Les ondelettes MinPlus et l'analyse multirésolution non linéaire

Michel Gondran[1], Alexandre Gondran[2], Abdel Kenoufi[3] & Thierry Lehner[4]

[1] University Paris Dauphine, Lamsade, 75 016 Paris, France
[2] École Nationale de l'Aviation Civile, 31000 Toulouse, France
[3] Scientific COnsulting for Research & Engineering (SCORE), Strasbourg, France
[4] Observatory of Paris-Meudon (LUTH), Meudon, France
michel.gondran@polytechnique.org

En introduction, nous présentons une nouvelle branche des mathématiques, **l'analyse Minplus**, que nous avons développée [1,2] à partir de 1996 à la suite de Maslov [3]. Cette analyse, qui permet d'étudier certains problèmes non linéaires par une approche linéaire, est construite en remplaçant le produit scalaire classique $(f,g) = \int_X f(x)g(x)dx$ par **le produit scalaire Minplus** :

$$(f,g)_{min+} = \inf_{x\in X} \{f(x) + g(x)\} .$$

Avec ce nouveau produit scalaire, on obtient une théorie des distributions non linéaire ; elle est linéaire continue par rapport au dioïde Minplus $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ et "non linéaire " continu par rapport au corps des réels $(\mathbb{R}, +, \times)$. Ainsi, l'analogue de la distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x})$ est la distribution non linéaire $\delta_{\min,+}(\mathbf{x})$ définie par $\delta_{\min}(\mathbf{x}) = \{0 \ si \ \mathbf{x} = \mathbf{0}, +\infty \ sinon\}$. Dans cette analyse Minplus, la transformée de Legendre-Fenchel qui permet de passer du Lagrangien à l'Hamiltonien et qui joue un si grand rôle en physique, est l'analogue de la transformée de Fourier. Il est alors possible d'étudier l'analogue de ce que donnent toute l'analyse hilbertienne, les transformées de Fourier, l'analyse spectrale, les transformées en ondelettes.

C'est ce dernier aspect que nous developpons particulièrement en introduisant **les ondelettes Minplus** qui, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, associe des familles d'enveloppes inférieures et d'enveloppes supérieures, construites à partir de l'analyse Minplus [1,2].

On montre, au niveau théorique et sur des exemples, comment ces ondelettes Minplus ouvrent une branche non linéaire à l'analyse multirésolution des signaux avec en particulier un nouveau calcul des exposants de Hölder permettant d'améliorer fortement les études de **la fractalité** [4] et de **la multifractalité** [5].

Références

1. M. Gondran, "Analyse MinPlus" C. R. Acad. Sci. Paris **323**, 371-375 (1996).
2. M. Gondran et M. Minoux, *Graphes, dioïdes et semi-anneaux*, Lavoisier (2004) ; *Graphs, Dioïds and Semi-rings : New models and Algorithms*, Springer, Operations Research/Computer Science Interfaces (2008).
3. V.P. Maslov, *Analyse Idempotente*, édition Mir (1989).
4. M. Gondran et A. Kenoufi, "Numerical calculations of Hölder exponents for the Weierstrass functions with (min,+)-wavelets", Trends in Applied and Computational Mathematics **15**, n°3 (2014), 261-273.
5. M. Gondran, A. Kenoufi and T. Lehner, "Multi-fractal Analysis for Riemann Serie and Mandelbrot Binomial Measure with (min,+)-wavelets", Trends in Applied and Computational Mathematics **17**, n.2 (2016), 247-263.