diode varicap de capacité $C_l(V)$ (élément non-linéaire) en parallèle avec une self d'inductance L_l . On peut aussi associer à la self L_l une résistance r afin de tenir compte de la dissipation, comme le montre schématiquement la figure 1. Dans la présente étude, par souci de simplicité, nous ne prendrons pas en

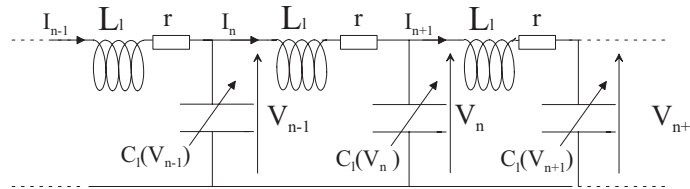


FIG. 1 – Ligne passe-bas non-linéaire et dissipative.

compte la dissipation et la non-linéarité. Nous nous concentrons uniquement sur les effets dispersifs. Dans ces conditions, on peut remplacer la diode varicap simplement par un condensateur C_l et annuler la valeur de r . Les lois de Kirchoff conduisent alors au système d'équations suivants

$$\frac{d^2 V_n}{dt^2} = \frac{1}{L_l C_l} (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

auquel correspond la relation de dispersion suivante

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{L_l C_l}} \sin\left(\frac{k}{2}\right) \quad (2)$$

illustrée dans la figure 2(a) pour $C_l = 100\text{pF}$ et $L_l = 15\mu\text{H}$. Les coefficients de dispersion successifs sont simplement donnés par les dérivées successives de ω par rapport à k

$$\beta_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i \omega}{dk^i} \quad (3)$$

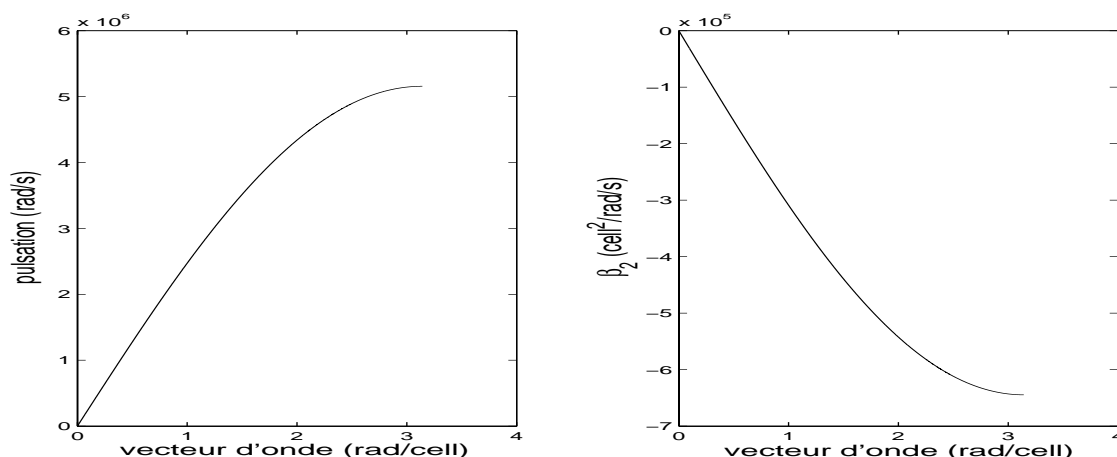


FIG. 2 – (a) Relation de dispersion de la ligne passe-bas, (b) Dispersion d'ordre 2 de la ligne passe-bas pour $L_1=15\mu H$ et $C_1=100pF$.

La figure 2(b) illustre le coefficient de dispersion d'ordre 2, β_2 . Nous pouvons voir que le coefficient de dispersion est toujours de même signe (négatif) quelque soit la longueur d'onde. En d'autres termes, si une impulsion est injectée dans une telle ligne, elle s'élargira de façon monotone au cours de sa propagation. Cet élargissement sera d'autant plus important que β_2 est grand. Selon le principe de la gestion de la dispersion, il est théoriquement possible de compenser cette dispersion (i.e de comprimer l'impulsion) en faisant propager l'impulsion dans un tronçon de ligne ayant un β_2 de signe opposé à celle de la ligne passe-bas. Nous allons voir ci-après que la ligne passe-bande offre la possibilité d'obtenir un coefficient de dispersion β_2 de signe opposé à celui d'un tronçon passe-bas.

3 Ligne passe-bande

Une ligne de type passe-bande linéaire et non-dissipative est représentée sur la figure 3. L'application des lois de Kirchoff nous donne l'équation de propagation de cette ligne

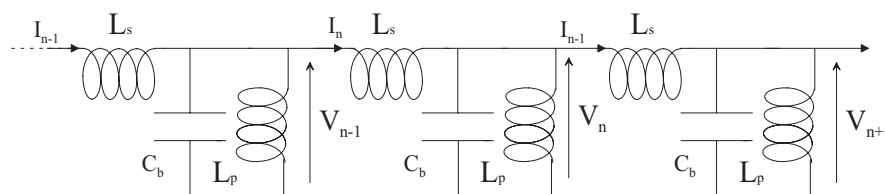


FIG. 3 – Ligne passe-bande linéaire et non-dissipative.

$$\frac{d^2 V_n}{dt^2} = \frac{1}{L_s C_b} (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) + \frac{V_n}{L_p C_b} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

La relation de dispersion correspondante s'écrit

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L_p C_b} + \frac{4 \sin^2\left(\frac{k}{2}\right)}{L_s C_b}} \quad (5)$$

Les figures 4(a) et 4(b) illustrent la courbe de dispersion et le coefficient de dispersion d'ordre 2, β_2 , pour la ligne passe-bande pour $L_s=220\mu\text{H}$, $L_p=470\mu\text{H}$ et $C_b=320\text{pF}$. Le point le plus important à noter ici est la présence d'une zone de β_2 positive dans la région des petits vecteurs d'ondes.

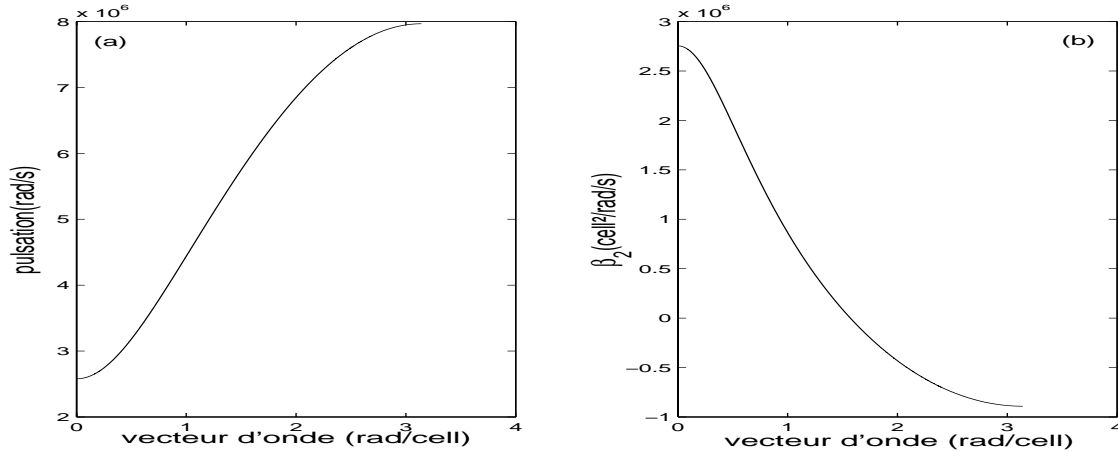


FIG. 4 – (a) Relation de dispersion de la ligne passe-bande (b) Coefficient de dispersion d'ordre 2 de la ligne passe-bande pour $L_s=220\mu\text{H}$, $L_p=470\mu\text{H}$ et $C_b=320\text{pF}$.

4 Motif passe-bas/passe-bande

Les lignes passe-bas et passe-bande ayant des coefficients de dispersion d'ordre 2 de signes opposés, il est théoriquement possible d'agencer ces deux types de lignes pour former un système à gestion de la dispersion. Cependant pour que la transmission soit efficace dans un tel système, il faut que les deux types de lignes aient les même impédances caractéristiques afin d'éviter de grosses pertes d'énergie par réflexion aux points de jonction entre les deux types de ligne. Les impédances caractéristiques de ces deux types de lignes sont données par [3]

$$Z_{cl} = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} \quad (6)$$

pour la ligne passe-bas et

$$Z_{cb} = \sqrt{\frac{L_s L_p \omega^2}{L_p C_b \omega^2 - 1}} \quad (7)$$

pour la passe-bande. Pour agencer ces deux types de lignes dans des conditions d'adaptation d'impédance, il faut que se placer dans des conditions tels que $Z_{cl}=Z_{cb}$.

Ayant caractérisé les deux tronçons de ligne passe-bas et passe-bande, nous avons simulé une propagation sur un motif passe-bas/passe-bande. Pour cela, nous avons injecté une impulsion gaussienne modulée à une certaine pulsation ω . Cette pulsation déterminera les valeurs des dispersions dans les deux lignes. Nous nous sommes placés à une pulsation correspondant à des dispersions de signes opposés dans les deux lignes, et telle que la réflexion à l'interface des deux lignes reste à un niveau relativement faible ($< 10\%$ de l'énergie de l'impulsion est réfléchi). Cette réflexion n'est pas comparable à une perte de couplage des fibres optiques. En effet, la fraction de l'impulsion réfléchi se propage dans la ligne à contre-sens. Par conséquent, dans le cas d'une transmission d'un train

d'impulsions, des interactions se produiront inévitablement entre les impulsions incidentes et réfléchies. Sur la figure 5 nous présentons les résultats de simulations de la propagation d'une impulsion solitaire. Le motif utilisé est composé pour les 250 premières cellules d'une ligne passe-bas et pour les 250 dernières d'une ligne passe-bande. On peut clairement

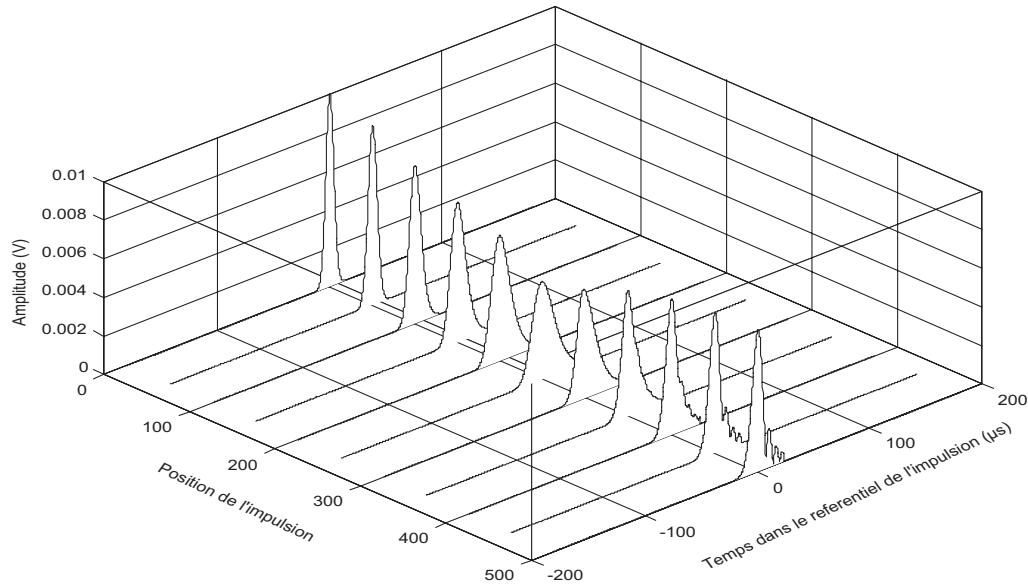


FIG. 5 – Evolution d'une impulsion gaussienne initialement non-chirpée dans un MAP passe-bas/passe-bande.

observer qu'il y a initialement un étalement de l'impulsion jusqu'à la cellule 250 puis suit une compression de celle-ci. Cela indique bien une compensation de β_2 . Par ailleurs on peut noter qu'au cours de sa propagation, l'impulsion se dissymétrise. Nous attribuons ce phénomène à l'effet de la dispersion d'ordre 3, β_3 , qui n'est pas compensée lorsqu'on agence des lignes passe-bas et passe-bande (β_3 est négatif dans ces deux types de lignes quel que soit la fréquence). Pour éviter une déformation trop importante de l'impulsion, il faut utiliser un autre type d'agencement.

5 Conclusion

Nous avons démontré dans cette étude la possibilité de générer un phénomène de respiration d'une impulsion dans une ligne électrique, i.e un cycle complet d'élargissement suivi de compression de l'impulsion. Il s'agit d'un résultat important car il constitue le premier élément majeur qui tend à démontrer que la technique de gestion de la dispersion peut être étendue aux lignes de transmission électriques. Cependant nous avons également montré que la mise en oeuvre de cette technique pose de sérieux problèmes tels que l'adaptation d'impédance et la compensation des paramètres de dispersion d'ordre supérieur qui doivent être résolus pour que ce concept s'impose dans le domaine des lignes électriques.

Références

- [1] S.K.Turitsyn, V.K. Mezentsev et E. G. Shapiro *Dispersion-managed solitons and optimization of the dispersion management*, Opt. Fiber Tech., **4**, 384-452, (1998).
- [2] V. E. Zakharov et S. Wabnitz, *Optical solitons: Theoretical challenges and industrial perspectives*, Springer-Verlag, (1998).
- [3] R. E. Collin, *Foundations for microwave engineering*, McGraw Hill Ed.

Bifurcations dans un circuit électronique du neurone de Morris-Lecar

Alexandre Wagemakers¹, José M. Casado², Miguel A.F. Sanjuán¹ et Kazuyuki Aihara³

¹*Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos*

Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza, Universidad Rey Juan Carlos, Tulipán s/n, 28933 Móstoles, Madrid, Espagne.

²*Area de Física Teórica*

Universidad de Sevilla, Apartado de Correos 1065, 41080 Sevilla, Espagne.

³*Department of Complexity Science et Engineering, Graduate School of Frontier Science, The University of Tokyo, 113-8656 Tokyo, Japon*

awagemakers@escet.urjc.es

Résumé

Dans le cadre des neurosciences et plus particulièrement dans la modélisation mathématique des neurones, nous proposons la réalisation et l'étude d'un circuit électronique simulant le modèle de Morris-Lecar. Ce modèle est inspiré du comportement électrique d'un axone moteur du Barnacle (une espèce de crustacé). La modélisation du neurone par C. Morris et H. Lecar [1] reste simple mais conserve toutefois des propriétés intéressantes, les bifurcations et la dynamique du modèle sont riches. Nous proposerons une implémentation du modèle de Morris Lecar à l'aide de composants discrets. L'étude des diagrammes de bifurcation en deux dimensions permet de repérer les zones de paramètres intéressantes (comme les zones de bistabilités). Une des applications du circuit est la construction d'un neurone de type burster autonome, lequel produit des rafales de pulsations (ou spikes) sans source extérieure d'excitation. Ce type de neurone, très courant dans le système nerveux, intervient par exemples dans le système thalamique durant le sommeil.

1 Introduction

Le modèle de Morris-Lecar a été déduit à partir de mesures de l'activité électrique d'un neurone moteur du barnacle géant, le modèle présente une dynamique intéressante. En effet, le jeu d'équations différentielles, pourtant réduit, présente une dynamique riche. Pour présenter et analyser ces propriétés du modèle nous proposons l'implémentation et la construction d'un circuit électronique simulant les équations. Dans les sections suivantes nous présenterons d'abord le modèle de Morris-Lecar pour ensuite formuler une première approximation pour l'implémentation du circuit ainsi qu'une exploration de certaines bifurcation du circuit. Enfin la dernière section présente la version étendue du circuit ainsi que l'implémentation d'un modèle de burster.

2 Présentation du modèle

Le modèle de Morris-Lecar fait partie de la classe des modèles bi-dimensionaux de neurone. La description mathématique se base sur les observations expérimentales des courants ioniques à travers la membrane du neurone. Les différents canaux ioniques répondent

à l'activité électrique du neurone en s'ouvrant ou se fermant. Les courants ioniques importants sont le calcium et de potassium (et les pertes ohmiques à travers la membrane). Le premier (le calcium) représente l'activation du neurone lorsque l'on applique une excitation externe au neurone tandis que le potassium repolarise la membrane du neurone vers la tension d'équilibre. Ce mécanisme d'activation/désactivation donne naissance à des impulsions appelées "spikes".

C'est ainsi que le neurone traite l'information en émettant une série d'impulsions correspondant à une entrée donnée, la fréquence d'émission de ces spikes est modulée par l'intensité du stimuli. Les variables dynamiques sont au nombre de deux et le jeu d'équation complet peut se résumer de la façon suivante

$$\begin{aligned} C \frac{dV_m}{dt} &= g_{CAmax} M_\infty(V_m)(V_m - V_{Ca}) + g_{Kmax} N(V_m - V_K) + g_L(V_m - V_L) + I_{ex} \\ \frac{dN}{dt} &= \lambda_N(V_m)(-N + G(V_m)) \end{aligned} \tag{1}$$

$$M_\infty(V) = 0.5(1 + \tanh((V - V_1)/V_2))$$

$$G(V) = 0.5(1 + \tanh((V - V_3)/V_4))$$

$$\lambda_N(V) = \phi \cosh((V - V_3)/2V_4).$$

Dans ces équations V_m représente la tension de la membrane (c'est à dire la différence de potentiel entre l'extérieur et l'intérieur du neurone). Le courant ionique du potassium est représenté par le terme $g_{Kmax} N(V_m - V_K)$, où la variable N représente la dynamique du canal ionique. Le canal s'ouvre et se ferme avec une vitesse dépendante du voltage de membrane. Le canal de calcium possède en principe aussi une dynamique du premier ordre mais celle ci étant beaucoup plus rapide que celle du potassium on peut négliger les transitoires et l'on suppose ce canal toujours à sa valeur d'équilibre (cette valeur d'équilibre dépend bien sûr du potentiel de membrane suivant la fonction $M_\infty(V)$). L'ouverture du canal de calcium n'est donc pas représenté par une variable dynamique mais par une fonction sigmoïdale du voltage de membrane.

3 Première approximation

Afin de simplifier l'étude des équations différentielles couplées et de faciliter la conception du circuit nous ferons une première approximation des équations (1). L'équation différentielle dN/dt comporte une constante de temps dépendante du voltage de la membrane V_m . Ce type d'équation différentielle est un problème difficile en électronique. En effet il est nécessaire de mettre en oeuvre des résistance contrôlables en tension (nous verrons néanmoins dans la prochaine section un exemple d'implémentation). L'approximation concerne cette "constante de temps", nous la prendrons égale à une valeur fixe. La constante est fixée à la vitesse la plus rapide de transition. Par la suite pour mieux visualiser les variables du circuits nous effectuons une normalisation des variables de l'équation (1), nous divisons la variable V_m pour V_{ca} . Le nouveau jeu d'équations différentielles (normalisé) s'exprime alors

$$\begin{aligned} C \frac{dV}{dt} &= g_{CAmax} M_\infty(V)(V - 1) + g_{Kmax} N(V - V_K) + g_L(V - V_L) + I_{ex} \\ \frac{dN}{dt} &= \phi(-N + G(V)) \end{aligned} \tag{2}$$

$$M_\infty(V) = 0.5(1 + \tanh((V - V_1)/V_2))$$

$$G(V) = 0.5(1 + \tanh((V - V_3)/V_4)).$$

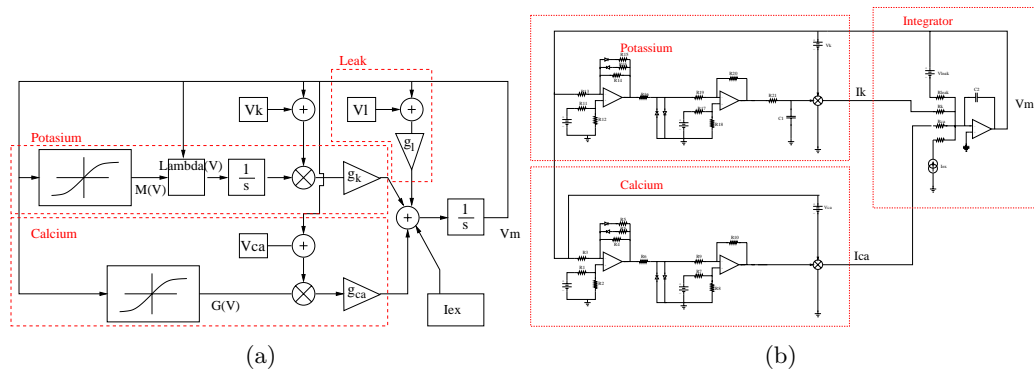


FIG. 1 – (a) Représentation schématique des équations de Morris-Lecar. (b) Schéma du circuit électronique

L'approximation n'est pas critique pour le fonctionnement du modèle. Nous pouvons observer que les principaux comportements sont conservés. Afin de mieux comprendre le fonctionnement du circuit, une représentation logique de l'équation 2 est présentée dans la figure 1. Cette représentation par bloc est la base de l'élaboration du circuit, chaque bloc logique est implémenté par des composants électroniques discrets. Accompagnant ce diagramme, le schéma du circuit électronique est présenté (ainsi que en pointillés les différents blocs logique). A continuation, nous présentons une partie des résultats expérimentaux obtenus avec le circuit.

4 Diagrammes de bifurcations

La manière la plus efficace d'étudier les zones de paramètres du système est de tracer les diagrammes de bifurcations. Dans cette section nous présenterons des bifurcations de codimension 2, c'est à dire des bifurcations faisant intervenir deux paramètres. En deux dimensions, différents choix de paramètres sont possibles, par exemple dans la figure 2 nous traçons les comportements du systèmes en fonctions de l'excitation extérieure et du paramètre V_4 . Ce diagramme présente une particularité intéressante, lorsque le paramètre V_4 est augmenté le type d'excitabilité du neurone change. Cette valeur représente l'inclinaison de la fonction d'activation du potassium (l'inclinaison de la sigmoïde). Le neurone passe du type I au type II de manière continue¹. Ainsi, en variant un seul paramètre nous pouvons obtenir une grande richesse de comportements. Notons que le changement d'excitation est du à une bifurcation de Bogdanov-Takens (BT), cette bifurcation marque le passage d'une bifurcation point de selle-noeud (SN) à une bifurcation de Hopf sous-critique. Très près de cette bifurcation de Bogdanov-Takens apparait une bifurcation de type fronce (ou cusp en anglais) due à la présence de trois points fixes, deux noeuds (un stable et l'autre instable) et d'un point de selle, celle ci est trop près pour pouvoir l'observer expérimentalement. Sur le même diagramme de bifurcation nous pouvons observer le passage d'une bifurcation de Hopf super-critique à une bifurcation de Hopf sous-critique. Ce type de scénario s'appelle une bifurcation de Hopf généralisé (noté GH) ou encore bifurcation de Bautin.

1. la différence entre les deux types de neurone est importante, un neurone de type I émet des impulsions en partant d'une fréquence quasiment nulle lorsque le courant d'excitation est augmenté. Le neurone de type II commence à émettre des impulsions avec une fréquence déterminée. La différence entre les deux

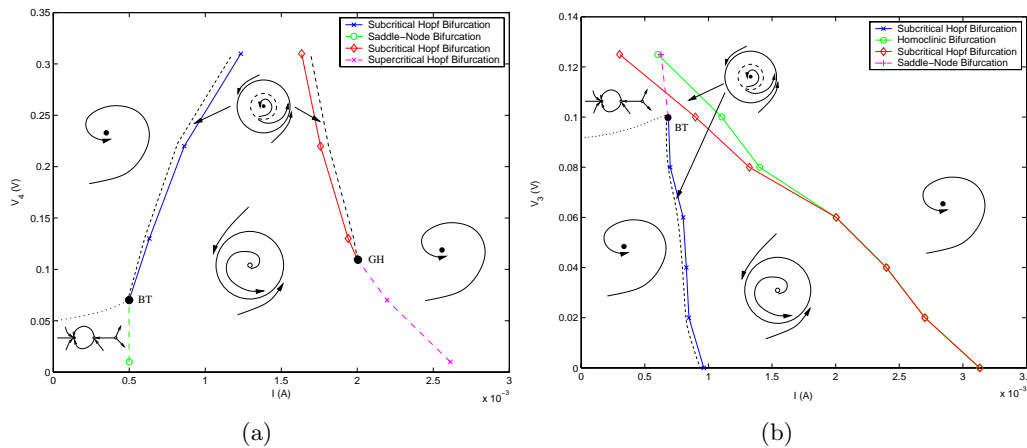


FIG. 2 – Bifurcation de codimension 2, les différents comportements du système sont schématisés. Trois points de Bifurcation sont à remarquer: une bifurcation de Bogdanov-Takens (BT), une bifurcation de Hopf généralisée (GH). (a) Diagramme $I - V_4$. (b) Diagramme $I - V_3$. Les autres paramètres du modèle sont: $v_1 = 0V$ $v_2 = 0.15V$ $v_3 = 0.06V$ $v_4 = 0.15V$ $g_{Kmax} = 8mS$ $g_{Camax} = 4mS$ $g_L = 2mS$ $V_K = -0.66V$ $V_L = 0.5V$

Nous pouvons tracer d'autres diagrammes de bifurcations, par exemple variant le point moyen de l'activation du potassium (présenté dans la figure 2(b)).

5 Simulation des équations complètes

Nous proposons à présent de construire un circuit simulant les équations de Morris-Lecar complète, c'est à dire le jeu d'équation (1). La différence essentielle par rapport au circuit précédent réside en une constante de temps dépendant du voltage de la membrane V_m . La "constante" de temps de l'activation du potassium $\lambda_N(V_m)$ varie suivant une courbe en forme de cloche. La solution pour le circuit électronique proposée est un filtre RC (un intégrateur analogique) comportant une résistance dépendant du voltage de membrane V_m . Ce circuit est représenté dans la figure 3(a), la résistance variable est réalisée à l'aide d'un transistor à effet de champ, ce type de composant présente un régime dans lequel il se comporte comme une résistance contrôlable en tension². Le montage représenté permet de linéariser le transistor, la zone de résistance contrôlable est ainsi étendue.

Le circuit complet est présenté dans la figure 3(a), dans cette figure la résistance variable est agrandie. Dans la même figure la résistance en fonction de la tension est tracée, elle correspond à une allure gaussienne de la constante de temps (figure 3(b)).

6 Le burster autonome

Une application de ce circuit est la construction d'un circuit reproduisant le comportement des neurones dit "burster". Ce type de neurone émet des rafales de spikes à

modes est due au type de bifurcation (Hopf ou saddle-node).

2. Le FET (Field Effect Transistor) est utilisé dans un régime où la zone dépletée varie linéairement avec la tension appliquée entre la grille et la source. Le composant se comporte alors comme une simple résistance dont la valeur dépend de V_{GS} (tension grille-source)

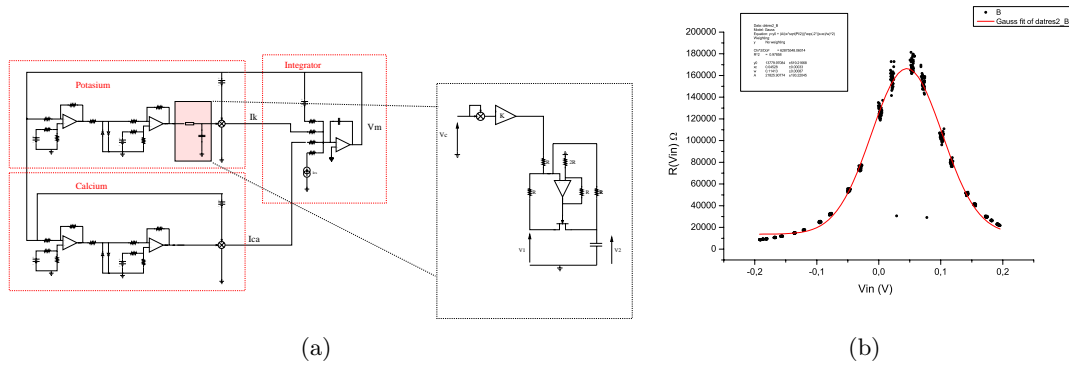


FIG. 3 – (a) Schéma du circuit électronique complet. (b) caractéristique de la résistance contrôlable en tension

intervalle régulier. Dans un certain régime de paramètres du modèle précédent, le circuit présente une bistabilité, cette zone se repère facilement dans le diagramme de bifurcation de la figure 4(a). Dans cette figure apparaissent les maxima du voltage de la membrane en fonction de l'intensité du courant appliqué. Dans un intervalle de courant extérieur I_{ex} le diagramme de bifurcation comporte un noeud stable ainsi qu'un cycle limite stable, l'alternance entre ces deux états va permettre le bursting. En ajoutant au circuit précédent un simple intégrateur nous pouvons passer d'un régime à un autre de façon continue. Le mécanisme consiste à augmenter le courant lorsque la tension de la membrane est dessous un certain seuil (le système est alors au repos) et de diminuer l'intensité lorsque la tension est au-dessus du seuil (le système est alors dans un régime de spike). Le cycle limite meurt au contact du noeud stable dans une bifurcation homoclinique (la trajectoire se referme sur le point fixe instable). La modification du jeu d'équation (1) est:

$$C \frac{dV_m}{dt} = \sum \text{courants} + g_{burst} V_{burst} \quad (3)$$

$$RC_2 \frac{dV_{burst}}{dt} = (V_m - V_{seuil})$$

Nous avons ajouté un courant dépendant du voltage de membrane et de la tension de seuil choisie. Ce modèle se comporte comme un burster autonome.

7 Conclusions

L'étude et la réalisation du circuit à permis de mettre en évidence plusieurs types de bifurcations de codimension 2 et de plus a identifié un paramètre critique pour le choix de l'excitabilité du neurone. Une application directe du circuit est par exemple simuler l'association de plusieurs neurones de Morris-Lecar ou même de plusieurs burster autonomes.

Remerciements

Nous remercions le soutien financier du Ministère des Sciences et Technologie de l'Espagne, projet BFM2003-03081, et l'hospitalité à l'Université de Tokyo où partie de ce travail a été développée.

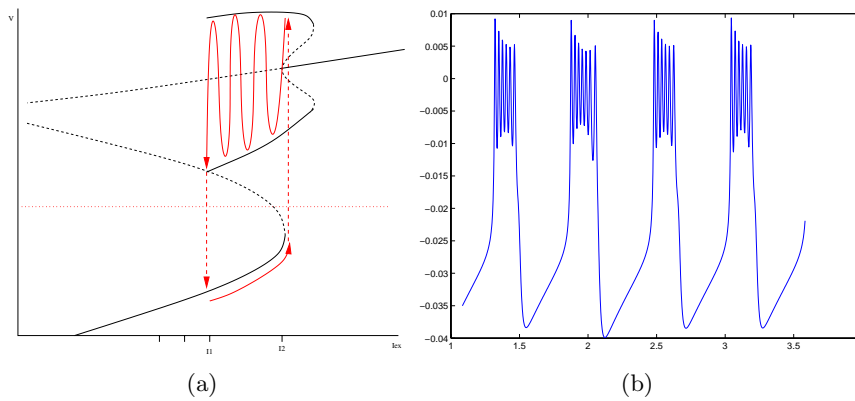


FIG. 4 – (a) Diagramme de bifurcation du système dans un régime bistable. (b) Exemple de série temporelle obtenue à partir du circuit.

Références

- [1] C. Morris et H. Lecar, *Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber*, *Biophys. J.*, **35**, 193–213, (1981).
- [2] J. Rinzel et B. Ermentrout, *Analysis of neural excitability et oscillations*, In C. Koch et I. Segev, editors, *Methods in Neuronal Modeling*, MIT press, 135–169, (1989).
- [3] J. Matsuoka, Y. Sekine, K. Saeki et K. Aihara, *Analog hardware implementation of a mathematical model of asynchronous chaotic neuron*, *IEICE Trans. Fundamentals*, **E85-A** (2), (2002).
- [4] A. Wagemakers, J.M. Casado et M. A.F. Sanjuán, K. Aihara, *Electronic implementation of the Morris-Lecar circuit*, en préparation.
- [5] F. C. Hoppensteadt et E. M. Izhikevich, *Analysis of neural excitability et oscillations*, Springer, (1997).
- [6] T. Kohno et K. Aihara, *Design of Neuromorphic Hardware Based upon Mathematical Methods*, *Proceedings of the SBRN'04*, IEEE Computer Press, (2004).
- [7] Y. A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, Springer, (1998).

Résonances dans un système chaotique

S. Zambrano¹ et J. M. Casado² et M.A.F Sanjuán¹

¹*Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos*

*Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza,
Universidad Rey Juan Carlos, Tulipán s/n, 28933 Móstoles, Madrid, Espagne*

²*Area de Física Teórica*

Universidad de Sevilla, Apartado de Correos 1065, 41080 Sevilla, Espagne

szambrano@escet.urjc.es

Résumé

La résonance dans les systèmes dynamiques est un phénomène d'une grande importance. Une grande attention a été portée à la résonance que des perturbations aléatoires peuvent induire, c'est ce qu'on appelle la résonance stochastique. Elle apparaît dans de nombreux systèmes physiques et biologiques. Des comportements résonants assez similaires à ceux induits par le bruit peuvent être observés quand la perturbation est d'origine chaotique. Cela implique que des systèmes physiques où l'on considère que le bruit a une contribution essentielle pourraient être purement déterministes. Par conséquent, il est intéressant d'approfondir le rôle que des perturbations déterministes ou aléatoires peuvent jouer dans la dynamique globale résonante d'un système. À cette intention une étude de l'effet que des perturbations chaotiques et des perturbations stochastiques induisent dans un système dynamique a été réalisée.

1 Introduction

Les comportements résonants ont été traités en physique et ont eu une très grande importance pour la compréhension de nombreux phénomènes présents dans la nature.

Le phénomène de la résonance stochastique (SR) a été largement étudié durant les dernières années et on peut l'observer dans beaucoup de systèmes [1]. Le système paradigmatique où l'on peut trouver une résonance stochastique est celui d'une particule qui se trouve soumise à une force conservatrice provenant d'un potentiel avec deux minimums; à une force harmonique (qui ne peut pas induire de sauts parmi ces deux minimums) et à une perturbation aléatoire, comme le bruit blanc gaussien. Pour une valeur finie de l'intensité du bruit la synchronisation des sauts avec la force harmonique est maximale, celle-ci mise en évidence par un maximum dans la SNR (rapport signal sur bruit) du système. Les comportements du type SR ont été observés dans les systèmes chaotiques où l'attracteur est décomposé en deux parties jouant un rôle analogue à celui des minimums du potentiel [3, 4].

Beaucoup d'autres phénomènes ont été analysés et suivent un comportement identique à celui de la SR, même si la perturbation responsable de ce comportement est d'origine purement déterministe. Par exemple des phénomènes du type SR se rencontrent dans des systèmes où l'on utilise un signal chaotique provenant de l'application logistique au lieu du bruit blanc gaussien, obtenant ce qu'on appelle la *résonance chaotique* [5, 6]. Elle est également observée quand la perturbation est harmonique et d'une très haute fréquence, appelée la *résonance vibrationnelle*.

Ceci pose la question de l'importance de l'origine déterministe ou aléatoire de la perturbation dans le comportement résonant d'un système dynamique. Plus précisément,

la question clé à laquelle on veut répondre est si un comportement du type SR équivalent (caractérisé par la SNR) à celui induit par le bruit peut être provoqué par une perturbation purement déterministe. Cela impliquerait que derrière la dynamique de systèmes où l'on suppose que le bruit a une importance cruciale, comme dans certains systèmes biologiques, c'est plutôt le chaos qui joue ce rôle clé dans la résonance. Ce point est important car on sait bien comment contrôler des systèmes déterministes, même s'ils sont chaotiques.

2 Description du modèle

Le système étudié est un modèle simple où la SR classique a déjà été observée [2]. L'expression générale du système est

$$x_{n+1} = (a - 1)x_n - ax_n^3 + \epsilon \sin(2\pi f_0 n) + d(\xi_n) = F(x_n, \xi_n, n). \quad (1)$$

On considère la situation à $\epsilon = 0$, $\xi = 0$ quand la dynamique est chaotique et quand il y a deux attracteurs chaotiques symétriques par rapport à $x = 0$. Cette situation apparaît pour des valeurs de $a < a^* \approx 3.58..$, où a^* est la valeur pour laquelle une crise se produit et les deux attracteurs se fondent en un seul. On prendra donc $a = 3.4$. Le terme ϵ ne doit pas dépasser une certaine limite afin de ne pas induire des sauts entre les deux attracteurs, notre choix est $\epsilon = 0.05$ avec $f_0 = 0.125$. C'est donc la mise en jeu de la perturbation extérieure ξ_n qui permet ces sauts. La fonction $d(x)$ ne fait que rééchelonner la perturbation afin d'avoir l'intensité désirée et la centrer autour de 0 si les ξ_n sont définis sur un autre intervalle. Notons que si les ξ_n suivent une règle déterministe du type $\xi_{n+1} = f(\xi_n)$, le système est purement déterministe: $(x_{n+1}, \xi_{n+1}) = (F(x_n, \xi_n, n), f(\xi_n))$.

Nous allons comparer d'une nouvelle façon les effets des perturbations déterministes avec ceux des perturbations stochastiques pour mieux discerner le rôle joué par l'origine de la perturbation. Dans des travaux précédents [4, 5] l'effet d'une perturbation, comme le bruit gaussien blanc, a été comparé avec celui d'une perturbation chaotique provenant de l'application logistique. Dans ce travail, nous allons sélectionner les perturbations déterministes et stochastiques à comparer de façon qu'ils aient des propriétés statistiques similaires. La comparaison s'effectue en étudiant la courbe de la SNR en fonction de l'intensité de la perturbation D . Cette intensité vient définie de la même façon qu'avec le bruit blanc, $D = 2\sigma^2$, où σ est la déviation standard de la perturbation.

3 Les perturbations utilisées

Dans cette section nous allons préciser les perturbations utilisées pour notre analyse. Les perturbations aléatoires sont caractérisées par leur densité de probabilité. A leur tour les propriétés statistiques plus basiques des perturbations chaotiques sont données par leur mesure invariante. Le critère sera donc de comparer des perturbations chaotiques dont la densité de la mesure soit similaire à la densité de probabilité de son associé stochastique.

Une première perturbation chaotique que l'on peut utiliser est du chaos provenant de la perturbation dérivée de l'application tente $T : [0,1] \rightarrow [0,1]$ ([6]), qui s'exprime de la façon suivante:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 2(1-x), & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

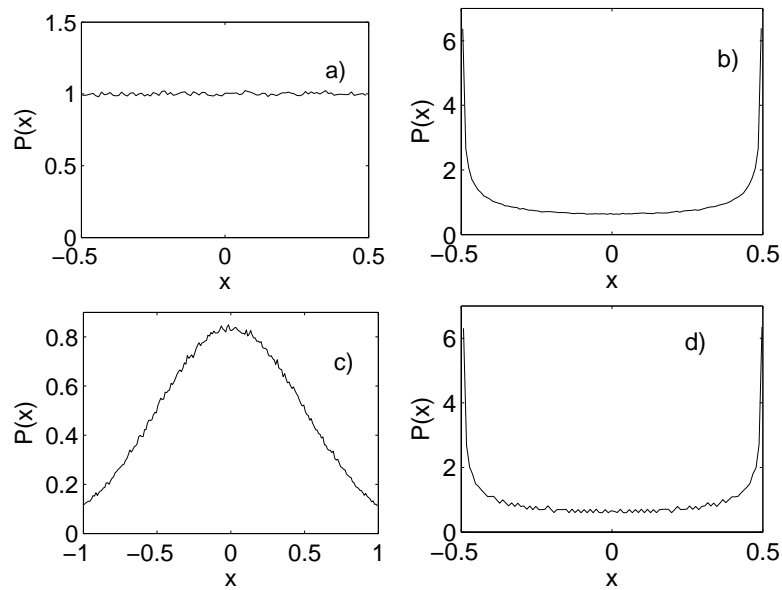


FIG. 1 – Distribution de probabilité pour quelques perturbations parmi celles considérées: densité de la mesure de la perturbation dérivée de l'application tente (a), distribution de probabilité du bruit logistique blanc, équivalente à la densité de mesure de l'application logistique (b), distribution de probabilité de la perturbation gaussienne déterministe, suivant une loi de type gaussienne (c), distribution de probabilité de la perturbation vibrationnelle (d)

Statistiquement elle est décrite par la densité de la mesure invariante, qui est constante sur l'intervalle $[0,1]$ comme on peut l'observer sur la figure 1 (a). Il semble ainsi plus naturel de la comparer avec une perturbation aléatoire similaire, comme le bruit blanc uniforme.

Une autre façon d'obtenir facilement une perturbation chaotique consiste à itérer l'application logistique $G : [0,1] \rightarrow [0,1]$ qui vient donnée par l'expression $x_{n+1} = G(x_n) = 4x_n(1 - x_n)$. Il serait intéressant de générer une perturbation aléatoire dont la densité de probabilité soit identique à sa densité de mesure pour comparer les effets des deux perturbations. Pour ce faire, l'équivalence topologique parmi l'application logistique $G(x)$ et l'application tente $T(x)$ peut être mise à profit: les trajectoires de l'application logistique correspondent bijectivement à celles de l'application tente via le mappage $C(x) = (1 - \cos(\pi x))/2$ ([6]). Donc, si on dispose d'un nombre suffisamment grand de trajectoires de l'application tente passant avec une probabilité uniforme par l'intervalle $[0,1]$, ceux-ci peuvent être associés aux trajectoires de l'application logistique qui couvrent donc l'intervalle $[0,1]$ avec la distribution de cette application. Alors, si l'on a une suite de points aléatoires $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ avec une distribution de probabilité uniforme, la suite $\{X_i = C(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ sera aléatoire et aura une densité de probabilité égale à la densité de mesure de l'application logistique. Cette propriété est illustrée sur la figure 1(b). On a donc une perturbation chaotique et une perturbation aléatoire qui l'imitent, on appellera celle-ci du bruit logistique.

Étant donné que les perturbations aléatoires les plus habituelles auxquelles les systèmes dynamiques sont soumis sont modélisés par du bruit blanc gaussien, il faudrait chercher son associé déterministe. Avec deux suites de nombres aléatoires $\{\xi_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ et $\{\xi_2^i\}_{i=1}^{\infty}$ générés suivant une distribution uniformément aléatoire dans l'intervalle $[0,1]$ nous pouvons obtenir

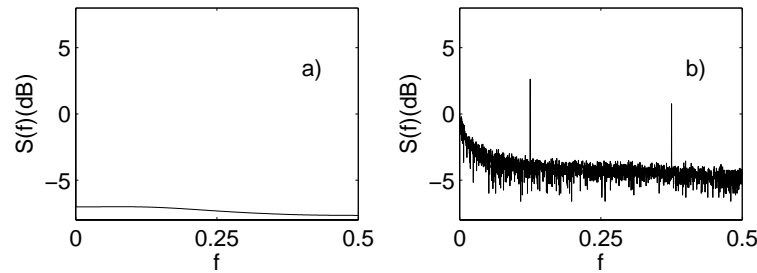


FIG. 2 – Spectre des suites x_n . (a) $\xi = 0$ (b) $\xi \leq 0.001$. Les pics aux multiples impaires de f_0 sont typiques des systèmes bistables.

des nombres η_n suivant une distribution gaussienne via la transformation de Box-Muller: $\eta_n = \sigma \sqrt{-2 \log \xi_1^n} \cos(2\pi \xi_2^n)$ ([7]). Il est donc facile de voir que si les nombres ξ_1^n et ξ_2^n proviennent des itérations de l'application tente $\xi_j^{n+1} = T(\xi_j^n)$, $j = 1, 2$, la quantité η_n suivra aussi une distribution statistique du même type que le bruit blanc gaussien, comme on peut l'observer sur la figure 1 (c).

Insistons sur le fait que les propriétés statistiques des perturbations ne sont pas décrites complètement par ses distributions de probabilité dans les cas aléatoires ni par ses densités de mesure dans les cas déterministes chaotiques. En fait, les autocorrélations peuvent avoir un effet très important sur la dynamique générale. Par exemple, même si les perturbations sont symétriques (c'est à dire, si la probabilité d'avoir une perturbation ξ est égale à celle d'avoir une perturbation $-\xi$) la densité de probabilité $P(x)$ pour une trajectoire de passer par $[x, x + dx]$ peut en revanche être asymétrique. Ces considérations seront détaillées dans une future publication [7], il faut retenir simplement l'idée que la condition d'avoir des distributions de probabilité égales est assez "faible".

Finalement, nous remarquerons que l'intensité du bruit doit être bornée afin d'empêcher que le système dynamique diverge. On peut montrer que pour notre système il existe une valeur de ξ critique (ξ_c) pour laquelle la suite des x_n diverge. Dans le cas des perturbations dérivée de l'application tente, aléatoire uniforme et logistique, il est simple d'empêcher la divergence car elles peuvent être convenablement rééchellonnées pour donner des valeurs parmi $[-\xi_{max}, \xi_{max}]$ avec $0 < \xi_{max} < \xi_c$. Dans ce cas, la déviation standard σ (et donc l'intensité de la perturbation) peut être calculée analytiquement en fonction de ξ_{max} grâce à la simplicité de leurs distributions probabilistiques. Avec les perturbations gaussiennes il faut être attentif et les majorer à la valeur ξ_c .

Dans ce travail nous allons aussi utiliser des perturbations vibrationnelles afin d'observer la Résonance Vibrationnelle (qui a été observée pour des systèmes bistables comme celui déjà présenté). Les perturbations vibrationnelles sont de la forme $\xi_n = A \sin(2\pi \Omega n)$ où $\Omega \gg f_0$, et la distribution statistique de ses valeurs est montrée dans la figure 1 (d).

4 Analyse des résonances induites

Après avoir décrit les types de perturbations employées, il faut maintenant analyser les effets qu'elles provoquent sur notre système dynamique. Comme le mentionne l'introduction, les perturbations ξ provoquent des sauts entre les deux attracteurs de notre système dynamique. Quand ces sauts ne sont pas possibles, le spectre d'une trajectoire x_n est du même type que celui que l'on peut observer dans la figure 2 (a) (assez similaire a

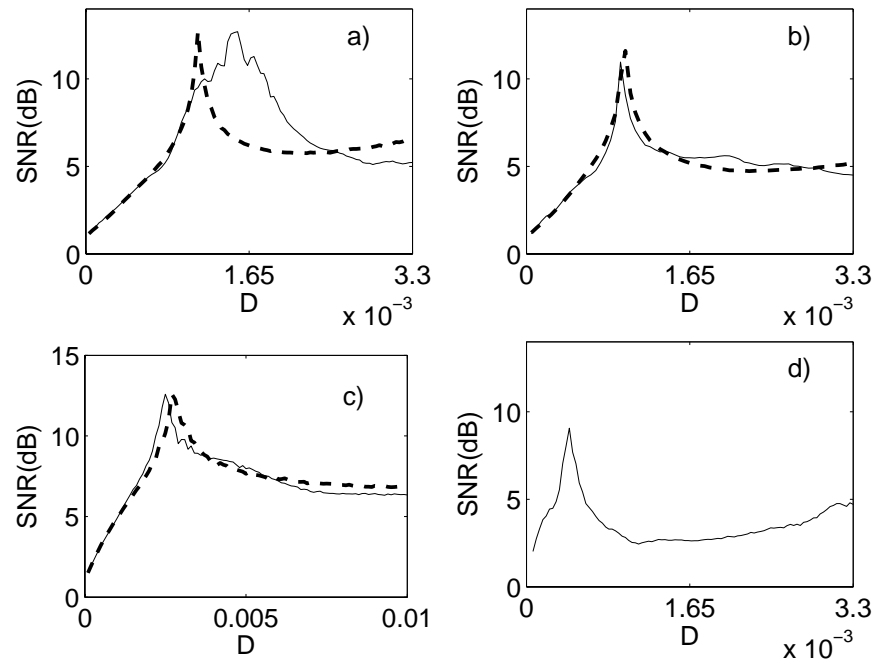


FIG. 3 – SNR pour les différentes perturbations. (a) Chaos du type application tente (-) et nombres aléatoires uniformément distribués dans l'intervalle $[0,1]$ (- -); (b) Chaos logistique (-) et "bruit logistique" (- -). (c) "Perturbation déterministe gaussienne" (-) et bruit blanc gaussien (- -)

celui d'un bruit). Par contre, quand la perturbation est suffisamment forte pour induire des sauts, un pic assez bien défini apparaît à la fréquence f_0 , comme on peut le voir dans la figure 2 (b). S'il y a une valeur de l'intensité du bruit pour laquelle le rapport entre la puissance du pic et le fond de bruit (SNR) est maximale, on est alors en présence d'une résonance.

La SNR a été calculée à partir d'une moyenne de suites $\{x_n\}_{n=1}^N$ du système pour les différents types de perturbations ξ_n . Les résultats sont montrés à la figure 3. La première remarque à faire est que toutes les perturbations induisent un comportement résonant du même type, il y a toujours un maximum assez défini pour une certaine valeur de l'intensité de la perturbation D . Ce résultat nous montre pour la première fois que dans un système chaotique comme celui décrit par l'équation 1, la résonance chaotique et la résonance vibrationnelle peuvent être observées.

Néanmoins, la figure 3 expose le résultat le plus important que l'on souhaite souligner. Pour les "perturbations logistiques" les maxima des courbes du cas déterministe et du cas stochastique sont très proches et ont presque la même hauteur. On peut dire la même chose du cas des perturbations gaussiennes, où les courbes présentent clairement un maximum pour une valeur très similaire à l'intensité de la perturbation D . Même dans le cas des perturbations tente et aléatoire uniforme on peut voir que pour des valeurs petits de l'intensité du bruit il y a une coïncidence assez nette. Une description détaillée de l'explication de ces phénomènes sera développée dans un futur article. Notons aussi que la perturbation du type vibrationnel donne un résultat assez similaire qualitativement à celui des perturbations précédentes.

5 Conclusions

Dans ce travail nous avons montré qu'un système dynamique assez simple présente un comportement du type résonant quand il est soumis à des perturbations du type stochastique, chaotique et vibrationnel. Nous avons aussi montré que dans certaines situations il est très difficile de distinguer parmi comportements du type SR dues à l'action du bruit de ceux qui sont dus à quelques perturbations déterministes, même si les signaux ont des similitudes assez superficielles.

C'est particulièrement intéressant car ceci peut s'appliquer aux systèmes réels où l'on considère que le bruit joue un rôle très important. Nos résultats montrent que une perturbation chaotique ou une perturbation si simple qu'une perturbation harmonique de haute fréquence pourrait jouer le même rôle.

Cela pourrait aussi impliquer qu'il y ait des contributions déterministes (faibles) considérées comme du bruit lorsque le modèle phénoménologique du système dynamique a été construit. La détermination de l'existence de ces contributions déterministes pourrait être utile si l'on veut contrôler le système dynamique pour en obtenir une certaine réponse.

Remerciements

Nous remercions le soutien financier du Ministère des Sciences et Technologie de l'Espagne, projet BFM2003-03081, et l'Universidad Rey Juan Carlos pour une Bourse de Thèse de doctorat du Programme de Recherche de l'Université.

Références

- [1] L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, and F. Marchesoni. *Stochastic Resonance*, Rev. Mod. Phys. **70**, 223 (1998).
- [2] V. Anischenko, A. Neiman, and M. A. Safanova. *Stochastic Resonance in Chaotic Systems*, J. Stat. Phys. **70**, 183 (1993).
- [3] V. Anischenko, A. Neiman, M. A. Safanova, and L. Chua. *Stochastic Resonance in Chua's Circuit*, Int. J. Bifurcation and Chaos **2**, 397 (1992).
- [4] E. Ippen, J. Lindner and W. Ditton *Chaotic Resonance: A Simulation*, J. Stat. Phys. **70**, 437 (1993).
- [5] G. Ambika, N.V. Sujatha, and K. P. Harikrishnan *Stochastic resonance and chaotic resonance in bimodal maps: a case study*, Pramana (J. Phys.) **59**, 539 (2002).
- [6] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. Yorke, *Chaos, an introduction to dynamical systems*, Springer-Verlag (1996).
- [7] W. H. Press, S. A. Teulolsky, V. P. Vetterling and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press (1988).
- [8] S. Zambrano, J. M. Casado, and M.A.F Sanjuán. En préparation (2005).

Liste des auteurs

Achour L. :	1	Fernandez B. :	151
Aihara K. :	121, 259	Finot C. :	79
Alfredsson P.-H. :	37	Frisch T. :	205
Allain J.-M. :	7	Garzella D. :	43
Amberg G. :	37	Gauffre F. :	85
Audoly B. :	187	Georgelin M. :	67
Aumaitre S.-B. :	13	Gil L. :	91
Ben Amar M. :	7, 49, 97	Goriely A. :	97
Benzekri T. :	19	Gostiaux L. :	103
Bico J. :	25	Grapinet M. :	109, 115
Bielawski S. :	43	Grelu P. :	109
Bodenschatz E. :	163	Hosaka M. :	43
Boissonade J. :	85	Ibarz B. :	121
Bonn D. :	49	James G. :	247
Bortolozzo U. :	31	Jauslin H. R. :	115
Bossu J. :	169	Katoh C. M. :	43
Boudaoud A. :	25	Labrot V. :	85
Brunet P. :	37	Larger L. :	127, 211
Bruni C. :	43	Lefranc M. :	157
Casado J.-M. :	259, 265	Lepiller V. :	133
Castaing B. :	55	Letellier C. :	1, 139
Chabert P. :	223	Lima R. :	19, 151
Chandre C. :	19	Lindner A. :	145
Chevalier C. :	49	Maissa P. :	217
Chiffaudel A. :	229	Mallick K. :	13
Corr C.-S. :	223	Marquié P. :	169, 253
Coupric M.-E. :	43	Mathey P. :	115
Coutinho R. :	151	Mathis C. :	217
Crawford A.-M. :	163	Meunier J.-L. :	217
Creysseels M. :	55	Meyroneinc A. :	151
Cuvelier A. :	1	Millot G. :	79, 241
Daube O. :	199	Mochihashi A. :	43
Dauxois T. :	103	Moisy F.-D. :	175, 199
Daviaud F. :	229	Morant P.-E. :	157
De-Kepper P. :	85	Mordant N. :	163
Delbende I. :	61	Morfu S. :	169
Derks D. :	145	Morize C. :	175
Deschamps J. :	67	Moulin L. :	25
Dumouchel F. :	133	Muir J.-F. :	1
El Aroudi A. :	235	Mutabazi I. :	133
Erneux T. :	73	Naso A. :	181, 217
Fadel M. :	235	Neukirch S. :	187
Falcon E. :	55, 103	Nirousset D. :	127

Nizette M.:	157, 193	Rössler O. E.:	139
Nore C.:	199	Rossi M.:	61
Odoulov S. G.:	115	Roulin E.:	139
Orlandi G. L.:	43	Rytz D.:	115
Oyharcabal X.:	205	Sanjuán M. A. F.:	121, 259, 265
Pallavisini A.:	211	Sauter A.:	241
Pétrélis F.:	13	Shelley M.-J.:	145
Picozzi A.:	241	Sire Y.:	247
Pirat C.:	217	Sturman B.:	115
Pitois S.-P.:	241	Szwaj C.:	43
Plihon N.:	223	Takashima Y.:	43
Pocheau A.:	67	Tartar M.:	199
Prigent A.:	133	Tchofo-Dinda P.:	253
Pumir A.:	181	Tse Ve Koon K.:	253
Quartier L.:	199	Tuckerman L. S.:	199
Rabaud M.:	175	Udaltsov V.:	127, 211
Raimbault J.-L.:	223	Vittot M.:	19
Ravelet F.:	229	Wagemakers A.:	259
Residori S.:	31	Xin S.:	199
Robert B.:	235	Zambrano S.:	265
Rojas R.:	31		
Roman B.:	25		