Turbulence lagrangienne, irréversibilité et flots généralisés

Jérémie Bec[1] & Simon Thalabard[2]

[1] MINES ParisTech, PSL Research University, CNRS, CEMEF, Sophia-Antipolis, France
[2] Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 22460-320 Rio de Janeiro, Brazil
jeremie.bec@mines-paristech.fr

De nombreuses applications, allant de l'optimisation des moteurs à la circulation atmosphérique, nécessitent de disposer de modèles de turbulence précis et efficaces. Les écoulements développent un état turbulent, instable et chaotique, lorsque la quantité d'énergie cinétique injectée dépasse la dissipation visqueuse. Cet excès, mesuré par le nombre de Reynolds, résulte en un processus de cascade où une large gamme d'échelles fortement liées sont excitées. La perte d'énergie est alors assurée par des structures violentes à petite échelle, conduisant à la persistance d'une dissipation visqueuse finie dans la limite des nombres de Reynolds infinis. Cette *anomalie dissipative* repose sur la nature fortement singulière et irréversible des écoulements turbulents et constitue la principale source de difficultés pour la modélisation.

Une idée sous-jacente à la plupart des modèles est de décrire les grandes échelles de l'écoulement par les équations d'Euler inviscides. La notion de solution doit alors être affaiblie pour obtenir des champs de vitesse turbulents. Comme conjecturé par Onsager [1], et récemment démontré [2], une dissipation finie nécessite que la vitesse ait un exposant de Hölder inférieur à 1/3. La construction de telles solutions faibles montre toutefois certaines limites. D'une part, elles ne sont pas uniques [3], suggérant que la contrainte d'une énergie décroissante ne soit pas forcément suffisante pour assurer leur pertinence physique. D'autre part, la régularisation de ces solutions singulières peut dans certains cas conduire à des solutions probabilistes [4], propriété connue sous le nom de *stochasticité spontanée.* Tout cela laisse à penser que la construction de solutions turbulentes des équations d'Euler exige une notion encore plus faible de solutions, comme par exemple les solutions-mesures de DiPerna et Majda [5] où la vitesse n'est pas définie de manière unique, mais plutôt prescrite par une distribution de probabilité locale, à savoir une mesure de Young.

Une conséquence importante d'une vitesse probabiliste est que les trajectoires d'éléments fluides deviennent elles-mêmes probabilistes et que le concept de flot lagrangien s'effondre. La formulation des solutions des équations d'Euler doit alors faire appel au principe lagrangien généralisé de moindre action formulé par Brenier [6], dont nous discutons ici de la pertinence dans un contexte turbulent.

Références

1. Onsager, L. "Statistical hydrodynamics." *Nuovo Cimento* **6**, 279—287 (1949).
2. Isett, P. "A proof of Onsager's conjecture." *Ann. Math.* **188**, 871-–963 (2018).
3. Daneri, S., & Székelyhidi, L. "Non-uniqueness and h-principle for Hölder-continuous weak solutions of the Euler equations." *Arch. Ration. Mech. Anal.* **224**, 471–514 (2017).
4. Biferale, L. Boffetta, G., Mailybaev A. & Scagliarini, A. "Rayleigh-Taylor turbulence with singular non-uniform initial conditions." *Phys. Rev. Fluids* **3**, 092601 (2018).
5. DiPerna, R. & Majda, A. J. "Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations." *Commun. Math. Phys.* **108**, 667-–689 (1987).
6. Brenier, Y. "The least action principle and the related concept of generalized flows for incompressible perfect fluids." *J. Am. Math. Soc.* **2**, 225-–255 (1989).