Extraction des paramètres du modèle épidémique SIR à partir des données temporelles d'infection

François G. Schmitt

CNRS, Univ. Lille, Univ. Littoral Côte d'Opale, UMR 8187, LOG, Laboratoire d'Océanologie et de Géosciences, F62930 Wimereux, France www.fg-schmitt.fr francois.schmitt@log.cnrs.fr

References:

Kermack WO, McKendrick AG, A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 115, 700-721, 1927.

Martcheva M, *An introduction to the mathematical epidemiology*, Springer, 2015.

Daley DJ, Gani J, *Epidemic modelling: an introduction*, Cambridge University Press, 2001.

Schmitt FG, An algorithm for the direct estimation of the parameters of the SIR epidemic model from the I(t) dynamics, submitted (2021).

1. Le modèle SIR

Le modèle SIR, introduit en 1927, est un des premiers modèles de diffusion épidémique publié. Ce modèle suppose 3 compartiments recensant les populations formant une communauté:

S: les susceptibles d'être infectés;

I: les infectés;

R: ceux qui sont guéris.

Il existe des versions discrètes et continues de ce modèle. Ici nous considérons une version continue dans le cadre de laquelle les 3 compartiments sont reliés par des équations différentielles dépendant de 2 paramètres:

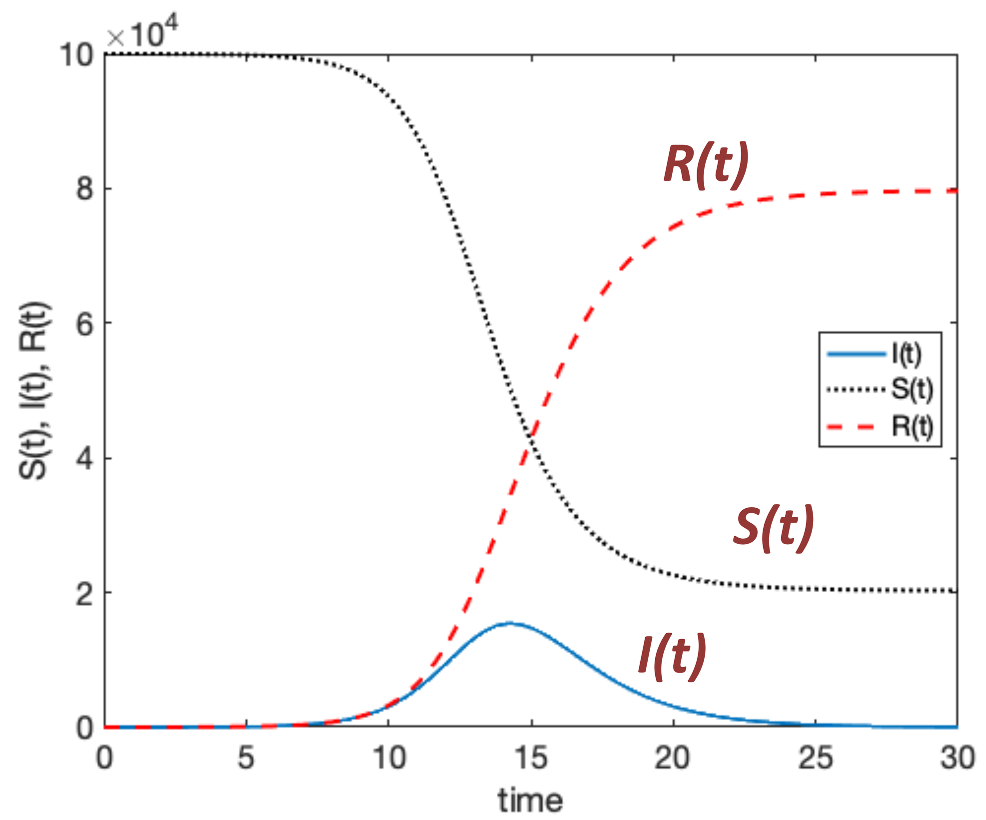
$$S'(t) = -\beta \frac{S(t)I(t)}{N} \qquad \alpha > 0; \quad \beta > 0$$

$$I'(t) = \left(\beta \frac{S(t)}{N} - \alpha\right) I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

$N = R + S + I \gg 1$ est la population constante.

2. Exemple de dynamique



L'exemple de dynamique pour R, S et I.

Le paramètre R_0:

Initialement, la dynamique de $I(t)$ a une croissance exponentielle $I(t) = e^{\gamma t}$ avec:

$$\gamma = \beta - \alpha = \alpha(R_0 - 1)$$

où $R_0 = \beta/\alpha$ est le « nombre de reproduction ». Il faut avoir $R_0 > 1$ et donc $\beta > \alpha$ pour avoir le départ de l'épidémie.

- $S(t)$ décroît toujours;
- $R(t)$ croît toujours;
- $I(t)$ croît, atteint un maximum puis décroît.

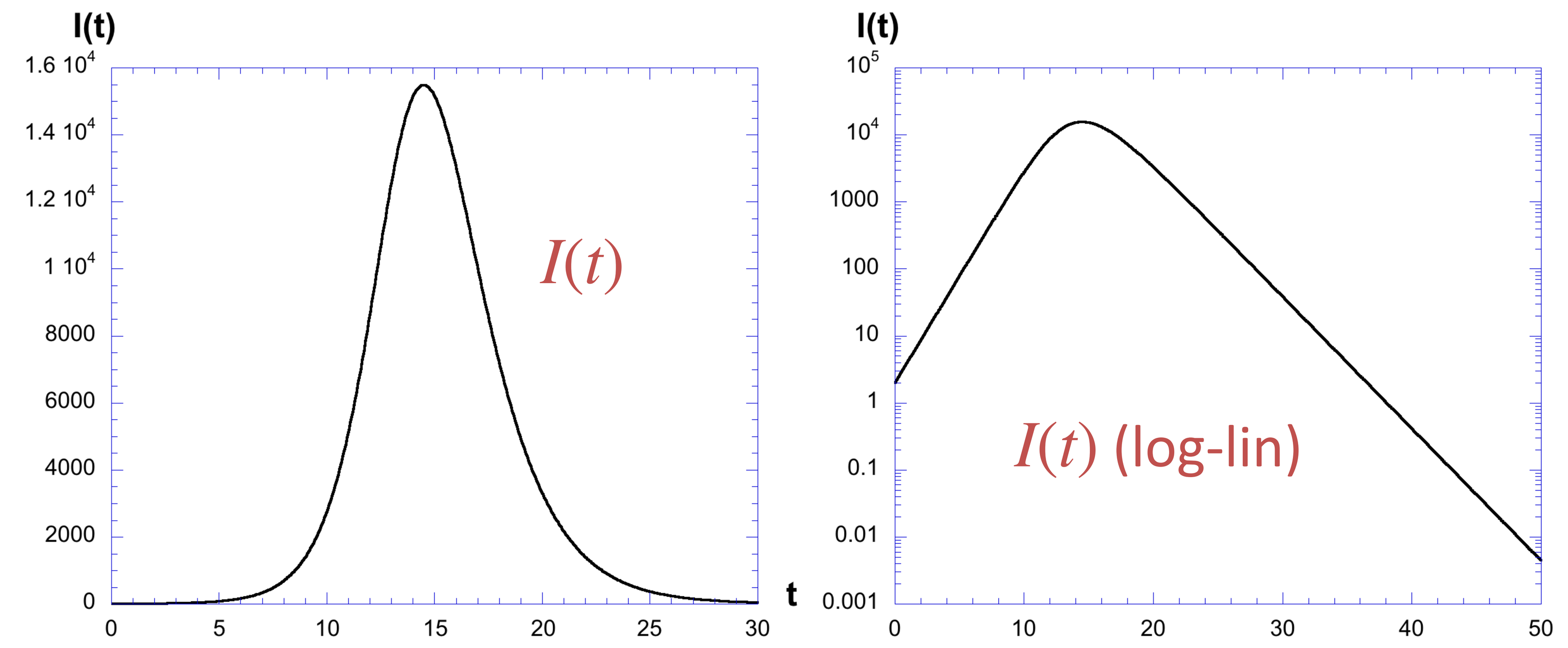
Pour t=0:

- $I(0) = I_0 \ll N$;
- $S(0) = N - I_0 \simeq N$;
- $R(0) = 0$.

Pour $t \to \infty$:

- $I(t) \to 0$
- $S(t) \to S_e > 0$
- $R(t) \to N - S_e$

3. La dynamique des infectés I(t)

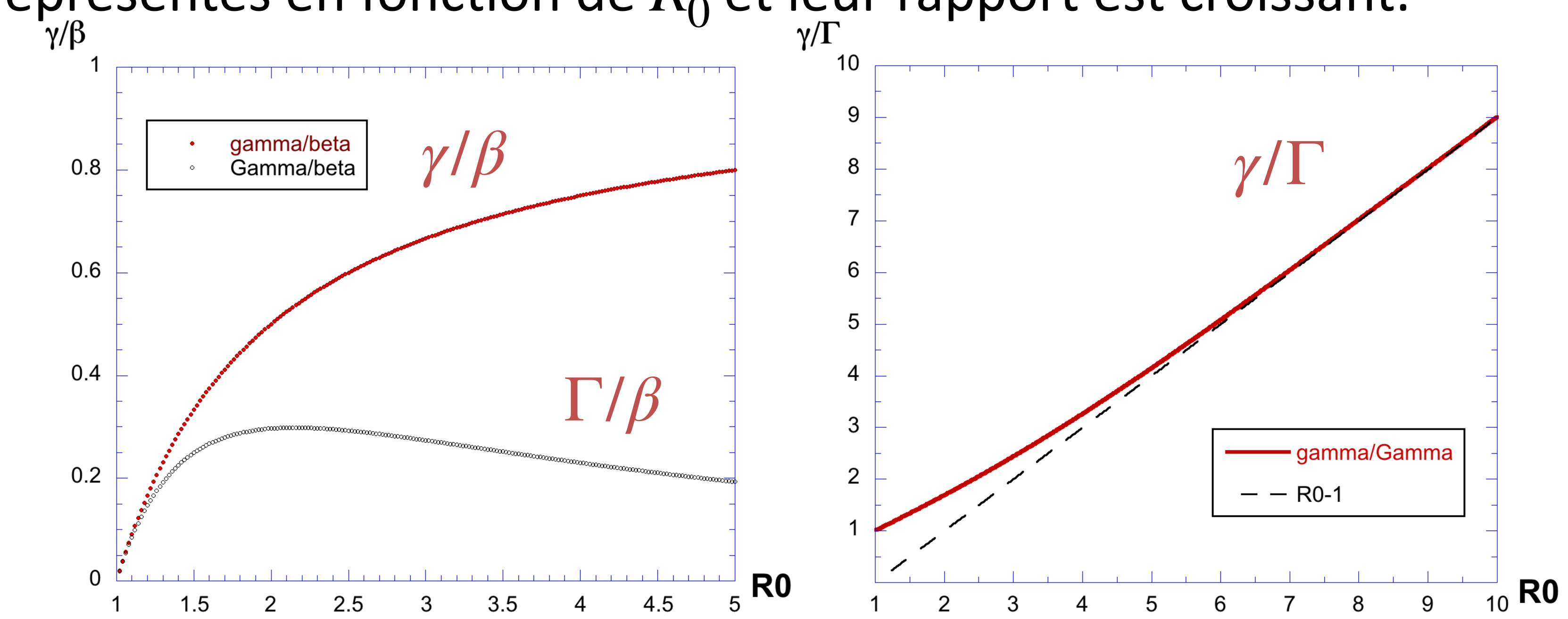


La dynamique de I(t): à gauche en échelle linéaire, à droite, en échelle log-log

$I(t)$ possède une croissance initiale exponentielle, puis atteint un maximum et ensuite décroît exponentiellement. L'exposant de la décroissance $-\Gamma$ s'écrit (Schmitt, 2021):

$$\Gamma = -\beta \frac{S_e}{N} + \alpha$$

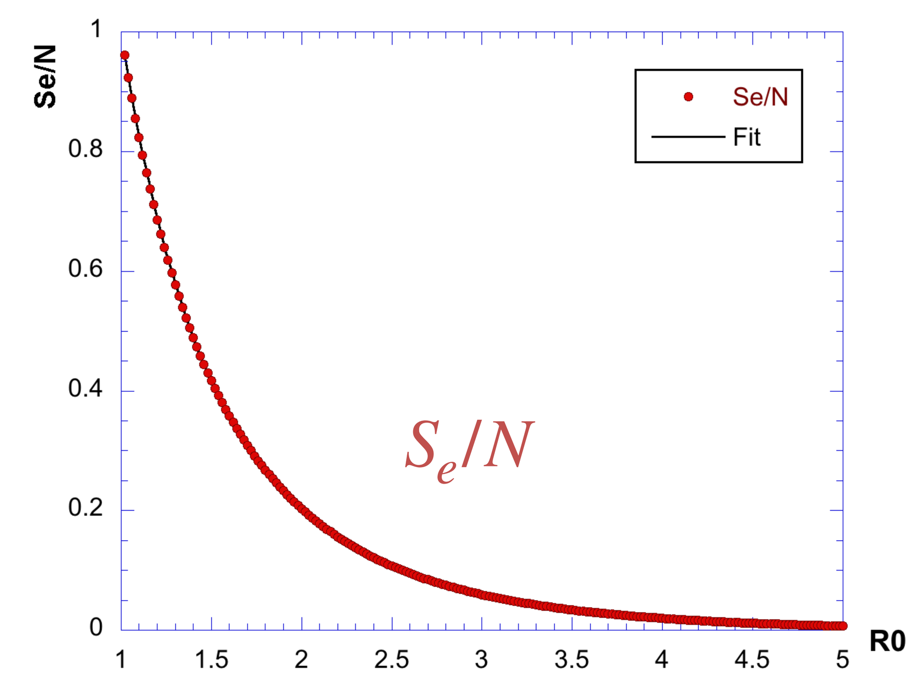
On a toujours $\Gamma < \gamma$ et on peut montrer (Schmitt, 2021) que $\Gamma > 0$. Γ/β est maximum pour $R_0 \simeq 2.15$. Ci-dessous ces exposants sont représentés en fonction de R_0 et leur rapport est croissant.



A gauche: γ/β et Γ/β en fonction de R_0. A droite: le rapport γ/Γ en fonction de R_0. On constate que ce rapport est strictement croissant.

La valeur de S_e/N en fonction de R_0:

La valeur de $z = S_e/N$ peut être déduite, pour un R_0 donné, via une équation implicite qui peut être résolue numériquement: $z = 1 + \log(z)/R_0$



Evolution de S_e/N en fonction de R_0

4. Extraction des paramètres du modèle SIR à partir de la dynamique I(t)

Dans le monde réel l'indicateur le plus directement mesurable est le nombre des infectés I(t). Dans l'hypothèse où le modèle SIR est valide pour la situation considérée, **peut-on estimer les paramètres R_0, β, α et N à partir de la dynamique** $\{I(t);\, t \in [0, T_{\max}]\}$ ($T_{\max}$ est une valeur du temps arbitraire ici)?

Algorithme pour l'estimation des paramètres (Schmitt, 2021):

(1) Estimer les pentes γ et Γ;

(2) A partir du rapport γ/Γ estimer la valeur de R_0;

(3) Estimer le paramètre $\beta = \gamma/(1 - 1/R_0)$;

(4) A partir de la mesure de la valeur de $I_{\max} = \max I(t)$, estimer le nombre total N impliqué dans la dynamique:

$$N = \frac{R_0 I_{\max}}{R_0 - 1 - \log R_0}$$