1 Les dérivées objectives comme dérivées covariantes sur la variété des métriques

Kolev[1] & Desmorat[2]

LMT UMR8535, Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, CNRS.
boris.kolev@math.cnrs.fr

La source de cet exposé est un article de Paul Rougée [6] qui met en valeur le rôle primordial joué par la variété des métriques riemanniennes en mécanique des solides déformables et qui se situe dans le cadre plus général de l'utilisation de la géométrie différentielle de dimension infinie en Mécanique des Milieux Continus (*c.f.* [1] pour les fluides).

Rougée nous suggère que c'est la variété des métriques riemanniennes sur le body $\mathrm{Met}(\mathcal{B})$ plutôt que la variété des plongements $\mathrm{Emb}(\mathcal{B},\mathcal{E})$ du body $\mathcal{B}$ dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ qui joue le rôle clef en Mécanique des Milieux Continus. A chaque plongement p correspond, par pull-back, une métrique riemannienne sur $\mathcal{B}$ de courbure nulle $\boldsymbol{\gamma} = p^*\mathbf{q}$, $\mathbf{q}$ désignant la métrique euclidienne définie sur $\mathcal{E}$.

Cette formulation permet d'interpréter les lois de comportement élastiques comme des champs de vecteurs sur la variété des métriques riemanniennes $\mathrm{Met}(\mathcal{B})$. Parmi celles-ci, les lois hyper-élastiques correspondent aux champs de type gradient pour une métrique riemannienne sur $\mathrm{Met}(\mathcal{B})$. Le parallèle avec la relativité générale devient alors évident.

Ce cadre géométrique général nous permet ensuite de formuler le concept d'objectivité (ou indépendance matérielle) de manière mathématiquement plus précise. Les dérivées objectives introduites en hypo-élasticité, comme celles d'Oldroyd [5], de Truesdell [7], de Zaremba-Jaumann [8,3], de Green-Naghdi [2], ...sont alors interprétées comme des dérivées covariantes sur $\mathrm{Met}(\mathcal{B})$.

Références

1. V. I. Arnold. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 16(fasc. 1) :319–361, 1966.
2. A. Green and P. Naghdi. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 18(4) :251–281, 1965.
3. C. Jaumann. Geschlossenes system physikalischer und chemischer differentialgesetze. *Sitzber. Akad. Wiss. Wien (IIa)*, 120 :385–530, 1911.
4. B. Kolev & R. Desmorat. Éléments de géométrie pour la mécanique des milieux continus. prépublication hal-02343934v1, Novembre 2019.
5. J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of state. *Proc. Roy. Soc. London*, A200 :523–541, 1950.
6. P. Rougée. An intrinsic Lagrangian statement of constitutive laws in large strain. *Computers & Structures*, 84(17-18) :1125–1133, June 2006.
7. C. Truesdell. Hypo-elasticity. *J. Rational Mech. Anal.*, 4 :83–133, 1955.
8. S. Zaremba. Sur une forme perfectionnee de la theorie de la relaxation. *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie*, pages 534–614, 1903.