Instabilité de modulation pour l'équation de Schrödinger non-linéaire avec dispersion aléatoire colorée

Andrea Armaroli[1], Guillaume Dujardin[2], Alexandre Kudlinski[1], Arnaud Mussot[1], Stefano Trillo[3], Stephan De Bièvre[2], Matteo Conforti[1]

[1] Univ. Lille, CNRS, UMR 8523-PhLAM-Physique des Lasers, Atomes et Molécules, 59000 Lille
[2] Univ. Lille, Inria, CNRS, UMR 8524 – Laboratoire Paul Painlevé, 59000 Lille
[3] Department of Engineering, Université de Ferrara, 44122 Ferrara, Italie
andrea.armaroli@univ-lille.fr

L'instabilité de modulation (*modulational instability*, MI) est un phénomène physique universel qui se manifeste dans des systèmes physiques non-linéaires dispersifs et peut être modélisé à l'ordre plus bas par l'équation de Schrödinger non-linéaire (*nonlinear Schrödinger equation*, NLSE). Dans le cas classique, une dispersion de la vitesse de groupe (*group-velocity dispersion*, GVD) anormale est nécessaire pour observer le phénomène.

La MI peut aussi se manifester en dispersion normale si la GVD varie le long de la direction de propagation. L'effet d'une variation aléatoire sous forme d'un bruit blanc (longueur de corrélation infinie) a été largement étudié, voir par exemple [1]. Cette approche théorique est très intéressante mais demeure irréaliste car elle considère des fluctuations infinies sur une échelle infinitésimale.

Nous considérons l'effet d'une fluctuation aléatoire colorée de la GVD. Le modèle s'écrit alors :

$$i\partial_z U - \frac{1}{2}\beta_2(z)\partial_{tt}U + \gamma|U|^2U = 0, \tag{1}$$

où U est l'enveloppe complexe du champ optique, t et z sont le temps et la distance de propagation dans un référentiel qui se propage à la vitesse de groupe de l'onde, γ est le coefficient non-linéaire (constant) et $\beta_2(z) = \beta_2^0 + \delta\beta(z)$ est la GVD. Elle s'écrit comme un processus aléatoire $\delta\beta(z)$ de moyenne zéro autour d'une valeur constant $\beta_2^0 > 0$ (GVD normale). Nous considérons des processus Gaussiens ou dichotomiques. La densité spectrale de puissance de la fluctuation est classifiée en deux familles : passe-bas ($S_{\delta\beta}(\kappa) = \frac{N_0}{2}\frac{B^2}{B^2+\kappa^2}$, avec B la largeur bande et $N_0/2$ la valeur centrale) ou passe-bande ($S_{\delta\beta}(\kappa) = \frac{N_0}{2}\left[\frac{B^2}{B^2+(\kappa-\kappa_0)^2} + \frac{B^2}{B^2+(\kappa+\kappa_0)^2}\right]$, modulée autour de κ_0). Les deux familles sont, en principe, physiquement réalisables et donnent lieu à des bandes de MI en GVD normale.

L'Eq. (1) est linéarisée et le système obtenu est étudiée à l'aide de deux approches analytiques : l'expansion en cumulants [2] et les formules de Furutsu-Novikov-Shapiro-Loginov-Donsker [3]. La comparaison avec les résultats numériques nous permet d'évaluer la fiabilité et les limites des deux approches. Nous obtenons une analyse détaillée des différents régimes de MI [4]. Pour les processus passe-bas, les bandes sont localisées à basse fréquence (autour de la porteuse), de façon similaire à ce que l'on trouve pour le bruit blanc. Pour les processus passe-bande, la MI se localise autour d'une ou plusieurs fréquences données par une condition de résonance paramétrique, très bien étudiée dans les fibres optiques à dispersion oscillante. Les approches analytiques proposées nous permettent de caractériser la transition entre les deux régimes.

Références

1. F. K. Abdullaev, S. A. Darmanyan, A. Kobyakov, and F. Lederer, "Modulational instability in optical fibers with variable dispersion" *Phys. Lett. A*, 220, (1996), 213–218.
2. N. G. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, Elsevier (2007)
3. M. Gitterman, *The Noisy Oscillator : Random Mass, Frequency, Damping*, World Scientific Publishing Company (2005)
4. A. Armaroli, G. Dujardin, A. Kudlinski, A. Mussot, S. Trillo, S. De Bièvre, et M. Conforti, "Stochastic modulational instability in the nonlinear Schrödinger equation with colored random dispersion", *Phys. Rev. A* **105**, (2022), 013511.