

Accélération de convergence de la Méthode Asymptotique Numérique : application à l'étude des instabilités de systèmes film-substrats

Pascal Ventura, Michel Potier-Ferry, Hamid Zahrouni

LEM3, UMR CNRS 7239, Université de Lorraine, Metz, France

Introduction

- ❑ La **Méthode Asymptotique Numérique (MAN)** est une méthode de continuation de type perturbation et basée sur un développement en **série de Taylor** (en fonction d'un paramètre de chemin) à la fois du vecteur solution et du paramètre de chargement.

Référence : B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, Méthode Asymptotique Numérique, Hermès Lavoisier, 2007.

- ❑ **Son intérêt principal** : grâce au développement de Taylor et à la possibilité d'ajuster la longueur de pas, la **MAN** apporte un suivi fin des courbes en présence de bifurcations.
- ❑ Nous allons présenter de nouvelles améliorations importantes de l'**algorithme MAN** :
 - ❑ Accélération de la convergence de la continuation MAN grâce à la technique **MMPE (Modified Minimal Polynomial Extrapolation)**, appartenant à la classe des méthodes d'extrapolation.
 - ❑ Mise en œuvre d'une longueur de **pas adaptatif**.
 - ❑ **Corrections de Newton-Riks** en fin de la phase de continuation **MAN**.
- ❑ Cette Recherche a été publiée dans les **Comptes Rendus Mécanique de l'Académie des Sciences**, 348, **issue 5** (2020), p. 361-374.

P. Ventura, M. Potier-Ferry, and H. Zahrouni, "A secure version version of the Asymptotic Numerical Method via convergence acceleration".

La MAN une méthode de continuation performante

- un problème non linéaire (par exemple de mécanique du solide) dépendant d'un paramètre et discrétisé par la méthode des éléments finis se met sous la forme :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = 0 \quad \text{avec } \mathbf{U} \in \mathbb{R}^N, \text{ le vecteur inconnu, et, } \lambda \in \mathbb{R} \text{ paramètre scalaire}$$

- Il est alors possible de développer en série de Taylor (tronqué à un ordre n dans la cadre de la MAN) \mathbf{U} et λ en fonction d'un paramètre de chemin a :

$$\begin{cases} \mathbf{U}(a) = \mathbf{U}_0 + \sum_{k=1}^n \mathbf{U}_k a^k \\ \lambda(a) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n \lambda_k a^k \end{cases} \quad \text{avec } (\mathbf{U}_0, \lambda_0) \text{ les conditions initiales en début de branche}$$

- Plusieurs choix sont possibles pour le paramètre de chemin, le plus classique est celui de la longueur d'arc linéarisée :

$$a = \frac{1}{\|\mathbf{U}\|^2} \langle \mathbf{U} - \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1 \rangle + \alpha (\lambda - \lambda_0)$$

- Critère de fin de pas à posteriori : $a_{\max} = (\delta \|\mathbf{U}_1\| / \|\mathbf{U}_N\|)^{1/(N-1)}$

Application à un problème d'élasticité avec non linéarités géométriques

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \\ \int_{\Omega} \mathbf{S} : \delta \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) d\Omega - \lambda \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})}_{\boldsymbol{\gamma}_l(\mathbf{u})} + \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla^T \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})}_{\boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})}$$

$$\delta \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\gamma}_l(\delta \mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$$

Pour conserver une formulation quadratique nous développons en série de Taylor les champs \mathbf{u} , \mathbf{S} , et λ

□ A l'ordre 1 en α : $k(\mathbf{u}_1, \delta \mathbf{u}) = \lambda_1 P_e(\delta \mathbf{u})$

$$k(\mathbf{u}_1, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left\{ \delta \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_0) : \mathbf{D} : (\boldsymbol{\gamma}_l(\mathbf{u}_1) + 2\boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)) + \mathbf{S}_0 : 2\boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}_1, \delta \mathbf{u}) \right\} d\Omega \quad P_e(\delta \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega$$

$$\frac{1}{\bar{\mathbf{u}}^2} \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \rangle + \alpha \lambda_1^2 = 1$$

□ A l'ordre $p > 1$ en α : $k(\mathbf{u}_p, \delta \mathbf{u}) = \lambda_p P_e(\delta \mathbf{u}) + \langle F_p^{nl}, \delta \mathbf{u} \rangle \quad \mathbf{S}_p = \mathbf{D} : \left[\boldsymbol{\gamma}_l(\mathbf{u}_p) + 2\boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_p) + \sum_{r=1}^{p-1} \boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{p-r}) \right]$

$$\langle F_p^{nl}, \delta \mathbf{u} \rangle = -2 \sum_{r=1}^{p-1} \int_{\Omega} \mathbf{S}_r : \boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}_{p-r}, \delta \mathbf{u}) d\Omega - \sum_{r=1}^{p-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{p-r}) : \mathbf{D} : \delta \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_0) d\Omega$$

$$\frac{1}{\bar{\mathbf{u}}^2} \langle \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_1 \rangle + \alpha \lambda_p \lambda_1 = 0$$

Accélération de convergence MMPE

- ❑ La technique d'accélération de convergence **MMPE** (**M**odified **M**inimal **P**olynomial **E**xtrapolation) a été décrite dans l'article :

K. Jbilou, H. Sadok, "Vector extrapolation methods, applications and numerical comparison", J. Comput. Appl. Math. 122 (2000), p. 149-165.

- ❑ On considère une suite de vecteurs \mathbf{S}_N qui peut s'écrire sous la forme $\mathbf{S}_N = \sum_{n=0}^N \mathbf{V}_n$ avec $\mathbf{V}_0 = \mathbf{S}_0$ et $\mathbf{V}_n = \mathbf{S}_n - \mathbf{S}_{n-1}$. La suite de vecteurs \mathbf{V}_n apparaît naturellement dans le développement en série de Taylor.

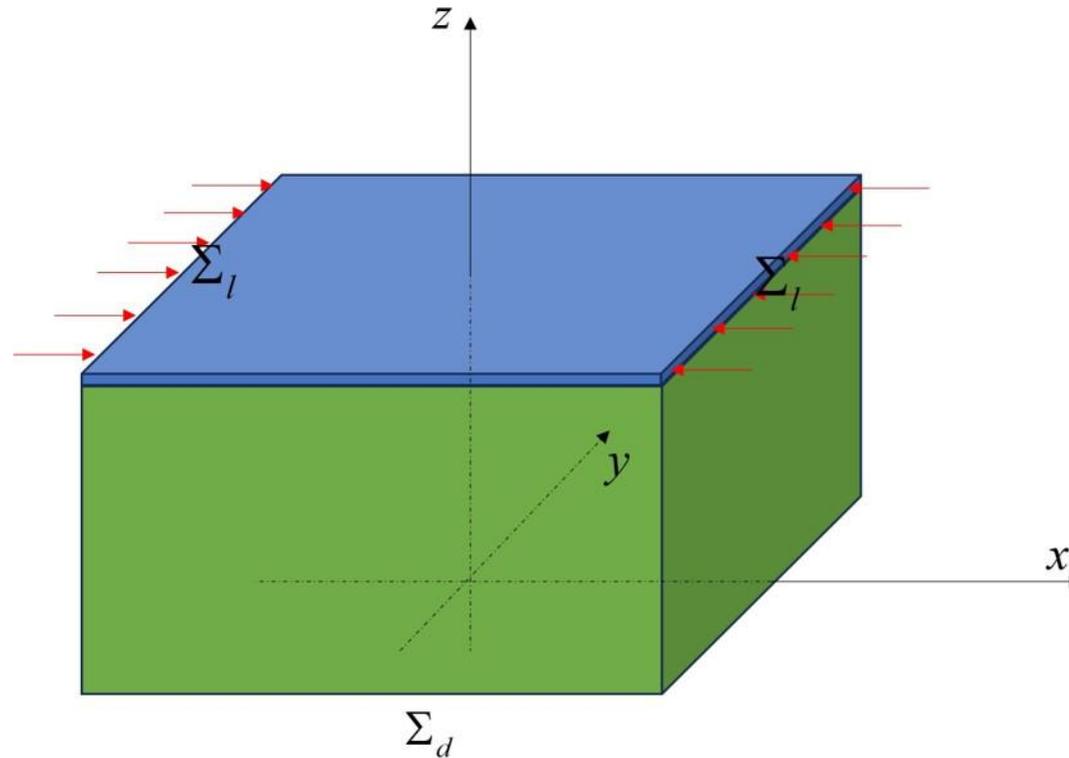
- ❑ La méthode **MMPE** introduit une suite de vecteurs modifiés : $\mathbf{T}_N = \mathbf{S}_0 + \sum_{n=0}^N c_n \mathbf{V}_n$

- ❑ On utilise ensuite un shift d'indices : $\tilde{\mathbf{T}}_N = \mathbf{S}_1 + \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{V}_{n+1}$

Accélération de convergence MMPE

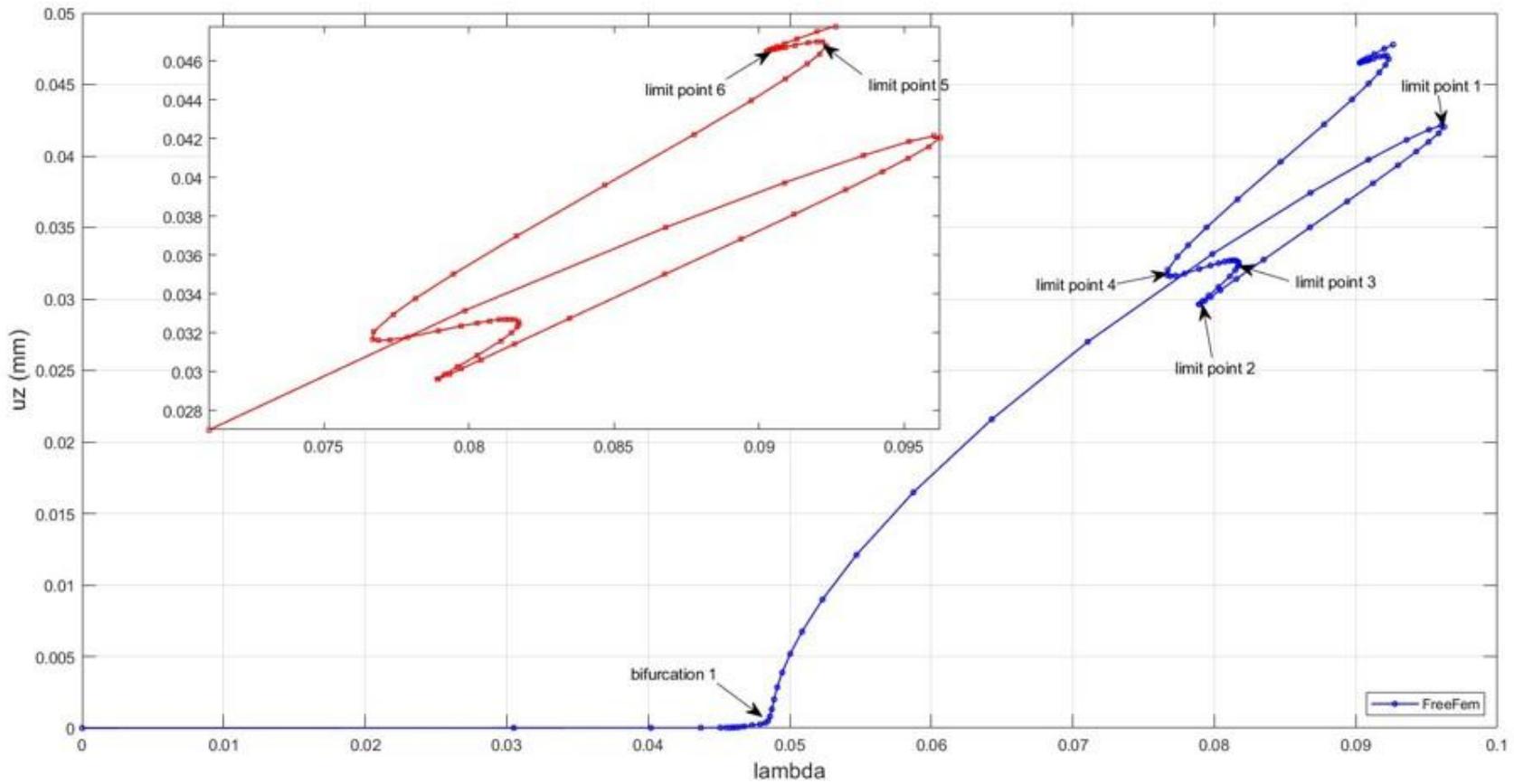
- On introduit ensuite une suite de N vecteurs indépendants $\{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_N\}$ avec $\mathbf{Y}_n = \mathbf{V}_n^*$ où $\{\mathbf{V}_1^*, \mathbf{V}_2^*, \dots, \mathbf{V}_N^*\}$ est obtenus par une orthogonalisation de **Gramm Schmitt** de la famille de vecteurs $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_N\}$.
- Le nombre de vecteurs utilisés est souvent de **l'ordre de 6-15** pour ne pas avoir de pertes de précision.
- On résout ensuite un système linéaire : $[\mathbf{M}]\{\mathbf{c}\} = \{\mathbf{b}\}$
avec , $\{\mathbf{c}\} = {}^t \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$, $M_{ij} = (\mathbf{V}_{j+1} - \mathbf{V}_j) \cdot \mathbf{Y}_i$, et, $b_i = -\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{Y}_i$
- Ce système linéaire est obtenu est annulant $(\tilde{\mathbf{T}}_N - \mathbf{T}_N)$ sur le sous-espace engendré par la famille de vecteurs $\{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_N\}$
- L'accélération de convergence **MMPE** consiste donc en la résolution d'un **petit** système linéaire et donc a peu d'impact sur l'augmentation du temps CPU.

Etude des instabilités dans un système film rigide sur substrat souple

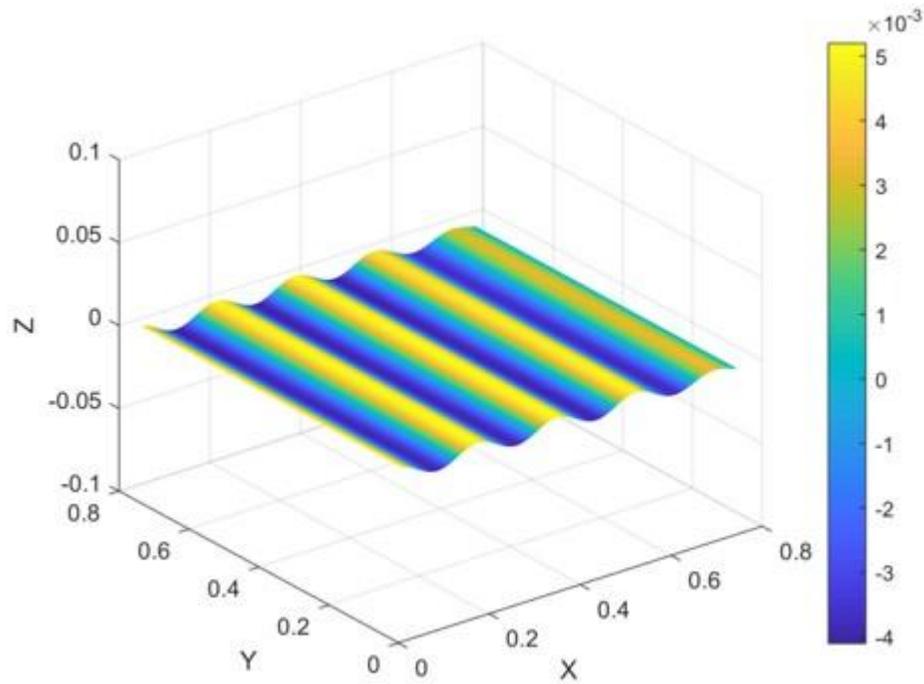


$$\begin{cases} E_f = 1.3 \times 10^5 \text{ MPa} \\ \nu_f = 0.3 \end{cases}$$

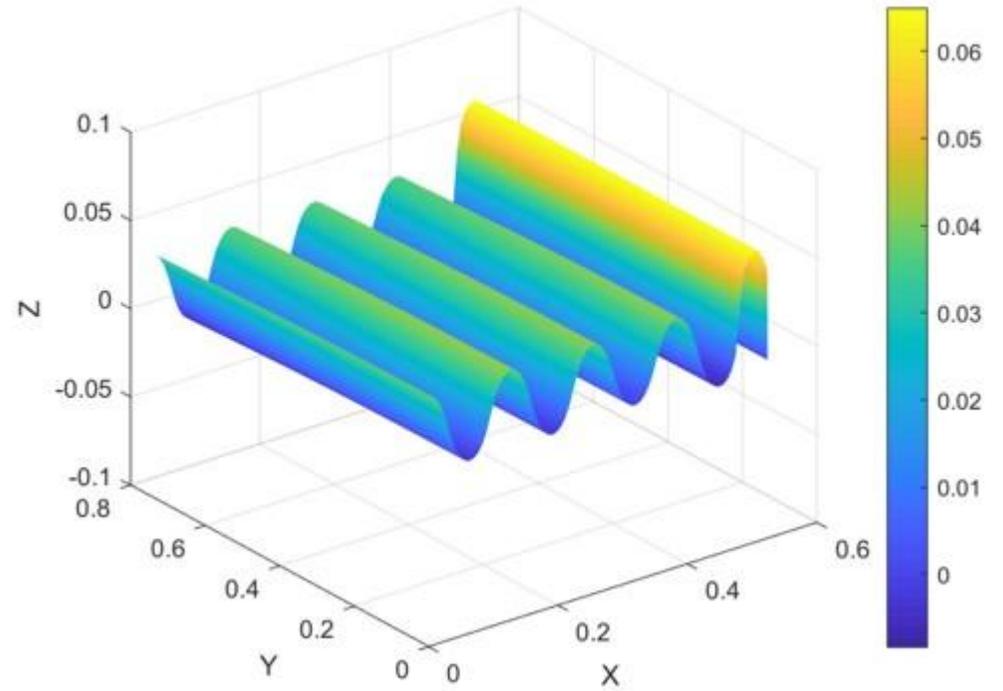
$$\begin{cases} E_s = 1.8 \text{ MPa} \\ \nu_s = 0.48 \end{cases}$$



Déplacement vertical du centre du film (face supérieure) en fonction de λ



Déformée de la surface supérieure du film avant la première bifurcation : pas 20



Déformée de la surface supérieure du film avant la première bifurcation : pas 20