Comportement asymptotique de populations hétérogènes avec interactions

Antonin Della Noce[1], Amélie Mathieu[2] & Paul-Henry Cournède[1]

[1] Laboratoire MICS, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, 9 rue Joliot-Curie, 91190, Gif-sur-Yvette
[2] UMR ÉcoSys, INRA AgroParisTech, Route de la ferme, 78850 Thiverval-Grignon
antonin.della-noce@centralesupelec.fr

Le formalisme de limite de champ moyen a été historiquement appliqué à des systèmes étudiés en physique statistique pour décrire leurs comportements macroscopiques à partir de modèles d'interaction à l'échelle microscopique. Il s'est développé à partir d'équations décrivant des gaz et des fluides. Cette limite peut être interprétée comme une approximation du milieu continu : elle permet le passage d'un système différentiel décrivant la dynamique d'une population finie de particules à une équation de transport non-locale donnant l'évolution de la densité de probabilité représentant le système comme un continuum. Ce formalisme a récemment été généralisé à des populations d'organismes vivants, notamment aux essaims d'oiseaux et aux bancs de poissons [1], ou encore aux réseaux de neurones naturels [2]. Pour des populations d'individus vivants, il peut être pertinent de supposer que les individus ne sont pas identiques, ont des caractéristiques propres. Introduire de la diversité dans la population rompt la symétrie et a des conséquences notables sur la dynamique. Dans des populations dont la taille est bien en deçà de l'Avogadro, il est aussi intéressant d'identifier la taille critique de la population au delà de laquelle les trajectoires microscopiques sont proches de la trajectoire donnée par la limite de champ moyen pour une précision donnée.

Nous nous intéressons donc à une population d'individus décrits par $((X_i, \theta_i))_{1 \leq i \leq N}$ où $X \in \mathcal{X}$ est l'état de l'individu (e.g. sa position, sa vitesse,...) et $\theta \in \Theta$ est un vecteur de paramètres regroupant les caractéristiques propres de l'individu qui sont supposées fixées dans le modèle considéré (e.g. sa masse, sa couleur,...). La limite de champs moyen obtenu en appliquant une méthodologie similaire à [3] a pour flot caractéristique

$$\forall X, \theta \in \mathcal{X} \times \Theta, \ \begin{cases} \mathbf{X}(0, X, \theta) = X \\ \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t, X, \theta) = \displaystyle\int_{\mathcal{X} \times \Theta} g\left(\mathbf{X}(t, X, \theta), \theta, \mathbf{X}(t, X', \theta'), \theta'\right) \mu_0(\mathrm{d}X', \mathrm{d}\theta') \end{cases}$$

Dans l'équation ci-dessus, g est une fonction d'interaction et μ_0 est une mesure de probabilité représentant la configuration initiale de la population. Le flot caractéristique $t \mapsto \mathbf{X}(t, X, \theta)$ représente la trajectoire d'une particule intéragissant avec un continuum d'autres individus, eux-mêmes mus par une dynamique identique. Nous proposons un schéma numérique pour approcher $t \mapsto \mathbf{X}(t, X, \theta)$ sur l'ensemble $\mathcal{X} \times \Theta$. Le schéma n'utilise qu'une discrétisation en temps, car discrétiser l'espace $\mathcal{X} \times \Theta$ est prohibitif numériquement même pour des modèles simples. À chaque pas de temps de la discrétisation, $(X, \theta) \mapsto \mathbf{X}(t, X, \theta)$ est approchée en utilisant une régression par processus gaussiens, dont le noyau de corrélation k_t est calculée à partir de la fonction de transition g. La simulation du flot caractéristique permet entre autre de valider l'hypothèse de l'approximation de champ moyen et ouvre des perspectives pour l'inférence statistique sur de grandes populations avec interactions, notament l'inférence par méthode bayésienne variationnelle.

Références

1. Degond P., Frouvelle A. et Merino-Aceituno S. A new flocking model through body attitude coordination *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*(2017)
2. Perthame, B., Salort, D., et Wainrib, G. Distributed synaptic weights in a LIF neural network and learning rules. *Physica D : Nonlinear Phenomena* (2017)
3. Golse, F. On the Dynamics of Large Particle Systems in the Mean Field Limit (2013)