

# Ondes à la surface d'un fluide : Des ondes solitaires dépressions à la turbulence d'ondes

E. Falcon, C. Laroche & S. Fauve (LPS,ENS)



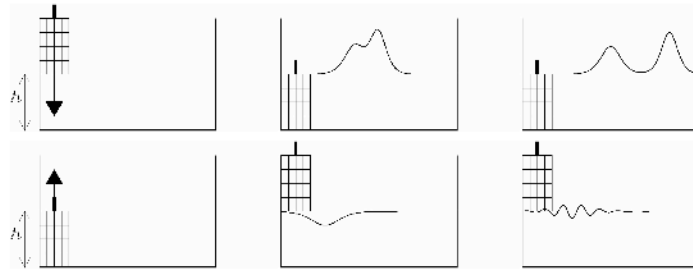
*École Normale Supérieure de Lyon,  
46 allée d'Italie 69007 Lyon, France*  
<http://perso.ens-lyon.fr/eric.falcon/>

# Onde solitaire et soliton

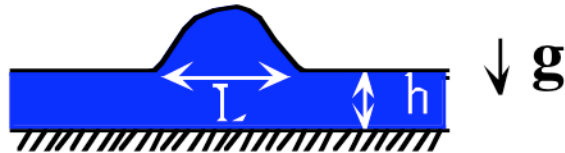
- Onde **non-linéaire**, **localisée** spatialement, se propageant **sans déformation** sur une distance grande devant sa taille
- Très **stable** : équilibre entre **dispersion** et **non linéarité**
- **Soliton** : la **collision** entre 2 ondes solitaires les laisse inchangées

# Onde solitaire à la surface de l'eau

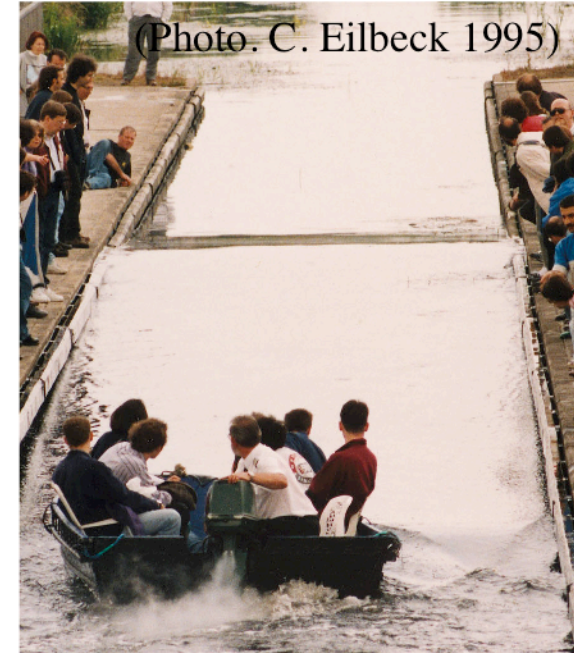
- **J. S. Russell (1834)** : 1ère observation d'onde solitaire dans le Canal de l'Union, Edimbourg



- **Korteweg & De Vries (1895)** : interprétation au moyen de l'Eq. de KdV en « eau peu profonde » ( $h \ll L$ )



Nombreuses études quantitatives d'ondes solitaires élévations (Hammack & Segur 1974)



1995 : 161 ans après la Découverte de J. S. Russell

➔ Existe-t-il des ondes solitaires dépressions?

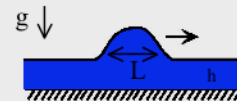
# Relecture de KdV

XLI. *On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves.* By **Dr. D. J. KORTEWEG**, Professor of Mathematics in the University of Amsterdam, and **Dr. G. DE VRIES**\*

**D. J. Korteweg and G. De Vries, Philos. Mag. J. Sci. 39, 422 (1895)**

Les ondes solitaires peuvent avoir une solution localisée soit

- positive (élévation)



- négative (dépression)



suivant le signe du terme dispersif dans l'Eq. KdV

$$Bo = (l_c/h)^2 = \frac{\gamma/h}{\rho g h}$$

$$l_c \lesssim h \ll L$$

1.7 mm    2 à 8 mm    qqs cm

$$h_c \approx 3 \text{ mm}$$

**Tension de surface** non négligeable :  
onde solitaire de type **dépression**  
sont prédites

$$Bo > 1/3$$

**Gravité dominante** : seulement des  
ondes solitaires **élévations**  
peuvent être observées

$$Bo = 1/3$$

$$0 < Bo < 1/3$$

=> Effet de la tension de surface sur les ondes solitaires

**Peut-on observer de telles ondes solitaires dépressions?**

# Théorie KdV

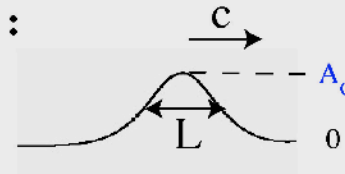
Approximation  $L \gg h$  : faible dispersion

Lorsque la déflexion de la surface  $A(x,t)$  est aussi faible :

$$\begin{array}{ccc} \text{effets} & & \text{effets} \\ \text{Non-Linéaires} & \sim & \text{dispersifs} \\ A/h \ll 1 & & (h/L)^2 \ll 1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \Rightarrow \frac{K}{V} \left[ A_t + \frac{3v}{2h} AA_x + \frac{1}{2}v h^2 \left( \frac{1}{3} - Bo \right) A_{xxx} = 0 \right] \end{array}$$

Solution onde solitaire gravito-capillaire :

$$A(x,t) = A_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-ct}{L}\right)$$



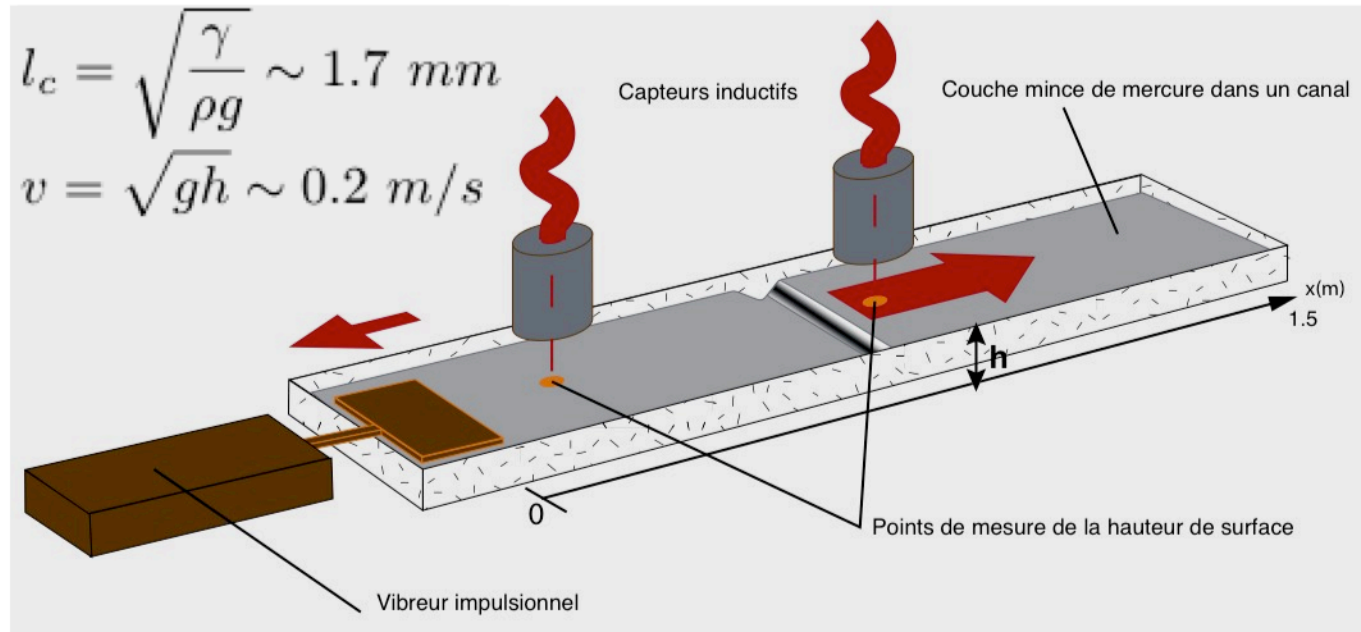
Largeur :  $L = \sqrt{\frac{4(1-3Bo)h^3}{3A_0}}$

Vitesse :  $c = v \left( 1 + \frac{A_0}{2h} \right)$

$0 < Bo < 1/3$  : Onde solitaires élévations supersoniques  
( $A_0 > 0$ ) ( $F = c/v > 1$ )

$Bo > 1/3$  : Onde solitaires dépressions subsoniques  
( $A_0 < 0$ ) ( $F < 1$ )

# Dispositif expérimental



$$2.1 < h < 8.5 \text{ mm} \Leftrightarrow 0.04 < Bo < 0.67$$

$$h_c = 3 \text{ mm} \Leftrightarrow Bo = 1/3$$

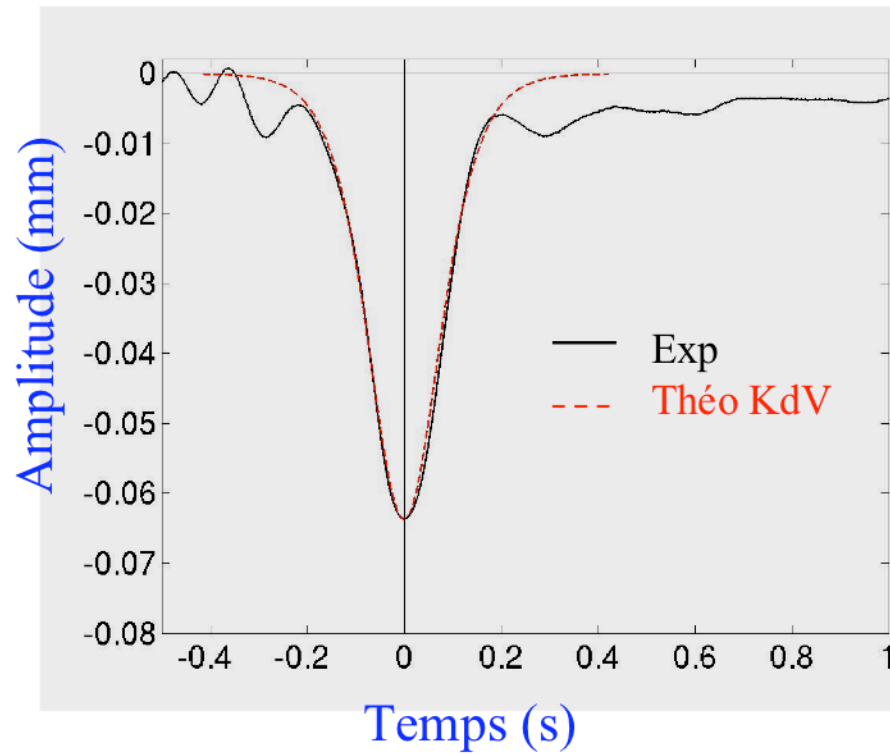
**Hg** : capteur inductif  
faible viscosité

- $h > h_c$  : pousse le piston  $\Rightarrow$  pulse positif
- $h < h_c$  : retire le piston  $\Rightarrow$  pulse négatif

# Forme de l'onde solitaire

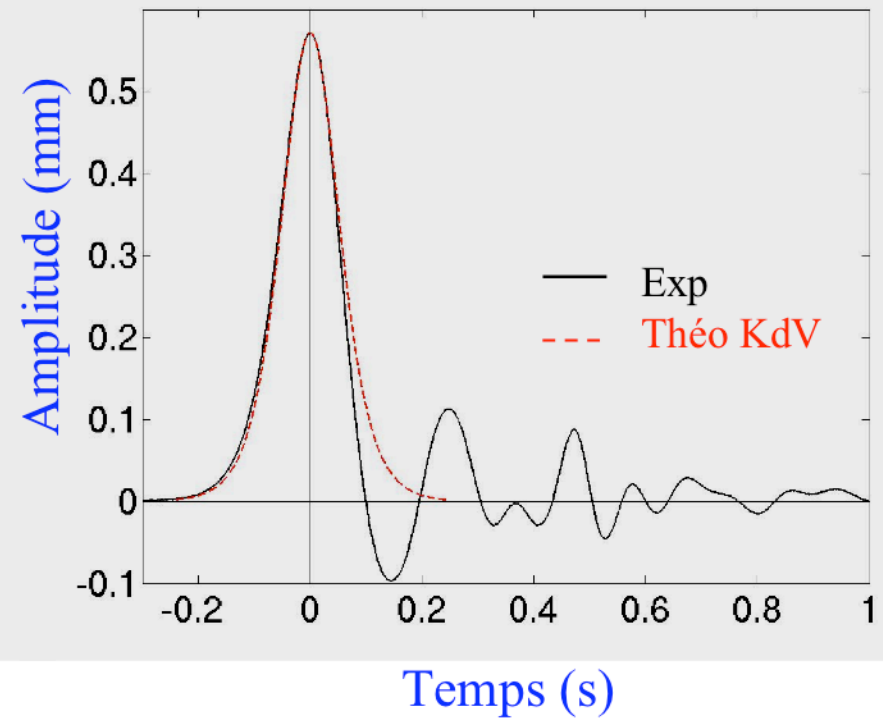
Onde dépression

$h=2.12$  mm



Onde élévation

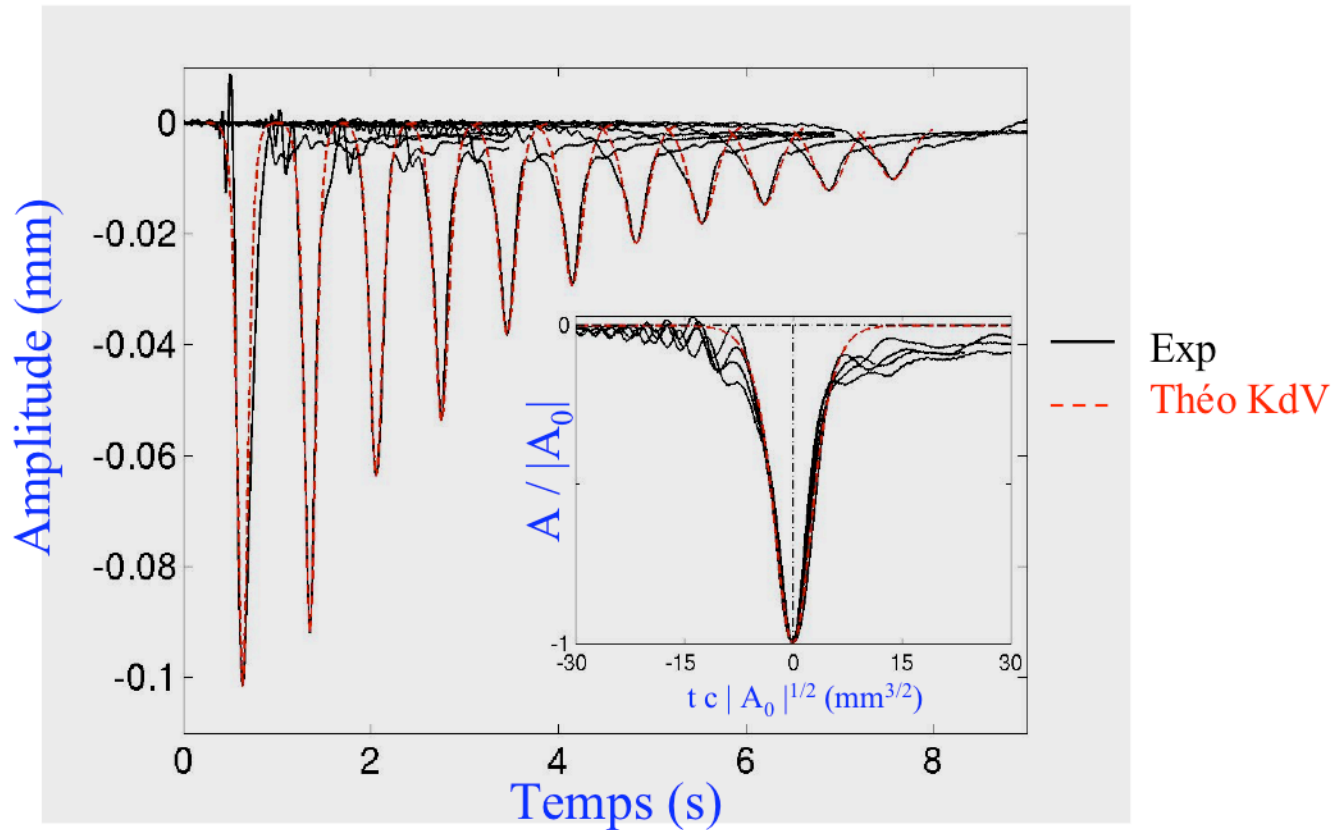
$h=5.6$  mm



Aucun paramètre ajustable

# Propagation

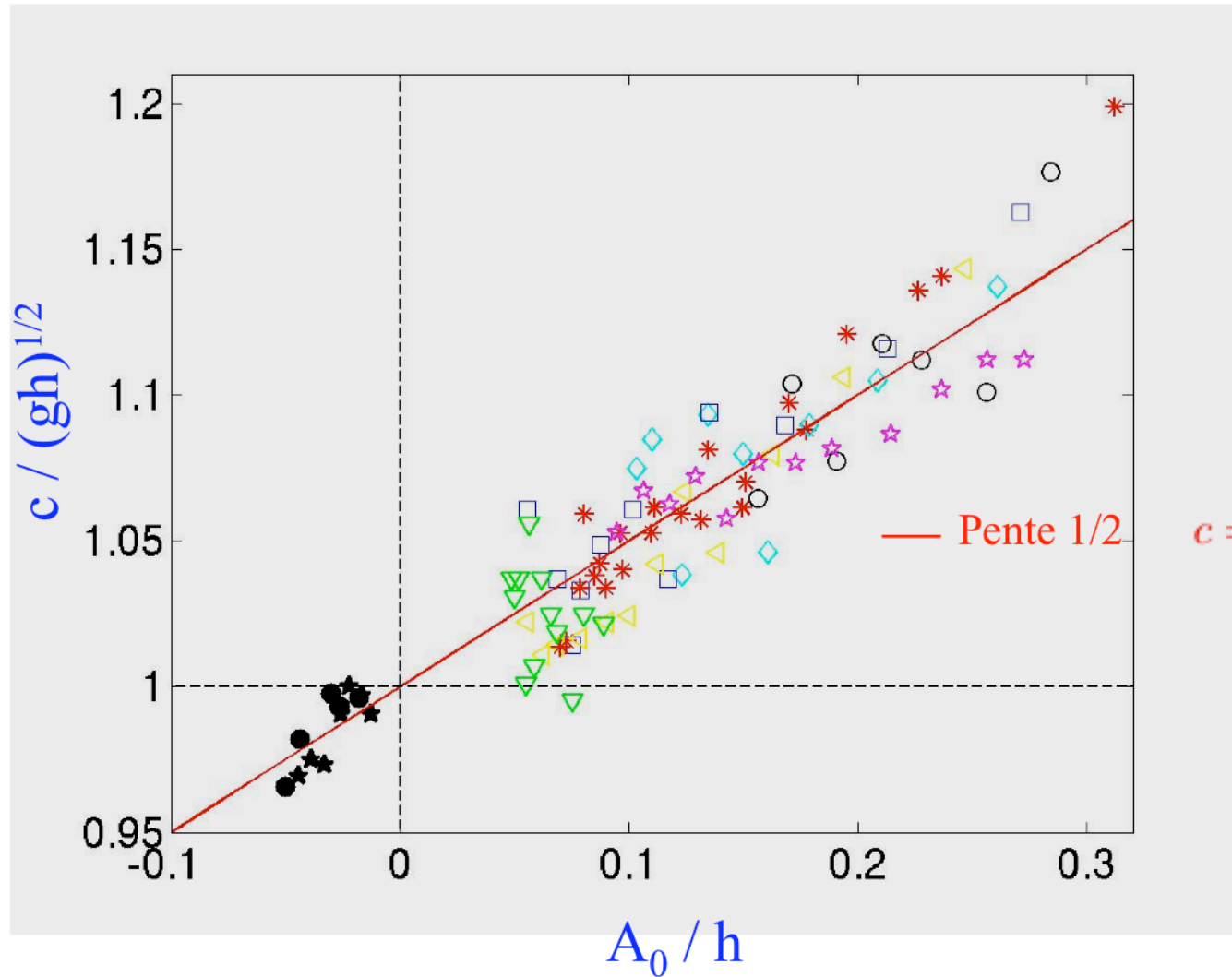
Evolution d'une onde solitaire dépression sur  
une distance de 10 à 110 fois sa taille  $L \sim 1$  cm



Le pulse se propage sans déformation sur une distance grande  
devant sa taille en bon accord avec le profil KdV



# Vitesse de l'onde solitaire



Ondes élévations  
supersoniques  
(c décroît avec t)

$$c = \sqrt{gh} \left[ 1 + \frac{A_0}{2h} \right]$$

Ondes dépressions  
subsoniques  
(c augmente avec t)

# Résumé

- Observation d'ondes de surface **solitaires** de type **dépression**, en régime peu profond (qqs mm), qui se propagent sur une distance grande ( $\sim 1$  m) devant leur taille (qqs cm)

Accord entre l'expérience et la théorie  
(aucun paramètre ajustable)



## Ondes Solitaires KdV

- Ces ondes sont **subsoniques**  $\neq$  excitations linéaires (« vitesse du son »), et des ondes solitaires élévations (**supersoniques**)
- Bien qu'amorties par **dissipation visqueuse**, elles gardent une **forme auto-similaire** donnée par la solution KdV
- **Domaine vaste** : onde hydrodynamique, à la surface d'un solide élastique, dans les fibres optiques, onde de pression sanguine, onde interne océanographique, acoustique, magnéto-acoustique, ...

# Turbulence d'ondes

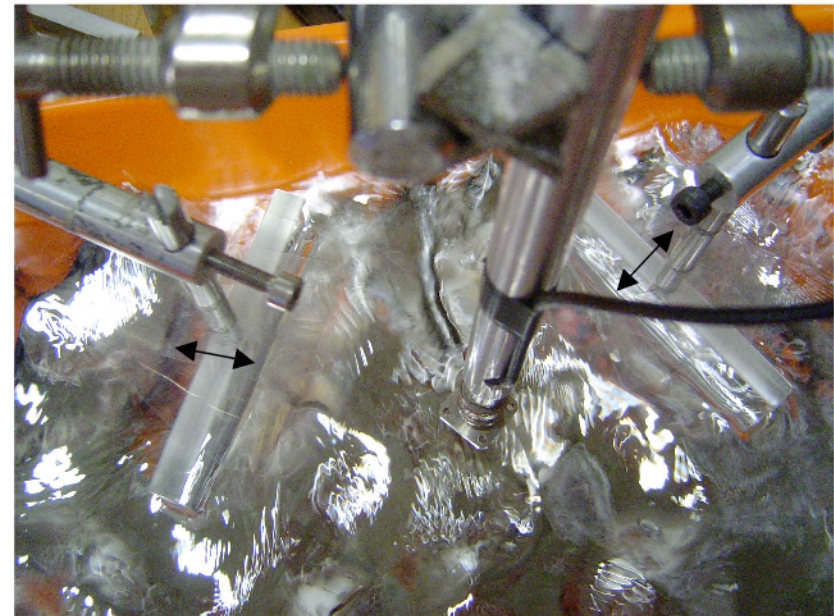
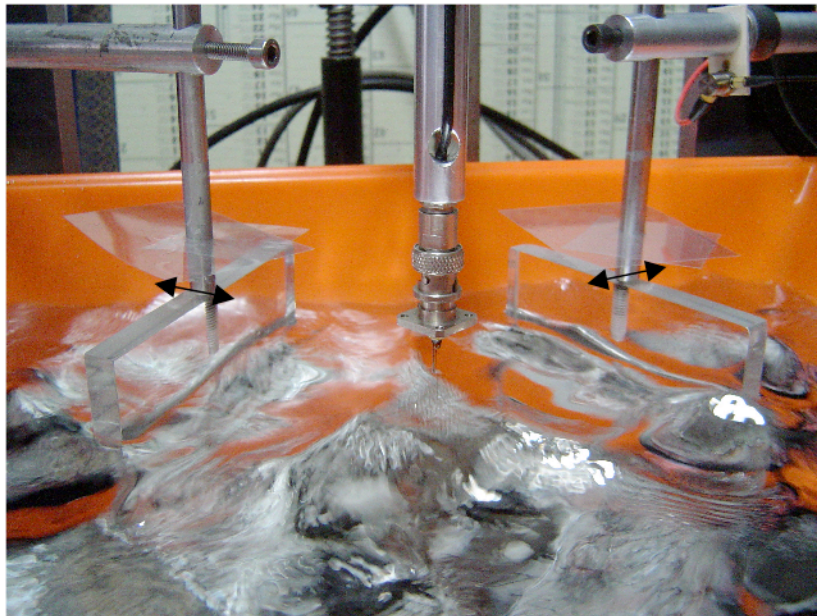
- **Domaine vaste** : hydrodynamique, astrophysique, optique, matière condensée
- **Très peu étudiée exp.** / turbulence hydro 2D et 3D !

## Motivations :

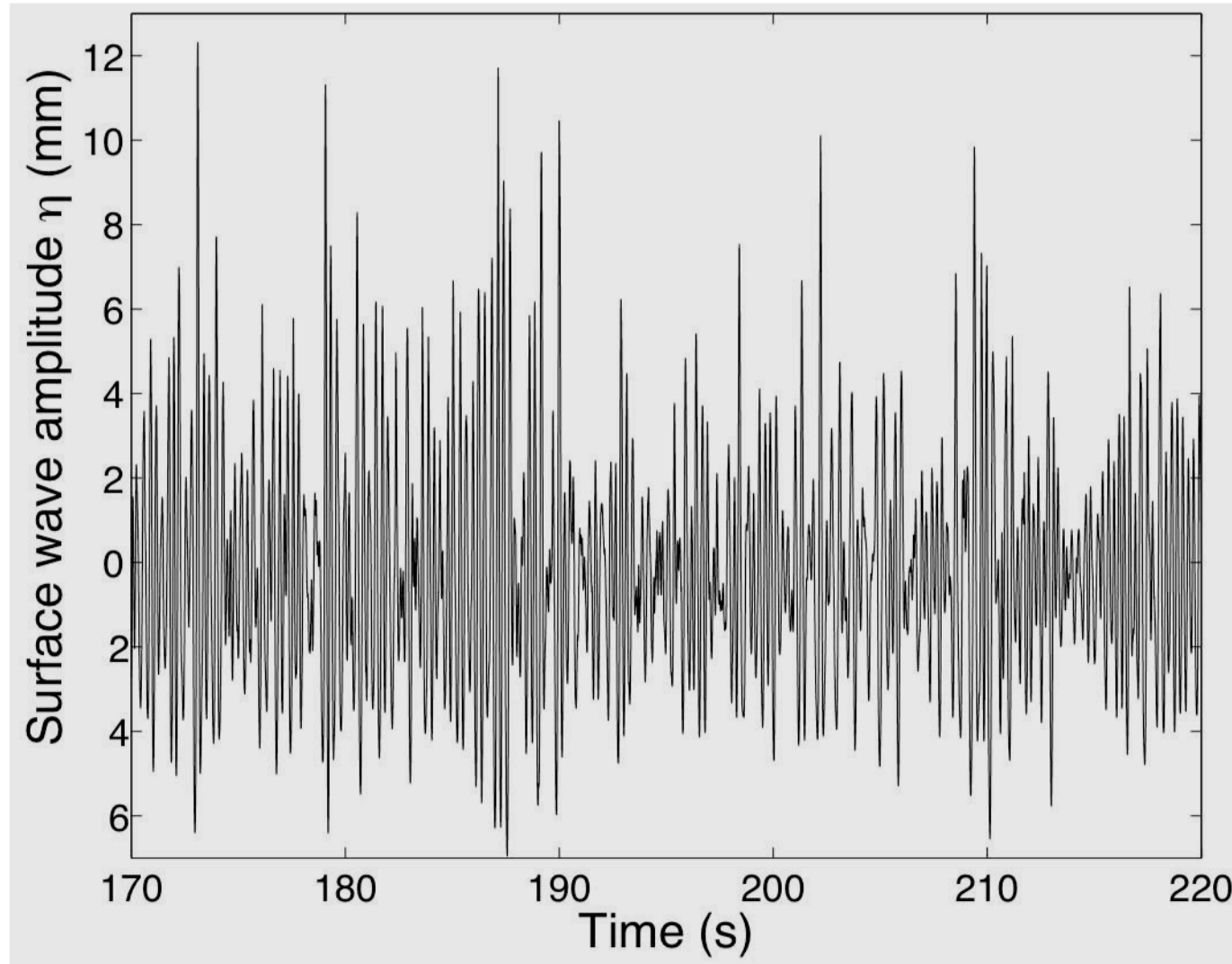
- Caractériser le **transfert d'énergie injectée à gde échelle cascading vers les petites structures**, par l'intermédiaire des **interactions entre ondes**, dissipant ainsi l'énergie.
  - ⇒ Mesure de la distribution et du spectre de l'amplitude des vagues en un point
- Connaître les **propriétés statistiques des fluctuations du flux d'énergie** nécessaire à amener un système dissipatif hors de l'équilibre
  - ⇒ Mesure des fluctuations de puissance injectée au fluide

# Dispositif expérimental

- Bassin : 20 x 20 cm
  - Fluide Hg ou Eau, profondeur  $\sim 2$  cm
  - Forçage par batteurs : « **Bruit blanc** » à basse fréquence :  $0 - 6$  Hz  $\Leftrightarrow \lambda \sim 5$  cm
- $\neq$  excitation de Faraday: Wright et al. PRL (1996) ; Henry et al. EPL (2000); Brazhnikov et al. JETP (2002)
- $\neq$  exp. *in situ* à la surface des océans (vents, courants marins) : océanographes
- Mesure de la hauteur des vagues avec un capteur **capacitif** (fil  $\phi = 0.1$  mm)



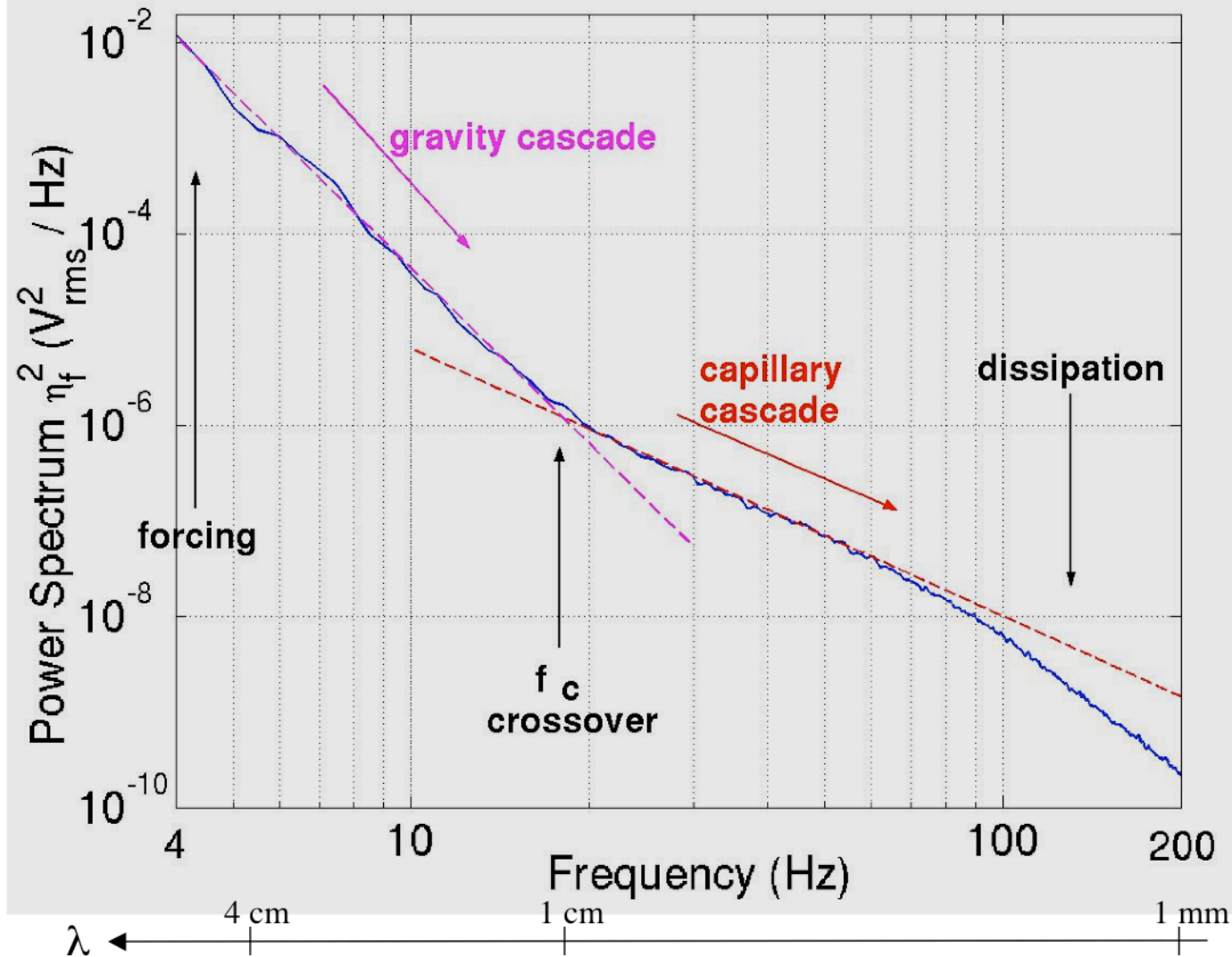
# Temporal evolution of the wave height



Height measurement with a capacitive sensor (from  $10\ \mu\text{m}$  to 2 cm)

# Power spectrum of $\eta(t)$

Random forcing: 0 - 4 Hz



$$\omega = \sqrt{\left[ gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right]}$$

$$f_c = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{g}{2l_c}} \simeq 17 \text{ Hz}$$

$$l_c \equiv \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} = 1.7 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \lambda_c \simeq 1 \text{ cm}$$

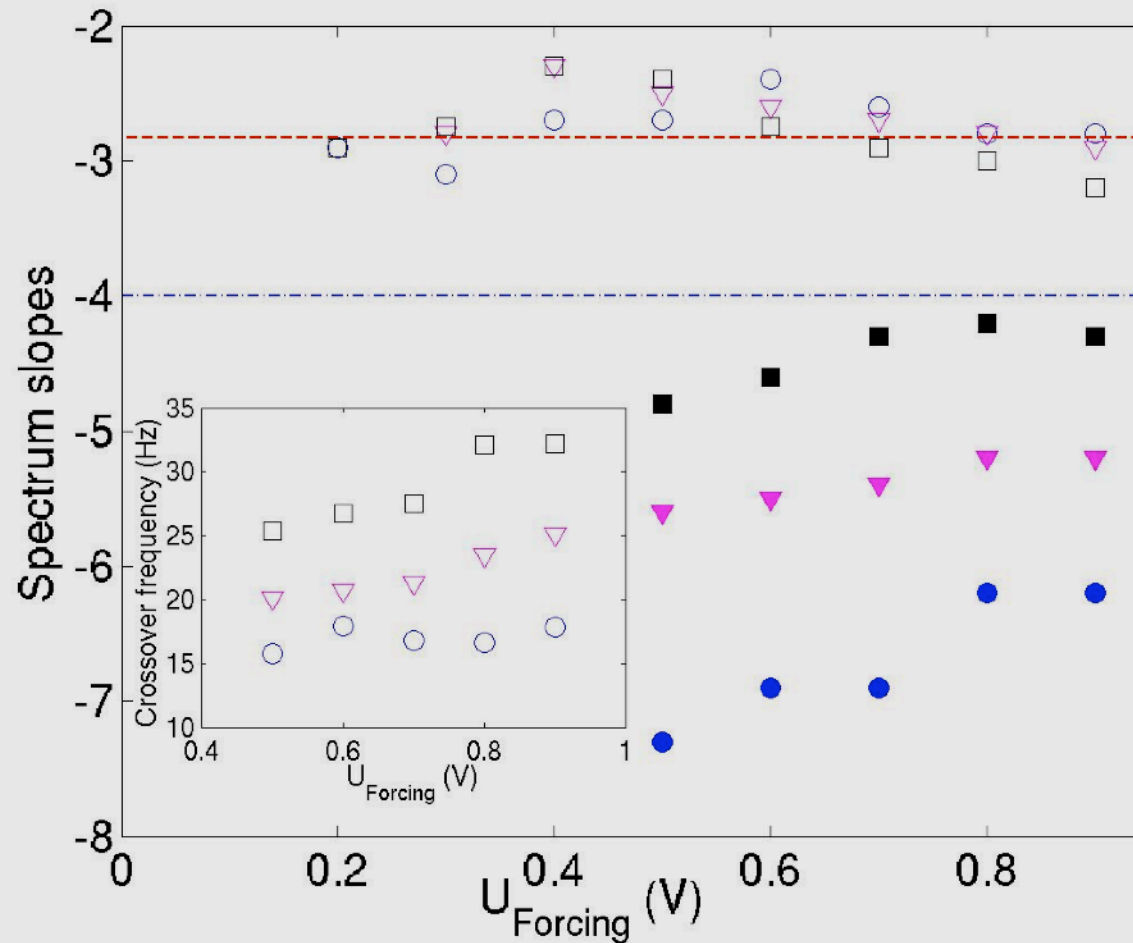
Power law spectra : capillary  $\sim f^{-2.8}$  ; gravity  $\sim f^{-6.2}$

Crossover :  $f_c \sim 20\text{Hz}$

# Spectrum slopes

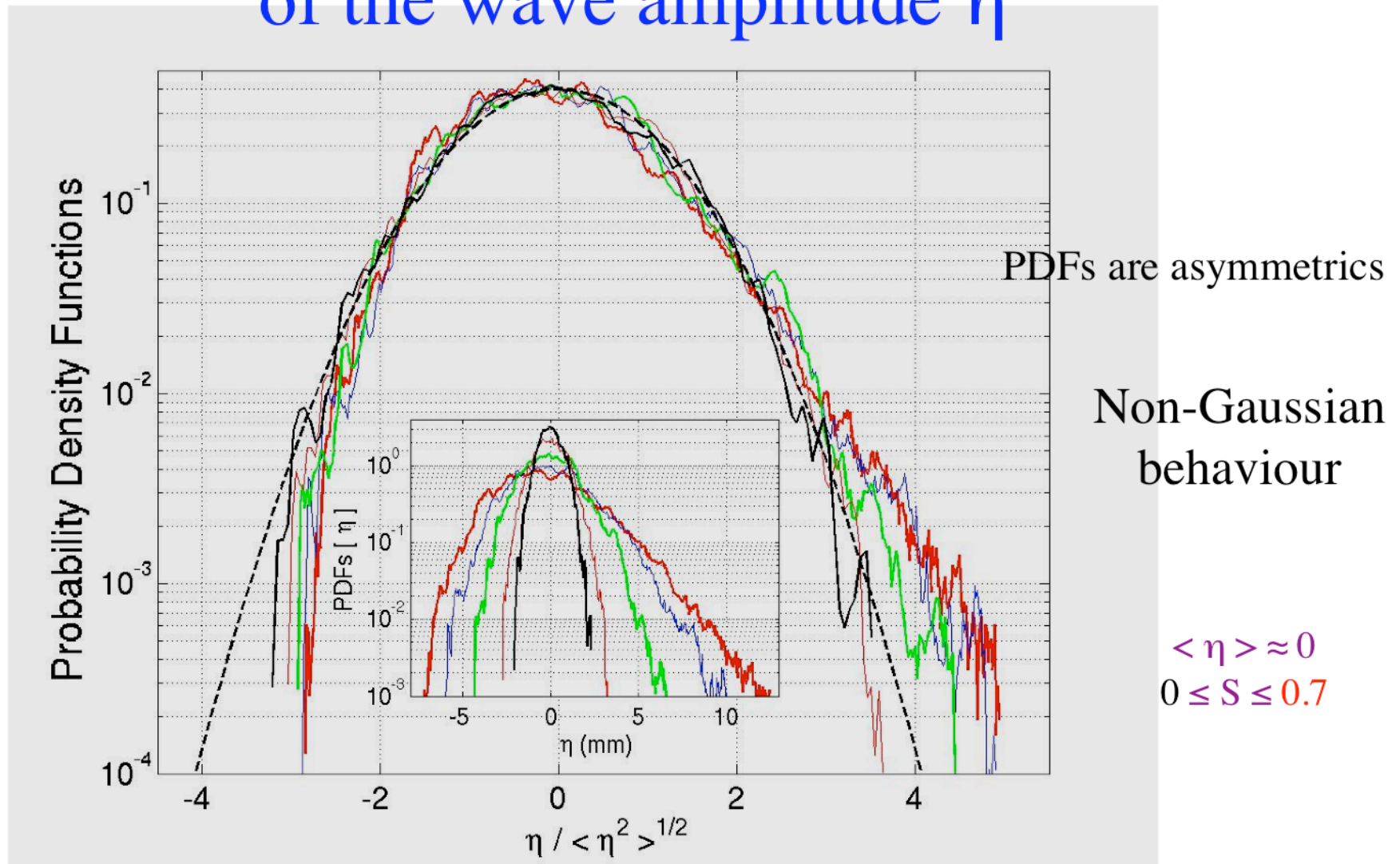
Width of the random forcing

(o)  $0 \Rightarrow 4$  Hz  
 ( $\nabla$ )  $0 \Rightarrow 5$  Hz  
 ( )  $0 \Rightarrow 6$  Hz



- Rough agreement for capillary waves (open symbols)
- Strong disagreement for gravity waves (full symbols)
  - with weak turbulence theory (3 or 4 waves mixing - Zakharov 1967)
- Crossover dependency on the random forcing amplitude and width

# Probability density function of the wave amplitude $\eta$



From black to red curve: 5 increasing amplitudes of random forcing (0 - 4 Hz)  
Gaussian (--) with zero mean and unit standard deviation.

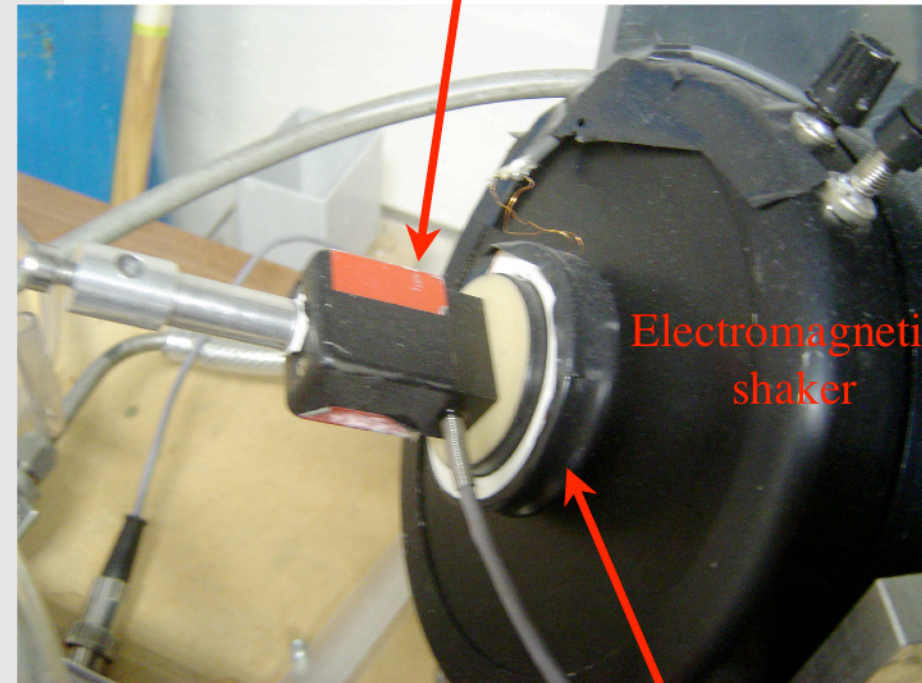
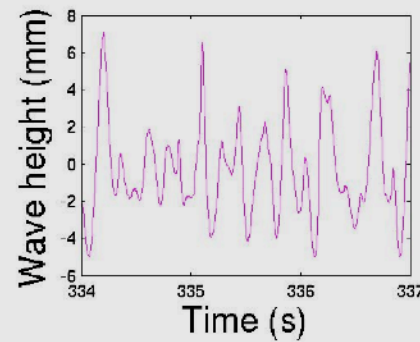
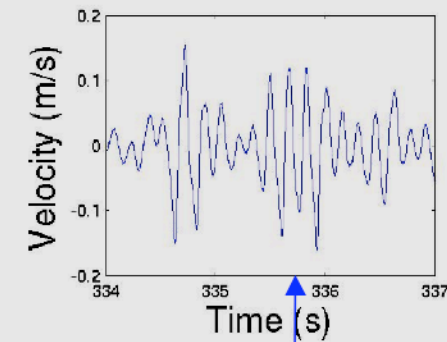
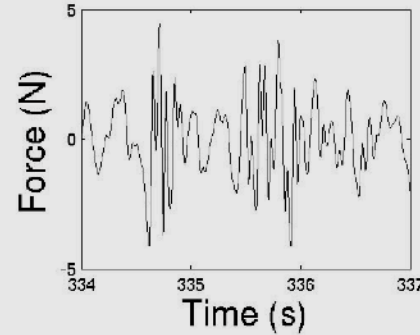
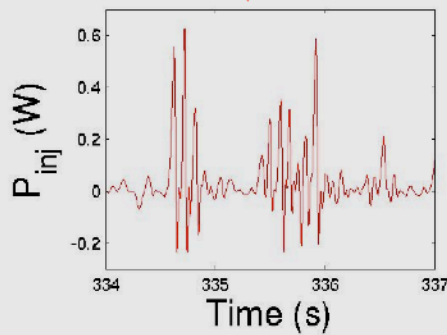


# Fluctuations of the injected power

$$P_{inj}(t) = F(t) \cdot V(t)$$

$P(t) = F(t) \times V(t)$   
analogic product

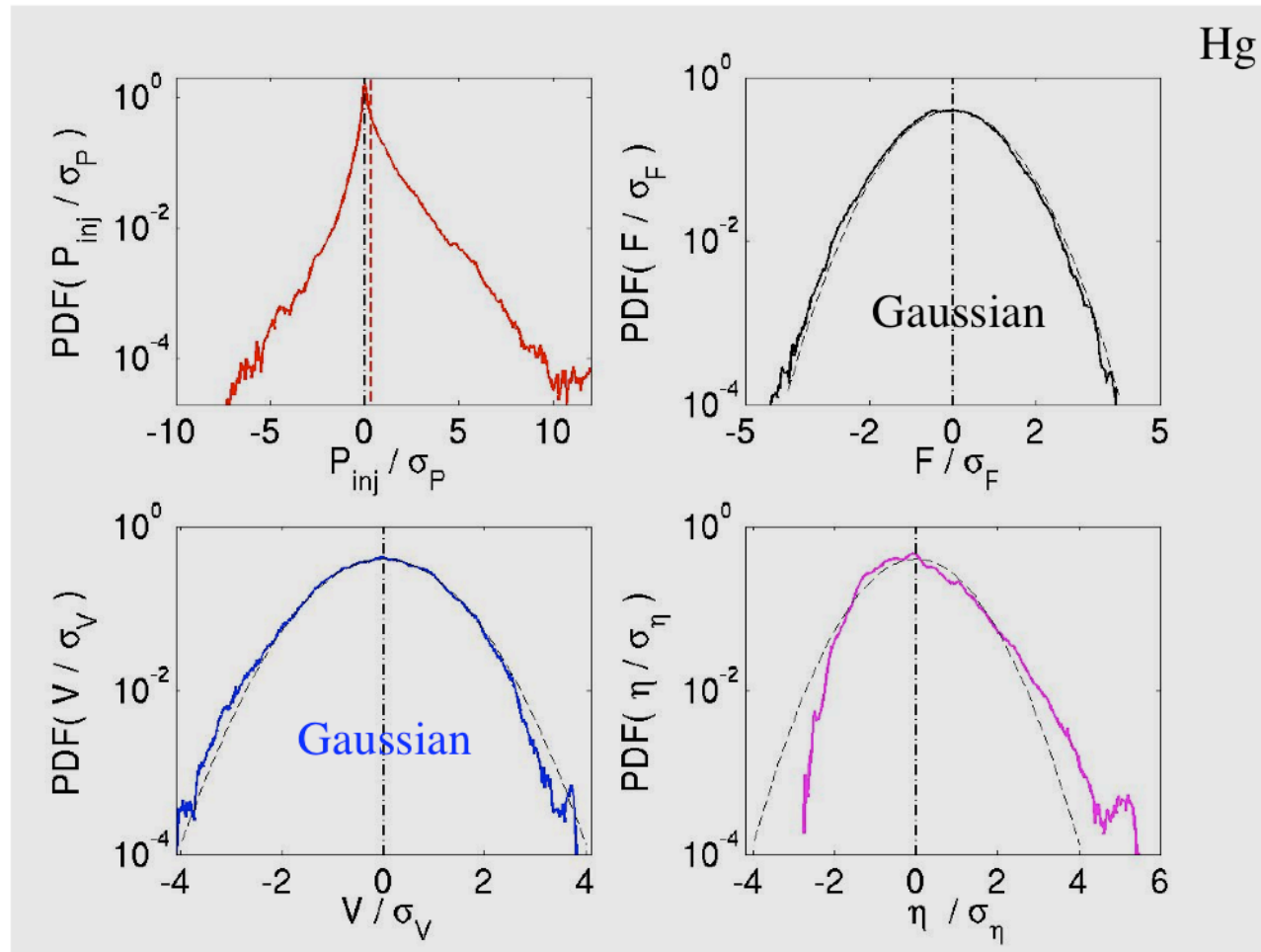
Force F: piezoresistive sensor



Electromagnetic shaker

Piston velocity V: inductive coil

# PDF of **Injected Power**, Force, **Velocity** & **Wave-height**



$$\langle P_{inj} \rangle \approx 30 \text{ mW}$$

$$\langle \eta \rangle \approx 0$$

$$\langle F \rangle \approx 0$$

$$\langle V \rangle \approx 0$$

- PDF ( $P_{inj} = F \times V$ ) is **asymmetric**  $\Leftarrow$  product of two Gaussian PDFs is Non-Gaussian
- **Numerous negative events** in PDF( $P_{inj}$ )  
 $\Rightarrow$  **the fluid gives back some amount of energy to the wavemakers**
- $\langle P_{inj} \rangle$  is chosen by the system itself not by the operator (who drives  $\sigma_V$ )

# Travail en cours...

PDF de **puissance injectée** asymétrique avec de **nombreux évènements négatifs** :

⇒ Lien avec **les théorèmes des fluctuations** gouvernant la symétrie des distributions de  $P_{inj}$  ou  $D$  des systèmes hors-équilibre de la **physique statistique**

⇒ Lien entre **physique statistique** et **physique non-linéaire**

## Perspectives :

- Construction d'un **grand bassin** ( $\phi \sim 3$  m)

⇒ Spectre de gravité plus accessible (petit bassin: pb de taille finie)

Sondes capacitatives locales  $\Rightarrow S_{\eta}(\omega)$ , intermittence, corrélations à deux points...

Diffusion d'ondes acoustiques par la surface  $\Rightarrow$  Spectre spatio-temporel  $S_{\eta}(\omega, k)$

- Spectre **capillaire** sur une large gamme de fréq. :  $g = 0$
- Spectre de **gravité** sur une large gamme de fréq: Fluide près du point critique ( $\gamma \rightarrow 0$ )

**Applications** : énergie des vagues comme source d'énergie : **énergie « houlomotrice »**