

Introduction

Dans le cadre de la physique des plasmas, la compréhension de l'émergence de barrières de transport est un enjeu majeur. Il semble maintenant admis que le phénomène d'émergence du mode H de confinement amélioré correspond à l'apparition d'une barrière de transport dite interne (ITB) [2, 5]. Bien qu'observée expérimentalement, il n'existe pas d'explications théoriques claires de l'apparition d'une telle barrière. De plus, aucune simulation numérique auto-cohérente prenant en compte le flux poloidal et toroidal ne l'a mise en évidence.

L'approche que nous adoptons ici découle de principes premiers et s'appuie sur les résultats récents discutés dans [4, 3, 1]. Des solutions d'équilibre complètes des équations classiques de Vlasov-Maxwell dans une géométrie cylindrique sont construites. Dans ce cadre limite de rapport d'aspect singulier, le mouvement d'une particule chargée à deux composantes peut alors être rendu intégrable, alors que cela n'est pas garanti dans une configuration torique. Ainsi, le problème peut être réduit à une équation différentielle ordinaire non linéaire du second ordre qui laisse apparaître une bifurcation vers deux types de profil confinant.

Configuration électromagnétique

Nous considérons le problème d'un Tokamak idéal, sans champ électrique, dans la limite où le tore peut être vu comme un cylindre ($R \gg r_a$). Dans le système de coordonnées usuelles (r, θ, z) de vecteurs unités $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$, nous pouvons exprimer le champ magnétique cylindrique $\mathbf{B}(r)$ comme

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{Plasma} + \mathbf{B}_{Ext}, \quad (1)$$

où $\mathbf{B}_{Ext} = B_0 \mathbf{e}_z$ est le champ externe d'intensité B_0 appliqué, et \mathbf{B}_{Plasma} est le champ de rétroaction du plasma. En tenant compte des symétries, nous prenons donc

$$\mathbf{B} = B_0 [g(r) \mathbf{e}_\theta + (1 + k(r)) \mathbf{e}_z], \quad (2)$$

avec g et k , deux fonctions à déterminer, de manière à avoir $\mathbf{B}_{Plasma} = B_0 (g(r) \mathbf{e}_\theta + k(r) \mathbf{e}_z)$. Nous pouvons alors exprimer un potentiel vecteur associé

$$\mathbf{A} = A_\theta(r) \mathbf{e}_\theta + A_z(r) \mathbf{e}_z, \quad (3)$$

en jauge de Coulomb, qui introduit deux autres fonctions apparentées, $K(r)$ et $G(r)$, telles que :

$$A_\theta(r) = \frac{B_0}{r} \int_0^r u (1 + k(u)) du = \frac{B_0}{r} \left(\frac{r^2}{2} + K(r) \right), \quad (4)$$

et,

$$A_z(r) = -B_0 \int_0^r g(u) du = -B_0 G(r), \quad (5)$$

Nous avons finalement

$$\mathbf{A}(r) = B_0 \left[\left(\frac{r}{2} + \frac{K(r)}{r} \right) \mathbf{e}_\theta - G(r) \mathbf{e}_z \right]. \quad (6)$$

Références

- [1] Benjamin Cambon, Xavier Leoncini, Michel Vittot, Rémi Dumont, and Xavier Garbet. Chaotic motion of charged particles in toroidal magnetic configurations. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 24(3):033101, 2014.
- [2] J.W. Connor, T. Fukuda, X. Garbet, C. Gormezano, V. Mukhovatov, M. Wakatani, the ITB Database Group, the ITPA Topical Group on Transport, and Internal Barrier Physics. A review of internal transport barrier physics for steady-state operation of tokamaks. *Nuclear Fusion*, 44(4):R1-R49, mar 2004.
- [3] Elias Laribi, Shun Ogawa, Guilhem Dif-Pradalier, Alexei Vasiliev, Xavier Garbet, and Xavier Leoncini. Influence of toroidal flow on stationary density of collisionless plasmas. *Fluids*, 4(3), 2019.
- [4] Shun Ogawa, Xavier Leoncini, Alexei Vasiliev, and Xavier Garbet. Tailoring steep density profile with unstable points. *Physics Letters A*, 383(1):35-39, 2019.
- [5] R.C. Wolf. Internal transport barriers in tokamak plasmas*. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 45(1):R1-R91, nov 2002.

Dynamique des particules chargées

Le mouvement d'une particule chargée dans les champs considérés est hamiltonien en terme de variable canonique (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Nous supposons que nous avons une particule ponctuelle classique non relativiste de charge $Q = 1$ et de masse $m = 1$. Le hamiltonien du système s'écrit

$$H = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A}(\mathbf{q}))^2}{2}. \quad (7)$$

Les équations du mouvement associées sont :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} - \mathbf{A} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\nabla \mathbf{A} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{A}) \end{cases}. \quad (8)$$

Compte tenu de la forme spécifique du champ magnétique et des symétries (translation sur z , et rotation sur θ), le mouvement de particules chargées est intégrable et nous pouvons réduire la dynamique à un système hamiltonien effectif unidimensionnel

$$H = \frac{1}{2} \left[p_r^2 + \left(\frac{p_\theta}{r} - B_0 \left(\frac{r}{2} + \frac{K(r)}{r} \right) \right)^2 + (p_z + B_0 G(r))^2 \right], \quad (9)$$

où p_θ et p_z sont des constantes du mouvement, voir par exemple [3].

Approche cinétique et équilibres stationnaires

En considérant la distribution à une particule à l'équilibre $f(r, \theta, z, p_r, p_\theta, p_z)$, les états physiques du plasma, sans champ électrique et sans collisions sont soumis à l'équation de Vlasov. Dans notre cadre non-relativiste, cela correspond à la conservation de f , pour chaque trajectoire, i.e. :

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = 0, \quad (10)$$

où \mathbf{q} et \mathbf{p} satisfont (8). Les sources, densité et courant de charge, sont couplées par les équations de Maxwell et ont pour expression

$$n(\mathbf{q}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d^3p \quad (11)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d^3p \quad (12)$$

En terme de solution stationnaire, l'équation de Vlasov (10) se réécrit

$$\{f, H\} = 0, \quad (13)$$

et donc toute fonction de H est solution du problème. De plus, il convient d'introduire 4 multiplicateurs de Lagrange, β , γ_θ , γ_z et μ , afin d'imposer les contraintes dues à la conservation, respectivement, de l'énergie, des moments selon θ et z , et du nombre de particules. Puis, nous choisissons une solution qui maximise l'entropie

$$S[f] = -k_B \int_{\Gamma} f \ln(f) d\Omega, \quad (14)$$

où k_B est la constante de Boltzmann et $d\Omega$ un volume infinitésimal de l'espace des phases Γ . Les solutions de ce problème variationnel sont données par

$$f = e^{-\beta H - \gamma_z p_z - \gamma_\theta p_\theta - \mu - 1}. \quad (15)$$

Des termes sources aux équations auto-cohérentes

L'équation (11), avec $\mathcal{V} = 4\pi^2 R \int_0^{+\infty} r e^{-ar^2 - bG(r) - cK(r)} dr$, et N , le nombre de particules donne accès à la densité radiale

$$\rho(r) = \frac{N}{\mathcal{V}} e^{-ar^2 - bG(r) - cK(r)}, \quad (16)$$

(12) donne directement

$$\mathbf{j}(r) = - \left(\frac{\gamma_\theta}{\beta} r \mathbf{e}_\theta + \frac{\gamma_z}{\beta} \mathbf{e}_z \right) \rho(r). \quad (17)$$

Il est intéressant de remarquer que $\frac{j_\theta(r)}{r j_z(r)} = \frac{\gamma_\theta}{\gamma_z}$. Les fonctions K et G définissent le potentiel vecteur (6), en jauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), qui lui-même est relié au courant par la loi d'Ampère. Cela permet d'aboutir à des équations de type Poisson

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (18)$$

qui donnent finalement, avec $\kappa_{\theta/z} = \frac{\mu_0 N}{B_0 \beta \mathcal{V}} \gamma_{\theta/z}$, un système d'équations auto-cohérentes plus général

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} K(r) \right) = \kappa_\theta e^{-ar^2 - bG(r) - cK(r)} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} G(r) \right) = \kappa_z e^{-ar^2 - bG(r) - cK(r)} \end{cases}. \quad (19)$$

Après quelques manipulations, nous pouvons réduire (19) à

$$\frac{\partial^2 \tilde{j}_z(\tilde{r})}{\partial \tilde{r}^2} = - \left(\frac{2\alpha_0}{1 + \tilde{r}^2} + \frac{1 + \tilde{r}^2}{\lambda} \tilde{j}_z(\tilde{r}) \right) \tilde{j}_z(\tilde{r}) + \left(\frac{1}{\tilde{j}_z(\tilde{r})} \frac{\partial \tilde{j}_z(\tilde{r})}{\partial \tilde{r}} - \frac{1 - \tilde{r}^2}{\tilde{r}(1 + \tilde{r}^2)} \right) \frac{\partial \tilde{j}_z(\tilde{r})}{\partial \tilde{r}}, \quad (20)$$

avec $\tilde{j}_z(\tilde{r}) = e^{-\tilde{G}(\tilde{r}) - \tilde{K}(\tilde{r})}$, $\tilde{r} = \frac{\gamma_\theta}{\gamma_z} r$, $\lambda = \frac{c\kappa_\theta}{(b\kappa_z)^2}$ et α_0 une constante d'intégration.

Profil standard d'équilibre et bifurcation

A partir de (20), d'un choix de constantes (λ, α_0) et du fait que $\tilde{j}_z(0) = 1$ et $\rho(r) \propto j_z(r) \propto \tilde{j}_z(\tilde{r})$, nous pouvons esquisser des profils de densité (cf. fig. 1). Il apparaît alors que pour certains choix de paramètres, différents profils émergent. En regardant (20), au 1er ordre, pour $\frac{\partial \tilde{j}_z}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=0} = 0$ nous observons un seuil $\frac{\tilde{j}_z(0)}{-2\alpha_0\lambda} = 1$ entre des profils « centrés » et d'autres « excentrés ».

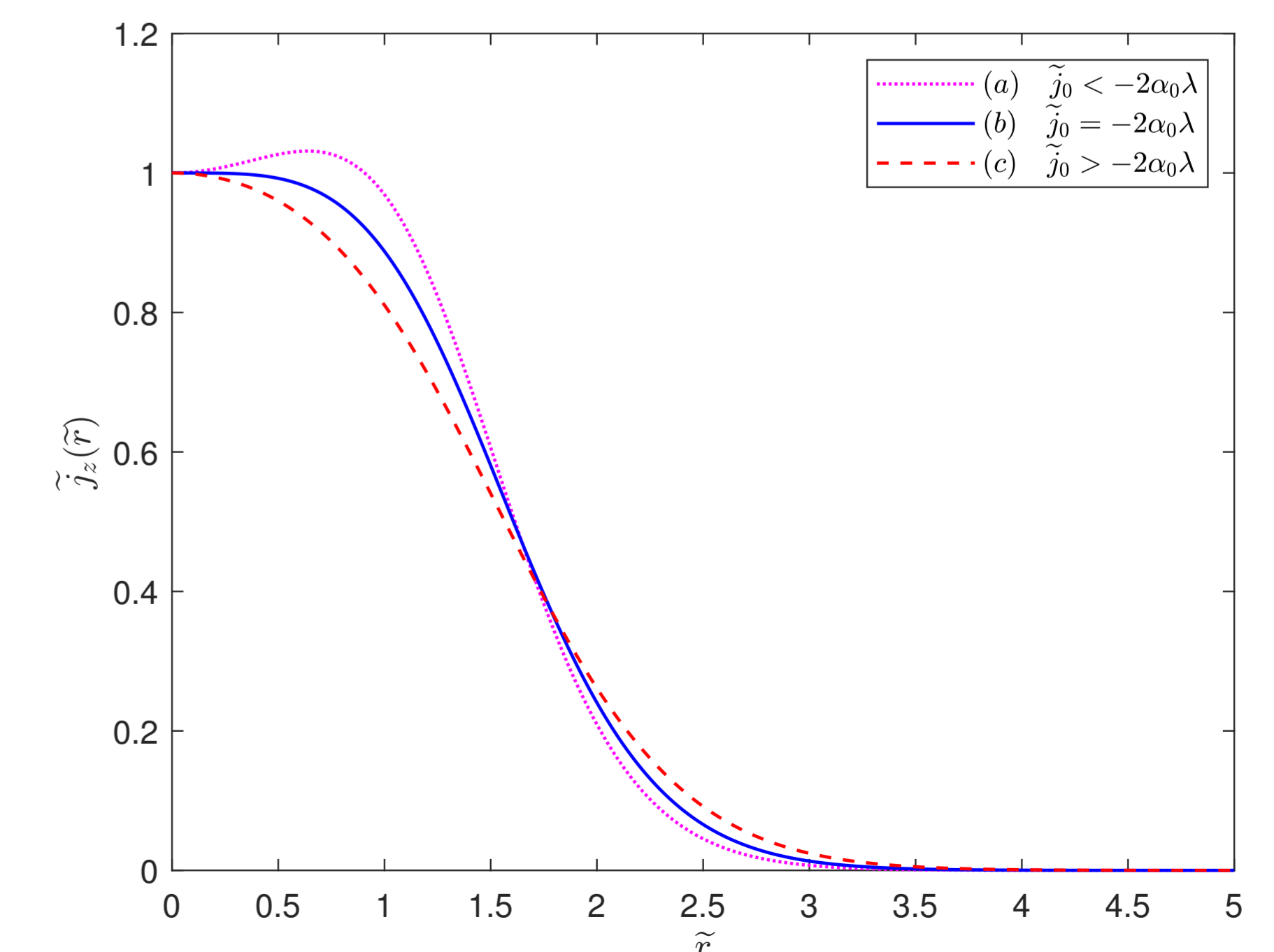


Figure 1. Profils de densité pour $\lambda = 1$. (a) avec $\alpha_0 = -1$, (b) avec $\alpha_0 = -1/2$, (c) avec $\alpha_0 = 1$.