Équilibre de Nash : un fluide inaltérable de complexité maximale

Nicolas Rivier1[1]

Institut de Physique et Chimie des Matériaux de Strasbourg (IPCMS), et Université de Strasbourg, 3, rue de l'Université, F-67084 Strasbourg.
rivier@ipcms.unistra.fr

Optimum aux frontières, plutôt qu'au sommet de la montagne ou au fond de la cuvette.

L'empilement le plus dense de grains (sphères dures avec friction tangentielle infinie qui les force à rouler sans glisser les unes sur les autres, ou à perdre contact) est un problème d'optimisation à plusieurs composantes, dont les solutions se trouvent sur la frontière de l'espace des configurations : cette frontière (optimum de Pareto) est constituée de chemins différentiables (un grain roulant sur un autre) entre des points où les grains sont bloqués. Ce problème a une solution exacte en dimensions infinies [1] : un état fluide d'où il n'est pas possible de sortir par une transition de phase, solidification ou évaporation.

C'est un fluide et non un gaz car, plongée dans un espace de dimensions suffisamment élevées, chaque sphère est en contact avec toutes les autres. Le fluide est simple car chaque sphère ne peut rouler que sur une autre à tout instant. L'état du système est donc un *simplex*, en statique comme en dynamique. Par exemple, un tétraèdre de quatre grains se meut dans l'espace à trois dimensions comme un Pacman à deux bouches orthogonales et indépendantes. Il s'agit de l'équilibre de Nash, introduit en théorie des jeux et utilisé en économie, qui est donc en physique statistique un état spécifique et inaltérable de la matière granulaire dure et sèche en dimensions élevées. Comment évoluer dans un tel équilibre, sans l'aide de transitions de phases (renormalisation dans l'espace - opalescence critique - et dans le temps - ralentissement critique) ? On peut l'étudier en théorie des jeux expérimentale.

On calcule la complexité d'un jeu miniature à somme nulle, représenté par une matrice de gains (payoff) $\mathbf{M}$, dont les éléments sont $+1$ ou -1 (gain ou perte normalisés). La matrice $\mathbf{M}$ est une généralisation (O'Neill) de la matrice d'adjacence $\mathbf{A}$ d'un graphe complet (le $(n-1)$-simplex où tous les n sommets sont reliés entre eux par $n(n-1)/2$ arêtes) dont les éléments valent tous 1, sauf les éléments diagonaux notés 0. Les deux matrices ont des spectres caractéristiques similaires. Le graphe complet a une complexité n^{n-2}, maximale parmi tous les graphes de n sommets. On montre que la complexité du jeu de O'Neill $\mathbf{M}$ est légèrement, mais strictement supérieure à celle de $\mathbf{A}$. Ce résultat étonnant est assuré par la stratégie mixte *maximin* qui conduit (par construction) à un équilibre de Nash. La situation des deux joueurs n'est pas exactement symétrique puisqu'Alice perd, en moyenne (minimalement, grâce au maximin) ce que Bill gagne. Le jeu est donc minimalement inéquitable.

Références

1. D. Wyler, N. Rivier, H.L. Frisch, Hard-sphere fluids in infinite dimensions, Phys. Rev. A **36** (1987) 2422