

Éric FALCON
Marc LEFRANC
François PÉTRÉLIS
Chi-Tuong PHAM

Comptes-rendus de la 20^e

Rencontre du Non Linéaire

Paris 2017

Université Paris Diderot
Amphithéâtre Buffon

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/>

É. FALCON, M. LEFRANC
F. PÉTRÉLIS, C.-T. PHAM
ÉDITEURS

Comptes-Rendus de la 20^e
Rencontre du Non-Linéaire
Paris 2017

Université Paris Diderot
Non-Linéaire Publications

20^e RENCONTRE DU NON-LINÉAIRE
 Université Paris Diderot, PARIS
 21–23 Mars 2017

Nous remercions vivement pour leur soutien matériel et financier l'université Paris Diderot, le CNRS, l'Université Côte d'Azur, l'Institut des Systèmes Complexes, l'INPHYNI, les laboratoires MSC, PMMH, l'Institut Langevin, le laboratoire de Physique de l'ENS Lyon ainsi que le GDR Phenix.

Le comité scientifique est composé de :

Stéphane BARLAND INLN — Nice
 José BICO PMMH — ESPCI
 Éric FALCON MSC — Paris Diderot
 David GÉRARD-VARET IMJ — Paris Diderot
 Mariana HARAGUS LMB — Univ. Franche-Comté
 Xiaoping JIA Inst. Langevin – ESPCI
 Kirone MALLICK IPhT — CEA Saclay
 Philippe MARMOTTANT LIPhy — UJF Grenoble
 François PÉTRÉLIS LPS — ENS
 Chi-Tuong PHAM LIMSI — Paris-Sud
 Valérie VIDAL Lab. de Physique — ENSL

Les Rencontres du Non-Linéaire sont organisées par :

Éric FALCON MSC — Paris Diderot
 Marc LEFRANC PhLAM — Lille
 François PÉTRÉLIS LPS — ENS
 Chi-Tuong PHAM LIMSI — Paris-Sud

Le mini-colloque « *Interactions non linéaires entre ondes* » est organisé par :

Michael BERHANU MSC — Paris Diderot
 Éric FALCON MSC — Paris Diderot

Ces Comptes-Rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

Non-Linéaire Publications, Avenue de l'université, BP 12
 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Toutes les informations concernant les Rencontres sont publiées sur le serveur :

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/>

Renseignements :

rnl@univ-lille1.fr

Table des matières

Rupture d'un milieu granulaire : bifurcation et localisation <i>Thai Binh Nguyen, Azelle Amon</i>	1
Ondes de surface produites par un jet turbulent immergé <i>Annette Cazaubiel, Éric Falcon, Michael Berhanu</i>	7
The Riemann problem for nonlinear polarization waves in two-component Bose–Einstein condensates <i>Thibault Congy, Sergey K. Ivanov, Anatoly M. Kamchatnov, Nicolas Pavloff</i>	13
Cavitation wave propagation: A numerical model <i>Ali El Amri, Yann Bouret, Xavier Noblin, Médéric Argentina</i>	19
Une fibre auxiliaire souple pour l'enroulement élasto-capillaire d'une fibre fonctionnelle dure <i>Paul Grandgeorge, Sébastien Neukirch, Arnaud Antkowiak</i>	25
Optical feedback dynamics of a mid-infrared semiconductor quantum cascade laser <i>Louise Jumpertz, Kevin Schires, Olivier Spitz, Marc Sciamanna, Frédéric Grillot</i>	31
Motifs d'érosion dans le sillage d'un cylindre <i>Florent Lachaussée, Yann Bertho, Cyprien Morize, Alban Sauret, Philippe Gondret</i>	37
Observation de la cascade de Kolmogorov <i>Martine Le Berre, Christophe Josserand, Thierry Lehner, Yves Pomeau</i>	43
Turbulence d'ondes inertielles générée par instabilité elliptique <i>Thomas Le Reun, Benjamin Favier, Adrian J. Barker, Michael Le Bars</i>	49
Anomalous Mullins effect in crosslinked actin networks under cyclic protocol <i>Horacio López-Menéndez, José Felix Rodríguez</i>	55
Supratransmission dans une ligne électrique de Klein–Gordon <i>Saverio Morfu, Bertrand Bodo, Patrick Marquié, Mathieu Rossé</i>	61
Équilibre de Nash : un fluide inaltérable de complexité maximale <i>Nicolas Rivier</i>	67
Relaminarisations rares dans un modèle de turbulence de paroi transitionnelle : au-delà des expériences et simulations numériques directes <i>Joran Rolland</i>	73
Impact du mécanisme chaotique sur l'optimisation d'un modèle de mobilité pour un essaim de drones devant réaliser une couverture de zone <i>Martin Rosalie, Grégoire Danoy, Serge Chaumette, Pascal Bouvry</i>	79

Une vue nouvelle sur la dissipation dans les écoulements turbulents <i>Gilbert Zalczer</i>	85
Extraction du solvant d'un hydrogel par des gouttes de bactéries <i>B. subtilis</i> <i>Marc Hennes, Julien Tailleur, Gaëlle Charron, Adrian Daerr</i>	89
Index des auteurs	97
Annexes	99

Rupture d'un milieu granulaire : bifurcation et localisation

Thai Binh Nguyen & Axelle Amon

Université Rennes 1, Institut de Physique de Rennes (UMR URI-CNRS 6251), 35042 Rennes
axelle.amon@univ-rennes1.fr

Résumé. Nous présentons des résultats expérimentaux concernant l'étude de la bifurcation à l'origine de la localisation de la déformation et de la formation de bandes de cisaillement dans un milieu granulaire. Nos analyses permettent de séparer cette bifurcation, qui correspond à une brisure de symétrie dans la distribution du champ de déformation, de l'établissement des bandes stationnaires qui se produit plus tard durant la charge.

Abstract. We report an experimental study of localization of the deformation and shear band formation in a granular material. We evidence the occurrence of a symmetry breaking in the distribution of the strain field which coins the bifurcation at the origin of the process of localization. Localization is a progressive process during which the strain field distribution evolves from a diffuse field towards a focus narrow zone until stationary shear bands of constant width are observed.

1 Introduction

Lorsqu'un milieu granulaire est soumis à une contrainte cisailante suffisamment importante, on assiste à une localisation de la déformation et à la formation de bandes de cisaillement [1]. Au lieu d'être répartie de manière homogène, la déformation se localise dans une zone d'une faible épaisseur tandis que le reste du matériau est peu déformé. Une représentation schématique de ce processus est présentée sur la figure 1 (a). La configuration de chargement est celle d'un test biaxial : un matériau sous une pression de confinement σ_{xx} est soumis à une contrainte uniaxiale σ_{yy} . Dans cette configuration la contrainte cisailante est donnée par la partie déviatorique du tenseur des contraintes : $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$. Dans une description élasto-plastique, la réponse du matériau est alors élastique jusqu'à un certain seuil à partir duquel le matériau rompt.

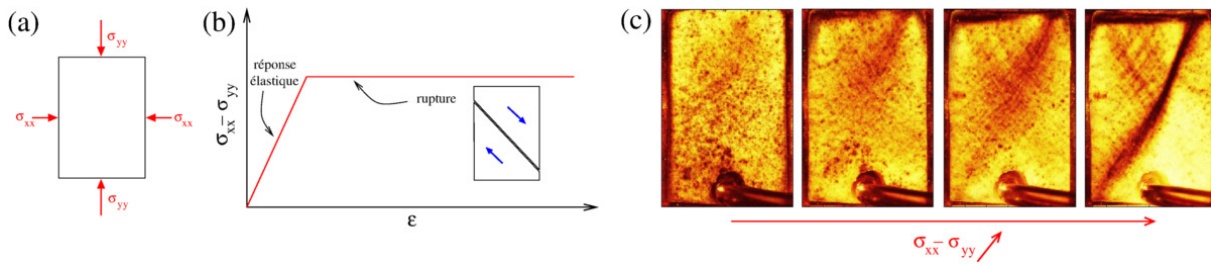


FIGURE 1. (a) Principe d'un test biaxial, σ_{xx} et σ_{yy} sont les contraintes principales. (b) Courbe de charge de la contrainte déviatorique $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ en fonction de la déformation axiale ϵ pour un solide élasto-plastique idéal : la réponse du matériau est élastique jusqu'à un seuil de rupture. (c) Exemples de cartes de déformation obtenues expérimentalement. Ces cartes correspondent à la répartition spatiale de la déformation pendant des incréments de déformation $\delta\epsilon = 3 \times 10^{-5}$. Les couleurs représentent le niveau de déformation locale : jaune, $\epsilon_{loc} \simeq 10^{-5}$, noir $\epsilon_{loc} \gtrsim 10^{-3}$.

D'un point de vue théorique, ce phénomène est décrit comme une bifurcation entre une solution homogène et une solution présentant une discontinuité du champ de déformation [2]. Du point de vue

expérimental, les progrès récents des méthodes de mesure permettant de résoudre spatialement la répartition de la déformation dans le matériau ont conduit à un regain d'intérêt pour ce phénomène encore largement incompris [3].

Nous présentons ici un travail expérimental permettant une étude quantitative du processus de localisation au sein du matériau. À l'aide d'une technique de mesure originale de la déformation et de méthodes avancées d'analyse d'image, nous proposons une caractérisation objective du degré de localisation dans le matériau. Cette étude nous permet de mettre en évidence différents processus. En premier lieu, nous identifions la bifurcation marquant le début du processus de localisation. Cette bifurcation correspond à une brisure de symétrie de la distribution spatiale de la déformation. Une fois que cette bifurcation a eu lieu, on observe une évolution de l'étendue spatiale de cette distribution qui passe d'une distribution diffuse et étendue sur toute la zone d'étude à une déformation très localisée dans une zone étroite d'une épaisseur de quelques dizaines de taille de grains. La distribution atteint finalement une largeur stationnaire correspondant à la bande de cisaillement finale.

2 Dispositif expérimental

Une description détaillée du dispositif expérimental peut être trouvée dans la référence [4]. Il s'agit d'un test biaxial tel que représenté schématiquement sur les figures 1 (a) et 2 (b). Le matériau granulaire est constitué de billes de verre (diamètre $d = 70\text{--}110\ \mu\text{m}$, fraction volumique $\approx 0,60$). L'échantillon de taille $85 \times 55 \times 25\ \text{mm}^3$ est soumis latéralement à une pression de confinement $\sigma_{xx} = 30\ \text{kPa}$. Une déformation uniaxiale et quasi-statique ϵ est exercée sur l'échantillon. La contrainte le long de l'axe de chargement σ_{yy} est mesurée tout au long de la charge de la charge. Une méthode interférométrique de mesure de la déformation locale basée sur la diffusion multiple de la lumière est utilisée pour obtenir des cartes de déformation de l'échantillon telles que celles présentées sur la figure 1 (c). Cette méthode permet d'avoir accès à des déplacements relatifs locaux de l'ordre de 10^{-5} avec une résolution spatiale de l'ordre de quelques tailles de grains [5]. Des photographies du dispositif expérimental est présentée sur la figure 2 (a).

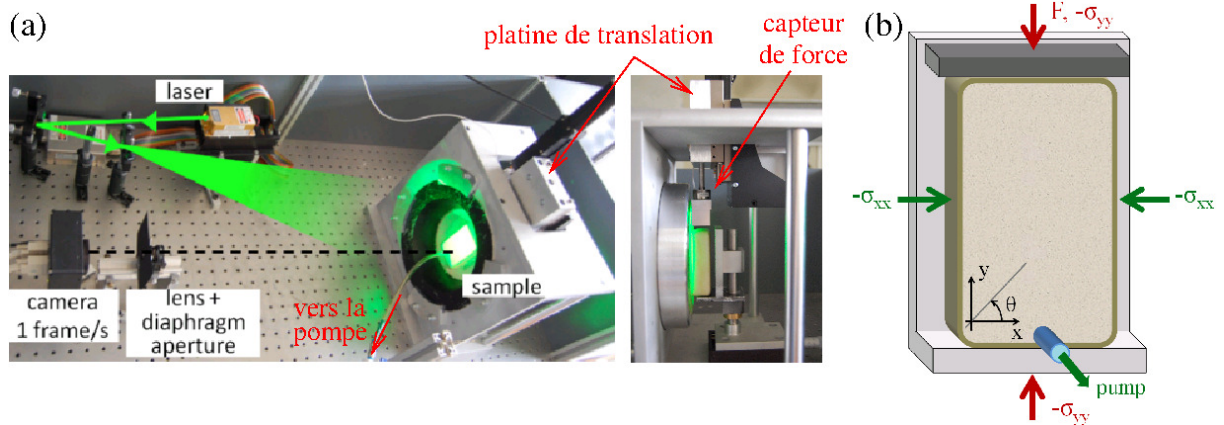


FIGURE 2. (a) Photographies du dispositif expérimental. (b) Principe du test biaxial.

Le comportement observé sur les cartes de déformation au cours de la charge peut être séparé en deux phases : durant la plus grande partie de la charge, la déformation est très hétérogène dans le temps et l'espace (voir figure 1 (c)). Une micro-structure intermittente est observée qui possède une orientation caractéristique différente de l'angle de la bande de cisaillement finale [6]. Ce comportement correspond à des cascades d'événements plastiques qui ont été étudiés et interprétés dans la référence [6]. Ces hétérogénéités de la déformation s'observent dès le début du test. Leur répartition spatiale moyenne

évolue lentement au cours de la charge. Au début, ces micro-structures s'observent sur toute la surface de l'échantillon mais au fur et à mesure, on observe que leur probabilité d'apparition se concentre sur une zone de plus en plus étroite. À partir d'un certain stade ($\epsilon \gtrsim 6,5\%$), une réponse quasi-stationnaire peut être identifiée correspondant à la bande de cisaillement finale [4, 7]. Cet angle final correspond à celui prévu par le critère de rupture de Mohr–Coulomb [8] (voir Figure 3(a)).

L'évolution du champ de déformation depuis une répartition spatialement étendue hétérogène et intermittente jusqu'à sa concentration en une bande stationnaire est complexe et encore inconnue. Nous nous intéressons ici plus particulièrement à l'évolution de la valeur moyenne de ce champ et à la caractérisation de la distribution de la déformation moyenne dans le matériau.

3 Méthode d'analyse d'image

Nous avons développé différents outils d'analyse d'image permettant de quantifier l'orientation et le degré de localisation de la répartition spatiale de la déformation [7, 9].

En premier lieu, nous sélectionnons une région d'analyse de manière à exclure les effets de bord. Ensuite, nous moyennons les images sur des intervalles de déformation $\Delta\epsilon = 10^{-3}$ de manière à obtenir le champ de déformation moyen. Les niveaux de gris des images sont encodés de manière à ce que les pixels de valeurs élevées correspondent à de fortes déformations et les valeurs proches de 0 à une absence de déformation.

Nous avons utilisé deux types d'outils d'analyse. En premier lieu nous avons considéré l'intensité de chaque pixel comme un poids et pour chaque image nous avons calculé le barycentre des niveaux de gris de l'image (voir figure 3). Nous avons alors calculé la matrice d'inertie quantifiant la répartition spatiale des niveaux de gris autour de ce point [9]. Les valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) de cette matrice permettent de quantifier le degré d'anisotropie dans l'image. Plus précisément, dans la suite, nous utilisons pour quantifier l'anisotropie la quantité $1 - \lambda_2/\lambda_1$ qui vaut 0 lorsque l'image est parfaitement isotrope et qui est d'autant plus proche de 1 que l'anisotropie est grande.

Le deuxième outil que nous utilisons est similaire à la transformée de Hough. Nous projetons l'image sur une droite de manière à obtenir un profil d'intensité pour une orientation de droite β donnée. Les figures 3(d) et 3(e) montrent les profils obtenus pour la même image mais pour deux orientations β différentes (voir figures 3(b) et 3(c)). Il est possible de déterminer l'orientation optimale de la droite utilisée pour la projection qui permet d'obtenir un profil avec un maximum d'intensité.

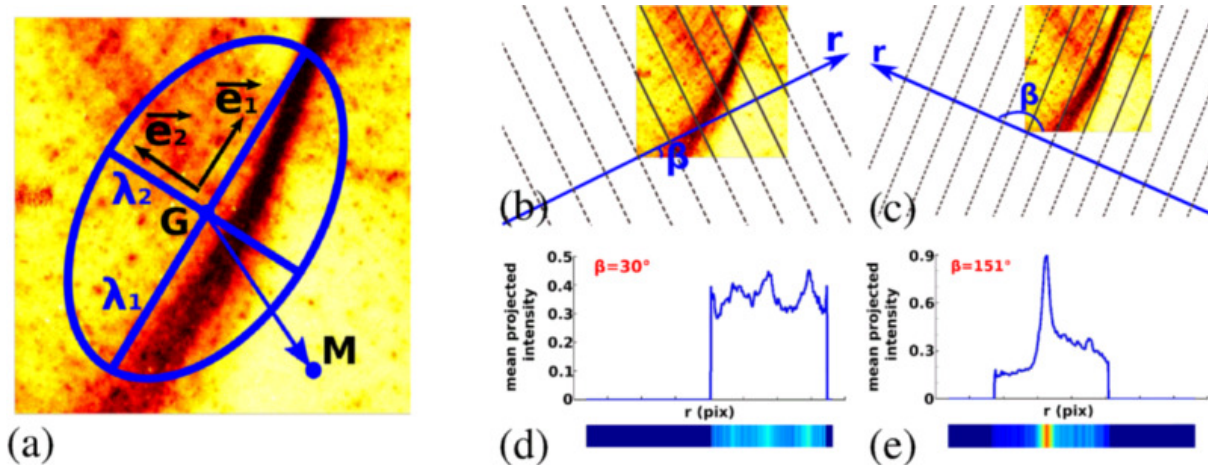


FIGURE 3. Outils d'analyse d'image. (a) Tenseur d'inertie de la distribution des niveaux de gris autour du barycentre G , λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 de la matrice d'inertie [9]. (b) et (c) Exemples de projection de l'image sur des droites d'orientations β différentes. (d) et (e) Profils obtenus pour chaque angle. Le cas (e) correspond à l'angle de projection optimal.

L'orientation optimale de la droite nous permet de déduire la direction moyenne de la distribution des valeurs des pixels et donc de la déformation. D'autre part, à partir de la largeur à mi-hauteur des profils obtenus, une extension spatiale de cette distribution peut être déduite.

4 Résultats

La figure 4 regroupe l'ensemble des résultats issus de nos analyses pour trois expériences différentes conduites dans les mêmes conditions. L'analyse détaillée de ces résultats a été publiée dans [7].

La figure 4(a) présente les courbes de charge obtenues pour chaque expérience, *i. e.* la contrainte déviatorique mesurée $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ en fonction de la déformation axiale imposée ϵ . Chacune de ces courbes présente un maximum local ou un méplat à partir duquel un angle de rupture peut être déduit en utilisant le critère de Mohr-Coulomb [8]. Les trois inserts donnent les cartes de déformation obtenues à la fin de la charge pour chaque expérience. On constate que les angles mesurés directement sur les cartes correspondent bien en effet aux angles obtenus à partir des courbes en tenant compte de la symétrie par rapport à l'axe de chargement.

Pour chaque expérience nous avons calculé pour les images obtenues tout au long de la charge le degré d'anisotropie de la distribution spatiale de la déformation (voir partie précédente). Les valeurs obtenues pour chacune des trois expériences sont présentées sur la figure 4(b). Nous observons que le niveau d'anisotropie reste faible pendant toute la première moitié de la charge. À partir d'une déformation axiale de $\epsilon \approx 4,5\%$ l'anisotropie croît jusqu'à atteindre un maximum pour $\epsilon \approx 6,5\%$. La reproductibilité d'une expérience à l'autre est très bonne.

La mesure de l'angle d'inclinaison principal du champ de déformation pendant la charge pour chaque expérience est présentée sur la figure 4(c). Pour $\epsilon < 4,5\%$ les angles mesurés sont extrêmement fluctuants et l'incertitude sur leur mesure est importante. Cela est en concordance avec notre mesure de l'anisotropie : comme la répartition des niveaux de gris sur les images est globalement isotrope, les angles mesurés correspondent à de petites fluctuations autour de la moyenne. Cela confirme que dans toute la première moitié de la charge le champ de déformation est globalement isotrope. À la valeur critique de la déformation $\epsilon_c \approx 4,5\%$, pour chacune des trois expériences, on observe qu'un angle bien défini apparaît dans les images. Chacun de ces angles est ensuite constant durant le reste de la charge. L'ensemble des angles observés dans toutes les expériences se regroupent sur deux valeurs symétriques de part et d'autre de l'axe de chargement. Ces mesures correspondent donc à une brisure de symétrie qui se produit à $\epsilon_c \approx 4,5\%$ et qui conduit le système à choisir une des deux orientations possibles.

Finalement, nous avons mesuré la largeur de la distribution de la déformation pour chaque expérience. Les valeurs obtenues avant la brisure de symétrie donnent comme attendu des largeurs de l'ordre de grandeur de la taille de la zone d'étude ($500d$). On observe qu'à la bifurcation la distribution reste large. Nous n'observons pas de discontinuité sur les largeurs ce qui signifie que la bifurcation ne correspond pas à l'apparition brutale d'un plan de rupture. Au contraire, la distribution spatiale de la déformation est encore très diffuse à la bifurcation. La largeur de cette distribution décroît lentement à partir de $\epsilon_c \approx 4,5\%$ pour atteindre une valeur stationnaire à partir de $\epsilon \gtrsim 6,5\%$. La valeur finale atteinte est identique d'une expérience à l'autre. Cette observation disqualifie une description théorique dans laquelle une discontinuité du champ de déformation apparaîtrait soudainement et simultanément à la brisure de symétrie au moment de la bifurcation. Nous observons au contraire que le phénomène de localisation, qui conduit à la formation des bandes de cisaillement finale, est un phénomène progressif nécessitant plusieurs pourcents de déformation pour évoluer depuis un champ spatialement étendu jusqu'à un champ très localisé.

5 Conclusion

Nous avons présenté une analyse du processus de localisation de la déformation dans un milieu granulaire. Nos résultats démontrent que, comme prévu par la théorie, une bifurcation est à l'origine de la localisation de la déformation. Cependant, contrairement à la théorie, cette bifurcation ne correspond

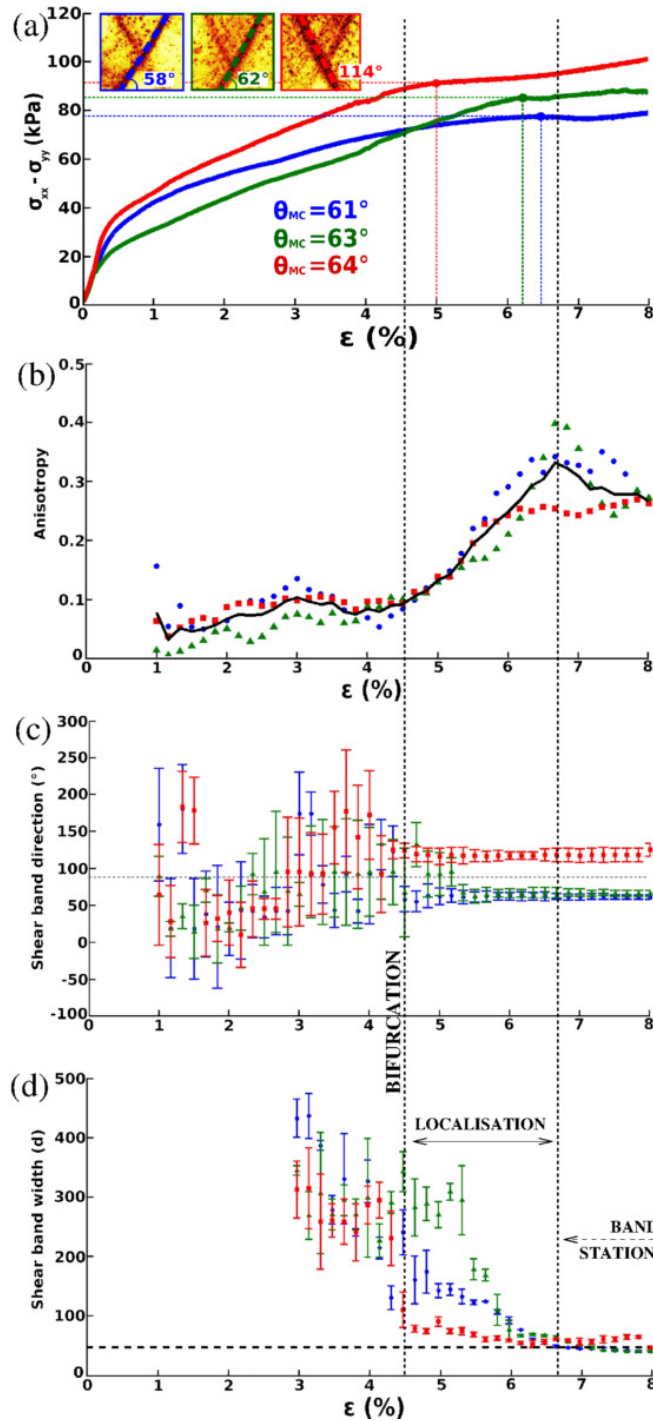


FIGURE 4. (a) Courbes de charge représentant la contrainte déviatorique $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ en fonction de la déformation axiale ϵ pour trois expériences différentes effectuées dans les mêmes conditions. Les angles θ_{MC} sont déduits directement de la courbe de charge à partir du critère de Mohr–Coulomb. En insert : cartes de déformation obtenues pour chaque expérience à la fin de la charge. (b) Anisotropie du champ de déformation en fonction de ϵ . (c) Orientation principale du champ de déformation en fonction de ϵ . (d) Largeur de la distribution du champ de déformation en fonction de ϵ .

pas à l'apparition d'un plan de rupture bien identifié dans le matériau. Au contraire, à la bifurcation, le champ de déformation observé est spatialement étendu. Ce champ diffus présente cependant une orientation générale qu'il est possible de mesurer. La bifurcation correspond à l'apparition spontanée de cette orientation dans la distribution. L'angle mesuré reste constant dans toute la suite de la charge et correspond donc à l'orientation de la bande de cisaillement finale. Une fois que cette orientation a émergé, on observe une focalisation progressive de la déformation. Finalement une largeur stationnaire de cette distribution est atteinte qui correspond à la bande de cisaillement finale.

Il est intéressant de noter que des travaux théoriques et numériques récents reposant sur des solutions de type compactons d'une équation non linéaire décrivent une phénoménologie similaire pour l'évolution de la largeur de la bande de cisaillement [10].

Références

1. J. DESRUES & G. VIGGIANI, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, **28**, 279–321 (2004).
2. J. W. RUDNICKI & J. R. RICE, *J. Mech. Phys. Solids*, **23**, 371–394 (1975).
3. J. DESRUES & E. ANDÓ, *C. R. Phys.*, **16**, 26–36 (2015).
4. A. LE BOUIL *et al.*, *Granul. Matter*, **16**, 1–8 (2014).
5. M. ERPELDING, A. AMON & J. CRASSOUS, *Phys. Rev. E*, **78**, 046104 (2008).
6. A. LE BOUIL, A. AMON, S. MCNAMARA & J. CRASSOUS, *Phys. Rev. Lett.*, **112**, 246001 (2014).
7. T. B. NGUYEN & A. AMON, *Europhys. Lett.*, **116**, 28007 (2016).
8. R. M. NEDDERMAN, *Statics and Kinematics of Granular Materials*, Cambridge University Press (1992).
9. R. LEHOUCQ *et al.*, *Front. Phys.*, **2**, 84 (2015).
10. R. BENZI *et al.*, *Soft Matter*, **12**, 514–530 (2016).

Ondes de surface produites par un jet turbulent immergé

Annette Cazaubiel, Éric Falcon & Michael Berhanu

Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, MSC, UMR-CNRS 7057, F-75013 Paris, France, EU
annette.cazaubiel@univ-paris-diderot.fr

Résumé. Dans cet article, nous étudions la déformation de la surface libre d'un fluide par un jet turbulent immergé et en particulier la génération d'ondes de surface associée. Le jet impacte la surface libre et induit une élévation de la surface ou « cloche » au point d'impact. Les fluctuations de la cloche constituent une source d'ondes de surface gravito-capillaires qui se propagent radialement. Ces vagues suivent la relation de dispersion modifiée par effet Doppler dû à la présence d'un courant radial sous la surface. Cette expérience fournit un cas non trivial d'interactions ondes-courant.

Abstract. In this paper, we study the deformation of a free surface by a turbulent water jet and in particular the generation of surface waves in this system. The jet impinges the free surface and induces an elevation of the surface or “bump” at the impact point. The fluctuations of the bump constitute a source of propagative surface waves that propagate radially. These waves follow a dispersion relation modified by Doppler effect due to the presence of a radial flow under the surface. This experiment presents a non-trivial case of wave-current interactions.

1 Introduction

La propagation d'ondes de surface en présence d'un écoulement turbulent est un phénomène important dans l'étude de la dynamique des écoulements au sein des océans ou de l'atmosphère. Un écoulement turbulent est susceptible d'interagir avec des ondes de surface de différentes manières. Il peut les atténuer, en modifier la relation de dispersion, et parfois en être la source. Afin de contribuer à la compréhension de l'interaction turbulence/ondes de surface, nous nous sommes intéressés au cas particulier de l'impact d'un jet turbulent immergé sur une surface libre.

Le jet turbulent axisymétrique constitue un exemple classique bien décrit d'écoulement turbulent, notamment par Bailly et Comte-Bellot [1]. En revanche, son impact sur une surface libre est nettement moins étudié. Citons néanmoins Laroque *et al.* [2], qui ont mené une étude détaillée expérimentale et numérique d'un tel système. Le jet induit en moyenne une élévation moyenne de la surface libre dont la forme rappelle une « cloche » en son point d'impact. Friedmann et Katz [3] ont observé cette cloche dans un système similaire à l'interface entre deux fluides non miscibles. Leur étude qualitative leur a permis de définir plusieurs régimes associés à des lois d'échelle de l'amplitude de cette cloche en fonction du nombre de Richardson Ri , nombre sans dimension, défini comme le rapport entre l'énergie gravitationnelle et l'énergie cinétique turbulente, soit $Ri = Dg/u^2$, D étant le diamètre du jet, u sa vitesse proche de la surface libre et g la valeur du champ de pesanteur. Dans notre expérience, des mesures spatio-temporelles de la déformation de la surface libre ont montré que l'amplitude de la déformation moyenne évolue en Ri^{-1} [3]. Néanmoins la déformation moyenne de l'interface s'accompagne de fortes fluctuations [2] en raison de la turbulence de l'écoulement. Pour certaines valeurs de paramètres, ces fluctuations présentent une fréquence caractéristique. Des oscillations de la cloche à une fréquence donnée ont déjà été observées dans la littérature dans le cas d'un jet bidimensionnel (Bouchet *et al.* [4]), dans le cas d'un jet proche de la surface (Giorgiutti *et al.* [5]) et dans le cas d'un jet turbulent axisymétrique (Zheng *et al.* [6]). Dans notre système, nous avons mis en évidence que les fluctuations de la cloche étaient la source d'ondes de surface gravito-capillaires, en caractérisant la génération et la propagation de ces ondes. La production de vagues par un jet turbulent immergé n'a en effet pas fait l'objet d'étude dans la littérature.

2 Dispositif expérimental

L'étude est faite dans une cuve cubique de 40 cm de côté en plexiglas transparent (voir schéma sur la figure 1 (a)). Le jet turbulent est créé par une pompe centrifuge. L'eau est injectée au centre de la cuve à travers une buse en laiton de trois centimètres de hauteur. L'eau est aspirée en bas de la cuve par un trou de 15 mm de diamètre situé à 30 mm de la buse d'injection. On dispose de plusieurs buses de diamètres différents, si bien que le diamètre d de sortie du jet est un paramètre que l'on peut contrôler. Dans les mesures effectuées, aucune rupture de symétrie liée à l'aspiration de la pompe n'a été observée. Le débit de la pompe Q est contrôlé par un robinet et mesuré par un débitmètre (Biotech FCH-C-PA-N) à turbine. On dispose donc de trois paramètres de contrôle : le débit Q de la pompe, le diamètre d de la buse et la hauteur H d'eau dans la cuve. Dans notre étude, on considérera que les bords de la cuve ont un effet secondaire sur nos observations. Nous négligerons également l'effet de l'aspiration de la pompe sur l'écoulement. Le problème que nous traitons peut donc être considéré comme axisymétrique avec comme axe de symétrie l'axe du jet. La déformation de la surface est mesurée par profilométrie par transformée de Fourier (FTP) [7]. Cette technique nous a permis d'effectuer des mesures spatio-temporelles de la déformation de la surface libre. Le principe est de projeter un réseau de franges à la surface de l'eau au moyen d'un vidéoprojecteur (Epson TW3000) et de mesurer les déformations de la surface libre à partir des déformations des franges visualisées par une caméra (Phantom V10). Pour cela, on forme dans l'eau ultra-pure une dispersion de particules de dioxyde de titane (Kronos TiO2 Anatase 1001), qui ont la propriété de diffuser la lumière, attribuant ainsi une couleur blanche à l'eau et permettant de focaliser les franges à la surface. Un exemple typique de reconstruction de la surface par FTP est montré en Fig. 1 (b). L'écoulement a été préalablement caractérisé grâce à des mesures de vitesses dans le fluide par LDV et par PIV. Loin de la surface, le jet vérifie les propriétés classiques d'un jet axisymétrique turbulent [1, 2]. Sous la surface libre, on observe un écoulement radial partant du sommet du jet. Par soucis de concision, ces résultats ne seront pas présentés ici.

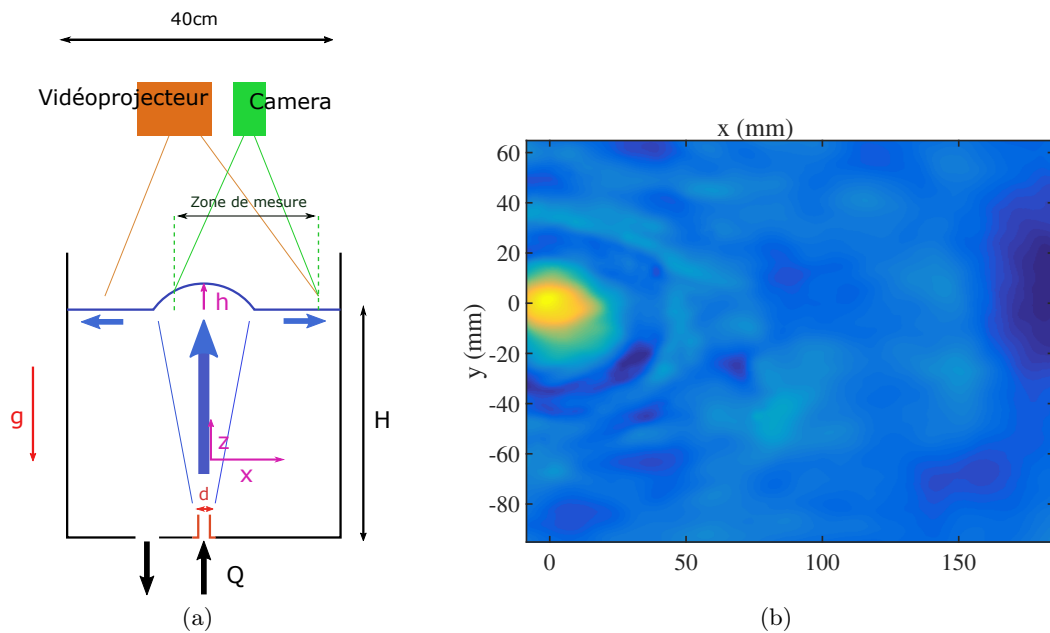


FIGURE 1. (a) Dispositif expérimental vu de profil. (b) Reconstruction de la surface par profilométrie par transformée de Fourier pour $Q = 2\text{ L/min}$, $d = 6\text{ mm}$ et $H = 200\text{ mm}$ (paramètres usuels de l'expérience). On aperçoit à gauche de l'image, le dôme ou « cloche » créé par le jet à l'endroit de l'impact. Un creux est visible autour de ce dôme sous la forme d'un anneau d'environ 60 mm de diamètre. On observe également que le reste de la surface est perturbé. Code couleur : élévation en mm (échelle linéaire).

3 Déformation de la surface proche de l'impact du jet : formation d'une cloche et d'un ressaut

Le jet induit une élévation de la surface ou cloche à l'endroit de l'impact. La figure 2 (a) représente le profil de la surface de l'eau à différents débits. La cloche a une forme approximativement gaussienne et croît avec le débit du jet. À partir d'un certain débit, $Q = 1,8$ L/min, on peut observer un creux ou « ressaut » autour de la cloche. Ce creux est également observé par Friedman & Katz [3], dont l'interprétation qualitative est la suivante : lorsque le débit est faible, les lignes de courant suivent le jet jusqu'à atteindre la surface, puis elles suivent la déformation en forme de cloche de la surface. À débit plus élevé, l'inertie au niveau de la surface est plus grande, les lignes de courant suivent le jet, sont détournées par la surface et continuent de plonger sous la surface de l'eau. Des vortex se créent alors proches de la cloche qui génèrent un pincement de la surface autour de la cloche appelé « ressaut » (cf. Fig. 2).

La figure 2 (b) représente le rapport d'aspect de la cloche, sa hauteur, h , divisée par sa largeur à mi-hauteur, D , en fonction de Ri pour différentes valeurs de Q . Le nombre Ri est calculé à partir des données expérimentales de h et D par profilométrie et de la vitesse moyenne u proche de la surface mesurée par PIV. Le diamètre du jet est pris égal au diamètre à mi-hauteur de la cloche, D . Nous avons vérifié par des mesures de PIV, que la cloche était aussi large que le jet sous la surface. Le rapport d'aspect suit la loi $h/D \sim Ri^{-1}$. Cette loi est obtenue simplement par la relation de Bernoulli : $u^2/2 \sim gh$, en équilibrant l'énergie cinétique du fluide et son énergie potentielle de gravité.

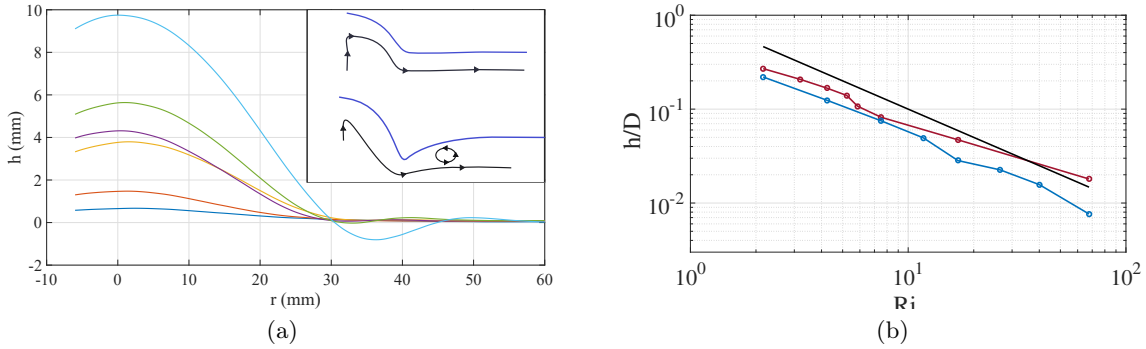


FIGURE 2. (a) Profil de la surface moyenné en temps pour différents débits ($Q = 0,5; 1; 1,7; 1,8; 2; 2,8$ L/min). On observe l'apparition du « ressaut » pour $Q = 1,8$ L/min. Les schémas en encart représentent les lignes de courant sous la surface avec et sans ressaut. (b) Rapport d'aspect en fonction du nombre de Richardson sous l'interface pour deux séries de mesures indépendantes (en rouge et en bleu). En noir, la loi d'échelle de Friedman et Katz [3] : $h/D \propto Ri^{-1}$. Les données expérimentales semblent bien s'aligner suivant cette loi d'échelle.

4 Déformation de la surface loin de l'impact du jet : génération et propagation d'ondes de surface

Toutes les observations précédentes ont été faites sur les valeurs moyennes de nos mesures au point d'impact du jet. Pourtant la déformation de la surface libre fluctue grandement, aussi bien au niveau de la cloche que loin du centre. Or, la turbulence de l'écoulement radial pourrait induire des fluctuations de la surface libre. Dans cette partie, nous montrerons cependant que les fluctuations de la surface libre correspondent principalement à des ondes de surface. Les fluctuations turbulentes de la cloche constituent alors une source d'ondes de surface. Pour mettre en évidence la présence d'ondes de surface, nous nous intéressons aux spectres spatio-temporels de la déformation loin de la cloche définis comme :

$$S_{\eta}(k_x, k_y, \omega) = \frac{1}{TL_x L_y} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{\eta}(k_x, k_y, t) e^{i\omega t} dt \right|^2 \quad (1)$$

où $\hat{\eta}$ est la transformée de Fourier spatiale en deux dimensions calculée pour chaque image. La figure 3 (a) représente le spectre spatio-temporel $S_\eta(k_x, k_y = 0, \omega)$ suivant x . La zone de calcul du spectre est choisie telle que x peut être considéré comme la direction de propagation des ondes ($x > 130$ mm sur la figure 1). S'il y a génération d'ondes de surface, on s'attend à ce que le spectre se concentre suivant une relation de dispersion d'ondes gravito-capillaires en eau profonde. Toutefois, dans notre système, les ondes observées dans le référentiel immobile par notre caméra se propagent en présence d'un écoulement sous la surface, de vitesse \mathbf{v} . Il faut donc ajouter un terme d'effet Doppler à la relation de dispersion :

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}. \quad (2)$$

Avec γ la tension de surface à l'interface eau/air et ρ la masse volumique de l'eau. Les ondes se propageant dans le sens du courant voient leur fréquence apparente augmenter et les ondes contra-propagatives voient leur fréquence diminuer. Pour $\mathbf{v} = 0$, on retrouve la relation de dispersion classique des ondes gravito-capillaires.

Sur la figure 3 (a), on a ainsi superposé en rouge la relation de dispersion classique des ondes gravito-capillaires et en blanc la relation de dispersion en prenant en compte l'effet Doppler. La valeur de la vitesse de l'écoulement sous la surface a été mesurée expérimentalement par PIV pour les mêmes valeurs de paramètres (v compris entre 0,08 et 0,20 m/s). On observe que le spectre se concentre bien suivant la relation de dispersion modifiée par effet Doppler, notamment pour les ondes se propageant dans le sens du courant. Ainsi les fluctuations de la surface libre loin du jet correspondent à la propagation d'ondes de surface en présence d'un écoulement. De plus, $S_\eta(k_x, k_y = 0, \omega)$ présente un maximum autour d'une fréquence $f_c \approx 3$ Hz. On observe à cette fréquence un signal significatif sur un large intervalle du nombre d'onde k en dehors de la relation de dispersion. On retrouve cette fréquence caractéristique en traçant le spectre temporel du même signal. Sur la figure 3 (b) sont tracés les différents spectres temporels $S_\eta(f)$ pour différents débits, obtenus à partir de $S_\eta(k_x, k_y, \omega)$. Pour des débits suffisamment forts, $Q > 1$ L/min, le spectre croît jusqu'à la fréquence f_c , puis on observe une décroissance en loi de puissance du spectre. La fréquence f_c varie entre 3 et 4 Hz et semble augmenter légèrement lorsque le débit diminue. L'exposant de la loi de puissance est de l'ordre de $-3,5$. En effectuant des mesures locales au fil capacitif, on a pu remarquer que cette pente variait en fonction de la position du fil. Le spectre spatial étant ici moyenné sur une zone inhomogène, il est difficile d'interpréter simplement la valeur de cet exposant. Différents phénomènes physiques pourraient en effet conduire à un spectre en loi de puissance. Comme nous avons montré la présence d'ondes de surface, des interactions non linéaires entre ondes pourraient mener à de la turbulence d'ondes de surface produisant un tel spectre. Toutefois, nous n'observons pas de rupture de pente, comme cela devrait être le cas, entre les ondes capillaires et de gravité. Une autre possibilité serait que les variations de pression turbulente dues à l'écoulement sous-jacent déformeraient la surface. Ces déformations auraient un spectre en $f^{-7/3}$, qui se déduit du spectre en $f^{-5/3}$ de la vitesse de l'écoulement. Or, le nombre de Reynolds de l'écoulement sous la surface est de l'ordre de $Re = 5000$, ce qui n'est pas suffisant pour observer un spectre de vitesse en loi de puissance bien défini (vérifié expérimentalement grâce à nos mesures de PIV). Le spectre observé résulte probablement d'une interaction complexe entre les ondes de surface et l'écoulement sous la surface. Les fluctuations turbulentes de l'écoulement pourraient en effet agir comme un terme d'advection aléatoire des ondes, ce qui transformerait un spectre discret en spectre continu.

De plus, le spectre temporel de la position du maximum de la cloche obtenu par profilométrie, montre aussi un maximum à la fréquence f_c , ce qui justifie que les fluctuations de la cloche sont à la source des ondes observées loin du centre. Cette fréquence de forçage des ondes pourrait être due à la dynamique grande échelle du jet turbulent. Pour caractériser la dépendance de f_c , nous avons alors effectué des mesures locales de la déformation de la surface à l'aide d'un fil capacitif en faisant varier chacun de nos paramètres. Sur la figure 4 sont tracés les spectres de puissance temporels de l'élévation de la surface en un point éloigné de la cloche ($x = 67$ mm, $y = 0$ mm, cf. Fig. 1) pour différentes valeurs de la hauteur d'eau H (Fig. 4(a)), et du diamètre du jet (Fig. 4(b)), en fixant les valeurs des autres paramètres. La fréquence f_c semble diminuer très légèrement lorsque la hauteur d'eau augmente et croître avec le diamètre

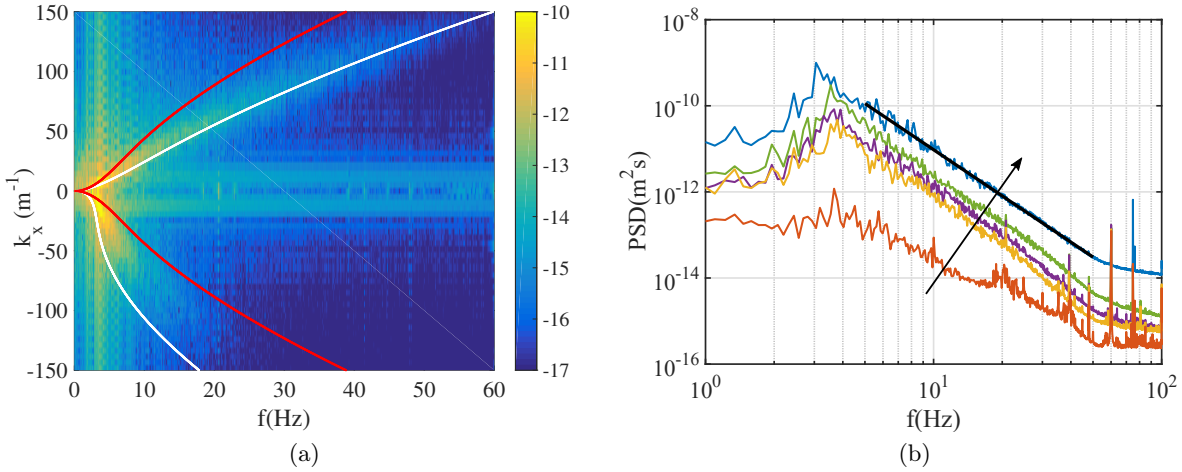


FIGURE 3. (a) Spectre de puissance spatio-temporel de la déformation de la surface libre $\log_{10}(S_\eta(k_x, k_y = 0, \omega))$, pour une débit fort $Q = 2$ L/min. Les lignes en rouge correspondent à la relation de dispersion classique des ondes gravito-capillaires ($\mathbf{v} = 0$). Les lignes blanches prennent en compte l'effet Doppler (Éq. (2)) en présence d'un écoulement de vitesse moyenne $v = 0,14$ m/s (donnée expérimentale mesurée à la PIV). (b) Spectres en puissance temporels $S_\eta(f)$, pour différents débits croissants dans le sens de la flèche (les mêmes qu'en Fig. 2) et pour $H = 20$ cm et $d = 6$ mm. Pour des débits suffisants, on observe un pic à une fréquence $3 < f_c < 4$ Hz, puis une décroissance en loi de puissance du spectre. La ligne continue noire représente un ajustement linéaire du spectre temporel pour $Q = 2,8$ L/min, on trouve une pente de -3.5 .

de la buse. Toutefois, nous pouvons observer une fréquence caractéristique seulement quand le forçage est suffisamment fort pour que le pic existe, et suffisamment faible pour que notre jet n'entraîne pas d'air sous la surface. Nos fenêtres de paramètres sont donc trop limitées pour conjecturer des lois d'échelle pour f_c en Q , d et H . Par ailleurs, on remarque que lorsque la hauteur H augmente, l'énergie du spectre diminue. En effet, plus le niveau d'eau est bas, plus la vitesse du jet est forte au point d'impact avec la surface. En revanche, le spectre des mesures à niveau d'eau plus faible est plus pauvre en basse fréquence. Le jet s'élargissant avec H , les déformations de grandes longueurs d'onde ne peuvent être générées que par un jet assez large. L'énergie du spectre diminue également lorsque d augmente, la vitesse du jet est en effet moins grande à débit constant lorsqu'on augmente le diamètre de la buse.

Enfin, pour estimer l'amplitude des ondes générées, on a tracé sur la figure 4(c) l'écart-type de la déformation de la surface en fonction de Q , tous les autres paramètres du système étant fixés, à partir des mesures de profilométrie utilisées pour calculer S_η . On remarque qu'à partir d'un certain débit seuil, cet écart type semble être linéaire en Q . On attend en effet une relation de proportionnalité entre les fluctuations de vitesse forçant les ondes et l'amplitude des ondes générées. Le seuil correspondrait au passage d'un régime où les fluctuations de pression sont dominantes dans la déformation de la surface, à un régime où la propagation d'ondes domine dans la déformation de la surface.

5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié l'interaction d'un jet turbulent axisymétrique immergé avec une interface eau/air. L'impact du jet produit ainsi une déformation moyenne de la surface libre de forme semblable à une gaussienne (la « cloche »), dont l'amplitude h suit une loi d'échelle $h \sim u^2/g$ pour $2 < Ri < 70$. Cette déformation moyenne s'accompagne de fortes fluctuations de l'interface. Nous avons mis en évidence que ces fluctuations loin du centre correspondaient à la propagation radiale d'ondes de surface provenant du point d'impact du jet. Les fluctuations à grande échelle de la « cloche » à la fréquence f_c constitue ainsi un terme de forçage des ondes, dont l'amplitude caractéristique augmente avec la vitesse

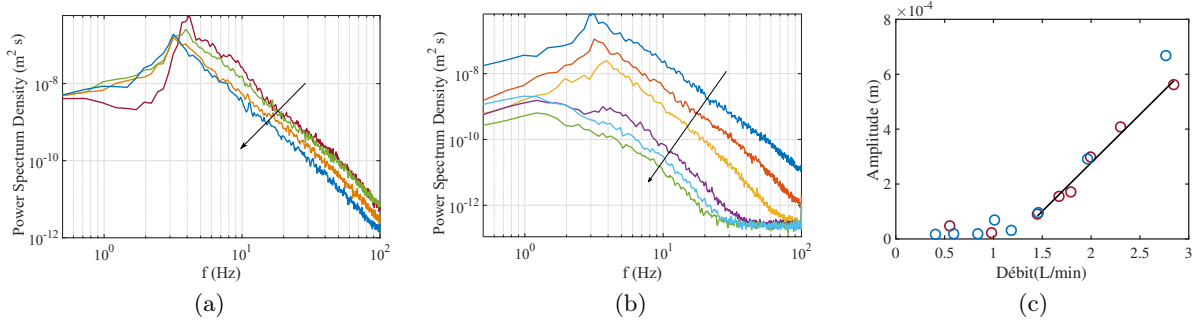


FIGURE 4. (a) Spectre temporel de la déformation de la surface en un point, pour $Q = 2$ L/min et $d = 6$ mm fixés, à différentes hauteur d'eau, $H = 130, 160, 180$ et 200 mm, H augmente dans le sens de la flèche. f_c varie peu avec la hauteur, et semble diminuer lorsque H augmente. (b) Spectre temporel de la déformation de la surface en un point, pour $Q = 2,2$ L/min et $H = 200$ mm fixés, à différents diamètres de buse, $d = 4, 6, 8, 10, 12$ et 14 mm ; le diamètre d augmente dans le sens de la flèche. On remarque que le diamètre de la buse change beaucoup l'allure du spectre et f_c semble augmenter avec d . (c) Écart-type de la déformation de la surface en fonction du débit, les points bleus et rouges représentent les données pour deux séries de mesures indépendantes (les mêmes qu'en Fig. 2). À partir d'un certain seuil, l'amplitude des ondes semble suivre une relation linéaire en Q (ligne noire).

du jet. Nous avons aussi pu montrer que la relation de dispersion des ondes était notablement modifiée en raison de leur advection par l'écoulement sous la surface. Enfin, les spectres temporels de la déformation sont en lois de puissance, ce qui pourrait être lié à l'interaction des ondes avec la turbulence de l'écoulement sous la surface.

Dans cette expérience, nous pouvons remarquer que l'interaction entre les ondes de surface et la turbulence de l'écoulement qui les génèrent est loin d'être triviale. En effet, les ondes sont émises par les fluctuations turbulentes à grande échelle, d'un écoulement par essence inhomogène. De plus la propagation des ondes est fortement modifiée par la présence d'un écoulement sous la surface. Cet écoulement radial sous la surface varie avec la distance au centre r . La relation de dispersion (2) devrait donc dépendre de r et donc du point d'observation, c'est pourquoi on n'a pu l'estimer qu'en s'éloignant du centre. Néanmoins la génération d'ondes par un jet impactant une surface libre apparaît comme un cas notable de génération de vagues, observé par exemple pour les résurgences d'eau souterraine à la surface de mers ou de lacs, ou pour certaines fontaines publiques. Pourtant, à notre connaissance, ce phénomène n'avait jamais fait l'objet d'une étude physique.

Par la suite, nous pouvons compléter d'une part l'étude de ce système en traitant le cas d'un jet instationnaire qui se rapproche plus des systèmes naturels. L'étude pourra également être comparée à un calcul analytique de la déformation de la surface et d'ondes émises impulsivement par le jet. D'autre part, afin de continuer à caractériser l'interaction ondes/turbulence, l'étude de la génération et de la propagation d'ondes de surface en présence d'un écoulement turbulent homogène, initiée par Timothée Jamin pendant sa thèse [8] pourra être poursuivie.

Références

1. C. BAILLY & G. COMTE-BELLOT, *Turbulence*, Éditions du CNRS, Paris (2003)
2. J. LAROQUE, N. RIVIÈRE, S. VINCENT, D. REUNGOAT, J.-P. FAURE, J.-P. HELIOT, J.-P. CALTAGIRONE & M. MOREAU, *Phys. Fluids*, **21**, 065110 (2009)
3. P. D. FRIEDMANN & J. KATZ, *Phys. Fluids*, **11**, 2598 (1999).
4. G. BOUCHET, E. CLIMENT & A. MAUREL, *Europhys. Lett.*, **59**, 827–833 (2002).
5. F. GIORGIUTTI, L. LAURENT & F. DAVIAUD, *Phys. Rev. E*, **58**, 512–521 (1998).
6. J. ZHENG, K. KATAOKA, T. YOSHIMURA & N. OHMURA, *J. Chem. Eng. Jpn.*, **36**, 147–154 (2003).
7. A. MAUREL, P. COBELLI, V. PAGNEUX & P. PETITJEANS, *J. Appl. Opt.*, **48**, 380–392 (2009).
8. T. JAMIN, *Interactions entre ondes de surface et écoulement hydrodynamique*, Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (2016).

The Riemann problem for nonlinear polarization waves in two-component Bose–Einstein condensates

Thibault Congy¹, Sergey K. Ivanov², Anatoly M. Kamchatnov² & Nicolas Pavloff¹

¹ LPTMS, CNRS, Université Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France

² Institute of Spectroscopy, Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow, 108840, Russia
thibault.congy@u-psud.fr

Résumé. Nous étudions, dans une configuration à une dimension, un condensat de Bose–Einstein constitué d’un mélange à deux composantes dans la limite où les constantes gouvernant l’interaction intra-espèce et l’interaction inter-espèce sont très proches. Au voisinage de la limite de miscibilité des deux espèces, les dynamiques des ondes de polarisation et de densité se découplent. Dans ce contexte, les ondes non linéaires de polarisation sont décrites par une dynamique universelle (*i. e.* indépendante des paramètres). Nous identifions les ondes non linéaires périodiques dans ce système et décrivons quelques solutions modèles du problème de Riemann.

Abstract. We study one dimensional mixtures of two-component Bose–Einstein condensates in the limit where the intra-species and inter-species interaction constants are very close. Near the mixing–demixing transition the polarization and the density dynamics decouple. In this context, nonlinear polarization waves are described by a universal dynamics (*i.e.* parameter free). We identify the nonlinear periodic waves of this system and describe some model solutions of the Riemann problem.

1 Introduction

The experimental realization of Bose–Einstein condensates consisting of two species offers the possibility of studying rich dynamical behaviors associated to the relative motion of the components. It has been recently noticed [1] that this “polarization dynamics” (out-of-phase motion of the components) can be separated from the “density dynamics” (on-phase motion of the components), even in the case of large amplitude soliton waves, provided that the difference between intra- and inter-species interaction constants is small. In Ref. [2] we have derived the general equations for the polarization dynamics, presented the associated rich variety of periodic nonlinear polarization waves and described the solution of the Riemann problem for a specific initial discontinuous polarization profile. The equations obtained in [2] were found to be equivalent to the Landau–Lifshitz equations for the easy plane magnetics [3]. It is also worth noticing that they provide the dispersive generalization of the two-layer fluid dynamics [4]. The resulting solution of the Riemann problem consisted of a wave structure formed by a rarefaction wave, a plateau, and a dispersive shock. In the present work we analyze in detail a few model cases for which the Riemann problem admits clean cut solutions: either a pure rarefaction wave (Sec. 3.1) or a pure dispersive shock wave (cnoidal, Sec. 3.2 or trigonometric, Sec. 3.3). The fact that the polarization dynamics is described by an exactly integrable equation makes it possible for the first time to very accurately describe the region of the dispersive shock by using the Whitham averaging technique.

2 Polarization dynamics

We consider a two-component one-dimensional Bose–Einstein condensate described by order parameters $\psi_{\uparrow}(x, t)$ and $\psi_{\downarrow}(x, t)$ which obey the following coupled Gross–Pitaevskii equations

$$i\hbar \partial_t \psi_{\uparrow, \downarrow} + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_{\uparrow, \downarrow} - \left[g |\psi_{\uparrow, \downarrow}|^2 + (g - \delta g) |\psi_{\downarrow, \uparrow}|^2 \right] \psi_{\uparrow, \downarrow} = 0. \quad (1)$$

We assume in Eqs. (1) that the two intra-species non linear coefficients $g_{\uparrow\uparrow}$ and $g_{\downarrow\downarrow}$ have the same value, denoted as g . This situation is exactly realized in the mixture of the two hyperfine states $|F = 1, m_F = \pm 1\rangle$ of ^{23}Na [5]. The inter-species coefficient $g_{\uparrow\downarrow}$ is written as $g - \delta g$, and we assume that

$$0 < \delta g \ll g. \quad (2)$$

Conditions (2) are realized in the case of ^{23}Na ($\delta g/g \simeq 0.07$) and the left condition ensures the mean-field miscibility of the two species (see Refs. [6, 7]). At equilibrium both components are at rest with the same uniform density $|\psi_{\uparrow}|^2 = |\psi_{\downarrow}|^2 \equiv \rho_0/2$. It can be shown that this system exhibits two types of waves that can be called “density waves” — corresponding to global motion of the condensate — and “polarization waves” — corresponding to relative motion between the two components. In the small amplitude and long wavelength limit, the velocity of density waves and the velocity of polarization waves write respectively

$$c_d = \sqrt{\frac{\rho_0(2g - \delta g)}{2m}}, \quad c_p = \sqrt{\frac{\rho_0 \delta g}{2m}}. \quad (3)$$

In the limit (2), c_p is very small compared to c_d . As a result, the typical length scale ξ_p (also called “polarization healing length”) and characteristic time scale T_p of the polarization waves defined by

$$\xi_p = \frac{\hbar}{2mc_p}, \quad T_p = \frac{\xi_p}{c_p} = \frac{\hbar}{\rho_0 \delta g}, \quad (4)$$

are much larger than the corresponding characteristic length and characteristic time associated with density waves. In order to study the polarization nonlinear waves, it is thus appropriate to pass to the non-dimensional variables (see Ref. [1])

$$x/\xi_p \rightarrow x, \quad t/T_p \rightarrow t. \quad (5)$$

In these new variables, the density and the polarization degrees of freedom decouple. More precisely, the total density modulations propagating at large velocity, leave, after a short setup time, a large region where the dynamics is governed by polarization effects, in which the total density $|\psi_{\uparrow}|^2 + |\psi_{\downarrow}|^2$ is constant as well as the total current. In order to describe the polarization dynamics, we use the following parametrization:

$$\begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{pmatrix} = \sqrt{\rho_0} e^{i\Phi/2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

where $\rho_0 \cos \theta = |\psi_{\uparrow}|^2 - |\psi_{\downarrow}|^2$ represents the relative density and $\phi = \arg(\psi_{\downarrow}) - \arg(\psi_{\uparrow})$ represents the potential of the relative velocity between the two components. In the following, we work in a reference frame where there is no total density flux: this imposes $\partial_x \Phi = \cos \theta \partial_x \phi$. The two dynamical fields describing the polarization dynamics can be chosen as the relative density described by $w \equiv \cos \theta$ and the relative velocity $v \equiv \partial_x \phi$. The polarization dynamics corresponding to (1) is governed by the equations

$$\partial_t w - \partial_x [(1 - w^2)v] = 0, \quad \partial_t v - \partial_x [(1 - v^2)w] + \partial_x \left[\frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} \partial_x \left(\frac{\partial_x w}{\sqrt{1 - w^2}} \right) \right] = 0. \quad (7)$$

that can be shown to be equivalent to the dissipationless form of the Landau–Lifshitz equation governing the dynamics of the effective magnetization \mathbf{S} in an asymmetric ferromagnet with “easy-plane magnetization”:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \partial_t \mathbf{S} = \mathbf{S} \times (\partial_x^2 \mathbf{S} - S_z \hat{\mathbf{z}}). \quad (8)$$

3 The Riemann problem: Evolution of an initial step-like profile

As a typical application of the theory, we consider an initial step-like distribution of the form

$$w(x, t = 0) = \begin{cases} w_L & \text{when } x < 0, \\ w_R & \text{when } x > 0, \end{cases} \quad \text{and} \quad v(x, t = 0) = \begin{cases} v_L & \text{when } x < 0, \\ v_R & \text{when } x > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Since the step-like initial distribution (9) does not include any parameter having the dimension of a length, the subsequent solution will, for all times, depend only on the self-similar variable $z = x/t$. In the following we will not compute the most general time evolved profile resulting from the initial condition (9), but rather choose specific initial conditions illustrating different typical results. The general case should then be a mixture of these “pure solutions”.

3.1 Dispersionless limit: The pure rarefaction wave

If w and v slowly vary over one polarization healing length, then we can neglect the dispersion effects described by the terms proportional to $\partial_x^2 \theta$ in Eq. (8). Following the method presented in Ref. [4] one can cast the resulting equations in a symmetric form by introducing the following “Riemann invariants”

$$\lambda_{\pm}(w, v) = wv \pm \sqrt{(1-w^2)(1-v^2)}, \quad (10)$$

which satisfy the nonlinear dispersionless equations

$$\partial_t \lambda_{\pm} + V_{\pm}(\lambda_{-}, \lambda_{+}) \partial_x \lambda_{\pm} = 0, \quad \text{where} \quad V_{\pm} = \frac{3}{2} \lambda_{\pm} + \frac{1}{2} \lambda_{\mp} = 2wv \pm \sqrt{(1-w^2)(1-v^2)}. \quad (11)$$

Eqs. (11) have the familiar form of equations describing the dynamics of a compressible gas in terms of the Riemann invariants; however the relationships between the Riemann invariants (λ_{-}, λ_{+}) and the physical variables ($w = \cos \theta, v = \partial_x \phi$) are more complicated in the present case than for a gaseous system. As explained above, the initial profile (9) yields solutions for which λ_{\pm} only depend on the self-similar variable $z = x/t$. In this case, Eqs. (11) solve very easily

$$\lambda_{+} = \text{const}, \quad \text{and} \quad V_{-}(\lambda_{-}(z), \lambda_{+}) = z, \quad \text{or} \quad \lambda_{-} = \text{const}, \quad \text{and} \quad V_{+}(\lambda_{-}, \lambda_{+}(z)) = z. \quad (12)$$

For a given boundary condition, one can compute the constant Riemann invariant λ_{+} (or λ_{-}) and then obtain the physical solutions (w, v) by inverting one of the two solutions of Eqs. (12). For instance, the left solution of (12) yields two implicit formulae for the relative density $w(z)$ and the relative velocity $v(z)$:

$$w(z)v(z) + \sqrt{1-w(z)^2}\sqrt{1-v(z)^2} = \lambda_{+}, \quad \text{and} \quad 2w(z)v(z) - \sqrt{1-w(z)^2}\sqrt{1-v(z)^2} = z. \quad (13)$$

In the general case, the initial discontinuity (9) evolves into a complex structure [2]. However, for some specific choices of initial distribution the solution consists in a single rarefaction wave connecting the left and right boundary flows. This case is depicted in Fig. 1 where it is compared with the result of numerical simulations. In the numerics the initial profile cannot be perfectly sharp as (9), and is taken of the form

$$w(x, t = 0) = (w_R + w_L)/2 + (w_R - w_L)/2 \tanh(x/\zeta_0) \quad \text{with} \quad \zeta_0 = 1, \quad (14)$$

and a similar initial distribution for $v(x, t = 0)$ (change $w_{L/R}$ by $v_{L/R}$).

3.2 Dispersive shock wave: The pure cnoidal case

As shown in Ref. [2], the case where the initial profile (9) evolves into a pure rarefaction wave is not typical: one often observes the concomitant formation of a dispersive shock wave. Such a structure can be described as a nonlinear periodic solution of the polarization equations (8), the parameters of which

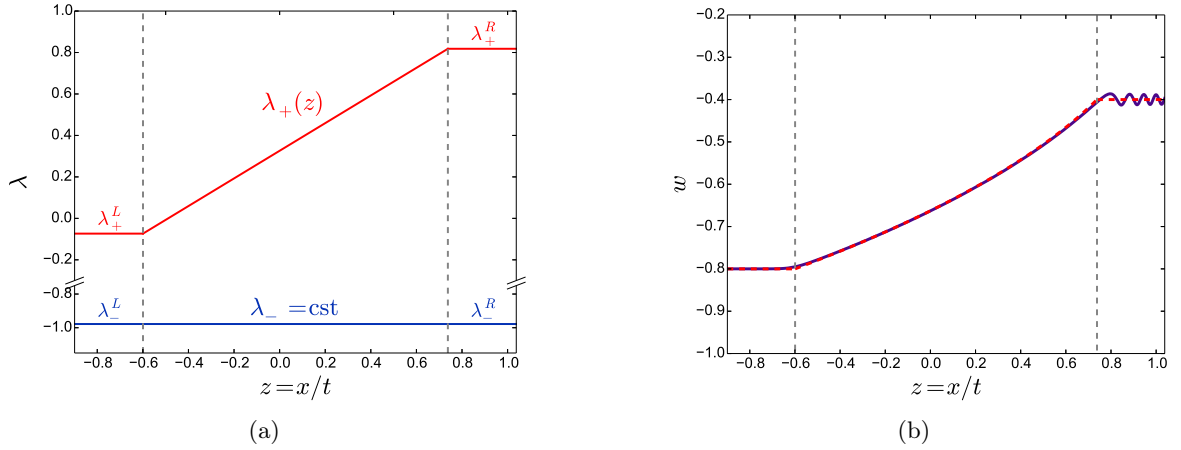


Figure 1. (a) Dispersionless Riemann invariants plotted as a function of $z = x/t$ for an initial profile (9) with boundary values $(w_L, v_L) = (-0.8, 0.65)$ and $(w_R, v_R) = (-0.4, 0.2)$. (b) Comparison between the dispersionless approximation for $w(z)$ (dotted red curve) and the numerical solution at $t = 100$ (dark blue curve) of Eqs. (8) for the initial condition (14).

(amplitude, velocity, period, etc.) are slowly modulated over one wavelength and one period of oscillation. This means that we can apply the Whitham averaging method for its description (see, e.g., Refs. [8, 9]). It has been shown that Eq. (8) is integrable by the inverse scattering method (see, e.g., Ref. [10]), and its single phase periodic solutions have been derived in Ref. [2]; the relative density $w(x, t) = \cos \theta$ can be expressed in terms of Jacobi elliptic functions cn and sn (see Ref. [11]) and parametrized by a set of four integration constants $-1 \leq w_1 \leq w_2 \leq w_3 \leq w_4 \leq 1$:

$$w(x, t) = w_3 + \frac{(w_4 - w_3) \text{cn}^2(W, m)}{1 + \frac{w_4 - w_3}{w_3 - w_1} \text{sn}^2(W, m)}, \quad \text{where} \quad \begin{cases} W = \frac{1}{2} \sqrt{(w_3 - w_1)(w_4 - w_2)} (x - Ut), \\ m = \frac{(w_4 - w_3)(w_2 - w_1)}{(w_4 - w_2)(w_3 - w_1)}. \end{cases} \quad (15)$$

The velocity of the wave U can be expressed in terms of the parameters w_i and the relative velocity $v(x, t)$ is a simple function of the relative density $w(x, t)$ and of the parameters w_i (see Ref. [2]). Periodic nonlinear waves of type (15) are denoted as “cnoidal waves”.

In order to describe the slow modulation of the periodic wave parameters w_i , we adapted the Whitham theory derived in Ref. [10] for the “easy-axis ferromagnet”, to the case of the “easy-plane ferromagnet” corresponding to Eq. (8). A modulated cnoidal wave is described by four Riemann invariants (different from (10)) $\{\lambda_i(w_1, w_2, w_3, w_4)\}_{1 \leq i \leq 4}$ obeying hydrodynamics equations similar to (11):

$$\partial_t \lambda_i + V_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \partial_x \lambda_i = 0. \quad (16)$$

For the sake of brevity, we do not write here the formulae linking the wave parameters w_i and the Riemann invariants λ_i , neither the formulae for the Riemann velocities V_i . In the purely cnoidal situation considered in this subsection, the self-similar solutions of the Whitham equations (16) are determined by a set of equations analogous to (12), where now three Riemann invariants λ_i are constant, and the only z -dependent term is $\lambda_3(z)$. Then, the z -dependence of the w_i 's which parametrize the cnoidal wave (15) is given by $w_i = w_i[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(z), \lambda_4]$, where $\lambda_3(z)$ is determined by the implicit relation

$$V_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(z), \lambda_4) = z. \quad (17)$$

The constants λ_1 , λ_2 and λ_4 are defined by the necessary matching between the end points of the cnoidal wave (15) and the left and right boundary conditions fixed by (9). This procedure can be simplified by

noticing that these matching conditions correspond to the matching between the Riemann invariants of the Whitham modulation theory (the λ_i 's) and the Riemann invariants computed in the dispersionless limit (the λ_{\pm} 's) which characterize the left and right boundary conditions. Since only λ_3 can vary, these matching conditions read

$$\lambda_1 = \lambda_-(w_L, v_L) = \lambda_-(w_R, v_R), \quad \lambda_2 = \lambda_+(w_R, v_R), \quad \text{and} \quad \lambda_4 = \lambda_+(w_L, v_L). \quad (18)$$

The left-hand-side relations in (18) are only verified for specific boundary conditions leading to a pure dispersive shock. The comparison of the analytic predictions (17) and (18) with the numerical solution is displayed in Fig. 2. We choose to display the slowly varying envelope of the dispersive shock wave (w_3, w_4) (15) as well as its first oscillation, which corresponds in this case to a bright soliton (limit $w_3 \rightarrow w_2$ of (15), see Ref. [2]).

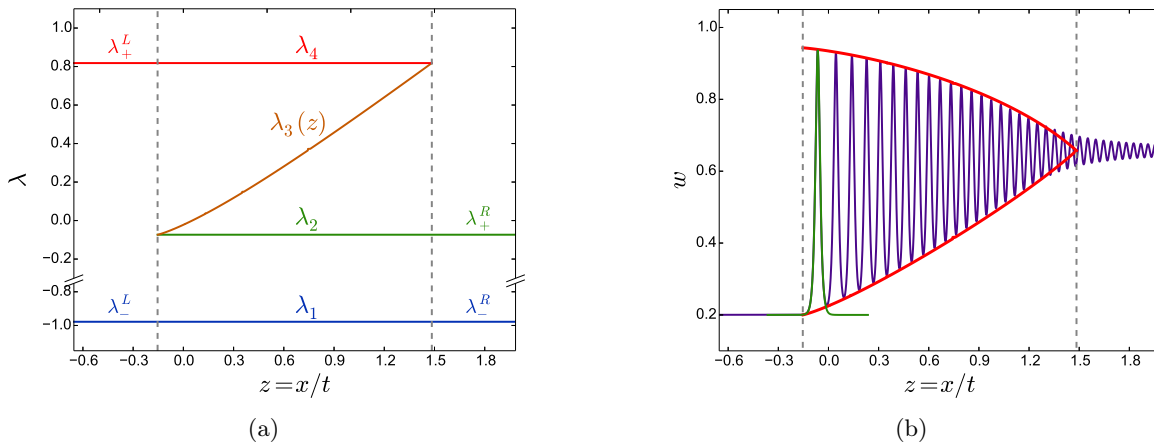


Figure 2. (a) Riemann invariants used in the Whitham averaging technique plotted as a function of $z = x/t$ for an initial profile (9) with boundary values $(w_L, v_L) = (0.2, -0.4)$ and $(w_R, v_R) = (0.65, -0.8)$. (b) Comparison between the results of the Whitham method for $w(z)$ (envelope (w_3, w_4) in red and first oscillation in green) and the numerical solution at $t = 100$ (dark blue curve) of Eqs. (8) for the initial condition (14).

3.3 Dispersive shock wave: The pure trigonometric case

Eq. (8) admits periodic nonlinear solutions which do not consist in a cnoidal wave, but which are purely trigonometric [2], and which can be considered as limiting cases of (15) obtained for $w_2 = w_3$:

$$w = w_3 + \frac{(w_4 - w_3) \cos^2 W}{1 + \frac{w_4 - w_3}{w_3 - w_1} \sin^2 W}, \quad \text{where} \quad W = \sqrt{(w_3 - w_1)(w_4 - w_1)}(x - Ut)/2. \quad (19)$$

It is possible to describe a dispersive shock wave consisting uniquely in a modulated periodic wave of type (19). This is achieved thanks to a Whitham averaging technique alternative to the so-called Gurevitch–Pitaevskii scheme [8] (which has been used in Sec. 3.2 for describing a purely cnoidal dispersive shock) in which $\lambda_4(z) = \lambda_3(z)$ whereas the other Riemann invariants are z -independent. The final result and its comparison with our numerical simulations is presented in Fig. 3.

4 Conclusion

We have presented in this work some model solutions of the Riemann problem for the polarization dynamics of a two-component Bose–Einstein condensate, in the experimental relevant situation where

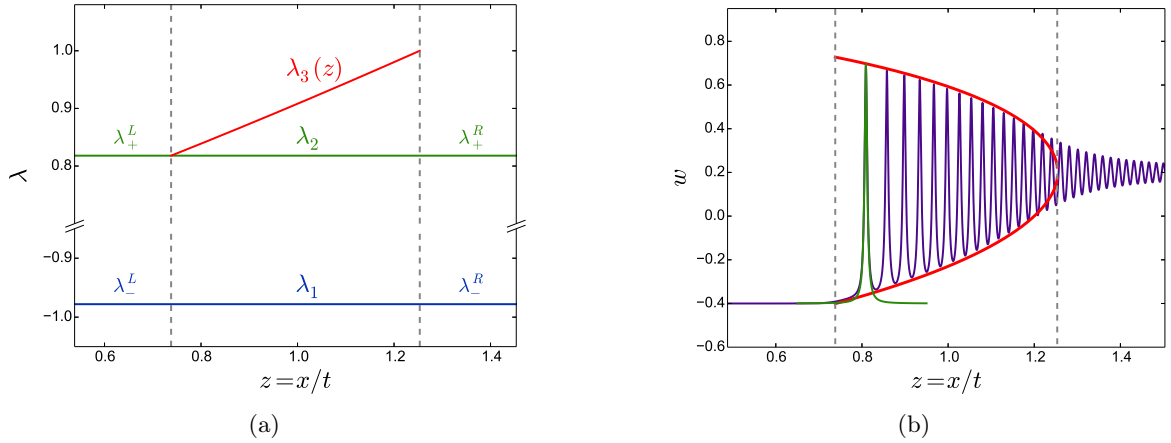


Figure 3. (a) Riemann invariants used in the Whitham averaging technique plotted as a function of $z = x/t$ for an initial profile (9) with boundary values $(w_L, v_L) = (-0.4, 0.2)$ and $(w_R, v_R) = (0.2, -0.4)$. (b) Comparison between the results of the Whitham method for $w(z)$ (envelope (w_3, w_4) in red and first oscillation in green) and the numerical solution at $t = 500$ (dark blue curve) of Eqs. (8) for the initial condition (14).

the difference between intra- and inter-species interaction constants is small. These model solutions correspond to clean cut cases for which an initially discontinuous profile leads to a single rarefaction wave (Sec. 3.1) or a single dispersive shock wave (Secs. 3.2 and 3.3). In particular, the pure shocks have been shown to be very accurately described by using the Whitham averaging method. This has been made possible thanks to the exact integrability of the nonlinear equation describing the polarization dynamics.

Much more remains to be done. In particular, one has to understand how the solution of the general Riemann problem can be described by using the building blocks presented in this report. Work in this direction is in progress.

References

1. C. QU, L. P. PITAEVSKII & S. STRINGARI, Magnetic solitons in a binary Bose–Einstein condensate, *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 160402 (2016).
2. T. CONGY, A. M. KAMCHATNOV & N. PAVLOFF, Dispersive hydrodynamics of nonlinear polarization waves in two-component Bose–Einstein condensates, *SciPost Phys.*, **1**, 006 (2016).
3. E. IACocca, T. J. SILVA & M. A. HOEFER, Breaking of Galilean invariance in the hydrodynamic formulation of ferromagnetic thin film, *Phys. Rev. Lett.*, **118**, 017203 (2017).
4. L. V. OVSYANNIKOV, Two layer shallow water model, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **20**, 127 (1979).
5. S. KNOOP, T. SCHUSTER, R. SCALLE, A. TRAUTMANN, J. APPMEIER, M. K. OBERHALER, E. TIESINGA & E. TIEMANN, Feshbach spectroscopy and analysis of the interaction potentials of ultracold sodium, *Phys. Rev. A*, **83**, 042704 (2011).
6. C. J. PETHICK & H. SMITH, *Bose–Einstein condensation in dilute gases*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
7. L. PITAEVSKII & S. STRINGARI, *Bose–Einstein Condensation*, Clarendon Press, Oxford (2003).
8. A. V. GUREVICH & L. P. PITAEVSKII, Nonstationary structure of a collisionless shock wave, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **65**, 590 (1973) [*Sov. Phys. JETP*, **38**, 291 (1974)].
9. G. A. EL & M. A. HOEFER, Dispersive shock waves and modulation theory, *Physica D*, **333**, 11 (2016).
10. A. M. KAMCHATNOV, Periodic nonlinear waves in a uniaxial ferromagnet, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **102**, 1606 (1992) [*Sov. Phys. JETP*, **75**, 868 (1992)].
11. M. ABRAMOWITZ & I. A. STEGUN, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New-York (1972).

Cavitation wave propagation: A numerical model

Ali El Amri, Yann Bouret, Xavier Noblin & Médéric Argentina

Institut de Physique de Nice, Université Côte d'Azur, CNRS, France

ali.el_amri@inphyni.cnrs.fr

Résumé. Dans un système structuré en petites cavités, nous modélisons la propagation d'une onde de cavitation. Cette propagation est analogue à une réaction en chaîne où une bulle provoque l'apparition d'une nouvelle bulle qui, à son tour, en crée une nouvelle. Ce phénomène a été découvert lors d'observations de l'éjection des spores des fougères et reproduit dans un dispositif expérimental biomimétique. La création de bulles de proche en proche se fait dans des temps bien plus petits que le temps caractéristique d'apparition d'une bulle, dans le cadre de la théorie de la nucléation homogène. Nous montrons qu'une simple augmentation de la probabilité de nucléation en jouant sur les conditions spatiales et temporelles de cavitation permet d'observer un comportement similaire aux résultats expérimentaux observés dans le cas biomimétique.

Abstract. In structured systems, we model the propagation of a cavitation wave. This propagation is analogous to a chain reaction where a bubble triggers the apparition of a new one which in turn creates another one. This phenomenon was observed in the ejection of fern spores and in a biomimetic experimental device. The correlated bubble creation occurs in times much smaller than the characteristic time of the homogenous nucleation theory. We show that a simple increase in the probability using spatial and temporal conditions allows us to observe a behavior similar to the experimental results observed in the biomimetic experiments.

1 Introduction

Cavitation is a phenomena which describes a phase transition of a fluid into vapor, as the pressure decreases. It is observed near the moving propellers of boat: following Bernoulli's principle, as the velocity increases, the pressure goes down. If the latter becomes smaller than the saturated vapor pressure, a small perturbation provokes the nucleation of a vapor bubble [1]. Later on, the bubble becomes unstable and its radius decreases rapidly yielding to an implosion which damages the propeller. Cavitation also appears in trees. The water stocked by the roots is pumped into the leaves by capillarity. As water moves up, it is set in tension, and its pressure becomes negative. Before the pressure reaches the spinodal value, a bubble might appear and embolizes the vessel of the tree [2]. In some cases, the cavitation can be advantageous, as in the spore ejections of ferns [3]. For this plants, all the spores are contained into sporangia. Each sporangium is composed by a beam containing microcavities filled with water, which can evaporate through a thin membrane. This evaporation sets the water under tension, and leads the pressure to become negative.

At some point many cavitation bubbles are created in the microcavities. Experimental observations show that the first cavitation bubble provokes the appearance of a second bubble which leads to the creation of another bubble which in turn creates another one [3], and this process repeats as in a chain reaction. This scenario can be interpreted as cavitation wave propagation. In order to understand this observation, a biomimetic experimental device has been set up with an hydrogel [3,4], in which microcavity filled with water are embedded. Under low humidity condition, water evaporates from the hydrogel, bubble appears in the microcavities, within a cavitation wave propagation.

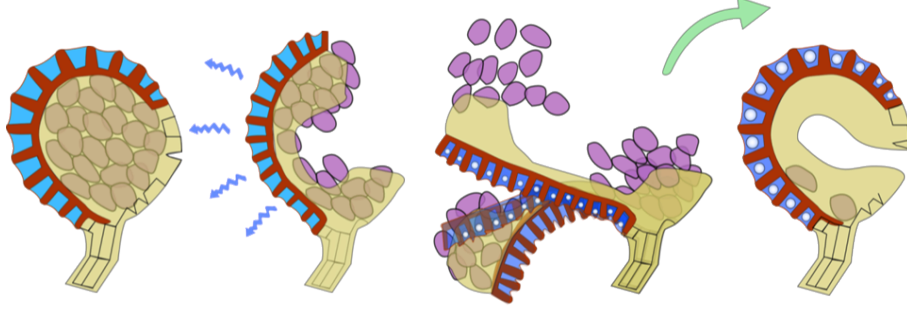


Figure 1. The ejection process of fern spores. The spores stored in a sporangium are represented in violet. The sporangium beam (plot in red) is composed of microcavities filled with water (shown in blue). The evaporation allows the opening of the sporangium. When all the bubbles appear, the sporangium bounces back to its initial position and spores are ejected [5].

The geometry of the device can be changed: the thickness of the wall between two consecutive cells can be modified, as well as their length. The result of the length variation brings out three different behaviors. (i) As the thickness is large enough: there are very few propagation events. (ii) The second behavior occurs as the thickness becomes too small: many clusters of bubbles are observed at the end of the experiment. (iii) And the final behavior is when the thickness is small enough in one direction and thick in the other one: this allows the propagation in one direction and allows to get a close 1D experiment. We explain in this article how to model this behavior using a stochastic approach via an inhomogeneous Poisson process, to simulate some random creation of bubbles, and then the creation of clusters.

2 The random creation of bubble

In this section, we explain how we model the bubbles into a 2D mesh.

2.1 What is the nucleation probability in a two microcavity case?

The homogeneous nucleation theory gives a critical radius from which a cavitation bubble can be created [6]. We note

$$R_c = \frac{2\gamma}{(P_G - P_L)} \quad (1)$$

the critical radius with γ the surface tension, P_G the gas pressure inside the bubble and P_L the liquid pressure. The corresponding free energy barrier to overcome is

$$\Delta F_c = \frac{16\pi\gamma^3}{3(P_G - P_L)^2}. \quad (2)$$

The nucleation of a bubble is a stochastic event driven by an intensity λ of bubble creation:

$$\lambda = J_0 V e^{-G_b}, \quad (3)$$

where $G_b = \frac{\Delta F_c}{k_B T}$ is the Gibbs number and $J_0 = N \left(\frac{2\gamma}{\pi m} \right)^{1/2}$ the proportionality factor, given by Blander and Katz (1975), where N is the number density of the liquid (molecules/m³) and m the mass of a molecule [6].

As the temperature varies, the Gibbs numbers changes, whereas the prefactor J_0 will remain almost constant. We define $P_i = -20$ MPa the limit pressure to provoke the creation of cavitation. This value was measured experimentally. We note λ_0 and $G_{b,i}$ the value of λ and G_b taken at P_i . In order to perform all calculations, we will redefine the intensity, like:

$$\lambda = \lambda_0 e^{-(G_b - G_{b,i})}. \quad (4)$$

Let us consider two neighboring microcavities, with a bubble into one of them.

The probability to nucleate in the second micro-cavity is given by

$$\mathbb{P} = 1 - e^{-\Lambda(t)}, \quad (5)$$

where

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds.$$

2.2 Random generation of cavitation bubble

We consider a rectangular 2D lattice, with N_x and N_y cavities in each direction. The algorithm is essentially based on two steps: the first stage consists in determining if a bubble has appeared in the lattice, then the second stage consists in finding out where it occurred. At each iteration, we first compute:

$$\Lambda = \int_0^t \tilde{\lambda} ds,$$

where t represents the instant of nucleation of the new cavitation bubble, $\tilde{\lambda} = \sum_{i,j}^{N_s} \lambda_{i,j}$ is the total intensity of all the cavities which have not created a bubble, and N_s the number of micro-cavities without bubbles. To decide whether the nucleation occurred, this integral is compared with a random number $\xi \in]0, 1[$; the following condition has to be verified to conclude that a bubble nucleates

$$\Lambda(t) \geq -\ln \xi. \quad (6)$$

When this condition has been satisfied, a bubble appears at time t but its location is still unknown. The location is chosen by generating a second random number and choosing stochastically the cavity, using a weight proportional to the nucleation intensity of each micro-cavities. This condition writes:

$$\tilde{\lambda} \xi_1 < \sum_{i,j=0}^{I_N} \lambda_{i,j}, \quad (7)$$

where I_N is the location of the bubble.

The algorithm was written in C. To check its validity we impose λ constant. In such a case, the bubble number time evolution follows an exponential law as in the radioactive decay. Hence let

$$N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}) \quad (8)$$

be the number of bubbles at time t , with $N_0 = N_x \times N_y$ the number of micro-cavities initially present. Then we plot N as a function of time t , obtained numerically, and Eq. (8) in the same plot. As expected, the comparison gives an excellent agreement between both curve (see Fig. 2).

In this subsection, we were able to show that our method to create numerically bubble randomly is satisfactory in the homogeneous case. Now we show how to trigger propagation after nucleation.

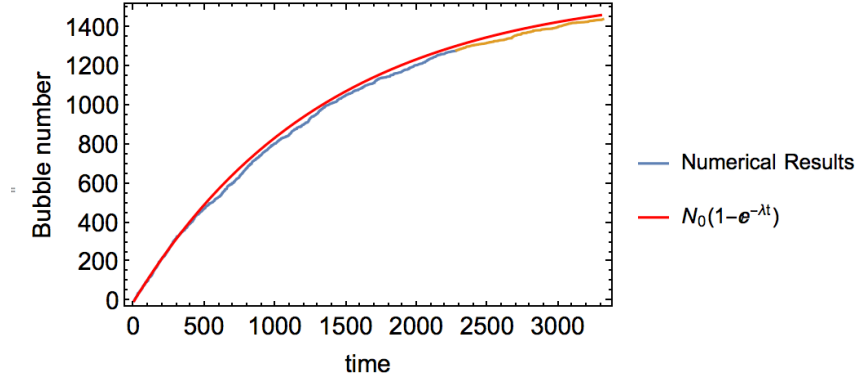


Figure 2. Plot of the number of bubble during the time made with 1600 micro-cavities. The blue curve is the numerical result and the red one the theoretical result. The number of bubbles did not reach 1600 because we stopped the simulation when 90% of the total number of bubble has appeared.

3 Modeling of the cavitation wave propagation

In order to observe a propagation of cavitation, we need to model how a freshly created bubble increases the nucleation probability all around its own micro-cavity. When a bubble has appeared, we compute the intensities $\lambda_{i,j}$ and λ used for the next iteration. Let us consider a micro-cavity without bubble and let us scan its four nearest neighbors. Indeed, the intensity in the surrounding micro-cavities increases. The new intensity in the considered micro-cavity will be equal to the number N_v of cavitated neighbors multiplied by a parameter without dimension, leading to

$$\lambda = (N_v \beta_s + 1) \lambda_0, \quad (9)$$

where β_s is an heuristic numerical factor which increases the intensity. This parameter makes sense because we developed a microscopic model which shows the increase of the intensity e^{-G_b} with respect to $e^{-G_{b,i}}$ because of the coupling between two oscillators: the bubble and the wall which separates two successive micro-cavities. The simulation is stopped when the number of bubbles reaches a percentage of the total number of micro-cavities, in order to hinder the formation of clusters in the homogeneous case. We chose 5% of N_0 . If $\beta_s = 0$, we observe the same behavior as the homogeneous case, since the intensity remains the same in the whole domain.

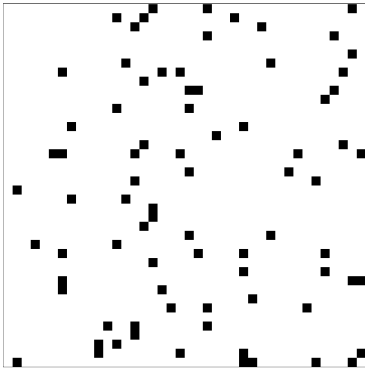


Figure 3. System state after the creation of 80 bubbles. The black squares represent the bubbles. We take $\beta_s = 0$ and $N_0 = 1600$.

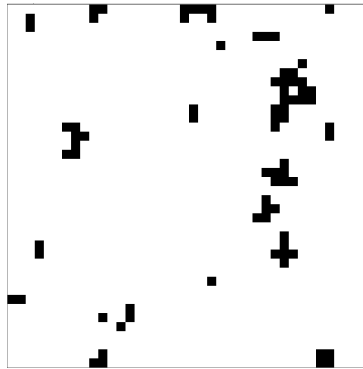


Figure 4. System state after the creation of 80 bubbles. The black squares represent the bubbles. We take $\beta_s = 100$ and $N_0 = 1600$.

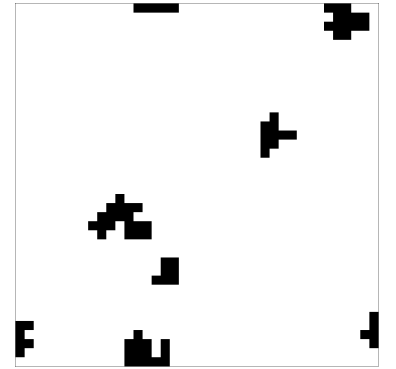


Figure 5. System state after the creation of 80 bubbles. The black squares represent the bubbles. We take $\beta_s = 600$ and $N_0 = 1600$.

In Figs. 3–5, we show the system state at the end of the simulation, for different values of β_s . As $\beta_s = 0$ there is no propagation: only few clusters whose size doesn't exceed 4 bubbles. By increasing β_s , we observe the formation of clusters whose size is an increasing function of β_s . This results seems satisfactory even if we don't consider the effect of the intensity decay with time. In the experiments, no bubbles appear after 2 or 3 oscillations of the bubble. Also, in molecular dynamical simulation, this limiting time was also observed. For this reason we defined a time τ as a multiple of the bubble period [4]. At every cavitation event, we increase the intensity of micro-cavities without bubble, during τ . When τ is exceeded, we stopped the increase of intensity. So the condition is the following

$$\tau < t - t_{i,j}, \quad (10)$$

where t is the appearance time of the last bubble appeared and $t_{i,j}$ the time when the bubble appeared into the micro-cavity i, j .

We are able to propose a simple model, first to simulate a cavitation propagation by increasing the intensity in all the micro-cavity surrounded by others micro-cavity with a bubble.

References

1. J. FRANC, F. AVELLAN, B. BELAHADJI, J. BILLARD, L. BRIANÇON-MARJOLLET, D. FRÉCHOU, D. FRUMAN, A. KARIMI, J. KUENY & J. MICHEL, *La cavitation. Mécanismes physiques et Aspects industriels*, Presses Universitaires de Grenoble (1995).
2. H. COCHARD, Cavitation in tree, *C. R. Phys.*, **7**, 1018–1026 (2006).
3. X. NOBLIN *et al.*, Cavitation avalanches in natural and artificial cellular systems, to be submitted (2016).
4. M. PELLEGRIN, *Nucléation et dynamique de bulles de cavitation dans des liquides confinés sous tension : expériences dans des systèmes microfabriqués et simulations de la dynamique moléculaire*, PhD Thesis, Nice (2015).
5. X. NOBLIN, N. O. ROJAS, J. WESTBROOK, C. LLORENS, M. ARGENTINA & J. DUMAIS, The fern sporangium: A unique catapult, *Science*, **335**, 1322–1322 (2012).
6. C. BRENNEN, *Cavitation and bubbles dynamics*, Oxford University Press (1995).

Une fibre auxiliaire souple pour l'enroulement élasto-capillaire d'une fibre fonctionnelle dure

Paul Grandgeorge¹, Sébastien Neukirch¹ & Arnaud Antkowiak¹

Sorbonne Universités, UPMC Université Paris 6, UMR–CNRS 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, Paris
 paul.grandgeorge@upmc.fr

Résumé. Les forces capillaires que développent les gouttes liquides peuvent être suffisantes pour plier des structures élastiques flexibles ou même enrouler des fibres, pourvu que celles-ci soient assez fines. Ce « treuil » élasto-capillaire permet la création d'une fibre hybride ultra-extensible. Si de telles fibres hybrides pouvaient transporter de l'information, elles formeraient d'excellents connecteurs étirables. Mais qu'elle soit photonique ou électronique, l'information est habituellement envoyée dans des matériaux à haut module d'Young, comme les métaux ou le verre. Ces matériaux fonctionnels étant trop durs, ce ne sont probablement pas des candidats viables pour l'enroulement élasto-capillaire. À une fibre fonctionnelle a priori trop rigide pour être enroulée dans une goutte, nous apposons une fibre auxiliaire plus épaisse, mais très élastique (faible module d'Young). La rigidité à la flexion de cette nouvelle fibre composite (fibre fonctionnelle + fibre auxiliaire élastique) sera alors pilotée par celle de la fibre dure. Son périmètre, quant à lui, sera hérité de celui de la fibre auxiliaire épaisse. Nous montrerons qu'un paysage énergétique favorable à l'enroulement élasto-capillaire est ainsi rétabli.

Abstract. Capillary forces acting at the surface of a liquid drop can be strong enough to bend elastic structures, or even spool fibers, if these are thin enough. This elasto-capillary auto-spool allows us to fabricate hybrid ultra-extensible fibers which, if they could convey information, would be excellent stretchable connectors. But information, may it be photonic or electronic, usually travels through hard materials (high Young's modulus) such as metals or glass. These functional materials being too stiff, they are probably not viable candidates for the in-drop auto-spool. Here, we restore the elasto-capillary spooling of a functional stiff fiber by affixing a thick soft elastomer auxiliary beam to it. This new composite fiber undergoes the in-drop spooling. Indeed, its cross section's perimeter is inherited by the auxiliary beam, whereas its bending rigidity mainly depends on that of the stiff fiber. This strategy provides an energetically favorable landscape for the in-drop auto-spool.

1 Introduction

Aux petites échelles, les forces capillaires peuvent être utilisées pour plier des structures élastiques et différentes études ont montré comment l'on peut façonner des microstructures grâce à l'utilisation de la tension de surface, pourvu que les modules d'Young ou les épaisseurs de structures élastiques mis en jeu soient assez faibles [1–5].

Par ailleurs, la mécanique des gouttes sur fibres a largement été étudiée sous l'angle de la mouillabilité et de la capture de brouillard [6–9], mais récemment, trouvant son inspiration dans les toiles d'araignée [10–12], l'élasto-capillarité s'est introduite dans ces systèmes de gouttes sur fibres. Une microfibre élastique peut s'enrouler dans une goutte liquide, ce qui lui confère une très grande extensibilité (jusqu'à 50 000 %). En effet, la goutte joue alors le rôle de treuil microscopique au gré des extensions/compressions de la fibre [2, 13–15].

Ce mécanisme d'enroulement nécessite de fines fibres et jusqu'à maintenant, des fibres de $\sim 10 \mu\text{m}$ de diamètre et de module d'Young de $\sim 10 \text{ MPa}$ pouvaient être enroulées au sein de gouttes liquides.

Cette nécessité d'avoir recours à des fibres aussi fines et souples restreint la gamme des matériaux candidats à l'enroulement élasto-capillaire. Les métaux, par exemple, intéressants pour leur conductivité électronique, sont très durs (modules d'Young de quelques dizaines de GPa) [16] et leur emploi imposerait une finesse drastique des fibres (quelques centaines de nanomètres pour s'enrouler dans une goutte d'huile silicone). Pour contourner cette limite, nous introduisons ici l'utilisation d'une fibre auxiliaire souple et épaisse en supplément de la fibre fonctionnelle dure. Nous montrerons comment cette technique permet de restaurer un paysage énergétique favorable à l'enroulement élasto-capillaire de fibres a priori trop rigides.

2 Enroulement élasto-capillaire d'une fibre simple

Nous nous intéressons ici à une goutte liquide posée sur une fibre comme décrit en figure 1 (a). La fibre a une section circulaire de rayon a , un module d'Young E et une longueur totale L . Par ailleurs, la goutte liquide étant significativement plus grande que la fibre, elle est considérée sphérique et de volume $\frac{4}{3}\pi R^3$ [17]. On note respectivement γ , γ_{SL} et γ_{SV} les énergies spécifiques d'interface entre la goutte et l'air, la fibre et la goutte et entre la fibre et l'air. Du fait de la forte affinité entre la fibre et la goutte (*i. e.* $\gamma_{SL} < \gamma_{SV}$), les forces compressives de tension de surface aux ménisques (points A et B) peuvent être suffisantes pour plier la fibre au sein de la goutte et même de l'y enrouler. Le poids de la goutte la tire vers le bas et un angle d'équilibre β se dessine donc entre la fibre et l'axe horizontal.

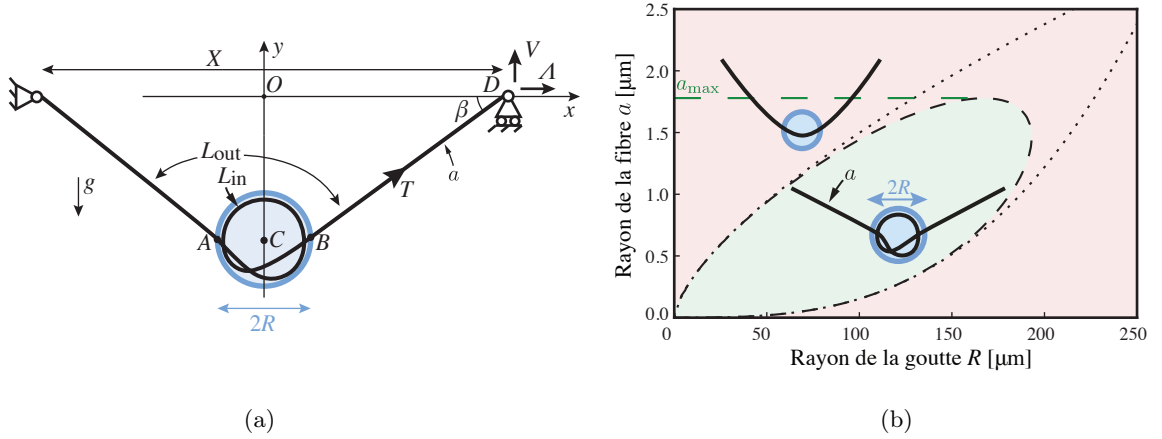


FIGURE 1. (a) Enroulement d'une fibre cylindrique de rayon a dans une goutte de rayon R . Le poids de la goutte la tire vers le bas, mais les forces de tension de surface aux ménisques (A et B) s'y opposent : il en découle un angle d'équilibre β décrit par les équations (4) et (5). (b) Représentation graphique de l'inégalité (6) pour une goutte d'huile silicone ($\gamma = 21$ mN/m, $\rho g = 9600$ N/m³) posée sur une fibre (module d'Young $E = 1$ GPa dans cet exemple). Pour qu'une fibre s'enroule dans une goutte, il faut donc que celle-ci soit assez grande (limite élasto-capillaire décrite par la courbe en pointillés supérieure), mais un poids de goutte excessif peut entraver l'enroulement (limite gravito-capillaire décrite par la courbe en pointillés inférieure où $\frac{4}{3}\pi\rho g R^3 < 2 \times 2\pi a \gamma$) [7]. La zone verte des systèmes « enroulables » est bornée par un rayon de fibre maximal a_{\max} explicité dans l'équation (7).

Nous étudions maintenant la relation entre les composantes de la force externe Λ et V , les forces de tension de surface et d'autres paramètres pour que le système soit à l'équilibre. Pour ce faire, nous dressons la liste des contributions à l'énergie potentielle totale \mathcal{V} du système dans une configuration d'enroulement de la fibre. Tout d'abord, les énergies d'interface mises en jeu sont $2\pi a \gamma_{SV} L_{\text{out}}$ et $2\pi a \gamma_{SL} L_{\text{in}}$, où L_{in} et L_{out} sont respectivement les longueurs de fibres à l'intérieur et à l'extérieur de la goutte (avec $L_{\text{in}} + L_{\text{out}} = L$). Ce modèle ne prenant pas la faible déformation de la goutte en compte, son énergie de surface (liquide-vapeur) ajoute un terme $4\pi R^2 \gamma_{LV}$ à \mathcal{V} , qui est constant et donc écarté. L'énergie de flexion de la fibre au sein de la goutte s'écrit rigoureusement $\frac{1}{2} EI \int_0^{L_{\text{in}}} \kappa^2(s) ds$, où I est le moment quadratique de la section de la fibre ($I = \pi a^4/4$) et s l'abscisse curviligne de la fibre. Ici, la courbure locale $\kappa(s)$ est considérée constante et égale à $1/R$. L'énergie potentielle de pesanteur de la goutte s'écrit $mg y_C$, avec C le centre de gravité de la goutte et $m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$, ρ étant la densité du liquide et g l'accélération de gravité terrestre. Finalement, le travail de la force externe Λ s'écrit $-\Lambda X$ où $X \approx L_{\text{out}} \cos \beta$. Avec $\gamma = \gamma_{SV} - \gamma_{SL}$ (liquide parfaitement mouillant) et $L_{\text{in}} = L - L_{\text{out}}$, l'énergie potentielle totale du système s'écrit, aux termes constants près :

$$\mathcal{V}(\beta, y_C, L_{\text{out}}) = \left(2\pi\gamma - \frac{1}{2} \frac{EI}{R^2} - \Lambda \cos \beta \right) L_{\text{out}} + mg y_C \quad (1)$$

et les trois variables de \mathcal{V} sont liées par la relation $L_{\text{out}} \sin \beta = -2y_C$ qui traduit de la position verticale du point D . On utilise donc :

$$\mathcal{L} = \mathcal{V} - V (2y_C + L_{\text{out}} \sin \beta) \quad (2)$$

pour écrire l'équilibre du système lorsque $(\partial \mathcal{L} / \partial L_{\text{out}}, \partial \mathcal{L} / \partial \beta, \partial \mathcal{L} / \partial y_C) = \mathbf{0}$. Ici, V est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de position verticale du point D et est donc interprété comme la force de réaction verticale du support à l'extrémité droite de la fibre. L'équilibre s'écrit :

$$\Lambda \cos \beta + V \sin \beta = 2\pi a \gamma - \frac{1}{2} \frac{EI}{R^2}, \quad (3a)$$

$$V = \frac{mg}{2}, \quad (3b)$$

$$V \cos \beta = \Lambda \sin \beta. \quad (3c)$$

La dernière équation témoigne de l'alignement de la force externe au point D , $\Lambda \mathbf{e}_x + V \mathbf{e}_y$, sur l'angle β , la fibre à l'extérieur de la goutte ne subit donc pas de contrainte de cisaillement mais uniquement une tension $T = \Lambda \cos \beta + V \sin \beta$. Ainsi, les deux premières équations de (3) peuvent être réécrites :

$$T = 2\pi a \gamma - \frac{1}{2} \frac{EI}{R^2}, \quad (4)$$

$$mg = 2T \sin \beta. \quad (5)$$

Pour des paramètres mg, a, γ, EI et R donnés, les équations (4)–(5) indiquent l'angle β auquel aura lieu l'enroulement élasto-capillaire. Une condition pour qu'un tel enroulement ait lieu est $\beta < \frac{\pi}{2}$, qui peut se réécrire $T > \frac{mg}{2}$ ou encore :

$$2\pi a \gamma > \frac{\pi E a^4}{8R^2} + \frac{2}{3} \pi \rho g R^3. \quad (6)$$

L'équation (6) montre que les ménisques doivent exercer une force supérieure au poids de la goutte ajoutée à une force de flexion. La figure 1 (b) donne une représentation graphique de cette inégalité en indiquant, pour un jeu de paramètres donné, quelles fibres s'enrouleront dans des gouttes selon leurs rayons respectifs. Il en découle une taille de fibre maximale au-delà de laquelle aucune goutte ne permettra l'enroulement élasto-capillaire. Ce rayon maximum est donné par la relation :

$$a_{\text{max}} = 2,78 \gamma^{5/7} (\rho g)^{-2/7} E^{-3/7}. \quad (7)$$

Cette relation théorique est confrontée aux résultats expérimentaux dans la figure 3 (zone verte du diagramme de phase). La théorie et l'expérience y présentent un bon accord.

3 Enroulement élasto-capillaire assisté par une fibre auxiliaire souple

L'enroulement élasto-capillaire permet donc la confection de fibres ultra-extensibles grâce au stockage automatique de grandes longueurs de fibre au sein de la goutte. Cette caractéristique mécanique extrême pourrait être d'intérêt dans le domaine de l'électronique étirable, où les connecteurs électriques extensibles sont recherchés. Mais les matériaux électriquement conducteurs sont habituellement durs ($E \sim 100$ GPa) et l'équation (7) prédit alors que pour qu'une fibre puisse être enroulée au sein d'une goutte d'huile silicone, son rayon ne doit pas dépasser quelques centaines de nanomètres. La difficulté de fabrication de telles fibres et l'écroulement quadratique de la conductivité avec le rayon d'une fibre sont dissuasifs, une alternative est ici proposée.

Nous utilisons le système décrit dans la figure 2 (a) où une fibre auxiliaire souple et épaisse est apposée à la fibre fonctionnelle (de rayon a). Cette fibre auxiliaire a un module d'Young E_{soft} et une section transversale rectangulaire de hauteur h_{soft} et de largeur w_{soft} . Il en résulte donc une fibre composite dont le périmètre de la section est hérité de la fibre auxiliaire ($a \ll h_{\text{soft}}, w_{\text{soft}}$). Dans cette configuration, l'énergie potentielle totale du système s'écrit :

$$\mathcal{V} = \left[2\gamma (h_{\text{soft}} + w_{\text{soft}}) - \Lambda \cos \beta - \frac{1}{2R^2} (EI + E_{\text{soft}} I_{\text{soft}}) \right] L_{\text{out}} + mg y_C, \quad (8)$$

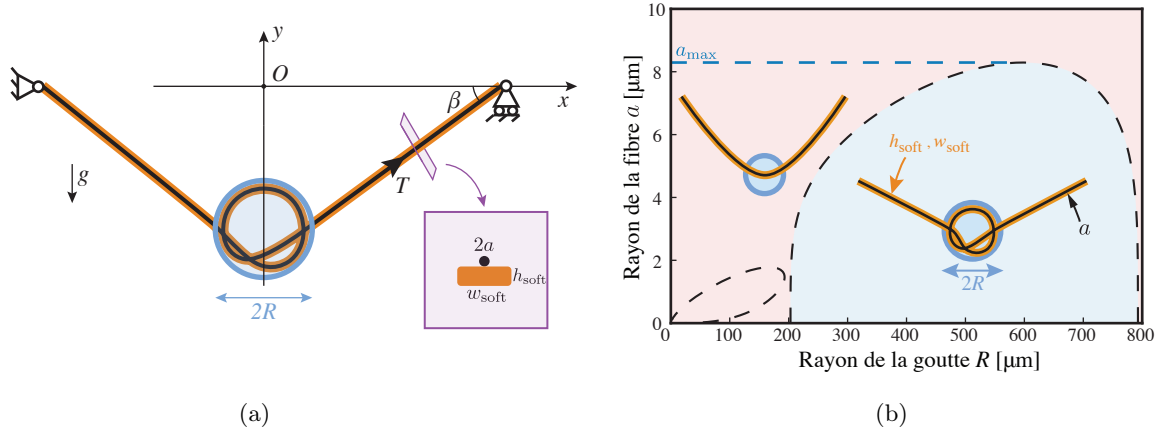


FIGURE 2. (a) Fibre cylindrique de rayon a apposée à une fibre auxiliaire souple (de section rectangulaire : hauteur h_{soft} , largeur w_{soft}) s'enroulant dans une goutte liquide de rayon R . La fibre composite (fibre cœur + fibre auxiliaire) hérite du grand périmètre de la fibre auxiliaire, mais sa rigidité à la flexion dépend principalement de celle de la fibre cœur. (b) Représentation graphique de l'inégalité (9) (languette bleue) pour une goutte d'huile silicone ($\gamma = 21$ mN/m, $\rho g = 9600$ N/m³) posée sur une fibre composite composée d'une fibre cœur de rayon a et de module d'Young $E = 1$ GPa pour cet exemple, et d'une fibre auxiliaire en polyvinyl-siloxane pour laquelle $w_{\text{soft}} = 190$ μm , $h_{\text{soft}} = 65$ μm , $E_{\text{soft}} = 200$ kPa. La petite languette près de l'origine est celle représentée sur la figure 1 (b). L'artefact de la fibre auxiliaire souple permet donc d'enrouler des fibres cœur beaucoup plus grosses (plus grand a). Le rayon de fibre cœur « enroulable » maximal a_{max} est explicité dans l'équation (10).

que nous minimisons de la même façon que dans la section précédente pour déterminer la configuration d'équilibre. La condition pour que la fibre composite s'enroule au sein d'une goutte est alors :

$$2\gamma(h_{\text{soft}} + w_{\text{soft}}) > \frac{1}{2R^2}(EI + E_{\text{soft}}I_{\text{soft}}) + \frac{2}{3}\pi\rho gR^3, \quad (9)$$

avec $I_{\text{soft}} = \frac{1}{12}w_{\text{soft}}h_{\text{soft}}^3$. La région des systèmes goutte sur fibre composite enroulable définie par cette inégalité est représentée en bleu dans la figure 2 (b) où elle est comparée à la région de systèmes enroulables pour une fibre simple (sans fibre auxiliaire). Pour cette nouvelle configuration, pour une fibre auxiliaire donnée, la région des fibres composites enroulables est encore bornée par un rayon de fibre dure maximale défini par :

$$a_{\text{max}} = E^{-1/4} \left(0.51(P_{\text{soft}}\gamma)^{5/3}(\rho g)^{-2/3} - 1.27 E_{\text{soft}}I_{\text{soft}} \right)^{1/4}. \quad (10)$$

Cette nouvelle limite supérieure théorique du rayon de la fibre dure est aussi comparée aux résultats expérimentaux dans la figure 3 (région bleue). Les fibres auxiliaires sont réalisés en polyvinyl-siloxane (PVS shore 8 - Zhermack) avec $w_{\text{soft}} = 190$ μm , $h_{\text{soft}} = 65$ μm , $E_{\text{soft}} = 200$ kPa. La loi de puissance $a_{\text{max}} \propto E^{1/4}$ de l'équation (10) semble en accord avec l'expérience, mais la théorie pourrait être raffinée pour rectifier l'erreur systématique d'un facteur 2 entre le modèle et l'expérience.

Il est à noter que le PEDOT:PSS (poly(3,4-ethylenedioxythiophene) polystyrene sulfonate, appelé PEDOT dans la figure 3) est un polymère conducteur d'électricité qui a pu être enroulé au sein de gouttes d'huile silicone tout en gardant sa conductivité grâce à la stratégie de la fibre auxiliaire souple. Les fibres de PEDOT:PSS ont été fabriquées suivant la méthode décrite par Okuzaki *et al.* [18].

4 Conclusion

Nous avons montré que dans les systèmes de goutte sur fibre, les forces capillaires de compression qu'exercent les ménisques peuvent être suffisantes pour enrouler une fibre, pourvu qu'elle soit assez fine.

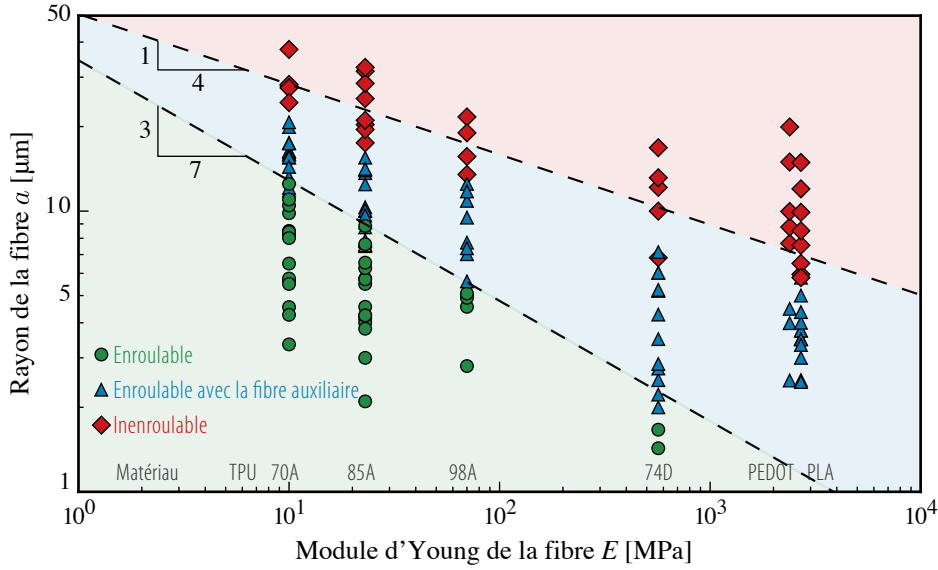


FIGURE 3. Les fibres « enroulables » et « inenroulables » de différents matériaux dans la goutte d’huile silicone optimale correspondante ($\gamma = 21 \text{ mN/m}$, $\rho g = 9\,600 \text{ N/m}^3$). Les fibres composites sont composées d’une fibre cœur (rayon a et module d’Young E) et d’une fibre auxiliaire de PVS ($w_{\text{soft}} = 190 \text{ }\mu\text{m}$, $h_{\text{soft}} = 65 \text{ }\mu\text{m}$, $E_{\text{soft}} = 200 \text{ kPa}$). La limite théorique entre la fibre simple enroulable et la fibre composite est donnée par l’équation (7) tandis que la limite théorique entre la fibre composite enroulable et inenroulable est donnée par l’équation (10). Les fibres de PEDOT:PSS et de PLA (acide polyactique) fabriquées ici, ne sont pas assez fines pour s’enrouler seules mais à l’aide de la stratégie de la fibre auxiliaire souple, des fibres microniques ont été enroulées au sein de gouttes d’huile. La loi de puissance théorique $a_{\text{max}} \propto E^{-1/4}$ semble appropriée pour décrire la frontière entre la région enroulable avec fibre auxiliaire et inenroulable mais l’erreur systématique d’un facteur 2 montre que ce modèle simple pourrait être raffiné.

Pour un liquide de tension de surface et de densité donnés, nous avons déterminé le rayon maximal d’une fibre pour qu’elle soit candidate à l’enroulement élasto-capillaire en fonction de son module d’Young. Sans changer la nature de la goutte, cette limite peut être dépassée en apposant une fibre auxiliaire souple et épaisse à la première fibre. En effet, le périmètre mouillé par la goutte liquide de cette nouvelle fibre composite est alors hérité principalement de la fibre auxiliaire, tandis que la rigidité à la flexion reste comparable à celle de la fibre cœur (dure) seule. Les forces capillaires peuvent alors l’emporter sur celles de résistance élastique à la flexion et du poids de la goutte — l’enroulement élasto-capillaire est rétabli. Cela nous a permis de fabriquer une fibre composite conductrice d’électricité ultra-extensible en apposant une fibre de PVS à une fibre du polymère conducteur PEDOT:PSS.

Remerciements : Nous remercions Natacha Krins et Régis Wunenburger pour leur précieux soutien expérimental. Le présent travail a été financé par les bourses ANR-09-JCJC-0022-01, ANR-14-CE07-0023-01 et ANR-13-JS09-0009. Nous remercions aussi l’appui financier de « La Ville de Paris — Programme Émergence » et du CNRS (bourse PEPS-PTI), ainsi que l’aide aux voyages de la Royal Society, par le biais des « *International Exchanges Scheme* » (bourse IE130506).

Références

1. A. E. COHEN & L. MAHADEVAN, Kinks, rings, and rackets in filamentous structures, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **100**, 12141–12146 (2003).

2. B. ROMAN & J. BICO, Elasto-capillarity: Deforming an elastic structure with a liquid droplet, *J. Phys. Condens. Matter*, **22**, 493101 (2010).
3. R. SYMS, E. YEATMAN, V. BRIGHT & G. WHITESIDES, Surface tension-powered self-assembly of microstructures — the state-of-the-art, *J. Microelectromech. S.*, **12**, 387–417 (2003).
4. A. ANTKOWIAK, B. AUDOLY, C. JOSSE RAND, S. NEUKIRCH & M. RIVETTI, Instant fabrication and selection of folded structures using drop impact, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **108**, 10400–10404 (2011).
5. B. ANDREOTTI, O. BAUMCHEN, F. BOULOGNE, K. E. DANIELS, E. R. DUFRESNE, H. PERRIN, T. SALEZ, J. H. SNOEIJER & R. W. STYLE, Solid capillarity: When and how does surface tension deform soft solids?, *Soft Matter*, **12**, 2993–2996 (2016).
6. J. BICO, B. ROMAN, L. MOULIN & A. BOUDA OUD, Adhesion: Elastocapillary coalescence in wet hair, *Nature*, **432**, 690–690 (2004).
7. É. LORENCEAU, C. CLANET & D. QUÉRÉ, Capturing drops with a thin fiber, *J. Colloid Interface Sci.*, **279**, 192–197 (2004).
8. C. DUPRAT, S. PROTIÈRE, A. Y. BEEBE & H. A. STONE, Wetting of flexible fibre arrays, *Nature*, **482**, 510–513 (2012).
9. A. SAURET, A. D. BICK, C. DUPRAT & H. A. STONE, Wetting of crossed fibers: Multiple steady states and symmetry breaking, *Europhys. Lett.*, **105**, 56006 (2014).
10. F. VOLLRATH & D. T. EDMONDS, Modulation of the mechanical properties of spider silk by coating with water, *Nature*, **340**, 305–307 (1989).
11. S. JUNG, C. CLANET & J. W. M. BUSH, Capillary instability on an elastic helix, *Soft Matter*, **10**, 3225–3228 (2014).
12. F. VOLLRATH, Spider webs and silks, *Sci. Am.*, **266**, 70–76 (1992).
13. R. D. SCHULMAN, A. PORAT, K. CHARLESWORTH, A. FORTAIS, T. SALEZ, E. RAPHAËL & K. DALNOKI-VERESS, Elastocapillary bending of microfibers around liquid droplets, *Soft Matter*, **13**, 720–724 (2017).
14. H. ELETTRIO, S. NEUKIRCH, F. VOLLRATH & A. ANTKOWIAK, In-drop capillary spooling of spider capture thread inspires hybrid fibers with mixed solid–liquid mechanical properties, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **113**, 6143–6147 (2016).
15. H. ELETTRIO, F. VOLLRATH, A. ANTKOWIAK & S. NEUKIRCH, Coiling of an elastic beam inside a disk: A model for spider-capture silk, *Int. J. Nonlinear Mech.*, **75**, 59–66 (2015).
16. M. ASHBY & Y. BRÉCHET, Designing hybrid materials, *Acta Mater.*, **51**, 5801–5821 (2003).
17. B. J. CARROLL, The accurate measurement of contact angle, phase contact areas, drop volume, and laplace excess pressure in drop-on-fiber systems, *J. Colloid Interface Sci.*, **57**, 488–495 (1976).
18. H. OKUZAKI & M. ISHIHARA, Spinning and characterization of conducting microfibers, *Macromol. Rapid Commun.*, **24**, 261–264 (2003).

Optical feedback dynamics of a mid-infrared semiconductor quantum cascade laser

Louise Jumpertz^{1,2}, Kevin Schires¹, Olivier Spitz¹, Marc Sciamanna³ & Frédéric Grillot^{2,4}

¹ LTCI, Télécom ParisTech, Université Paris-Saclay, 46 rue Barrault, 75013 Paris, France

² mirSense, Centre d'intégration NanoINNOV, 8 avenue de la Vauve, 91120 Palaiseau, France

³ LMOPS, CentraleSupélec, Université de Lorraine, 57070 METZ, France

⁴ Center for High Technology Materials, University of New-Mexico, 1313 Goddard SE, Albuquerque, NM 87106, USA

grillot@telecom-paristech.fr

Résumé. Les lasers à cascade quantique sont des sources semi-conductrices basées sur des transitions inter-sous-bandes au sein de la bande de conduction. Pouvant émettre sur une large plage de longueurs d'onde allant du moyen infra-rouge au terahertz, ils sont devenus une source privilégiée pour des applications telles que la spectroscopie de gaz, les communications en espace libre ou les contre-mesures optiques. L'objectif du travail est d'étudier numériquement l'évolution du diagramme de bifurcation en fonction de trois paramètres clés : le courant de pompe, la longueur de la cavité externe et le facteur d'élargissement spectral du laser intrinsèque à la structure. L'étude numérique confirme que le scénario de déstabilisation caractérisée par des fluctuations basse fréquence est bien reproductible dans d'autres conditions expérimentales ou sur d'autres types de structures à cascade quantique.

Abstract. Quantum cascade lasers (QCLs) are unipolar semiconductor lasers offering access to wavelengths from the mid-infrared to the terahertz domain and promising impact on various applications such as free-space communications, high-resolution spectroscopy, or optical countermeasures. Unlike bipolar semiconductor lasers, stimulated emission in QCLs is obtained via electronic transitions between discrete energy states inside the conduction band. In this article, we conduct a numerical study in order to investigate the bifurcation diagram taking into account three key-parameters: the pump current, the external cavity length, and the linewidth enhancement factor that is an intrinsic feature of the semiconductor laser. The results confirm that the destabilization scenario characterized by low frequency fluctuations is perfectly reproducible with other experimental conditions or other types of quantum cascade laser structures.

1 Introduction

Quantum cascade lasers (QCLs) are unipolar semiconductor lasers based on intersubband transitions within the conduction band [1]. Mid-infrared (IR) QCLs can operate in single- or multimode configuration, in pulsed or continuous-wave operation, at room temperature with thermo-electrical cooling, and have therefore become privileged sources for gas spectroscopy, free-space communications or optical countermeasures. QCLs are renowned for their high stability compared to interband laser diodes, in particular when subjected to external phenomena such as optical feedback [2]. In laser diodes, optical feedback, i.e. reinjection of part of the emitted light after reflection on a mirror, can destabilize the laser and may lead to a chaotic behavior [3]. On the other hand, no chaos has been observed so far in mid-IR QCLs, even though experimental studies have shown that optical feedback can influence static properties such as laser threshold, output power or wavelength [4]. Very recently, it has been demonstrated experimentally that mid-IR QCLs subject to external optical feedback can become chaotic and follow a route to chaos similar to that observed in class A lasers, with a destabilization taking place at the external cavity frequency and deterministic chaos characterized by low-frequency fluctuations (LFFs) [5]. The analysis of the optical spectra of a distributed feedback (DFB) QCL in several feedback conditions furthermore evidences a set of feedback ratios f_{ext} , defined as the ratio between reinjected and emitted powers, and

external cavity length L_{ext} for which the laser becomes unstable. This work aims to numerically study the birth of chaotic dynamics in a mid infrared QCL subjected to optical feedback taking into account three key-parameters: the pump current, the external cavity length, and the linewidth enhancement factor that is an intrinsic feature of the semiconductor laser. The results confirm that the destabilization scenario characterized by LFFs is perfectly reproducible with other experimental conditions or other types of quantum cascade laser structures.

2 Numerical model

The QCL optical feedback dynamics is investigated through the Lang and Kobayashi model [6] whose dimensionless equations can be expressed as:

$$\frac{dY}{ds} = (1 + i\alpha)ZY + \eta \exp(-i\Omega_0\theta)Y(s - \theta), \quad (1)$$

$$T \frac{dZ}{ds} = P - Z - (1 + 2Z)|Y|^2, \quad (2)$$

where Y is the slowly varying envelop of the electric field and Z the carrier number normalized to the value at threshold. Both equations are normalized with respect to the photon lifetime τ_p , T is the carrier to photon lifetime ratio, θ the normalized external cavity roundtrip time, Ω_0 the normalized laser frequency above threshold, $\bar{P} = I/I_{\text{th}} - 1$ the bias current over threshold and η the normalized feedback coefficient:

$$\eta = \frac{\tau_p}{\tau_{\text{in}}} 2C_l \sqrt{f_{\text{ext}}}, \quad (3)$$

with τ_{in} the laser cavity roundtrip time. C_l is the coupling strength coefficient of the front facet that is coupled to the external cavity, whose expression is complex in DFB lasers and depends on facet phases as described in [7]. Finally α is the so-called linewidth enhancement factor. This parameter, defined as the ratio between the real and imaginary parts of the nonlinear susceptibility, is of prime importance in semiconductor lasers since it quantifies the coupling between the phase and amplitude of the electrical field [8, 9]. In the Lang and Kobayashi equations, the carrier to photon lifetime ratio is $T = 0.265$, the normalized bias current is $P = 0.02$, the normalized cavity roundtrip time is $\theta = 492$ and the linewidth enhancement factor is $\alpha = 1.7$, value that best fits the experimental results. The feedback phase $\Omega_0\theta = -\arctan \alpha$ is chosen to an arbitrary value.

3 Numerical results

The laser under study is a DFB QCL emitting around 5.6 μm . The active area in AlInAs/GaInAs was grown on an InP cladding. A high-reflective coating on the back facet and a top metal grating enable single-mode operation in continuous-wave at room temperature. A complete list of all simulation parameters is given in Table 1.

3.1 Bifurcation diagram

The numerical bifurcation diagram is shown in Figure 1. As shown, the stable solution appearing for low feedback ratios destabilizes at the Hopf point $f_{\text{ext}} = 2.14\%$ and the route to chaos does not involve any oscillations at the characteristic frequency, only oscillations at the external cavity frequency. The bubble of chaos that occurs between $f_{\text{ext}} = 2.69\%$ and $f_{\text{ext}} = 2.91\%$ takes the form of LFF that are superimposed on the external cavity frequency oscillations. Finally, at high feedback ratios, the QCL is stable again on a different external cavity mode with larger output power. Running the simulation by decreasing the feedback ratio instead of increasing it gives another solution of successive stable external cavity modes, which coexist with the periodic and chaotic solution found previously. This multistability

Parameter	Value
Carrier lifetime τ_c	1.3 ps
Photon lifetime τ_p	4.7 ps
Bias current \bar{P}	0.02
External cavity roundtrip time θ	492
α -factor	1.7
Feedback phase	$\Omega_0\theta = -\arctan \alpha$

Table 1. Simulation parameters

is difficult to observe experimentally since it requires a very fine tuning of the feedback ratio. Moreover, since the basin of attraction of the LFF dynamics is large, as shown numerically, it captures most of the system trajectories in phase space. The numerical bifurcation diagram therefore unveils for the first time a class A-like scenario in the QCL under optical feedback, without any oscillations at the laser characteristic frequency.

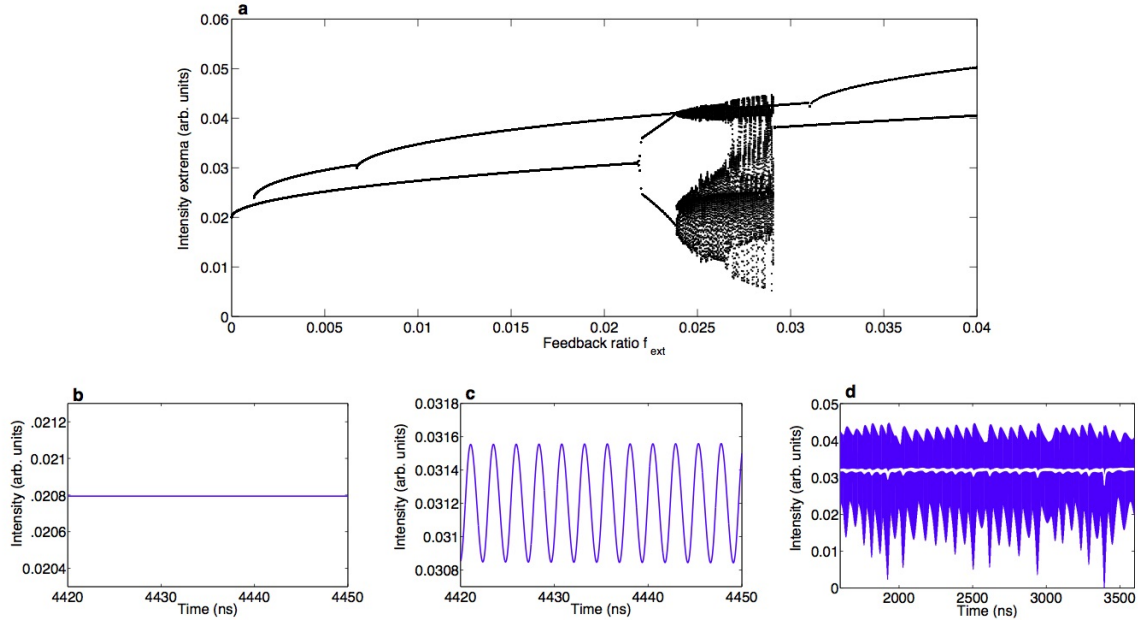


Figure 1. Numerical bifurcation diagram for $P = 0.02$ and $L_{\text{ext}} = 35$ cm, and associated time series. a) Numerical bifurcation diagram. b) Time trace for $f_{\text{ext}} = 0.11\%$, showing stable signal. c) Time trace for $f_{\text{ext}} = 2.14\%$, showing oscillations at the external cavity frequency. d) Time trace for $f_{\text{ext}} = 2.59\%$, showing both LFF and oscillations at the external cavity frequency.

Let us stress that the value $\alpha = 1.7$ was determined to best fit the experimental results within the range of values measured previously in CW operation [10]. Although the dynamical response of the laser to optical feedback is equivalent to a modulation, which can lead to a change in the α value due to e.g. thermal effects or gain compression, the α -factor can be considered as quasi-static in this case. The typical frequency above which the modulation response of a QCL reaches a plateau corresponding to a quasi-static α is indeed below 100 MHz close to threshold [11], well below the external cavity frequency

which arise in the system under optical feedback. Furthermore, the occurrence of LFF and chaos can no longer be analyzed using the small-signal modulation approximation, and the dependency of the α -factor on the modulation frequency no longer applies. Therefore, the α can be considered as quasi-static for the whole set of feedback conditions, and the choice of $\alpha = 1.7$ is perfectly justified [12].

3.2 Influence of the α -factor

As shown in Figure 2, the destabilization of the QCL under optical feedback still occurs for lower values of α -factor, and the bifurcation scenario remains the same, involving oscillations at the external cavity frequency and low frequency fluctuations. However, the feedback ratio at which the first Hopf bifurcation occurs increases drastically for smaller α , and the amplitude of the LFF area is strongly reduced. For instance, when $\alpha = 1$, with the same parameters $P = 0.02$ and $L_{\text{ext}} = 35$ cm, the Hopf bifurcation takes place at $f_{\text{ext}} = 75\%$ and the LFF, which appear around $f_{\text{ext}} = 80\%$, disappear after an increase in feedback ratio of only 0.05%. Such high values of feedback ratios are obviously unreachable experimentally. In THz QCLs, for which α -factor values much lower than 1 were reported, there will probably be no occurrence of chaos [13].

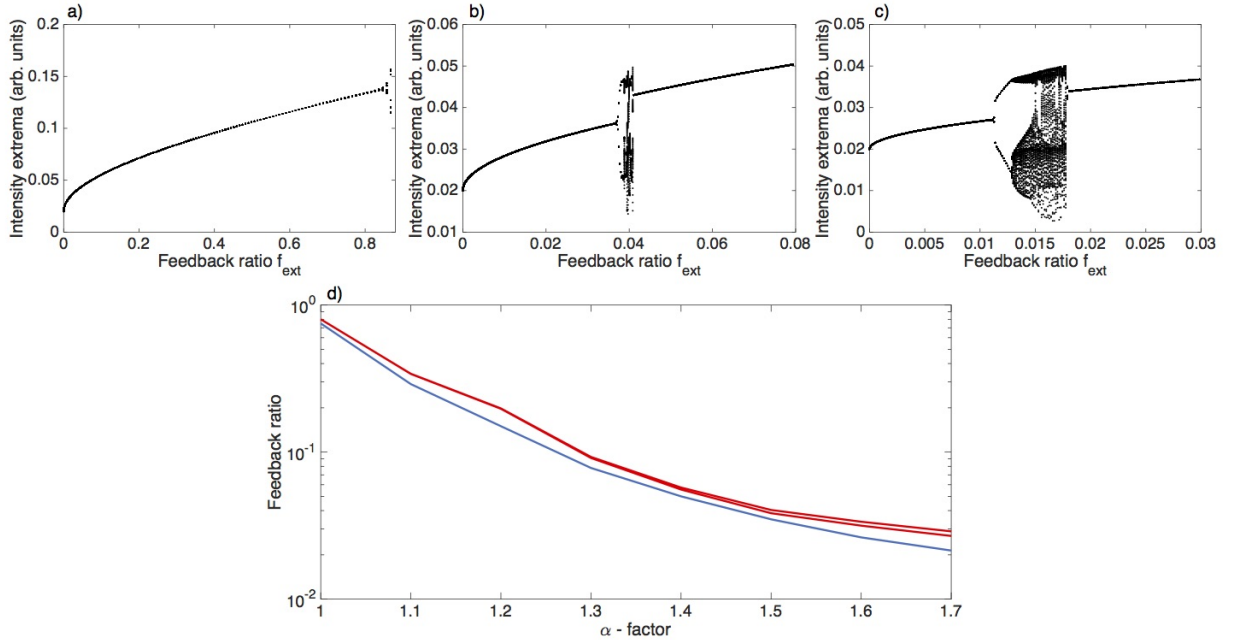


Figure 2. Influence of the α -factor on the bifurcation diagram for $P = 0.02$ and $L_{\text{ext}} = 35$ cm. a) Numerical bifurcation diagram for $\alpha = 1$. b) Numerical bifurcation diagram for $\alpha = 1.5$. c) Numerical bifurcation diagram for $\alpha = 2$. d) Evolution of the Hopf point (in blue) and of the lower and upper limits of the LFF area (in red) as a function of the α -factor.

3.3 Influence of the bias current

As expected from the study in interband lasers, the appearance of LFF depends strongly on the bias current, and they are rapidly displaced towards high feedback ratios as the pump parameter P increases. For $L_{\text{ext}} = 35$ cm and $\alpha = 1.7$, the first Hopf bifurcation occurs at $f_{\text{ext}} = 2.14\%$ at $P = 0.02$ and at $f_{\text{ext}} = 26.44\%$ for $P = 0.10$, whereas the LFF appear at $f_{\text{ext}} = 2.69\%$ and $f_{\text{ext}} = 29.34\%$ respectively, as shown in Figure 3.

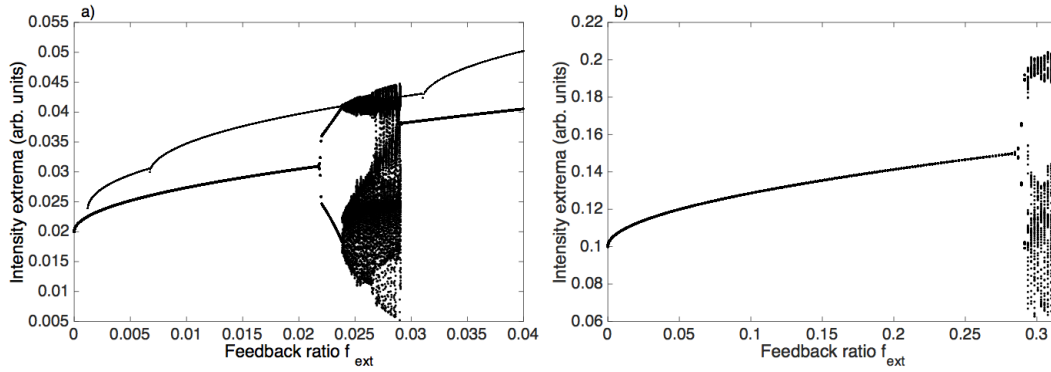


Figure 3. Influence of the bias parameter P on the bifurcation diagram for $L_{\text{ext}} = 35$ cm and $\alpha = 1.7$. a) Numerical bifurcation diagram for $P = 0.02$. b) Numerical bifurcation diagram for $P = 0.10$.

3.4 Influence of the external cavity length

As presented in Figure 4, the feedback ratio at which the Hopf point occurs shows only a small variation when increasing the external cavity length from 25 to 55 cm (blue circles), whereas the LFF begin at a significantly lower feedback ratio (2.15% for 55 cm instead of 2.76% for 25 cm, red diamonds), and the amplitude of the LFF area also decreases (yellow squares representing the limit of restabilization). This trend is also similar to that obtained from the analysis of the optical spectra, where the extent of the fourth regime, which is supposed to correspond to instabilities and chaos, decreases rapidly with the external cavity length, although its starting point remains roughly the same.

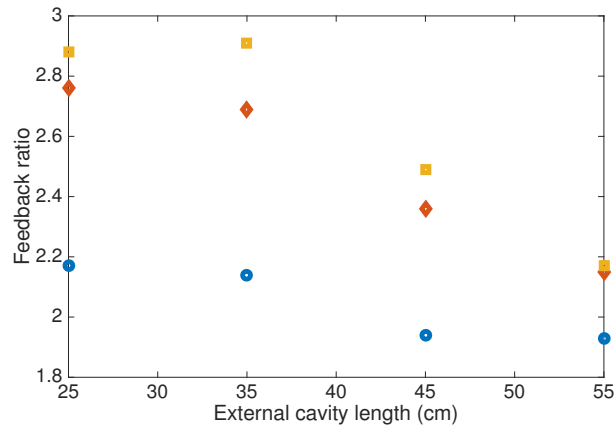


Figure 4. Influence of the external cavity length L_{ext} on the bifurcation diagram for $P = 0.02$ and $\alpha = 1.7$. In blue circles, occurrence of the first Hopf bifurcation. In red diamonds, appearance of the LFF. In yellow squares, restabilization.

Finally, for some configurations, a second destabilization was observed numerically for high feedback ratios (higher than what is experimentally achievable), resulting in periodic or multi-periodic oscillations. However, no second chaotic bubble was obtained with the considered parameters. The same conclusions on the class A-like dynamics of QCLs subject to optical feedback, with chaos that may appear very close

to threshold, have been recently obtained by analytic resolution of the full set of equations of a QCL under optical feedback [14].

4 Conclusion

In this work, we have numerically investigated the optical feedback dynamics a mid-IR QCL. Under certain feedback conditions, the QCL can become chaotic and follow a route to chaos similar to that observed in class A lasers, with a destabilization taking place at the external cavity frequency and deterministic chaos characterized by LFFs. Simulations have shown that for lower α -factor values, the feedback ratio corresponding to the Hopf point is much higher, while the amplitude of the LFF regions is drastically reduced. The chaotic bubble also occurs for smaller feedback rate when increasing the cavity length while the Hopf bifurcation increases when the pump current gets larger. The possible appearance of chaos in QCLs has several consequences. First, this leads to a generalization of the use of mid-IR optical isolators in experimental setups and in packaged QCLs in order to avoid parasitic optical feedback on the laser. On the other hand, a chaotic QCL could be used in new experiments based on chaos, similarly to those existing in the near-IR. We could imagine mid-IR chaotic communications, based on chaos modulation for encryption and synchronized chaos for message transmission [15], chaotic LIDAR [16] or unpredictable sources for optical countermeasures.

Acknowledgments: This work is funded by the Direction Générale de l'Armement (DGA).

References

1. J. FAIST, *Quantum Cascade Lasers*, Oxford University Press (2013).
2. F. P. MEZZAPESA, L. L. COLUMBO, M. BRAMBILLA, M. DABBICCO, S. BORRI, M. S. VITIELLO, H. E. BEERE, D. A. RITCHIE & G. SCAMARCIO, *Opt. Express*, **21**, 13748–13757 (2013).
3. T. SANO, *Phys. Rev. A*, **50**, 2719–2726 (1994).
4. L. JUMPERTZ, M. CARRAS, K. SCHIRES & F. GRILLOT, *Appl. Phys. Lett.*, **105**, 131112, (2014).
5. L. JUMPERTZ, K. SCHIRES, M. CARRAS, M. SCIAMANNA & F. GRILLOT, *Light Sci. Appl.*, **5**, e16088 (2016).
6. R. LANG & K. KOBAYASHI, *IEEE J. Quantum Electron.*, **16**, 347–355 (1980).
7. F. GRILLOT, *IEEE J. Quantum Electron.*, **45**, 720–729 (2009).
8. M. OSINSKI & J. BUUS, *IEEE J. Quantum Electron.*, **23**, 9–29 (1987).
9. C. WANG, K. SCHIRES, M. OSINSKI, P. J. POOLE & F. GRILLOT, *Sci. Rep.*, **6**, 27825 (2016).
10. L. JUMPERTZ, C. CAILLAUD, C. GILLES, S. FERRÉ, K. SCHIRES, L. BRILLAND, J. TROLES, M. CARRAS & F. GRILLOT, *AIP Adv.*, **6**, 105201 (2016).
11. A. HANGAUER, G. SPINNER, M. NIKODEM & G. WYSOCKI, *Opt. Express*, **22**, 23439–23455, (2014).
12. L. JUMPERTZ, S. FERRÉ, K. SCHIRES, M. CARRAS & F. GRILLOT, *Proc. SPIE*, **9370**, 937014 (2015).
13. L. L. COLUMBO & M. BRAMBILLA, *Opt. Express*, **22**, 10105–10118 (2014).
14. G. FRIART, G. VAN DER SANDE, G. VERSCHAFFELT & T. ERNEUX, *Phys. Rev. E*, **93**, 052201 (2016).
15. M. SCIAMANNA & K. A. SHORE, *Nat. Photon.*, **9**, 151–162 (2015).
16. F.-Y. LIN & J.-M. LIU, *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, **10**, 991–997 (2004).

Motifs d'érosion dans le sillage d'un cylindre

Florent Lachaussée¹, Yann Bertho¹, Cyprien Morize¹, Alban Sauret² & Philippe Gondret¹

¹ Laboratoire FAST, Université Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, F-91405, Orsay, France

² Laboratoire SVI, CNRS, Saint-Gobain, 39 quai Lucien Lefranc, F-93303 Aubervilliers, France

florent.lachaussée@u-psud.fr

Résumé. Nous observons expérimentalement deux motifs d'érosion différents à la surface d'un lit granulaire au voisinage d'un cylindre vertical, lorsqu'on le soumet à un écoulement d'eau suffisamment rapide. Le motif d'affouillement classique observé au pied du cylindre, dû au tourbillon en « fer à cheval », apparaît pour une vitesse critique V_h inférieure à la vitesse critique d'érosion sans cylindre V^* . Mais nous observons également un autre motif en aval du cylindre consistant en deux fosses symétriques allongées ressemblant à des « oreilles de lapin », dues aux tourbillons de sillage. Ce nouveau motif d'affouillement peut s'observer à des vitesses plus faibles que l'affouillement induit par tourbillon en fer à cheval, au-delà d'une vitesse critique $V_b < V_h$, avec un temps de formation nettement plus long. Il nous est possible de séparer l'effet des différents tourbillons en remplaçant une partie du lit granulaire amont par un fond rigide non érodable.

Abstract. We report on two different patterns that can be experimentally observed at the bed surface in the vicinity of a vertical cylinder when submitted to a strong enough steady water flow. The classical scour pattern observed at the cylinder foot and due to the “horseshoe” vortex around occurs at a critical velocity V_h below the critical velocity V^* for erosion without any cylinder. In addition we also observe another pattern downstream the cylinder that consists of two symmetrical ovoid holes having “bunny ears” shape, due to wake vortices. This new scour pattern can be observed at lower velocities than the horseshoe scour, above a critical velocity $V_b < V_h$, with a timescale of formation much larger than the one of horseshoe scour. We can separate the effects of the different vortices by replacing part of the granular bed with a rigid non-erodible floor.

1 Introduction

Les phénomènes d'érosion et de transport de sédiments peuvent représenter une menace importante pour les activités humaines, les infrastructures et les écosystèmes. Par exemple, au voisinage d'une pile de pont, d'un mât d'éolienne ou encore d'une plateforme offshore, l'érosion est amplifiée. Ce phénomène, appelé affouillement, peut endommager la structure et causer son effondrement. En raison des risques encourus, de multiples études ont été menées à l'aide de canaux hydrauliques de grandes dimensions [1]. La description physique du phénomène d'érosion au voisinage de structures reste cependant incomplète à ce jour. La raison en est que le couplage entre la dynamique du fluide et le transport de particules solides est mal quantifié et que l'écoulement autour du cylindre est complexe [2–4]. La présence de la structure perturbe l'écoulement et est à l'origine de plusieurs tourbillons : un tourbillon en « fer à cheval » au pied de l'obstacle et des tourbillons de sillage en aval. En raison de la présence de ces tourbillons, la vitesse de l'eau augmente localement, ce qui provoque l'érosion à proximité de l'obstacle. La complexité physique du phénomène rend difficiles les approches numériques, qui progressent néanmoins, notamment grâce aux développements récents de méthodes couplant des simulations aux grandes échelles (LES) pour le fluide et des éléments discrets (DEM) pour le milieu granulaire [5].

Dans cet article, nous nous intéressons au cas simplifié de l'affouillement au pied d'un cylindre circulaire. Cette géométrie est classique dans les études portant sur l'affouillement et trouve de nombreuses applications dans le génie civil, en milieu fluvial ou maritime. Nous présentons les résultats expérimentaux obtenus dans un montage modèle à petite échelle qui facilite les mesures et permet un changement relativement aisé des paramètres physiques.

2 Dispositif expérimental

Le montage est constitué d'un canal hydraulique fermé, en forme d'hippodrome, d'environ 3,6 m de long et $W = 100$ mm de large, composé de deux parties linéaires de 900 mm de long séparées par deux parties courbées de rayon 300 mm. L'écoulement de l'eau (masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et hauteur $h = 160$ mm) se fait à l'aide d'une roue à aubes située dans l'une des sections rectilignes du canal. Les mesures sont menées en aval d'un nid d'abeille dans l'autre section rectiligne, au fond de laquelle se trouve le milieu granulaire constitué de billes de verre (masse volumique $\rho_s = 2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et diamètre moyen $d = (270 \pm 30) \mu\text{m}$) placé dans un tiroir de 600 mm de long et de profondeur 40 mm. Un cylindre de diamètre $D = 20$ mm dépasse du milieu granulaire d'une hauteur $H = 90$ mm, inférieure à la hauteur d'eau. L'obstacle est fixé au fond du lit granulaire aux deux tiers de la section d'essai, point que nous prenons comme origine du repère de référence horizontal (x, y) , où x est dans la direction de l'écoulement et y dans la direction transverse. Les parois verticales de la section d'essai sont en verre, permettant une visualisation directe de l'affouillement au voisinage du cylindre. Au-dessus du canal, un profilomètre laser est monté sur une platine de déplacement horizontale pour scanner la topographie du lit $\xi(x, y)$. Pour éviter que les mouvements de la surface libre ne viennent perturber les mesures de ξ , un plafond de verre est placé à la surface de l'eau au-dessus du lit granulaire.

En modifiant la vitesse de rotation de la roue à aubes, on contrôle la vitesse V de l'écoulement dans la gamme $0,05 \lesssim V \lesssim 0,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Le nombre de Reynolds typique associé à la largeur du canal W est $Re_W \simeq 10^4$, correspondant à un régime turbulent. Le nombre de Reynolds de l'écoulement basé sur le diamètre du cylindre D est $Re_D \simeq 10^3$, bien au-delà de 69, valeur critique de l'instabilité de Bénard–von Kármán pour un cylindre infini entre deux parois verticales avec le même rapport de blocage $D/W = 0,2$ [6]. L'écoulement autour du cylindre est donc bien turbulent, avec d'importants tourbillons de sillage instationnaires. Le nombre de Reynolds particulière est $Re_d \simeq 50$, correspondant plutôt à un régime inertiel. Le nombre de Froude $Fr = U/\sqrt{gh}$, défini comme le rapport de la vitesse de l'écoulement avec celle des ondes de surface, est inférieur à 0,2 : l'écoulement est sous-critique et les effets de surface libre négligeables.

Avant chaque expérience, le lit granulaire est remué puis nivelé afin d'avoir une surface initiale plane et horizontale. Le cylindre est ensuite placé sur son support sans perturber le lit granulaire. Puis l'écoulement est lancé à la vitesse V désirée. Le profilomètre laser est alors démarré pour mesurer la topographie instantanée du lit $\xi(x, y, t)$, où $\xi(x, y, t)$ est la variation d'altitude au point (x, y) entre l'état initial avant écoulement et l'instant t . Ces relevés sont faits sans interrompre l'écoulement, à intervalles Δt réguliers et adaptés à la dynamique d'érosion.

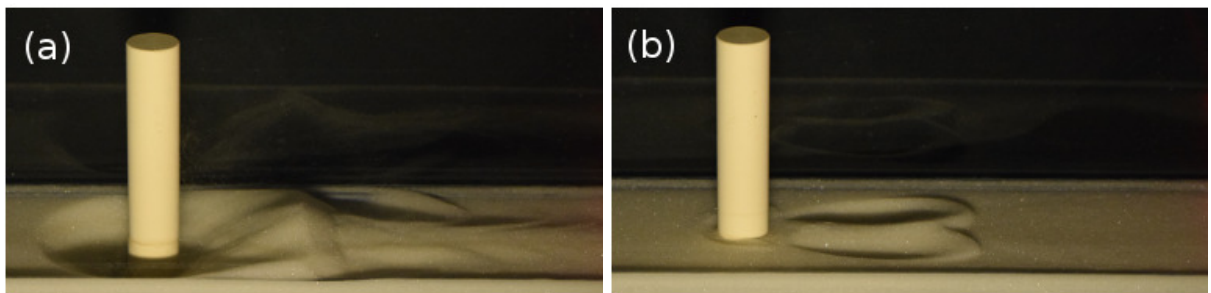


FIGURE 1. Photographie des deux motifs d'affouillement au voisinage du cylindre, l'écoulement venant de la gauche : (a) fosse creusée par le tourbillon en fer à cheval, $Re_D \simeq 3,6 \times 10^3$, $Sh \simeq 8$ et $t \simeq 6 \times 10^2$ s ; (b) fosses en oreilles de lapin, $Re_D \simeq 2,3 \times 10^3$, $Sh \simeq 3,3$ et $t \simeq 4,76 \times 10^4$ s.

3 Résultats expérimentaux

En l'absence d'obstacle, on observe une érosion du lit granulaire au-delà d'un nombre de Shields critique $Sh^* \simeq 10$, où le nombre de Shields $Sh = \rho V^2 / \Delta \rho g d$ est défini en utilisant la vitesse V de l'écoulement loin du fond. On utilise ici un nombre de Shields inertiel, puisque $Re_d > 1$. Ce nombre est différent du nombre de Shields local que l'on pourrait obtenir en connaissant précisément la contrainte exercée par le fluide sur le fond [7, 8]. Nos études sont menées en condition *clear-water*, c'est-à-dire que l'érosion ne se produit qu'au voisinage du cylindre ($Sh < Sh^*$).

On observe différents motifs d'érosion, que l'on photographie à travers la paroi du canal (Fig. 1) et dont on relève la topographie grâce au profilomètre laser (Fig. 2). Lorsque la vitesse d'écoulement est importante, tout en restant suffisamment faible pour demeurer en condition *clear-water* ($4 \lesssim Sh \lesssim 10$), on observe une figure d'érosion telle que celles classiquement rapportées dans la littérature [3], à savoir une fosse d'affouillement entourant le cylindre (Fig. 1 (a) et Fig. 2 (a)). Celle-ci est essentiellement creusée par le tourbillon en fer à cheval intense qui se forme au pied de la pile. L'évolution de la morphologie du lit est rapide, ici de l'ordre d'une heure. Pour des vitesses d'écoulement plus faibles ($2 \lesssim Sh \lesssim 4$), l'érosion se concentre plus loin en aval de l'obstacle. Deux fosses allongées, avec une forme remarquable d'« oreilles de lapin », apparaissent alors sous l'effet des tourbillons de sillage (Fig. 1 (b) et Fig. 2 (b)). Ces motifs mettent plus de temps à se former, la dynamique étant ici d'une dizaine d'heures. Les fosses en « oreilles de lapin » diffèrent des motifs observés à l'aval d'un obstacle par Auzerais *et al.* [9] : ceux-ci n'ont ni la même forme, ni la même localisation et coexistent avec la fosse d'affouillement classique.

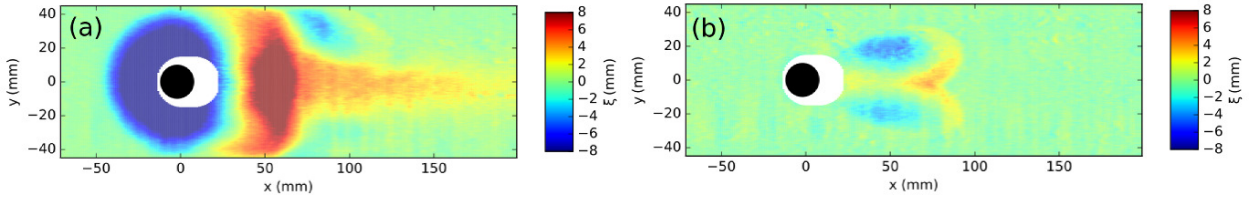


FIGURE 2. Relevés topographiques $\xi(x, y)$ pour les deux motifs d'érosion, avec les mêmes paramètres que pour la figure 1 : (a) fosse creusée par le tourbillon en fer à cheval au pied de l'obstacle, $Re_D \simeq 3,6 \times 10^3$, $Sh \simeq 8$ et $t \simeq 6 \times 10^2$; (b) fosses en oreilles de lapin en aval du cylindre, $Re_D \simeq 2,3 \times 10^3$, $Sh \simeq 3,3$ et $t \simeq 4,76 \times 10^4$. Le cercle noir correspond à l'emplacement du cylindre. La zone blanche est la région qui n'est pas détectée par le profilomètre.

Dans notre expérience, il est possible d'étudier séparément l'effet de ces différents tourbillons (sillage et fer à cheval) en remplaçant une partie du lit granulaire amont par un fond rigide non érodable au voisinage du cylindre. Ceci permet d'inhiber l'érosion due au tourbillon en fer à cheval, laissant seuls les tourbillons de sillage agir. On est ainsi en mesure d'obtenir des motifs en oreilles de lapin à des vitesses d'écoulement élevées, pour lesquelles on aurait obtenu une fosse classique en l'absence de sabot rigide (Fig. 3 et Fig. 1 (a)). Ceci permet d'étendre le domaine d'existence du motif en oreilles de lapin ($2 \lesssim Sh \lesssim 10$), assez restreint par ailleurs.

En utilisant les relevés précis de la topographie du lit $\xi(x, y, t)$, on peut extraire l'évolution temporelle de la profondeur maximale d'affouillement $P_{\max}(t)$. Les figures 4 (a) et 4 (b) montrent cette évolution pour les deux types de motifs respectivement : la fosse creusée par le Tourbillon en Fer à Cheval (TFC), et le motif en Oreilles de Lapin (OL). Dans le cas TFC, $P_{\max}(t)$ évolue rapidement et semble tendre vers une valeur asymptotique P_{∞} de l'ordre de la taille D du cylindre, conformément aux valeurs trouvées dans la littérature [1–3]. Il faut noter que les courbes de la figure 4 (a) sont tronquées, en se limitant aux points pour lesquels la fosse n'atteint pas les parois latérales du canal. Le motif OL évolue nettement plus lentement et atteint une valeur asymptotique P_{∞} plus faible, jusqu'à 10 fois moindre que pour le motif TFC. Plus la vitesse d'écoulement est élevée, plus les fosses en oreilles de lapin sont profondes aux temps

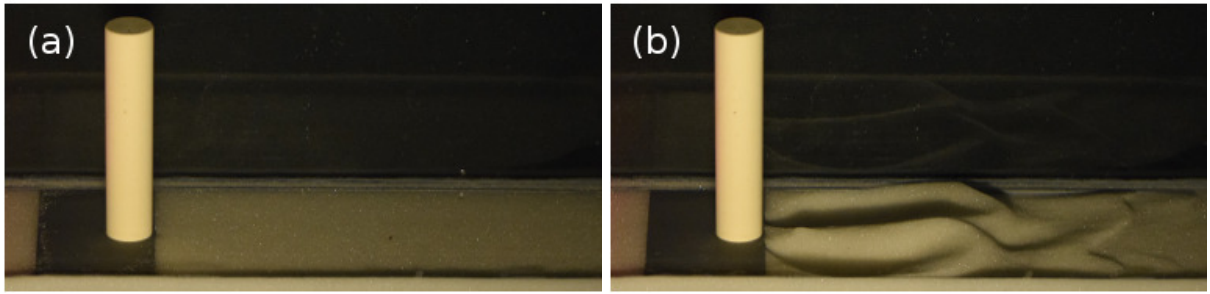


FIGURE 3. Utilisation d'un sabot rigide en pied de cylindre (embase noire sur la photo) pour étendre le domaine d'existence des oreilles de lapin : (a) remplacement d'une partie du lit granulaire par un fond rigide ; (b) motif en oreilles de lapin observé à $t \simeq 3,2 \times 10^3$ s. La vitesse d'écoulement est la même que pour la photo de la figure 1 (a) : $Re_D \simeq 3,6 \times 10^3$ et $Sh \simeq 8$.

longs. La courbe correspondant à l'écoulement le plus rapide sur la figure 4 (b) a été obtenue en utilisant le sabot rigide.

Les relevés topographiques nous donnent aussi accès à la position (x_m, y_m) du maximum de profondeur. Pour les fosses TFC, passés les tous premiers instants (où l'ombre du cylindre perturbe les relevés), le point le plus profond se trouve au pied amont du cylindre $(x_m, y_m) \simeq (-D/2, 0)$, et ce quelle que soit la vitesse d'écoulement. Dans le cas OL, le maximum de profondeur reste dans la même zone pour chaque expérience. On remarque cependant qu'à hautes vitesses d'écoulement, cette zone est plus éloignée de l'axe longitudinal du canal : $(x_m, y_m) \simeq (5D/2, \pm D/2)$ pour $Sh \simeq 2,8$ contre $(x_m, y_m) \simeq (5D/2, \pm D)$ pour $Sh \simeq 4,4$.

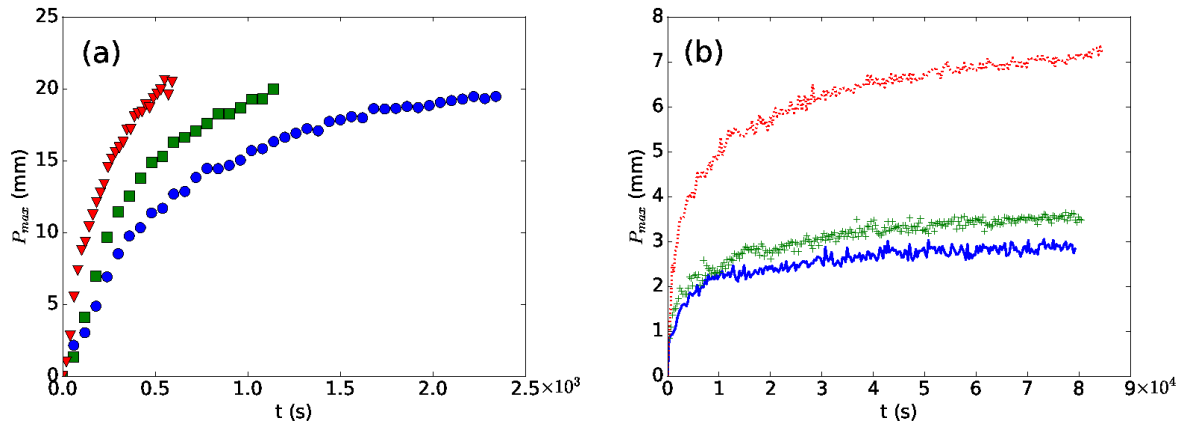


FIGURE 4. Évolution temporelle de la profondeur maximale d'affouillement $P_{\max}(t)$, pour les deux types de motif. (a) Pour le motif creusé par tourbillon en fer à cheval : (●) $Re_D \simeq 2,8 \times 10^3$, $Sh \simeq 5,1$; (■) $Re_D \simeq 3,2 \times 10^3$, $Sh \simeq 6,4$; (▼) $Re_D \simeq 3,6 \times 10^3$, $Sh \simeq 8,0$. (b) Pour les oreilles de lapin : (—) $Re_D \simeq 2,1 \times 10^3$, $Sh \simeq 2,8$; (+) $Re_D \simeq 2,3 \times 10^3$, $Sh \simeq 3,3$; (···) $Re_D \simeq 2,7 \times 10^3$, $Sh \simeq 4,4$.

4 Conclusion

À l'aide d'une approche expérimentale modèle, nous étudions l'érosion au voisinage d'un cylindre monté verticalement sur un lit granulaire, en condition *clear-water*. Outre la figure d'affouillement classique qui se forme rapidement sous l'effet du tourbillon en fer à cheval, nous observons un second motif d'érosion en formes d'« oreilles de lapin » à l'aval de l'obstacle, qui se forme plus lentement à des vitesses d'écoulement plus faibles, sous l'effet des tourbillons de sillage. L'ajout d'un sabot rigide permet de découpler l'effet des différents tourbillons et d'augmenter le domaine d'existence du motif en oreilles de lapin. L'utilisation des données issues des relevés topographiques, en faisant varier le diamètre et la hauteur du cylindre, ainsi que les grains, permettra de préciser les domaines d'existence des différents motifs. Des mesures PIV (*Particle Image Velocimetry*) sont en cours pour confirmer le lien entre la structure de l'écoulement et les figures d'érosion.

Remerciements : Ce travail est soutenu par l'Agence Nationale de la Recherche à travers le projet SSHEAR No. ANR-14-CE03-001. Nous sommes reconnaissants envers S. Chateau pour ses expériences préliminaires et envers E. Weisfred pour les discussions fructueuses que nous avons eues avec lui. Nous remercions J. Amarni, A. Aubertin, L. Auffray et R. Pidoux pour leurs contributions au développement du montage expérimental.

Références

1. R. ETTEMA, G. CONSTANTINESCU & B. MELVILLE, Evaluation of bridge scour research: Pier scour processes and predictions, *Washington, DC: Transportation Research Board of the National Academies* (2011).
2. C. MANES & M. BROCCINI, Local scour around structures and the phenomenology of turbulence, *J. Fluid Mech.*, **779**, 309–324 (2015).
3. A. ROULUND, B. M. SUMER, J. FREDSSØE & J. MICHELSEN, Numerical and experimental investigation of flow and scour around a circular pile, *J. Fluid Mech.*, **534**, 351–401 (2005).
4. C. H. K. WILLIAMSON, Vortex dynamics in the cylinder wake, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **28**, 477–539 (1995).
5. S. KUANG, C. LAMARCHE, J. CURTIS & A. YU, Discrete particle simulation of jet-induced cratering of a granular bed, *Powder Technol.*, **239**, 319–336 (2013).
6. J.-H. CHEN, W. G. PRITCHARD & S. J. TAVENER, Bifurcation for flow past a cylinder between parallel planes, *J. Fluid Mech.*, **284**, 23–41 (1995).
7. S. BADR, G. GAUTHIER & P. GONDRET, Crater jet morphology, *Phys. Fluids*, **28**, 033305 (2016).
8. T. LOISELEUX, P. GONDRET, M. RABAUD & D. DOPPLER, Onset of erosion and avalanche for an inclined granular bed sheared by a continuous laminar flow, *Phys. Fluids*, **17**, 103304 (2005).
9. A. AUZERAIS, A. JARNO, A. EZERSKY & F. MARIN, Formation of localized sand patterns downstream from a vertical cylinder under steady flows: Experimental and theoretical study, *Phys. Rev. E*, **94**, 052903 (2016).

Observation de la cascade de Kolmogorov

Martine Le Berre¹, Christophe Josserand^{2,3}, Thierry Lehner⁴ & Yves Pomeau⁵

¹ ISMO–CNRS, Université Paris-Sud, 91400 Orsay, France

² Institut Jean Le Rond d’Alembert, Sorbonne Universités, UMR–CNRS 7190, UPMC, 75005 Paris

³ LadHyX, UMR–CNRS 7646, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex

⁴ Laboratoire Luth, Observatoire de Paris, UMR–CNRS 8102, 5 Place J. Janssen, 92190 Meudon

⁵ Department of Mathematics, University of Arizona, Tucson, AZ 85721, USA

`martine.le-berre@u-psud.fr`

Résumé. Pour répondre à la question : « la cascade turbulente existe-t-elle ? », nous proposons un jeu de fonctions de corrélation capables de tester l’irréversibilité du processus de transfert de l’énergie vers les petites échelles, de prouver qu’il a lieu vers les petites échelles spatiales et de déduire sa durée en fonction de l’échelle. Ces tests sont appliqués à un signal turbulent de vitesse du vent, enregistré dans la soufflerie de Modane et aussi à la solution d’une équation modèle pour la turbulence d’ondes. Le caractère irréversible du signal est d’abord mis en évidence à l’aide de fonctions de corrélation temporelles. Leur comportement inattendu suggère l’existence de singularités à temps fini (plutôt qu’un signal intermittent). Ensuite nous introduisons des fonctions tests dans l’espace temps–fréquence capables de relier l’irréversibilité au transfert de l’énergie : le signe de ces fonctions indique la direction du transfert, leurs extrema indiquent l’instant du transfert et la valeur de la fréquence réceptrice. Nous observons que la cascade turbulente existe uniquement dans le domaine inertiel où l’énergie cinétique est transférée plus rapidement (en moyenne) du nombre d’onde k_1 vers k_2 que de k_1 vers k_3 pour $k_1 < k_2 < k_3$.

Abstract. To answer the question whether a cascade of energy exists or not in turbulence, we propose a set of correlation functions able to test if there is an irreversible transfert of energy, step by step, from large to small structures. These tests are applied to real Eulerian data of a turbulent velocity flow, taken in the wind grid tunnel of Modane, and also to a prototype model equation for wave turbulence. First we demonstrate the irreversible character of the flow by using multi-time correlation function at a given point of space. Moreover the unexpected behavior of the test function leads us to connect irreversibility and finite time singularities (intermittency). Secondly we show that turbulent cascade exists, and is a dynamical process, by using a test function depending on time and frequency. The cascade shows up only in the inertial domain where the kinetic energy is transferred more rapidly (on average) from the wavenumber k_1 to k_2 than from k_1 to k_3 larger than k_2 .

1 Introduction

L’hypothèse d’une cascade d’énergie qui est à la base de la théorie de la turbulence formulée par Kolmogorov [1] est généralement admise bien qu’elle n’ait jamais été vérifiée directement. Pour expliquer comment, dans un milieu turbulent 3D incompressible stationnaire et isotrope (en moyenne), l’énergie passe des grandes échelles spatiales, ℓ_0 , où elle est injectée, vers les petites échelles, ℓ_ν , où elle est dissipée par viscosité, Kolmogorov proposa l’hypothèse que, dans les échelles intermédiaires (domaine inertiel), $\ell_\nu \ll \ell \ll \ell_0$, l’énergie est transférée, étape par étape d’une échelle donnée ℓ vers une plus petite, par une cascade non dissipative qui se produit à flux d’énergie constant, de taux ϵ . Les conséquences de cette hypothèse concernant les lois d’échelles des vitesses et les temps caractéristiques à chaque échelle spatiale, $u_\ell \sim (\ell\epsilon)^{1/3}$ et $\tau_\ell \sim (\ell^2/\epsilon)^{1/3}$, ont été largement validées mais pas l’hypothèse sous-jacente. Le sujet de notre étude est : y a-t-il cascade d’énergie dans le domaine inertiel ?

Pour y répondre nous utilisons une propriété fondamentale de la cascade : son irréversibilité temporelle. À partir de fonctions de corrélations spatio-temporelles proposées par Y. Pomeau [3] pour tester un signal irréversible, nous avons cherché d’abord si les fluctuations du signal turbulent sont irréversibles, ensuite s’il y a cascade d’énergie. Ce programme est appliqué d’abord à l’analyse des données physiques réelles : la vitesse (eulérienne) du vent enregistrée dans la soufflerie de Modane [2] (section 2). Cette étude est

basée sur l'hypothèse de Taylor car nous ne disposons que d'un seul enregistrement en un point donné. La reconstruction du champ spatial des vitesses est obtenue en supposant que les fréquences spatiales, k , et temporelles, ω , sont liées par la relation $\omega = k v_0$, où v_0 est la vitesse moyenne du vent. Enfin, nous avons testé les outils employés sur une équation modèle de turbulence d'ondes [4] bien connue pour engendrer irréversibilité et cascade (section 3). Pour une étude détaillée, nous renvoyons le lecteur à la référence [5].

2 Irréversibilité et cascade dans l'expérience de Modane

Cette expérience mesure, par fil chaud, la vitesse du vent dans la veine retour du tunnel en régime de turbulence développée supposée stationnaire. Le nombre de Reynolds effectif est $Re_\lambda = 2500$. Le temps d'échantillonnage est $t_s = 1/25$ ms, plus petit que le temps dissipatif, le temps total d'enregistrement est 10 minutes. La vitesse moyenne est $v_0 = 20,53$ m/s, l'écart-type $\sigma_v = \langle (v - v_0)^2 \rangle^{1/2} = 1,68$ m/s. Le spectre en nombre d'onde, Fig. 1 (a), est obtenu à partir des données temporelles en utilisant l'hypothèse de Taylor. Il montre un domaine inertiel s'étendant sur près de trois décades. L'irréversibilité des fluctuations de vitesse $x(t) = v(t) - v_0$ est étudiée à l'aide la fonction test

$$\Psi(\tau) = \langle x^2(t) x(t + \tau) \rangle - \langle x(t) x^2(t + \tau) \rangle, \quad (1)$$

qui est nulle si le signal est réversible. Chacune des fonctions de corrélation est impaire et change de signe par renversement du temps. La figure 2 montre que le signal d'irréversibilité $\Psi(\tau)$ a une portée aussi longue que la fonction d'auto-correlation des vitesses $C(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle$ (cf. Fig. 3 de la référence [5]). Notons que bien que la fonction test $\Psi(\tau)$ présente un maximum suivi d'une décroissance vers zéro, cela est compatible avec l'existence de lois d'échelles en puissance de τ sur l'ensemble du domaine inertiel, puisqu'ici le domaine inertiel correspond à des temps 10^{-3} s $\lesssim \tau \lesssim 0,15$ s où la fonction $\Psi(\tau)$ est monotone. Néanmoins nous devons noter que les exposants de $\Psi(\tau)$ ne sont pas constants sur cet intervalle (cf. Fig. 5 et la discussion Sec. 2.3 de [5]).

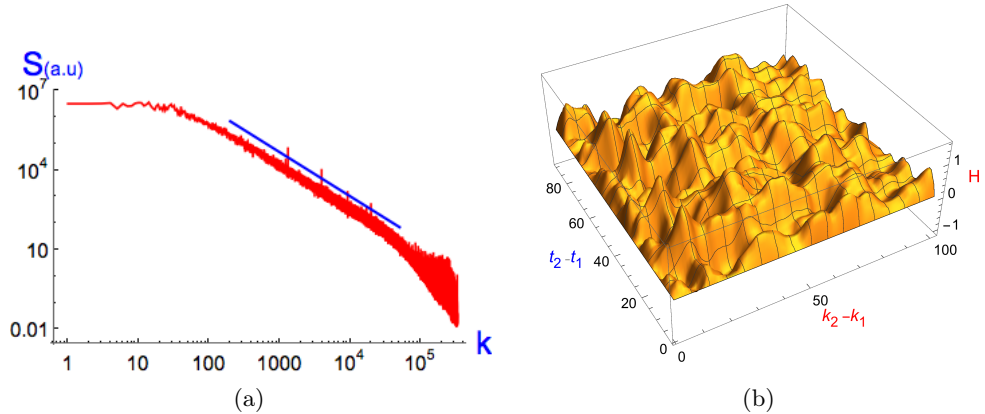


FIGURE 1. (a) Spectre expérimental de Modane $S(k)$, l'abscisse k est en unité de $k_u = 0,011$ m $^{-1}$. La ligne droite de pente $-5/3$ montre l'étendue du domaine inertiel. (b) Fonction test $H_{k_1}(k, t)$ pour $k_1 = 6182$ dans le domaine inertiel.

Près de l'origine, le développement en puissance de τ donne

$$\Psi(\tau) = 2\tau \langle x^2 \dot{x}(t) \rangle + \frac{\tau^3}{3} \langle x^2 \ddot{x}(t) \rangle + \dots \quad (2)$$

Le terme $\langle x^2 \dot{x}(t) \rangle = \frac{1}{3} \langle dx^3/dt \rangle$ est nul pour toute fonction stationnaire à condition qu'elle soit différentiable, ce qui donnerait pour $\Psi(\tau)$ une pente à l'origine égale à 3. Ce n'est pas le cas pour le vent

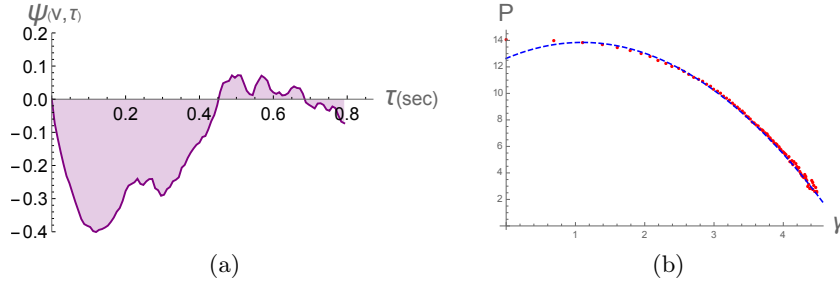


FIGURE 2. Test d'irréversibilité pour les vitesses eulériennes de l'expérience de Modane, (a) $\Psi(\tau)$ défini par l'équation (1). (b) Distribution de probabilité $P(\gamma)$ des accélérations, $\gamma = \dot{x}$.

turbulent de Modane où la pente à l'origine est égale à l'unité (cf. Fig. 4 de la référence [5]). Ce résultat inattendu est relié à l'existence de grandes accélérations. La figure 2(b) montre que la loi de probabilité de l'accélération γ décroît lentement, puisqu'elle est remarquablement décrite par la fonction $P(\gamma) = P_0 \exp[-(\log \gamma/\gamma_0)^2]$. Nous suggérons que ces comportements inattendus ($\Psi(\tau)$ à l'origine de $P(\gamma)$ à grand γ), serait dus à l'existence de des singularités à temps fini dans le champ de vitesse (cf. discussion section 2 de la référence [5]). Ces solutions singulières laisseraient une empreinte sur le fil chaud si elles se produisaient dans son voisinage. L'étude théorique et numérique de solutions auto-similaires est en cours.

Pour étudier si la cascade de Kolmogorov existe ou non, il nous faut utiliser des fonctions tests définies dans l'espace (k, t) , susceptibles de nous renseigner sur les temps de transfert de l'énergie entre deux échelles spatiales et sur la direction de ce transfert. L'hypothèse de Taylor (ou turbulence gelée) permet de définir la densité d'énergie cinétique dans l'espace des nombres d'onde $[k, k + dk]$ au temps t_0 ,

$$E(k, t_0) = \left| \int dt v(t) w(t - t_0) e^{ik v_0 t} \right|^2, \quad (3)$$

où la fonction fenêtre $w(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{t^2}{2\theta}}$ doit être étroite devant le temps d'intégration et doit inclure plusieurs oscillations de nombre d'onde k . Pour affirmer que l'énergie cascade, étape par étape, vers les petites échelles spatiales, il faut prouver qu'il y a en moyenne un transfert d'énergie de $E(k_1, t)$ vers les grands k , et que le transfert de k_1 à $k_2 = k_1 + \Delta k$ (avec Δk positif) est plus rapide que le transfert de k_1 à $k'_2 = k_1 + \Delta k'$ où $\Delta k' > \Delta k$. Ces conditions étant reliées à l'irréversibilité du processus, nous utilisons la fonction test H proposée par Y. Pomeau [3],

$$H(k_1, k_2, t) = \langle E(k_1, t_1) E(k_2, t_2) \rangle - \langle E(k_1, t_2) E(k_2, t_1) \rangle. \quad (4)$$

Cette fonction représente la différence des fonctions de corrélation en temps et en fréquences $H(k_1, k_2, t) = \mathcal{C}(k_1, k_2, t) - \mathcal{C}(k_1, k_2, -t)$, où $\mathcal{C}(k_1, t_1; k_2, t_2) = \langle E(k_1, t_1) E(k_2, t_2) \rangle - \langle E(k_1) \rangle \langle E(k_2) \rangle$, n'est pas une fonction paire de $t = t_2 - t_1$.

La figure 1(b) montre une fonction test H pour k_1 et k_2 dans le domaine inertiel, obtenue après une moyenne glissante sur le temps t_1 . Cette fonction est fortement modulée. L'amplitude (positive et négative) des oscillations est du même ordre de grandeur que celle de chaque fonction $\mathcal{C}(k_1, k_2, t)$, ce qui prouve le bien-fondé d'associer le test d'irréversibilité à l'étude de la cascade. Les domaines où l'amplitude est positive correspondent à des régions où la corrélation entre les fréquences k_1 et k_2 est plus forte pour des temps $t > 0$, c'est-à-dire où il y a *transfert direct* d'énergie (*i. e.* vers les petites échelles spatiales). Inversement le transfert d'énergie se produit vers les grandes échelles dans les régions où H est négative. On montre que le volume (intégrale de H sur k, t) des domaines positifs est supérieur au volume où l'amplitude est négative, dans le domaine inertiel exclusivement, ce qui prouve que le transfert d'énergie se fait globalement vers les petites échelles, comme on l'attendait.

Pour décider s'il y a (ou non) cascade, nous étudions l'évolution temporelle des profils en k de la fonction test. La figure 3 reproduit ces profils : aux temps courts (Fig. 3(a)) on observe une oscillation

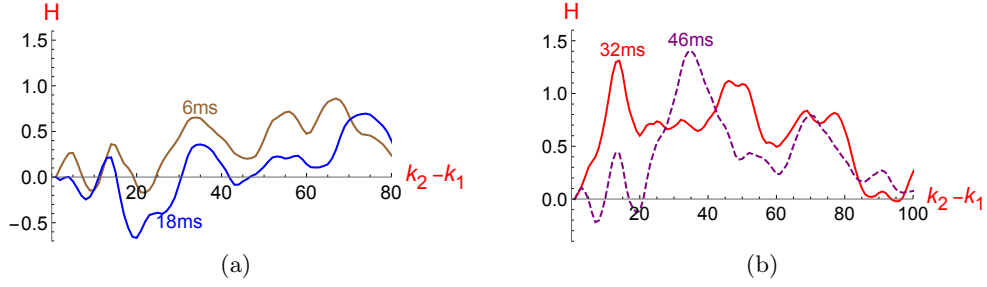


FIGURE 3. Profils (en k) de la fonction test \mathcal{H} , (a) aux temps courts $t = 4$ and $t = 10$, (b) aux temps $t = 52$ and $t = 60$, correspondant à l'apparition des deux premiers maxima de \mathcal{H} (le temps réel en ms est $t_{\text{ms}} = 2(t - 1)$ où t est en unité de la figure 1).

temporelle de faible amplitude de l'ensemble des modes. Elle indique un transfert direct vers une large bande de fréquences (profil brun $t = 6$ ms), suivi par une décroissance du profil avec transfert partiellement inversé (courbe bleue $t = 18$ ms). Après ce faible mouvement de marée, l'amplitude du profil en k croît fortement pour atteindre son maximum à $t = 32$ ms (courbe rouge de la figure 3 (b)). Ensuite une nouvelle oscillation temporelle de grande amplitude aboutit au profil en pointillé bleu sur la même figure, au temps $t = 46$ ms. Ce sont les résultats les plus significatifs de notre étude, puisque ces deux transferts directs originaires de la fréquence source $k_1 = 50$ ont lieu *successivement*, le premier est dirigé majoritairement vers la fréquence réceptrice $k_2 = k_1 + 15$, le second vers $k_2 = k_1 + 35$, donc vers une échelle spatiale plus petite. On peut donc conclure que *la cascade directe d'énergie existe* pour les modes inertiels du régime turbulent de la vitesse du vent dans la soufflerie de Modane.

En faisant varier la valeur de la fréquence source, k_1 nous avons observé que l'intervalle de temps τ qui caractérise le premier transfert, ou temps d'apparition du premier maximum sur les profils en k ($\tau = 32$ ms sur la figure 3 (b)) varie avec la valeur de la fréquence source, selon une loi en accord avec celle prédite par la théorie K41 [1], $\tau/\tau' = (k_1/k_1')^{-2/3}$. D'autres exemples sont donnés dans la référence [5], en particulier nous montrons que ce processus de cascade directe n'a pas lieu dans domaine dissipatif, où la fonction H est négative presque partout dans le domaine (k, t) examiné. Dans le cas où la fréquence source k_1 est à la jonction inertiel/dissipatif, nous n'avons pas observé de transfert clair, de la fréquence k_1 vers des fréquences particulières, mais une oscillation globale de l'amplitude (Fig. 13 (b) de la référence [5]) qui indique un transfert direct puis inverse d'une large bande de modes, puis la scission de cette large bande avec transferts déphasés (Fig. 13 (c) de la référence [5]).

3 Turbulence d'ondes

Pour compléter l'étude précédente faite à partir d'un signal expérimental temporel (sa dépendance spatiale est gelée puisque nous faisons l'hypothèse de Taylor), nous appliquons les fonctions tests aux solutions d'une équation différentielle partielle modèle (en 1D d'espace connu sous le nom WWT), prototype pour la faible turbulence d'ondes [4], à laquelle nous ajoutons un terme de forçage et de pompage aux grandes échelles spatiales et d'amortissement aux petites échelles, afin de produire artificiellement une cascade *directe* d'énergie susceptible d'être observée par des simulations rapides et extensives. L'équation est de la forme

$$i\partial_t\psi = |\partial_x|^{1/2}\psi + |\psi|^2\psi + i(\mathcal{I} - \mathcal{D} - \mathcal{P}), \quad (5)$$

où \mathcal{I} , \mathcal{D} and \mathcal{P} sont les termes d'injection, dissipation et pompage : dans l'espace de Fourier $\psi_k = \int \psi e^{ikx} dx$, $\mathcal{I} = A\Theta(k, t)$ pour $|k| < k_i$ est un bruit basse fréquence ($\Theta(k, t)$ est un bruit blanc, k_i est petit), $\mathcal{D}_k = \alpha(\sqrt{|k|} - \sqrt{k_c})\psi_k$ pour $|k| > k_c$ et $\mathcal{P} = -\alpha\psi_k\delta(k)$ agit seulement sur $k = 0$.

L'équation originale [4] $i\partial_t\psi = |\partial_x|^{1/2}\psi + |\psi|^2\psi$ a été largement étudiée : les termes linéaires donnent la même relation de dispersion que les vagues en eau profonde, $\omega = \sqrt{k}$, les termes non linéaires introduisent des interactions entre les ondes. Définissons la densité de masse $n_k = \langle |\psi_k|^2 \rangle$, et la densité

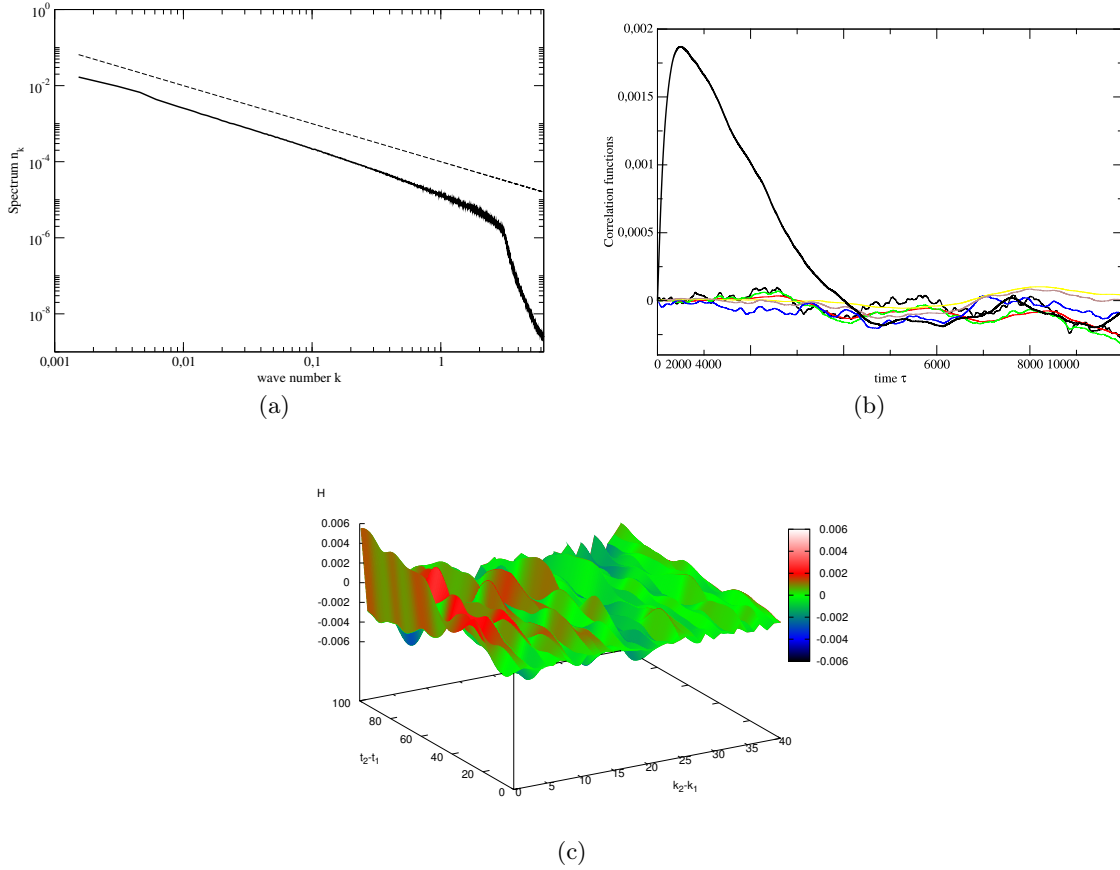


FIGURE 4. (a) Spectre $n_k = \langle |\psi_k|^2 \rangle$ en fonction du nombre d'onde k . La droite en pointillé de pente -1 correspond à l'équation (6) prédisant une cascade directe de la solution stationnaire du modèle WWT. (b) Fonction test d'intercorrélation (7). Deux fonctions tests d'irréversibilité $\Psi(\tau)$ appliquées séparément à la masse et à l'énergie [5] sont reportées également (courbes très petite amplitude). (c) Fonction test (8), $H(k_1, k_2, t_2 - t_1)$ pour le modèle MMT en régime turbulent stationnaire, pour k_1, k_2 dans le domaine inertiel.

d'énergie cinétique $\mathcal{E}_k = \sqrt{|k|} |\psi_k|^2$. À faible amplitude, Zakharov a montré qu'il existe deux solutions stationnaires de l'équation cinétique (équation d'évolution de n_k), l'une décrivant une cascade directe d'énergie cinétique vers les petites échelles, de flux constant P :

$$n_k \propto P^{1/3} k^{-1}. \quad (6)$$

L'autre solution stationnaire correspond à une cascade inverse de masse vers les grandes échelles, de flux constant Q , son spectre s'écrivant sous la forme $n_k \propto Q^{1/3} k^{-5/6}$. Nous retrouvons cette double dynamique couplant l'énergie et la masse dans les solutions de l'équation modifiée. À partir de la condition initiale $\psi = 0$, les solutions turbulentes sont atteintes après un transitoire. La masse totale $N(t)$ et l'énergie totale \mathcal{H}_a de ces solutions turbulentes sont des fonctions aléatoires stationnaires — en temps — (cf. Fig. 15 de [5]) car l'injection est équilibrée par les deux termes de dissipation aux grands k et de pompage aux petits k . Le spectre en fréquence (Fig. 4(a)) est en bon accord avec la relation (6) qui caractérise la solution stationnaire, avec cascade directe du flux d'énergie P . L'irréversibilité de la solution est à peine visible lorsqu'on applique la fonction test $\Psi(\tau)$ aux fluctuations de la masse ou de l'énergie cinétique, $x = [N(t) - \langle N \rangle] / \langle N \rangle$ ou $x = [\mathcal{E}_c(t) - \langle \mathcal{E}_c \rangle] / \langle \mathcal{E}_c \rangle$. En revanche le test d'irréversibilité est très positif (cf. Fig. 4(b)) lorsqu'il concerne la fonction d'inter-corrélation entre la masse et l'énergie :

$$\chi(\tau) = \frac{\langle N(t) \mathcal{E}_c(t + \tau) \rangle - \langle \mathcal{E}_c(t) N(t + \tau) \rangle}{\langle N \rangle \langle \mathcal{E}_c \rangle}. \quad (7)$$

Ce résultat indique que la masse et l'énergie sont *irréversiblement corrélées* suivant un processus complexe. Si l'on injecte aux grandes échelles à la fois de la masse et de l'énergie, il apparaît que masse et énergie injectées à grande échelle ne sont pas transférées à la même vitesse ni dans le même sens : l'essentiel de la masse injectée est transférée vers les plus grandes échelles ($k = 0$), tandis que l'énergie cascade lentement vers les petites échelles.

De la même façon nous avons étudié l'inter-corrélation des fluctuations masse-énergie dans l'espace des fréquences pour appliquer les fonctions tests de la cascade :

$$H(k_1, k_2, t) = \mathcal{C}_{N,\mathcal{E}}(k_1, t_1; k_2, t_2) - \mathcal{C}_{N,\mathcal{E}}(k_2, t_2; k_1, t_1), \quad (8)$$

où $\mathcal{C}_{N,\mathcal{E}}(k_1, k_2, t_1, t_2) = \langle [N_{k_1}(t_1) - \langle N_{k_1} \rangle] [\mathcal{E}_{k_2}(t_2) - \langle \mathcal{E}_{k_2} \rangle] \rangle$. La figure 4 (c) montre que cette fonction H est majoritairement positive lorsque k_1 et k_2 appartiennent au domaine inertiel, de plus il apparaît que le signal s'amplifie vers la droite, indiquant une cascade directe de l'énergie (vers les petites échelles). D'autres exemples sont montrés en référence [5], l'un dans le domaine dissipatif, l'autre à la transition inertiel-dissipatif : dans ces deux cas on n'observe pas de maxima décalés vers la droite (lorsque k_2 augmente), au contraire la fonction H décroît vers zéro.

4 Discussion

Notre analyse de la turbulence développée est basée sur la propriété d'irréversibilité qui est fondamentale pour caractériser un système hors équilibre qui ne suit pas les lois d'équilibre de Gibbs-Boltzmann. Nous avons fait le postulat qu'il y a une sorte de bijection entre le transfert d'énergie à chaque échelle spatiale et l'amplitude d'une fonction, H , appelée fonction test, définissant la dynamique irréversible dans le domaine (k, t) , qui est nulle si le système est réversible. Certains résultats sont nets, d'autres plus difficiles à interpréter. Les fonctions de corrélation que nous avons utilisées pour analyser d'une part les données expérimentales de la vitesse turbulente du vent dans une soufflerie, d'autre part les solutions numériques d'une équation aux dérivées partielles modélisant la turbulence d'ondes, ont permis de visualiser le transfert de l'énergie vers les petites échelles et de déterminer les temps associés à chaque transfert élémentaire. Nous pouvons affirmer qu'il y a clairement une cascade d'énergie au sens de Kolmogorov, avec transfert d'une échelle spatiale vers une plus petite, étape par étape, c'est-à-dire avec des temps de transferts dépendant de la différence entre la fréquence source k_1 et la fréquence réceptrice k_2 . Un second résultat, inattendu, concerne le comportement d'une fonction test purement temporelle, $\Psi(\tau)$. Dans le cas de l'expérience de Modane, elle montre une anomalie aux temps courts. Nous relierons cette anomalie à la statistique des grandes accélérations : leur distribution de probabilité, de type log-normale, décroît lentement, un phénomène souvent attribué au comportement intermittent du signal. Nous suggérons une autre explication : les grandes accélérations pourraient être dues à la présence de singularités à temps fini dans les équations d'Euler incompressible. Pour que cette hypothèse soit validée, il faudrait que ces solutions soient compatibles avec les transferts d'énergie par cascade, c'est-à-dire que ces singularités (stoppées en réalité par la viscosité) ne dissipent pas d'énergie. En résumé, le dernier mot n'est pas dit concernant le transfert d'énergie dans le cadre de la théorie de Kolmogorov K62.

Références

1. A. N. KOLMOGOROV, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **30**, 301–305 (1941) ; ultérieurement l'auteur dérivera un modèle statistique incluant les fluctuations, basé également sur l'hypothèse de cascade, où les lois d'échelles sont absentes : A. N. KOLMOGOROV, A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **13**, 82–85 (1962).
2. H. KAHALERRAS, Y. MALÉCOT, Y. GAGNE & B. CASTAING, Intermittency and Reynolds number, *Phys. Fluids*, **10**, 910–921 (1998).
3. Y. POMEAU, Symétrie des fluctuations dans le renversement du temps, *J. Phys. (Paris)*, **43**, 859–867 (1982).
4. A. J. MAJDA, D. W. MCLAUGHLIN & E. G. TABAK, A one-dimensional model for dispersive wave turbulence, *J. Nonlinear Sci.*, **7**, 9–44 (1997).
5. C. JOSSERAND, M. LE BERRE, T. LEHNER & Y. POMEAU, Turbulence: Does energy cascade exist?, *J. Stat. Phys.*, doi:10.1007/s10955-016-1642-5 (2016).

Turbulence d'ondes inertielles générée par instabilité elliptique

Thomas Le Reun¹, Benjamin Favier¹, Adrian J. Barker² & Michael Le Bars¹

¹ IRPHE, UMR-CNRS 7342, Université Aix Marseille, Centrale Marseille, Marseille, France

² Department of Applied Mathematics, School of Mathematics, University of Leeds, Leeds, LS2 9JT, UK

lereun@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. L'instabilité elliptique se produit lorsqu'un écoulement de vorticité uniforme voit ses lignes de courant déformées en ellipses dont les axes principaux tournent à une vitesse différente de celle du fluide. Cette configuration se rencontre par exemple dans les noyaux planétaires soumis à des forces de marées, ou encore dans le contexte des vortex cisailés. Si sa croissance par résonance de deux ondes inertielles avec l'écoulement de base est bien caractérisée tant expérimentalement que théoriquement, sa saturation non linéaire présente une variété de comportements jusqu'ici mal comprise. Certaines expériences et simulations montrent l'émergence de tourbillons géostrophiques, *i. e.* invariants dans la direction de l'axe de rotation du fluide, tandis que d'autres suggèrent que les ondes inertielles initialement croissantes engendrent une cascade d'ondes à partir des modes résonnants à l'origine de l'instabilité. Nous montrons ici une série de simulations numériques où nous reproduisons dans un modèle idéalisé l'ensemble de ces observations. Un tel résultat est obtenu en appliquant spécifiquement aux vortex géostrophiques une friction visant à modéliser par exemple les effets en volume de la présence de parois. Lorsque la croissance de ces écoulements est suffisamment contrainte, nous montrons que la saturation non linéaire correspond à une turbulence d'ondes inertielles, créant des petites échelles à partir du forçage de deux ondes   fréquence fix e.

Abstract. The elliptical instability takes place in fluids with uniform vorticity whose streamlines are deformed into ellipses rotating at a rate different from the flow velocity. This happens for instance in planetary cores undergoing tidal forces, or in the context of strained vortices. Although the growth mechanism, due to resonance between two inertial waves with the elliptical base flow, is well characterized, its nonlinear saturation remains poorly understood. In some experiments and simulations, large coherent structures called geostrophic vortices, *i.e.* eddies invariant along the rotation axis of the fluid, emerge from the nonlinear breakdown of the waves, whereas in other setups the growing inertial waves give rise to a cascade of waves from the initially growing modes. We show here a suite of numerical simulations in which we reproduce the wide variety of nonlinear behaviors within one idealized model. This result is obtained applying on geostrophic vortices a specific friction to mimick, for instance, volume effects of their interactions with rigid boundaries. When the growth of geostrophic flows is sufficiently constrained, we show that the nonlinear saturation is reminiscent of an inertial wave turbulence creating small scales from the forcing of two waves with a well-defined frequency.

1 Introduction

La turbulence en rotation se distingue nettement du modèle classique proposé par Kolmogorov et Richardson pour décrire la turbulence homogène isotrope. En plus d'introduire une direction particulière, la rotation induit également des structures qui lui sont propres. Parmi elles, les vortex géostrophiques, à la dynamique lente et alignés avec l'axe de rotation, ainsi que leur émergence spontanée dans un écoulement turbulent ont fait l'objet d'une vaste littérature du fait de leur récurrence dans les écoulements océaniques et atmosphériques. Certains modèles décrivant la dynamique en rotation, dits « quasi-géostrophiques », ont d'ailleurs été élaborés pour décrire uniquement l'évolution de ces tourbillons [1]. Récemment, une grande attention a été portée aux ondes inertielles, qui sont des solutions spontanément propagatives de la dynamique en rotation : plusieurs études ont visé à détecter leur présence dans la turbulence des fluides tournants. Ainsi, en forçant des jets turbulents à petite échelle, Yarom et Sharon ont observé la concentration de l'énergie de l'écoulement le long de la relation de dispersion des ondes inertielles [2]. Des études plus fines, tant expérimentales [3] que numériques [4, 5], ont mis en évidence que si les ondes

inertielles sont bien présentes dans les plus grandes structures, leur signature s'estompe aux petites échelles du fait de l'advection par les vortex géostrophiques. La turbulence des fluides en rotation reste donc difficile à classifier du fait de la multiplicité des contributions : d'une part les ondes inertielles en interaction pourraient conduire à une dynamique de type turbulence d'onde, tandis que d'autre part les vortex géostrophiques semblent inhiber ces interactions en advectant les ondes. Par ailleurs, ces vortex émergent par interaction non linéaire quasi-résonnante entre trois ondes inertielles dont l'une est de très basse fréquence [6]. La compétition et les interactions ondes-vortex semblent donc au cœur des processus à l'œuvre dans la turbulence des fluides en rotation.

À ce titre, l'instabilité elliptique s'avère particulièrement intéressante. En effet, elle se développe dans des écoulements dont les lignes de courant sont des ellipses dont les axes tournent à une vitesse différente du fluide [7]. Elle est ainsi invoquée pour expliquer la déstabilisation des noyaux des planètes déformées sous l'effet de marées, et peut être une explication au champ magnétique de certains satellites joviens [8], de la Lune primitive [9], voire de la Terre [10]. Cette instabilité a par ailleurs été formalisée pour la première fois dans le contexte des vortex cisailés. Dans les fluides tournants contenus entre des parois de section elliptique, elle se développe par résonance de deux ondes inertielles avec l'écoulement de base. Si ce mécanisme de résonance est bien caractérisé tant expérimentalement [11] que théoriquement [7], sa saturation, et notamment son effondrement en turbulence, restent mal compris. L'interaction entre ondes et vortex est au centre du mécanisme de saturation. Dans certaines expériences [12] et simulations [13], la résonance entre deux ondes aboutit à l'émergence de tourbillons géostrophiques si intenses qu'ils inhibent l'interaction entre les ondes résonnantes et l'écoulement de base elliptique. D'autres résultats obtenus notamment en géométrie ellipsoïdale dans le cadre de travaux géophysiques [14,15] indiquent qu'au cours de la saturation turbulente, l'interaction entre ondes et écoulement de base est maintenue et donne lieu à une cascade d'ondes inertielles en interactions résonnantes. Un tel comportement est par ailleurs analogue à la turbulence d'ondes internes forcées par l'excitation d'attracteurs dans le contexte proche des fluides stratifiés [16]. Dans cet article, nous proposons une série de simulations numériques locales de la saturation de l'instabilité elliptique, à la suite des travaux de Barker et Lithwick [13]. En contrôlant l'amplitude de saturation des modes géostrophiques, reproduisant notamment l'effet de l'interaction avec des parois, nous sommes en mesure de reproduire l'ensemble des observations numériques et expérimentales collectées. En particulier, nous caractérisons le régime où une cascade d'ondes inertielles s'établit.

2 Simulations locales de l'instabilité elliptique

Nous nous intéressons au mécanisme d'instabilité elliptique excité par un écoulement de base \mathbf{U}_b de vorticité uniforme $2\Omega \mathbf{e}_z$. Les lignes de courants sont déformées en ellipses dont le demi-grand axe tourne à une vitesse angulaire n . Cette situation correspond par exemple au noyau liquide d'une planète tournant sur elle-même à Ω autour de laquelle tourne un satellite avec une vitesse orbitale $n \mathbf{e}_z$. Dans le référentiel tournant à $\Omega \mathbf{e}_z$, en normalisant le temps par Ω^{-1} , \mathbf{U}_b s'écrit :

$$\mathbf{U}_b = -\gamma\beta \begin{bmatrix} \sin(2\gamma t) & \cos(2\gamma t) & 0 \\ \cos(2\gamma t) & -\sin(2\gamma t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}, \quad (1)$$

où $\gamma \equiv (\Omega - n)/\Omega$ et β est l'ellipticité de la déformation des lignes de courants. Cet écoulement excite des ondes inertielles de fréquence γ pourvu que $|\gamma| < 2$ [7]. Les équations régissant les perturbations incompressibles \mathbf{u} à cet écoulement de base s'écrivent :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U}_b \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}_b + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi + E \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

où Π est une pression modifiée assurant l'incompressibilité de la dynamique. E représente le nombre d'Ekman $\nu/(L^2\Omega)$ avec ν la viscosité cinématique et L une taille typique. En décomposant \mathbf{u} en ondes de

Kelvin $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}$ dont le vecteur d'onde peut varier au cours du temps, on en vient à partir du système (1–3) aux équations suivantes :

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\mathbf{A}(t)^\top \mathbf{k}, \quad (4)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}}{dt} = -2\mathbf{e}_z \times \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} - E k^2 \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} - \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} - i\mathbf{k}(t) \hat{\Pi}_{\mathbf{k}} - [(\widehat{\mathbf{u} \cdot \nabla})\mathbf{u}]_{\mathbf{k}}, \quad (5)$$

$$\mathbf{k}(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = 0, \quad (6)$$

où $[(\widehat{\mathbf{u} \cdot \nabla})\mathbf{u}]_{\mathbf{k}}$ représente le terme non linéaire calculé dans l'espace physique puis transformé dans l'espace des ondes de Kelvin. Une telle décomposition permet donc d'étudier de manière locale, dans une boîte triplement périodique, l'instabilité elliptique via une approche pseudo-spectrale de type « shearing box ». Ainsi, dans les équations présentées ci-dessus, une taille typique L correspond celle de la boîte. Les équations (4–6) sont résolues par le code SNOOPY initialement développé pour simuler la turbulence dans les disques protoplanétaires [17] et adapté par la suite au cas de l'instabilité elliptique [13]. Ce modèle permet en particulier de s'affranchir des parois rigides qui imposent une friction visqueuse supplémentaire et abaissent le taux de croissance de l'instabilité. Il est ainsi possible d'atteindre des états turbulents pour des ellipticités près de dix fois inférieures aux simulations ou aux expériences en géométrie ellipsoïdale.

3 Saturation géostrophique

Le modèle présenté dans les équations (4–6) est initié par un bruit blanc pour $\beta = 5 \times 10^{-2}$, $\gamma = 1,5$ et $E = 10^{-5}$ avec une résolution de 256 modes dans chaque direction. Dans un premier temps, les ondes résonnantes émergent et croissent exponentiellement (phase **a.**, Fig. 1). Elles sont d'échelle plutôt grande puisque le nombre d'onde $kL/(2\pi)$ est de l'ordre de 6. La saturation non linéaire de l'instabilité donne lieu d'abord (phase **b.**) à une équipartition de l'énergie entre les modes géostrophiques et les modes non géostrophiques. Les visualisations de l'écoulement mettent en évidence l'apparition de plusieurs tourbillons alignés avec l'axe de rotation. Ceux-ci fusionnent pour ne donner finalement (phase **c.**) plus que deux vortex ayant une extension analogue à la dimension — non physique — de la boîte.

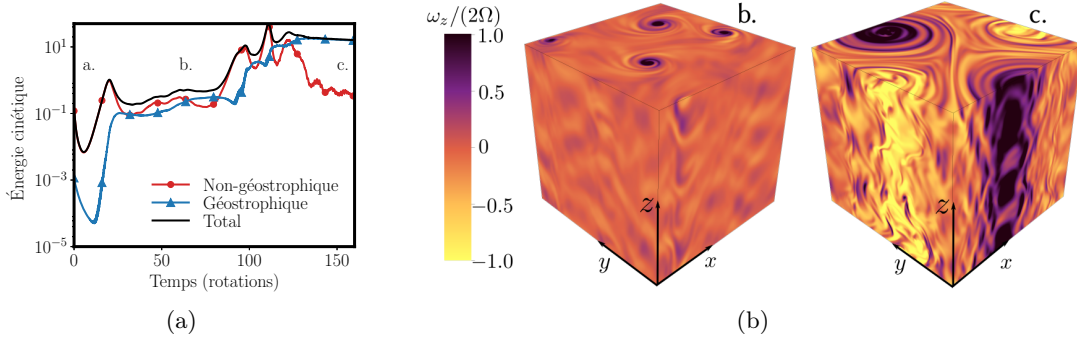


FIGURE 1. (a) Énergie cinétique des modes géostrophiques, des modes non géostrophiques et totale de l'écoulement au cours du temps. (b) Visualisation typique du champ de vorticité durant les phases **b.** et **c.** de la saturation.

Le devenir des ondes initialement résonnantes est étudié en dressant une représentation de l'énergie cumulée des modes en fonction de θ , l'angle formé par l'axe de rotation est un vecteur d'onde, et ω , la fréquence [2]. Les diagrammes de la figure 2 montrent que dans la phase de croissance **a.** et dans la première phase de saturation **b.**, l'énergie reste proche de la relation de dispersion des ondes inertielles $\omega = 2 \cos \theta$ à la fréquence γ attendue pour l'onde résonnante. Après l'émergence des tourbillons de la

phase finale **c.** de la saturation, il n'est plus possible d'identifier de structures correspondant à des ondes d'inertie. À ce moment, comme observé dans [13], le mécanisme de résonance est inhibé et il faut attendre la dissipation des tourbillons avant de voir croître de nouveau l'instabilité.

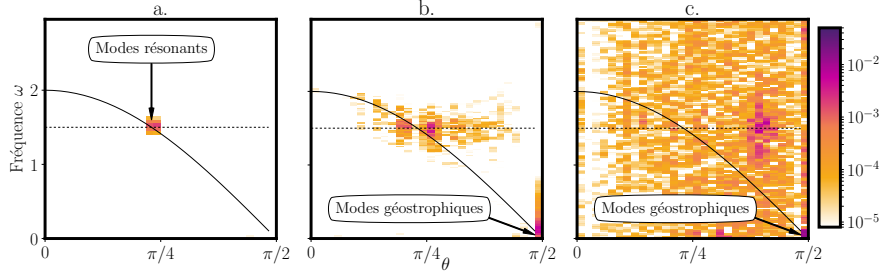


FIGURE 2. Représentation de l'énergie des modes de l'écoulement visualisé en figure 1 pour chaque phase de l'écoulement en fonction de l'angle θ — entre leurs vecteurs d'onde et l'axe de rotation — et de leur fréquence ω normalisée par le temps de rotation. La ligne en trait plein matérialise la relation de dispersion des ondes inertielles et la ligne en pointillé la fréquence des modes résonnants.

4 Saturation en turbulence d'ondes inertielles

Nous remettons cependant en cause la pertinence de ces résultats seuls, notamment quant à modéliser l'instabilité elliptique dans un conteneur ellipsoïdal. En effet, les tourbillons visibles en figure 1 ne sont jamais observés ni dans les simulations ni dans les expériences. Par ailleurs, le vortex final est issu de la fusion de plus petits tourbillons rappelant un mécanisme de cascade inverse. Les échelles de temps considérées sont si longues qu'il finit inévitablement par produire des échelles analogues à la taille non physique de la boîte. Nous introduisons donc un terme d'amortissement agissant sur les modes géostrophiques seuls, de manière analogue aux simulations de turbulence 2D ou quasi-géostrophique [1, 18]. L'objectif est d'accéder à des états d'équilibre différents de celui précédemment obtenu en simulant des configurations où les vortex ne peuvent pas saturer au-delà d'une amplitude inférieure à celle des modes non géostrophiques.

Les écoulements géostrophiques étant invariants suivant l'axe de rotation, dans une géométrie ellipsoïdale, ils ont la particularité d'interagir avec les parois et donc de subir une friction en volume par pompage d'Ekman. Nous choisissons donc d'introduire dans l'équation (5) un terme d'amortissement $\mathcal{F}[\mathbf{u}_G]$ qui n'opère que sur les modes géostrophiques — *i. e.* dans l'espace spectral les modes tels que $k_z = 0$ — et qui prend la forme suivante :

$$\mathcal{F}[\mathbf{u}_G] = -f_r \sqrt{E} \mathbf{u}_G. \quad (7)$$

f_r est un paramètre a priori indéterminé qui représente le rapport d'aspect entre la boîte dans laquelle les simulations locales sont menées et la hauteur de l'enveloppe fluide dans laquelle elle devrait se situer. Il est laissé comme paramètre de contrôle dont nous examinons les effets sur la saturation non linéaire.

Du fait de l'amointrissement de l'amplitude des tourbillons géostrophiques, les simulations ont pu être réalisées à de plus bas nombre d'Ekman, 3×10^{-6} , afin d'atteindre des régimes plus turbulents. Notons que pour $E = 10^{-5}$ les résultats sont qualitativement les mêmes. La résolution est augmentée à 512 modes dans chaque direction.

Par rapport au cas sans friction, on note que non seulement l'énergie des modes géostrophiques est abaissée lorsque f_r est augmenté, ce qui correspond à l'effet attendu, mais encore que l'énergie totale atteint un régime stationnaire situé au même niveau que dans la phase **a.** de la saturation non contrainte précédemment étudiée (cf. Fig. 1). De plus, dans l'espace spectral, l'énergie de l'écoulement se focalise le long de la relation de dispersion des ondes inertielles. Cette focalisation est d'autant plus importante que la composante géostrophique de l'écoulement est faible.

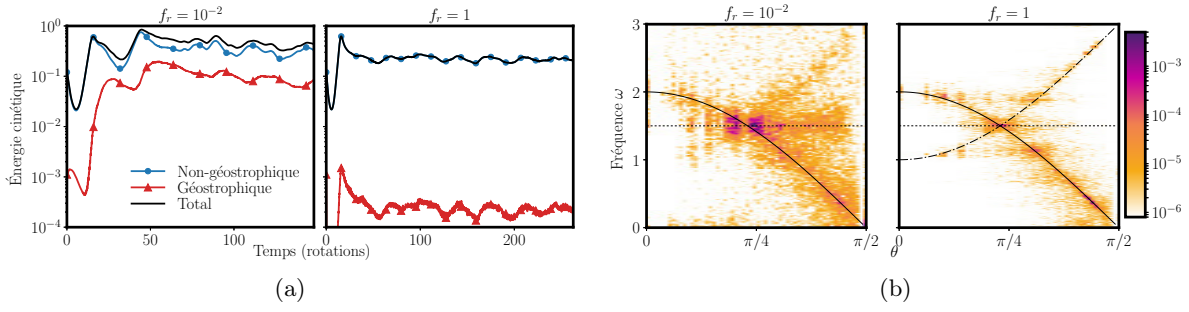


FIGURE 3. (a) Représentation de l'énergie cinétique des modes géostrophiques, non géostrophique et totale pour $f_r = 10^{-2}$ et $f_r = 1$. (b) Diagrammes de l'énergie en fonction de la fréquence et de l'angle θ d'un mode; la ligne pointillés-tirets représente la localisation des modes issus de l'interaction non résonnante entre ondes et écoulement de base.

On note de plus des localisations secondaires de l'énergie suivant une ligne $\omega = \gamma - 2 \cos \theta$. Elle correspond à l'interaction non linéaire et non résonnante entre les ondes de fréquences $\omega = \pm 2 \cos \theta$ et l'écoulement de base de fréquence $\pm \gamma$. On montre théoriquement que ces écoulements secondaires sont atténués d'un facteur β par rapport aux ondes inertielles.

Enfin, comme le montre la figure 4, obtenue dans un régime analogue mais en diminuant le nombre d'Ekman à 10^{-6} , l'effondrement non linéaire de l'onde initialement croissante conduit à la création de turbulence à petite échelle. Tous ces résultats sont la signature que les ondes inertielles résonnantes par instabilité elliptique alimentent une turbulence d'ondes inertielles. En injectant de l'énergie dans deux ondes à grande échelle spatiale, la saturation non linéaire de l'instabilité parvient à créer une cascade d'ondes vers les petites échelles spatiales, mais aussi en parallèle vers les basses fréquences temporelles.

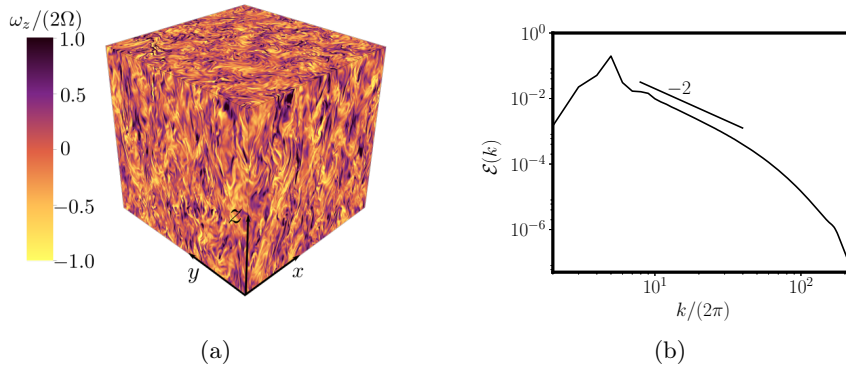


FIGURE 4. (a) Visualisation de la turbulence obtenue pour $f_r = 1$ en poussant le nombre d'Ekman jusqu'à 10^{-6} — sans changer les résultats qualitativement par rapport à la figure 3. (b) Spectre spatial d'énergie cinétique $\mathcal{E}(k)$ correspondant où k est la norme des vecteurs d'ondes.

5 Conclusion

Le modèle idéalisé introduit ici, consistant à simuler la saturation non linéaire de l'instabilité elliptique en présence de friction spécifique aux modes géostrophiques, permet de reproduire les deux types de dynamique évoqués en introduction. Nous montrons ainsi que le rapport entre l'énergie des modes géostrophiques et celle des modes non géostrophiques $\mathcal{E}_G / \mathcal{E}_{3D}$ est une quantité fondamentale. Lorsqu'elle est contrainte à ne pas dépasser l'unité, par exemple du fait des effets en volume du pompage d'Ekman, nous

montrons que la paire d’ondes inertielles initialement excitée par instabilité elliptique parvient à engendrer une cascade d’ondes qui créent des petites échelles spatiales et des basses fréquences temporelles.

Le rapport $\mathcal{E}_G/\mathcal{E}_{3D}$ est prescrit par les conditions imposées au fluide dans lequel se développe l’instabilité elliptique, ou tout autre écoulement turbulent en rotation. Nous avons montré ici le rôle potentiel de parois rigides, mais d’autres possibilités existent. Les vortex géostrophiques disparaissent également de la dynamique saturée en présence d’un champ magnétique imposé [19]. L’éventualité des deux régimes décrits ici doit donc être prise en compte dans l’étude de la dynamique de l’instabilité elliptique dans les noyaux planétaires. Pour pouvoir prédire les propriétés des champs magnétiques et de la dissipation engendrés par cette instabilité, il sera nécessaire à l’avenir de travailler à quantifier le rapport $\mathcal{E}_G/\mathcal{E}_{3D}$.

Remerciements : Nous tenons à remercier le Conseil Européen de la Recherche (ERC) pour son soutien financier (European Union’s Horizon 2020 research and innovation program, grant agreement No. 681835-FLUDYCO-ERC-2015-CoG) ainsi que l’IDRIS (Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique) pour l’utilisation du calculateur Turing (Projects No. 100508 and 100614).

Références

1. N. SCHAEFFER & P. CARDIN, Quasigeostrophic model of the instabilities of the Stewartson layer in flat and depth-varying containers, *Phys. Fluids*, **17**, 104111 (2005).
2. E. YAROM & E. SHARON, Experimental observation of steady inertial wave turbulence in deep rotating flows, *Nat. Phys.*, **10**, 510–514 (2014).
3. A. CAMPAGNE, B. GALLET, F. MOISY & P.-P. CORTET, Disentangling inertial waves from eddy turbulence in a forced rotating-turbulence experiment, *Phys. Rev. E*, **91**, 043016 (2015).
4. P. CLARK DI LEONI, P. J. COBELLI, P. D. MININNI, P. DMITRUK & W. H. MATTHAEUS, Quantification of the strength of inertial waves in a rotating turbulent flow, *Phys. Fluids*, **26**, 035106 (2014).
5. B. FAVIER, F. GODEFERD & C. CAMBON, On space and time correlations of isotropic and rotating turbulence, *Phys. Fluids*, **22**, 015101 (2010).
6. L. M. SMITH & Y. LEE, On near resonances and symmetry breaking in forced rotating flows at moderate Rossby number, *J. Fluid Mech.*, **535**, 111–142 (2005).
7. R. R. KERSWELL, Elliptical instability, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **34**, 83–113 (2002).
8. D. CÉBRON, M. LE BARS, C. MOUTOU & P. LE GAL, Elliptical instability in terrestrial planets and moons, *Astron. Astrophys.*, **539**, A78 (2012).
9. M. LE BARS, M. A. WIECZOREK, Ö KARATEKIN, D. CÉBRON & M. LANEUVILLE, An impact-driven dynamo for the early Moon, *Nature*, **479**, 215–218 (2011).
10. D. ANDRAULT, J. MONTEUX, M. LE BARS & H. SAMUEL, The deep Earth may not be cooling down, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **443**, 195–203 (2016).
11. L. LACAZE, P. LE GAL & S. LE DIZÈS, Elliptical instability of the flow in a rotating shell, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **151**, 194–205 (2005).
12. C. ELOY, P. LE GAL & S. LE DIZÈS, Experimental study of the multipolar vortex instability, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 3400–3403 (2000).
13. A. J. BARKER & Y. LITHWICK, Non-linear evolution of the tidal elliptical instability in gaseous planets and stars, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **435**, 3614–3626 (2013).
14. B. FAVIER, A. M. GRANNAN, M. LE BARS & J. M. AURNOU, Generation and maintenance of bulk turbulence by libration-driven elliptical instability, *Phys. Fluids*, **27**, 066601 (2015).
15. A. M. GRANNAN, M. LE BARS, D. CÉBRON & J. M. AURNOU, Experimental study of global-scale turbulence in a librating ellipsoid, *Phys. Fluids*, **26**, 126601 (2014).
16. C. BROUZET, E. V. ERMANYUK, S. JOUBAUD, I. SIBGATULLIN & T. DAUXOIS, Energy cascade in internal-wave attractors, *Europhys. Lett.*, **113**, 44001 (2016).
17. G. LESUR & P.-Y. LONGARETTI, Impact of dimensionless numbers on the efficiency of magnetorotational instability induced turbulent transport, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **378**, 1471–1480 (2007).
18. G. BOFFETTA & R. E. ECKE, Two-dimensional turbulence, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **44**, 427–451 (2012).
19. A. J. BARKER & Y. LITHWICK, Non-linear evolution of the elliptical instability in the presence of weak magnetic fields, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **437**, 305–315 (2014).

Anomalous Mullins effect in crosslinked actin networks under cyclic protocol

Horacio López-Menéndez¹ & José Felix Rodríguez²

¹ Cell Adhesion and Mechanics, Institut Jacques Monod (IJM), UMR-CNRS 7592 & Université Paris Diderot, Paris, France

² LaBS, Department of Chemistry, Materials and Chemical Engineering “Giulio Natta”, Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italy

horacio.lopez-menendez@ijm.fr / horacio.lopez.menendez@gmail.com

Résumé. La rhéologie du réseau de F-actine a fait l’objet d’une grande attention pendant les dernières années. Afin d’améliorer la compréhension des propriétés rhéologiques de ces matériaux nouveaux, il est nécessaire de les étudier dans un régime de grandes déformations pour modifier leur structure interne. En ce sens, Schmoller *et al.* ont révélé que les réseaux reconstitués de F-actine et réticulés avec de l’ α -actinine soudain durcissent quand elles sont soumises à des brèches cycliques [1]. Cette observation contredit l’effet Mullins escompté observé dans la majorité des matériaux mous, tels que le caoutchouc et les tissus vivants, où l’on observe un ramollissement marqué quand ils sont déformés de façon cyclique. Dans ce travail, nous proposons un modèle mécanique dans le cadre de la mécanique de milieux continus non linéaire. La mécanique des filaments de F-actine est modélisée en utilisant un modèle *wormlike chain* pour les filaments semi-flexibles et le processus de gélification est modélisé comme une dynamique de méso-échelle pour l’ α -actinine et la réticulation physique. Le modèle a été validé par des résultats expérimentaux que nous rapportons.

Abstract. The rheology of F-actin networks has attracted a great attention during the last years. In order to gain a complete understanding of the rheological properties of these novel materials, it is necessary to study them in a large deformation regime in order to alter their internal structure. In this sense, Schmoller *et al.* showed that the reconstituted networks of F-actin crosslinked with α -actinin unexpectedly harden when they are subjected to a cyclical shear [1]. This observation contradicts the expected Mullins effect observed in most soft materials, such as rubber and living tissues, where a pronounced softening is observed when they are cyclically deformed. In this work, we propose a micromechanical model into the framework of nonlinear continuum mechanics. The mechanics of the F-actin filaments is modeled using the wormlike chain model for semiflexible filaments and the gelation process is modeled as mesoscale dynamics for the α -actinin and physical crosslink. The model has been validated with reported experimental results.

1 Introduction

Bio-polymeric meshworks have attracted a great attention as bio-materials because of their soft and wet nature, similar to many biological scaffolding structures. However, any given application requires a combination of mechanical properties, including stiffness, strength, toughness, damping, self-healing and fatigue resistance. The study of these structures can contribute to a better understanding of this new micro/nano technology and the cytoskeleton like structural building blocks, as was shown in Refs. [1, 2]. In order to improve the understanding of the rheological properties of these novel materials, it is necessary to study extreme situations. Nonlinear deformations can irreversibly alter the mechanical properties of materials. Traditionally, the actin networks have been considered as a system in a thermodynamic equilibrium which only could be driven out of equilibrium under the action of actin–myosin molecular motors [3]. Nevertheless, Schmoller *et al.* (2010) [1] showed that the reconstituted networks of F-actin crosslinked with α -actinin unexpectedly harden when they are subjected to a cyclical shear. This observation contradicts the expected Mullins effect observed in most soft materials, such as rubber and living tissues, where a pronounced softening is observed when they are cyclically deformed, in the following

article we condense the proposed model developed by López-Menéndez *et al.* to explain this unexpected behavior [2].

2 Mechanics of F-actin network with weak crosslinks

Let Ω_0 be a fixed reference configuration of the continuous body of interest (assumed to be stress free). We use the notation $\chi : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ for the deformation, which transforms a typical material point $\mathbf{X} \in \Omega_0$ to a position $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}) \in \Omega$ in the deformed configuration. Further, let $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \chi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$ be the deformation gradient and $J(\mathbf{X}) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}) > 0$ the local volume ratio. Consider a multiplicative split of \mathbf{F} into spherical (dilatational) part, $\mathbf{F}_V = (J^{1/3} \mathbf{I})$ and a uni-modular (distortional) part $\bar{\mathbf{F}}$. Note that $\det \bar{\mathbf{F}} = 1$.

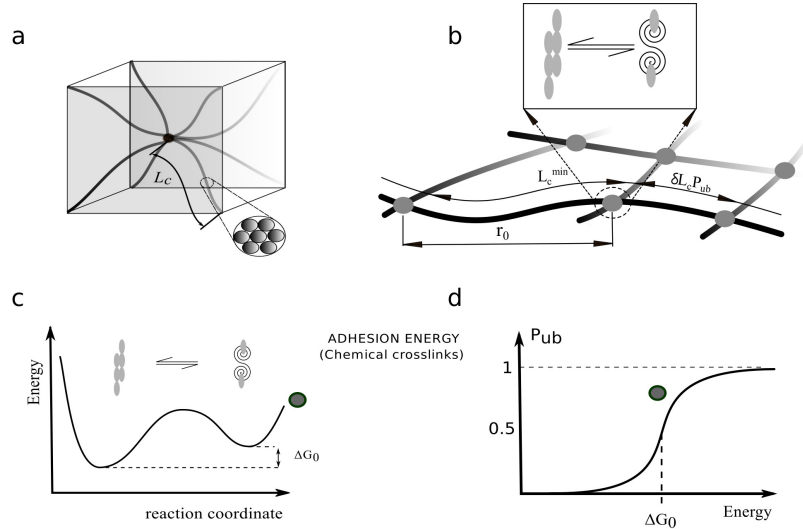


Figure 1. Elements of the dynamic F-actin network. (a) Eight chains model. (b) Semi-flexible bundle filaments in which the contour length is defined as the distance between the crosslinks. (c) Crosslink energy landscape. (d) Unbinding probability.

We use the right and left Cauchy–Green tensors denoted by \mathbf{C} and \mathbf{b} , respectively, and their modified counterparts associated with $\bar{\mathbf{F}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ and $\bar{\mathbf{b}}$, respectively. Hence,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = J^{2/3} \bar{\mathbf{C}}, \quad (1)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}, \quad (2)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = J^{2/3} \bar{\mathbf{b}}, \quad (3)$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}^T. \quad (4)$$

The mechanical behavior of the F-actin cross-linked network is modeled by means of a strain energy function (SEF) based on the wormlike chain model (*wlc*) for semi-flexible filaments. This model, proposed by [3], is defined in terms of four physical parameters related to the network architecture and network deformation (see Figure 1): (i) the contour length, L_c ; (ii) the persistence length, l_p ; (iii) the end-to-end length at zero deformation, r_0 , associated with the network prestress, see [3]; (iv) the macroscopic network stretch from the condition of zero force, $\lambda := \sqrt{I_1}/3$.

$$\Psi_{wlc}(\mathbf{C}, r_0, l_p, L_c) = \psi_{wlc}(\bar{\mathbf{C}}, r_0, l_p, L_c) + U(J), \quad (5)$$

with

$$\psi_{wlc} = \frac{nk_B T}{l_p} \left[\frac{L_c}{4 \left(1 - \frac{r}{L_c}\right)^2} - l_p \log \frac{L_c^2 - 2l_p L_c + 2l_p r}{r - L_c} \right], \quad (6)$$

where $r := r_0 \lambda = r_0 \sqrt{\bar{I}_1/3}$ is the filament end-to-end distance, \bar{I}_1 the first invariant of $\bar{\mathbf{C}}$. Using standard procedures from continuum mechanics, the Cauchy stress, $\boldsymbol{\sigma}$, can be derived from direct differentiation of Eq. (5) with respect to \mathbf{C}

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{2}{J} \mathbf{F} \frac{\partial \Psi_{wlc}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \\ &= \frac{1}{J} \frac{nk_B T r_0}{3l_p \lambda} \left[\frac{1}{4 \left(1 - \frac{\lambda r_0}{L_c}\right)^2} \right] \left[\frac{\frac{L_c}{l_p} - 6 \left(1 - \frac{\lambda r_0}{L_c}\right)}{\frac{L_c}{l_p} - 2 \left(1 - \frac{\lambda r_0}{L_c}\right)} \right] \left(\bar{\mathbf{b}} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \mathbf{I} \right) + p \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (7)$$

where $p = dU/dJ$ is a constitutive relation for the dilatational part of $\boldsymbol{\sigma}$. For a simple shear test, $\lambda = \sqrt{1 + \gamma^2/3}$, and the stress-strain relation results

$$\tau = \frac{nk_B T r_0}{3l_p \lambda} \left[\frac{1}{4 \left(1 - \frac{\lambda r_0}{L_c}\right)^2} \right] \left[\frac{\frac{L_c}{l_p} - 6 \left(1 - \frac{\lambda r_0}{L_c}\right)}{\frac{L_c}{l_p} - 2 \left(1 - \frac{\lambda r_0}{L_c}\right)} \right] \gamma. \quad (8)$$

As mentioned previously, in vivo or in vitro actin networks experience prestress during network formation and remodeling due to the entanglement and the formation and disruption of crosslinks. In order to account for these effects, we introduce a passive prestress, in the network model, through the parameter r_0

$$r_0 = (1 + \epsilon) L_c \left(1 - \frac{L_c}{6l_p}\right), \quad (9)$$

where $\epsilon > 0$ is a dimensionless parameter associated with the passive prestress.

The network is built up by the interaction between the actin filaments and the crosslinkers. The nature of this interaction defines the mechanical properties of the structure. If these interactions are stable (for the stress and the time scales of the experiments), they provide a strong gelation process and the meshwork shows a solid-like behavior under deformation. If on the contrary, the crosslinks are not completely stable, but they are associated with a reaction that can proceed in both directions, folding/unfolding or flexible/rigid states of the crosslink, we then speak of a weak gelation process with the meshwork showing a fluid-like behavior without manifesting a complete unbinding. Clearly if the level of deformation exerted over the crosslink exceeds a given threshold it will break irreversibly.

These effects are accounted within the model via the contour length, L_c . We propose the following expression for L_c

$$L_c = L_c^{\min} + \delta L_c P_{ub}, \quad (10)$$

where P_{ub} defines the unfolding probability encompassing the states of unfolding or flexible cross-link (see below), L_c^{\min} represents the contour length when $P_{ub} = 0$, and δL_c represents the average increment of the contour length when the unbinding probability is 1. Chemical crosslinks can be modeled as a reversible two-state equilibrium process, as in [2–4]:

$$\frac{P_{ub}}{P_b} = \exp - \frac{(\Delta G_0 - w_{\text{ext}})}{k_B T}, \quad (11)$$

where P_b the binding probability encompassing the states folding or rigid cross-link. Since only these two states are possible, then $P_{ub} + P_b = 1$. The two-state model has the folded state as the preferred low free

energy equilibrium state at zero force and the unfolded state as the high free energy equilibrium state at zero force. ΔG_0 represents the difference in the free-energy between these states, w_{ext} represents the external mechanical work that induce the deformation of the crosslink, and $k_B T$ represents the thermal energy.

As we are only able to measure macroscopic quantities as stress and strain and we aim to develop a constitutive model in the mesoscale, we propose the next phenomenological expression, using the previous expression as motivation:

$$P_{ub} = \frac{1}{1 + \exp[\kappa(\lambda_0 - \lambda)]}, \quad (12)$$

where the main driving force is λ , the average stretch over the bundle. In order to simplify the mathematical treatment, we consider $\kappa\lambda_0$ to be proportional to the free adhesion energy ΔG_0 . Parameter κ gives us an idea of the sharpness of the transition between states and λ_0 is the strain at which the probability of unbinding transition is 0.5. If $\lambda_0 \ll \lambda$, the network is easy to be remodeled showing a more fluid-like behavior. On the contrary, if $\lambda_0 \gg \lambda$, the crosslink is more stable and the probability of transition is low. Consequently the network behaves as a solid-like structure.

The model of F-actin network with weak crosslinks subjected to simple shear can be summarized as follows:

$$\tau = \frac{nk_B T r_0}{3l_p} \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{4 \left(1 - \frac{\lambda r_0}{L_c}\right)^2} \right] \left[\frac{\frac{L_c}{l_p} - 6 \left(1 - \frac{\lambda r_0}{L_c}\right)}{\frac{L_c}{l_p} - 2 \left(1 - \frac{\lambda r_0}{L_c}\right)} \right] \gamma,$$

$$r = (1 + \epsilon)L_c \left(1 - \frac{L_c}{6l_p}\right) \lambda,$$

$$L_c = L_c^{\min} + \frac{\delta L_c}{1 + \exp[\kappa(\lambda_0 - \lambda)]}.$$

During the gelation process, the physical crosslinks are created by the network entanglement. This process induces prestress across the network which is propagated through the bundles until the chemical crosslinks [2]. The Figure 2. (a) illustrates this idea, where the interrupted line describes the physical crosslink, and the red dots represent the chemical crosslinks. In this configuration the prestress is higher and the contour length (L_c) is lower due to the connectivity introduced by the entanglement. Therefore, the trapped stress into the structure is compensated by the deformation of the bundle and the chemical crosslinks. Then once the trapped stress is relaxed, the adhesion energy increases.

3 Results and conclusion

The proposed theory is used to describe the experiments conducted by [1] on the artificially reconstituted F-actin networks crosslinked with α -actinin, where the network has an actin concentration of $c_a = 4.75 \mu\text{M}$ and a molar ratio of cross linking molecules to actin, $R = 1$, at 18°C . For large enough concentrations of the cross linker, these networks show a pronounced nonlinear mechanical response to shear strain. These networks also show a profound network reorganization when are subjected to cyclic shearing.

There are two kinds of parameters into the coupled set of equations: at one side, the typical values for the semiflexible-*wlc* model with rigid crosslinks as (L_c, l_p, ϵ, n) . The plausible values for the orders of magnitude can be easily found in the litterature as in [1–4]. More specifically, the density of actin filaments n , represents a proportionality factor and it was adopted from [3]. The persistence length l_p , was taken as $17.48 \mu\text{m}$ (for more details see Ref. [2]). We should point out that the persistence length is also dependent on the crosslink concentration and loading and should be defined as a stochastic variable as well. However, in order to simplify the model, we consider l_p as a constant parameter in the following.

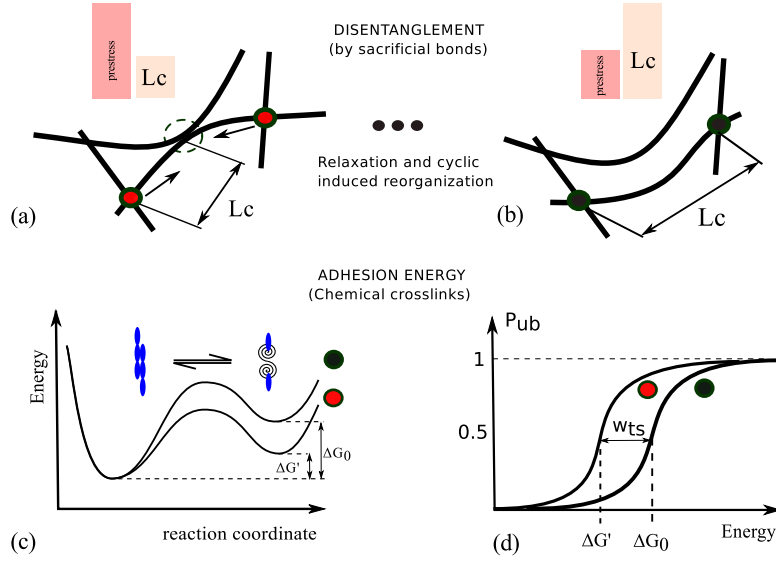


Figure 2. Interaction between physical and chemical crosslinks. (a) Gelation state in the reference configuration. The physical crosslinks induce prestrain over the bundles and reduce the contour length. The red dots represent a lower adhesion energy state of the α -actinin. (b) Once the physical crosslinks, working as sacrificial bonds, release the energy, increase the contour length, reduce the prestrain over the α -actinin and increase the adhesion energy. The black dots represent a higher adhesion energy of the α -actinin. (c) Two energy landscapes for the chemical crosslinks; with and without considering the effect of prestrain imposed the physical crosslinks. (d) Distribution function for the unbinding probability, P_{ub} . The distribution without prestrain shows a higher transition point.

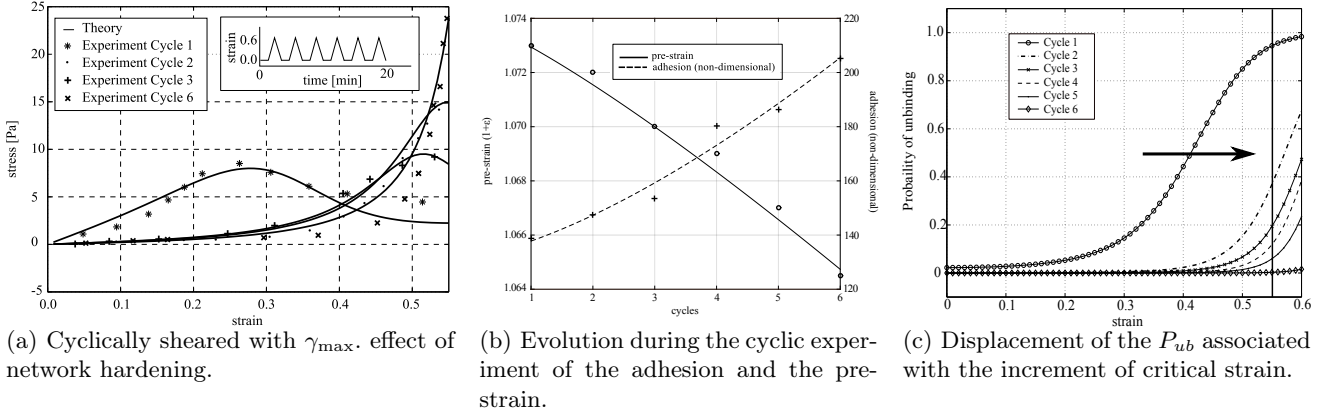


Figure 3. Comparison between the proposed model and the experimental results.

The contour length contributions (δL_c) was estimated in the range of values of L_c described in the experiment of [1].

On the other side, according to this model, the parameters associated with the crosslink dynamics encode the transitions which induce remodeling into the network. The parameters ($\kappa_i^{ub}, \lambda_0^{ub}$), change during the cyclic experiment. These values represent an indirect measure of the adhesion energy of chemical crosslinks of α -actinin. λ_0^{ub} describes the transition point in the contour length of the network filament and κ^{ub} the sharpness of this transition.

During the cyclic loading protocol, the response of the network is very different from the observed for monotonic loading protocol. As we can see in Figure 3, after each strain cycle the linear regime gets larger whereas the network is able to withstand a higher maximum stress, in sharp contrast to the Mullins effect

observed in rubber-like materials. When we apply the proposed model exploring the parametric space for κ_i^{ub} , $\lambda_{0_i}^{ub}$ and ϵ^i , we find that it is able to fit quite well the experimental measurements of Schmoller, as can be observed in Figure 3. Evolving the three parameters for each cycles, we observe how the linear response of the network becomes larger, and how the network is able to reach a larger stress, as a network with rigid crosslinks.

In this model we consider that the physical crosslinks impose a double effect on the network. On the one hand they pre-strain the bundle, but on the other hand, the stretch of the chemical crosslinks of α -actinin tilts the energy landscape of the crosslinks toward a state of less adhesion energy, see Figure 2. During the cyclic experiment, a certain amount of physical crosslinks are broken and consequently, the pre-strain over the bundles and crosslinks decreases. Therefore, the values of the $\Delta G'$ or $\kappa^{ub}\lambda_0^{ub}$ increase. As a consequence, the probability of unbinding P_{ub} decreases and the contour length L_c of the network decreases as well, showing an increase in the stiffening. The gelation state of the network changes from weak gelation and high bundle pre-strain towards a stable state and with lower values of prestrain, which means a solid-like network.

The development of a phenomenological model at mesoscale helps the characterization of novel materials. Nevertheless, future works are needed to improve the estimations used in the dynamics of crosslinks in terms of the ratios between the concentration of F-actin, the concentration of α -actinin and the conditions of preparation of the network, in order to have an estimation of the tilted energy landscape of α -actinin which represents a very difficult task.

The model presented shows an alternative to extend the *wlc* to describe the mechanical state of semi-flexible networks with a more complex gelation process by considering the dynamics of the crosslinks. At the same time, the proposed mesoscale model, within the framework of continuum mechanics, can be easily incorporated to computational simulations based on the finite element method, in order to consider more complex geometries. The effect introduced by the cyclic shear lead us to speculate on the role of molecular motors of actin–myosin in the cytoskeleton. Molecular motors are capable of applying cyclic strain to the bundle structure, helping to modify the internal prestress of the crosslinks protein structures. In this regard, it seems that the role of α -actinin into the cytoskeleton structure could be more complex than just a rigid cross-linker. Additional experimental studies are required to better understand the interaction between molecular motors, crosslinks, and actin filaments. However, the role of crosslinks dynamics should be considered in future developments of constitutive models for cytoskeleton-like structures, [5].

References

1. K. SCHMOLLER, P. FERNANDEZ, R. AREVALO, D. BLAIR & A. BAUSCH, Cyclic hardening in bundled actin networks, *Nat. Commun.*, **1**, 134 (2010)
2. H. LÓPEZ-MENÉNDEZ & J. F. RODRÍGUEZ, Microstructural model for cyclic hardening in F-actin networks crosslinked by α -actinin, *J. Mech. Phys. Solids*, **91**, 28–39 (2016)
3. J. PALMER & M. BOYCE, Constitutive modeling of the stress-strain behavior of F-actin filament networks, *Acta Biomater.*, **4**, 597–612 (2008)
4. A. BROWN, R. LITVINOV, D. DISCHER, P. PUROHIT & J. WEISEL, Multiscale mechanics of fibrin polymer: Gel stretching with protein unfolding and loss of water, *Science*, **325**, 741–744 (2009)
5. H. LÓPEZ-MENÉNDEZ & J. F. RODRÍGUEZ, Towards the understanding of cytoskeleton fluidisation–solidification regulation, *Biomech. Model. Mechanobiol.*, in press (2017)

Supratransmission dans une ligne électrique de Klein–Gordon

Saverio Morfu¹, Bertrand Bodo², Patrick Marquié¹ & Mathieu Rossé¹

¹ Le2i FRE2005, CNRS, Arts et Métiers, Université Bourgogne Franche-Comté, F-21000 Dijon, France

² Laboratory of Electronics, Department of Physics, University of Yaounde I, P.O. Box 812, Cameroon
smorfu@u-bourgogne.fr

Résumé. Nous présentons une ligne électrique dont la tension obéit aux équations de Klein–Gordon d’ordre 5 afin d’en étudier les propriétés de transmission. Nous nous focalisons sur la transmission d’énergie en bande interdite, c’est-à-dire lorsque le système est excité en dehors de sa bande passante. Nous avons pu expérimentalement mettre en évidence que lorsque l’amplitude de l’excitation excède un seuil, le système génère des modes non linéaires de forte amplitude via le phénomène de supratransmission.

Abstract. An electrical Klein–Gordon lattice have been developed to experimentally analyze the supratransmission effect. The chain is excited at one end with a sinusoidal driving whose frequency is outside the system bandpass. We have shown that beyond a critical amplitude, the medium transmits energy by triggering nonlinear modes with strong amplitudes.

1 Introduction

Construire des réseaux électroniques dont la tension est régie par des équations différentielles non linéaires présente deux avantages. Le premier est d’étudier des phénomènes naturels décrits par ces mêmes équations. On peut citer les phénomènes de Résonance Vibrationnelle et de Résonance Stochastique qui interviennent dans les processus neuronaux de codage de l’information [1–3]. Divers modèles électriques peuvent être développés pour étudier la propagation de l’influx nerveux [4, 5], ou encore l’analyse des propriétés de propagation des solitons [6]. Le second intérêt de ces réseaux électroniques consiste à utiliser leurs propriétés à des fins de traitement et de transmission de l’information [7, 8]. Des réseaux à une dimension permettent d’analyser la propagation de l’information [9, 10] tandis que des réseaux à deux dimensions autorisent le traitement d’images [11, 12]. On se propose de se limiter à un réseau à une dimension de type Klein–Gordon [13, 14] afin de montrer l’effet de supratransmission [15–18], c’est-à-dire la génération de modes non linéaires lorsque certains milieux sont excités hors de leur bande passante.

2 Présentation du réseau

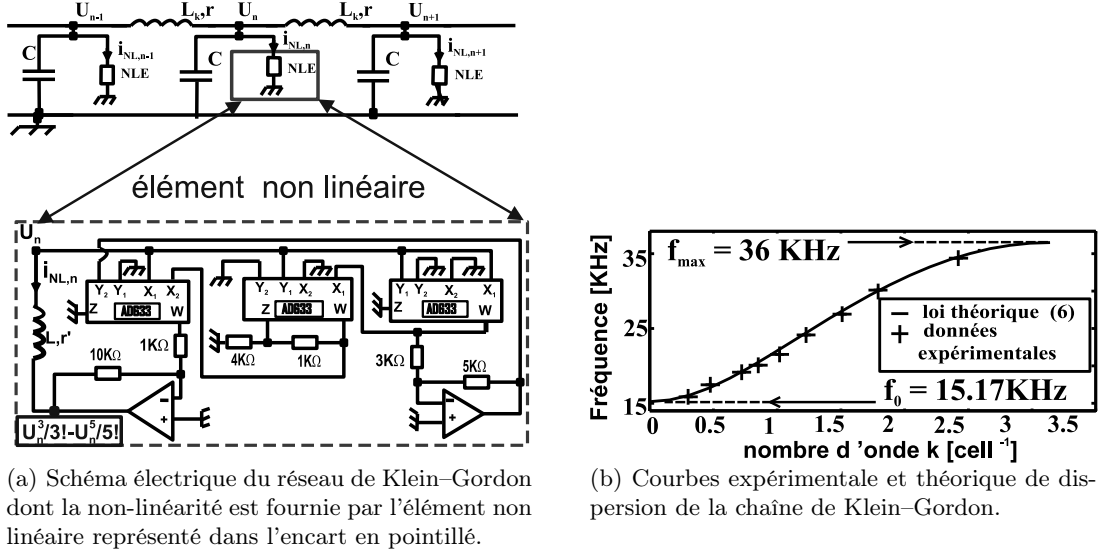
2.1 Équation du réseau

La ligne électrique de la figure 1. (a) est constituée de $N = 45$ cellules élémentaires couplées avec des self-inductances L_k dont la résistance interne série est notée r . Chaque cellule élémentaire comprend un condensateur de capacité C qui est mis en parallèle avec un élément non linéaire NLE dont le détail est disponible à l’intérieur des pointillés de la figure 1. (a).

Pour obtenir le système d’équations qui régit l’évolution de la tension $U_n(t)$ au nœud n du réseau de la figure 1. (a), il suffit d’appliquer les lois de Kirchhoff, ce qui conduit au système suivant :

$$C \frac{d^2 U_n}{dt^2} + \frac{rC}{L_k} \frac{dU_n}{dt} + \frac{r}{L_k} i_{NL,n} + \frac{di_{NL,n}}{dt} = \frac{1}{L_k} (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}), \quad (1)$$

où $i_{NL,n}$ représente le courant traversant le n -ième élément non linéaire.



(a) Schéma électrique du réseau de Klein–Gordon dont la non-linéarité est fournie par l’élément non linéaire représenté dans l’encart en pointillé.

(b) Courbes expérimentale et théorique de dispersion de la chaîne de Klein–Gordon.

FIGURE 1. La ligne électrique de Klein–Gordon d’ordre 5 et sa courbe de dispersion du type passe-bande. Valeurs des composants : $C = 100$ nF, $L = 0,947$ mH et $L_k = 11$ mH. r' et r représentent les résistances internes séries des self-inductances.

Cet élément non linéaire comprend 3 multiplieurs analogiques AD633JNZ et deux amplificateurs opérationnels TL081CN câblés de telle sorte que la tension U_n et le courant $i_{NL,n}$ traversant la self inductance L de résistance interne r' obéissent à

$$\frac{di_{NL,n}}{dt} + \frac{r'}{L}i_{NL,n} = \frac{1}{L}f(U_n), \quad \text{avec } f(U_n) = U_n - \frac{U_n^3}{3!} + \frac{U_n^5}{5!}. \quad (2)$$

Si les self-inductances de couplage L_k et de contre-réaction L de l’élément non linéaire ont le même facteur de qualité, alors nous avons l’égalité suivante : $r/L_k = r'/L$. En utilisant cette égalité et en substituant l’équation (2) dans l’équation (1), le système d’équations qui décrit le réseau se réduit à

$$\frac{d^2U_n}{dt^2} = \frac{1}{L_k C} (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) - \frac{r}{L_k} \frac{dU_n}{dt} - \frac{1}{LC} f(U_n). \quad (3)$$

En utilisant le changement de variable $c_0^2 = 1/L_k C$, $\omega_0^2 = 1/LC$ et $\Gamma = r/L_k$, l’équation (3) peut s’exprimer sous la forme normalisée :

$$\frac{d^2U_n}{dt^2} - c_0^2 (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) + \Gamma \frac{dU_n}{dt} + \omega_0^2 f(U_n) = 0. \quad (4)$$

D’après l’équation (4), la ligne électrique développée modélise une chaîne de Klein–Gordon d’ordre 5 de coefficient de dissipation Γ , de couplage c_0^2 et de poids de non-linéarité ω_0^2 .

On se place dans le cas où une extrémité de la chaîne (nœud 0) est forcée sinusoïdalement avec une amplitude A et une fréquence f . Par conséquent, la tension $U_0(t)$ obéit à

$$U_0(t) = A \cos 2\pi ft. \quad (5)$$

De plus, les valeurs des composants sont ajustées à $C = 100$ nF, $L = 0,947$ mH et $L_k = 1,1$ mH.

2.2 Courbe de dispersion

L’analyse expérimentale de la courbe de dispersion a été menée en fixant la fréquence f du forçage sinusoïdal. Un oscilloscope permet ensuite de déterminer le premier nœud n de la ligne électrique pour

lequel la tension $u_n(t)$ est en phase avec l'excitation sinusoïdale d'entrée. Le nombre d'onde k associé à la fréquence d'excitation considérée est alors $k = 2\pi/n$.

Quant à la courbe théorique de dispersion, il suffit d'appliquer une linéarisation du système valable dans le cadre des faibles amplitudes de forçage sinusoïdal :

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1 + 2\frac{c_0^2}{\omega_0^2}(1 - \cos k)}. \quad (6)$$

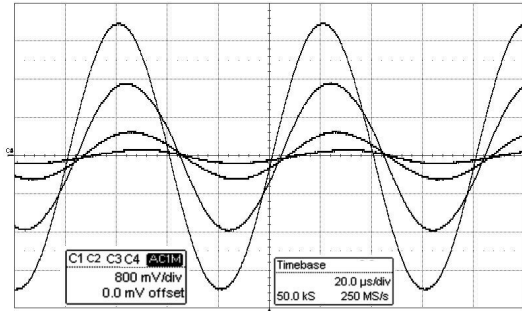
Les données expérimentales, représentées par des croix à la figure 1. (b) sont en accord avec la relation théorique de dispersion qui correspond à un comportement du type passe-bande. Les deux fréquences de coupure sont alors $f_0 = 15,17$ kHz (appelée *gap*) et $f_{\max} = 36$ kHz.

3 Comportement du réseau dans le *gap*

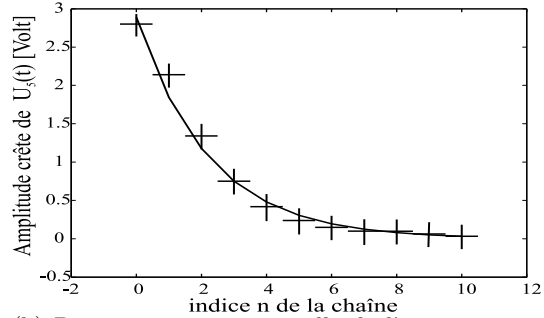
Ce paragraphe traite de la réponse du système lorsque ce dernier est excité sinusoïdalement avec une fréquence choisie dans le *gap*, c'est-à-dire en dessous de $f_0 = 15,17$ kHz. Il s'agit d'analyser le comportement de la ligne électrique en fonction de l'amplitude de l'excitation sinusoïdale et de sa fréquence.

3.1 Limite des faibles amplitudes : onde évanescence

Dans le cas de figure où l'amplitude A du forçage sinusoïdal demeure faible, nous avons relevé les chronogrammes des tensions à différents nœuds du réseau. La figure 2. (a) présente l'évolution des nœuds $n = 0$ (excitation initiale), $n = 2$, $n = 4$ et $n = 6$. On s'aperçoit que l'amplitude de l'excitation sinusoïdale est fortement amortie quand elle atteint le quatrième nœud du réseau. De plus, elle disparaît quasiment lorsqu'elle gagne le sixième nœud du réseau. Comme le précisent Geniet et Léon, qui ont plus particulièrement considéré un réseau de sine–Gordon sans dissipation (c'est-à-dire l'équation (4) avec $\Gamma = 0$ et $f(U_n) = \sin U_n$), cette forte décroissance de l'amplitude de l'onde dans le réseau suit une loi exponentielle et est une particularité des milieux excités dans le *gap* [16]. La figure 2. (b) montre l'évolution de l'amplitude crête de l'onde en fonction du numéro de nœud n du réseau.



(a) Chronogrammes des tensions $U_0(t)$, $U_2(t)$, $U_4(t)$ et $U_6(t)$.



(b) Décroissance exponentielle de l'excitation sinusoïdale dans le réseau observée expérimentalement (croix) et prédit avec la relation (7) (trait plein).

FIGURE 2. Onde évanescence observée dans le réseau excité sinusoïdalement avec une amplitude faible et une fréquence dans le *gap*. L'amplitude et la fréquence de l'excitation sinusoïdale sont ajustées à 2,8 V et $f = 12,5$ kHz.

Les données expérimentales, représentées par des croix, sont comparées à l'expression théorique suivante :

$$\max(U_n) = A \exp(-\lambda n), \quad (7)$$

où A correspond à l'amplitude de l'excitation sinusoïdale et $\max(U_n(t))$ représente l'amplitude crête atteinte par la tension $U_n(t)$. Le paramètre λ intervenant dans la relation (7) ainsi que l'amplitude exacte A sont déduits d'une méthode des moindres carrés à partir des données expérimentales et de la relation théorique (7).

Comme le montre la figure 2, avec les valeurs identifiées $\lambda = 0,449 \text{ cell}^{-1}$ et $A = 2,89 \text{ V}$, l'accord entre la loi exponentielle et les relevés expérimentaux est très bon ; ce qui signifie que dans la limite des faibles amplitudes, notre ligne électrique de Klein–Gordon se comporte dans le *gap* comme la chaîne de sine-Gordon considérée par Geniet et Leon [16].

3.2 Amplitude de forçage excédant une valeur critique : supratransmission

Il s'agit maintenant de se placer dans le cas où l'amplitude de forçage excède une valeur critique que l'on notera A_{sup}^* . Pour une chaîne de sine–Gordon sans dissipation, Geniet et Leon ont montré qu'au-delà de ce seuil d'amplitude de forçage sinusoïdal, le système subit une bifurcation. En effet, ce dernier se met à transmettre de l'énergie par génération de modes non linéaires : c'est le phénomène de supratransmission.

Pour déterminer l'amplitude critique A_{sup}^* qui permet le déclenchement de la supratransmission, nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux chronogrammes de la tension $U_5(t)$. Comme détaillé dans le précédent paragraphe, en dessous de l'amplitude critique A_{sup}^* , l'excitation sinusoïdale n'est pas transmise dans le milieu puisque son amplitude s'atténue exponentiellement. Comme le montre la figure 3. (b), l'amplitude du cinquième nœud est fortement amortie puisque nous obtenons 240 mV pour un forçage sinusoïdal d'amplitude 2,92 V et de fréquence $f = 12,5 \text{ kHz}$.

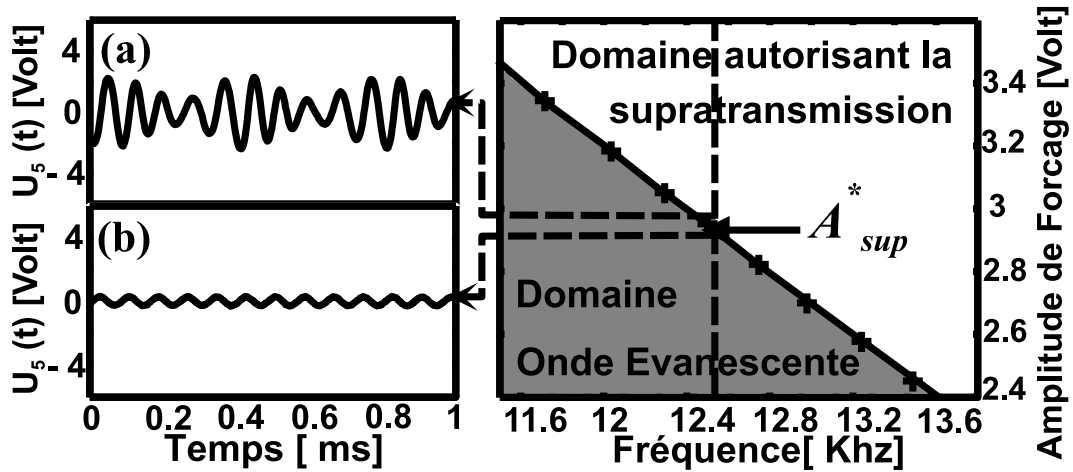


FIGURE 3. À gauche, chronogrammes de $U_5(t)$ pour un forçage de fréquence $f = 12,5 \text{ kHz}$ et pour deux amplitudes différentes : (a) $A = 2,95 \text{ V} > A_{\text{sup}}^*$ et (b) $A = 2,93 \text{ V} < A_{\text{sup}}^*$. À droite, diagramme de bifurcation de la chaîne de Klein–Gordon.

Lorsque l'on augmente légèrement l'amplitude A du forçage à 2,95 V, la tension $U_5(t)$ n'est plus négligeable. En effet, la figure 3 montre que la tension $U_5(t)$ atteint cette fois-ci un maximum de 2,4 V au lieu des 240 mV obtenus précédemment. En d'autres termes, lorsque l'amplitude de forçage atteint approximativement 2,94 V, il y a une bifurcation dans le comportement de la ligne électrique qui se met à transmettre de l'énergie par génération de modes non linéaires : c'est le phénomène de supratransmission [10, 16, 18].

En analysant ainsi le comportement de la tension du cinquième nœud du réseau, nous avons noté pour chaque fréquence du forçage sinusoïdal l'amplitude A_{sup}^* pour laquelle nous obtenons une transition entre le mode d'ondes évanescentes et le mode de génération d'ondes de forte amplitude. Nos résultats sont portés sur le diagramme de bifurcation à droite de la figure 4 où nous avons tracé la courbe donnant

l'amplitude critique A_{sup}^* en fonction de la fréquence f du forçage sinusoïdal. Cette courbe critique divise le plan de paramètre amplitude–fréquence de forçage en deux zones. La première zone de paramètres, qui est située en dessous de la courbe critique, correspond aux amplitudes de forçage trop faible et n'autorisant pas la supratransmission : une onde évanescente est observée. Au contraire, au-dessus de la courbe critique, les paramètres amplitude et fréquence de forçage permettent de déclencher des modes de forte amplitude et donc la supratransmission.

3.3 Bistabilité

La bistabilité est une autre propriété qui peut être mise en évidence dans les milieux autorisant la supratransmission [19,20]. En fait, il existe une seconde valeur critique A_{inf}^* qui fait bifurquer le système dans le sens inverse, c'est-à-dire du régime de génération de modes non linéaires de forte amplitude via la supratransmission au régime d'ondes évanescentes.

Si l'on part d'une région de paramètres de la figure 3 qui autorise la supratransmission, l'amplitude critique du forçage qui permet de revenir dans le mode de fonctionnement évanescent est plus petite que l'amplitude critique A_{sup}^* introduite au paragraphe précédent. Cette propriété d'hystérésis peut être caractérisée en traçant l'amplitude crête atteinte par la tension $U_5(t)$ en fonction de l'amplitude A de l'excitation sinusoïdale. Cette courbe expérimentale est proposée à la figure 4 où il apparaît clairement que l'amplitude critique A_{sup}^* déclenchant la transition entre la génération d'ondes évanescentes et la génération d'ondes de forte amplitude est plus petite que l'amplitude critique A_{inf}^* qui induit une transition de fonctionnement dans l'autre sens.

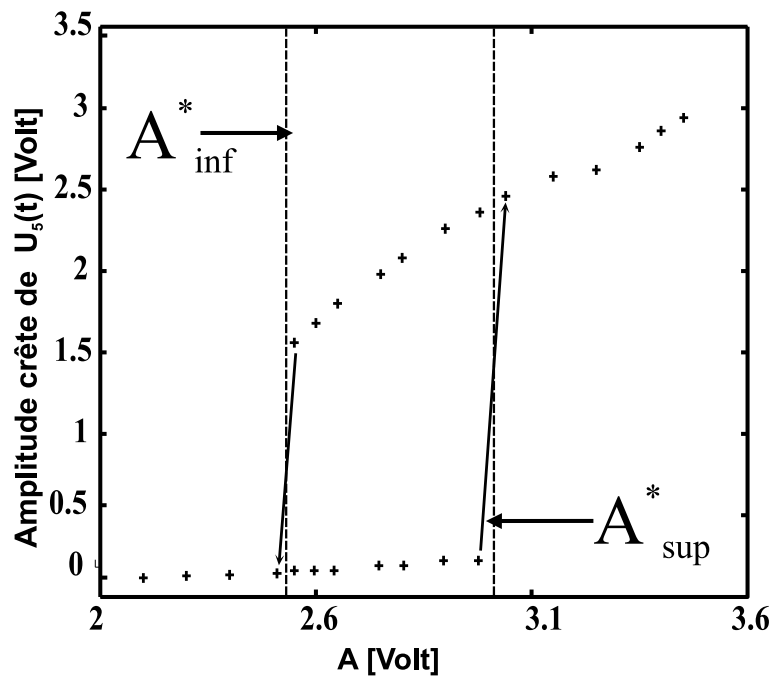


FIGURE 4. Comportement bistable du milieu de Klein–Gordon. La fréquence de l'excitation sinusoïdale est fixée à 12,5 kHz. Les traits verticaux indiquent les deux valeurs critiques A_{inf}^* et A_{sup}^* qui font basculer le régime de fonctionnement du système.

4 Conclusion

Nous avons présenté une ligne électrique dont l'avantage principal est d'obéir exactement à un système d'équations du type Klein–Gordon d'ordre 5. Cette ligne constitue donc un outil permettant une étude expérimentale des propriétés de transmission dans les milieux dérivant de l'équation de Schrödinger non linéaire. Nous avons plus particulièrement montré la capacité d'un milieu du type passe-bande à transmettre de l'énergie lorsqu'il est excité en dehors de sa bande passante. Au-delà d'une amplitude critique de l'excitation d'entrée, le milieu génère des modes non linéaires de forte amplitude qui se propagent. Notre dispositif pourrait par conséquent se révéler intéressant pour comprendre comment l'énergie de ces modes se localise pour induire des trains de solitons [10, 18].

Références

1. L. GAMMAITONI, P. HANGGI, P. JUNG & F. MARCHESONI, Stochastic Resonance, *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 223–287 (1998).
2. E. ULLNER, A. ZAIKIN, J. GARCÍA-OJALVO, R. BÁSCONES & J. KURTHS, Vibrational resonance and vibrational propagation in excitable systems, *Phys. Lett. A*, **312**, 348–354 (2003).
3. M. BORDET & S. MORFU, Experimental and numerical study of noise effects in a FitzHugh–Nagumo system driven by a biharmonic signal, *Chaos Soliton Fract.*, **54**, 82–89 (2013).
4. J. NAGUMO, S. ARIMOTO & S. YOSHISAWA, An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE*, **50**, 2061–2070 (1962).
5. V. I. NEKORKIN, V. B. KAZANTSEV, S. MORFU, J. M. BILBAULT & P. MARQUIÉ, Theoretical and experimental study of two discrete coupled Nagumo chains, *Phys. Rev. E*, **64**, 036602 (2001).
6. M. REMOISSENET, *Waves called solitons: Concept and experiments*, Springer-Verlag, Berlin (1999).
7. L. O. CHUA & L. YANG, Cellular neural networks: Applications, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **35**, 1273–1290, (1988).
8. S. MORFU, P. MARQUIÉ, B. NOFIELE & D. GINHAC, Nonlinear systems for image processing, *Adv. Imag. Electr. Phys.*, **152**, 79–153, (2008).
9. S. MORFU, V. I. NEKORKIN, J. M. BILBAULT & P. MARQUIÉ, Wave front propagation failure in an inhomogeneous discrete Nagumo chain: Theory and experiments, *Phys. Rev. E*, **66**, 046127 (2002).
10. S. B. YAMGOUÉ, S. MORFU & P. MARQUIÉ, Noise effects on gap wave propagation in a nonlinear discrete LC transmission line, *Phys. Rev. E*, **75**, 036211 (2007).
11. L. O. CHUA, *CNN: A paradigm for complexity*, World Scientific on Nonlinear Science Series A, Singapore (1998).
12. S. MORFU, On some applications of diffusion processes for image processing, *Phys. Lett. A*, **373**, 2438–2444 (2009).
13. B. BODO, S. MORFU, P. MARQUIÉ & M. ROSSÉ, A Klein–Gordon electronic network exhibiting the supratransmission effect, *Electron. Lett.*, **46**, 123–124 (2010).
14. M. PEYRARD & T. DAUXOIS, *Physique des solitons*, EDP Sciences, Savoires Actuels (2004).
15. J.-G. CAPUTO, J. LEON & A. SPIRE, Nonlinear energy transmission in the gap, *Phys. Lett. A*, **283**, 129–135 (2001).
16. F. GENIET & J. LEON, Energy transmission in the forbidden band gap of a nonlinear chain, *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 134102 (2002).
17. J. E. MACÍAS-DÍAZ, Numerical study of the process of nonlinear supratransmission in Riesz space-fractional sine–Gordon equations, *Commun. Nonlinear Sci.*, **46**, 89–102 (2017).
18. J. E. MACÍAS-DÍAZ & A. PURI, On the transmission of binary bits in discrete Josephson-junction arrays, *Phys. Lett. A*, **372**, 5004–5010 (2008).
19. R. KHOMERIKI & J. LEON, Bistability in the sine–Gordon equation: The ideal switch, *Phys. Rev. E*, **71**, 056620 (2005).
20. J. MACÍAS-DÍAZ, Bistability of a two-dimensional Klein–Gordon system as a reliable means to transmit monochromatic waves: A numerical approach, *Phys. Rev. E*, **78**, 056603 (2008).

Équilibre de Nash : un fluide inaltérable de complexité maximale

Nicolas Rivier

Institut de Physique et Chimie des Matériaux de Strasbourg (IPCMS) et Université de Strasbourg, 3 rue de l'Université, F-67084 Strasbourg
rivier@ipcms.unistra.fr

Résumé. Optimum aux frontières, plutôt qu'au sommet de la montagne ou au fond de la cuvette.

L'empilement le plus dense de grains (sphères dures avec friction tangentielle infinie qui les force à rouler sans glisser les unes sur les autres, ou à perdre contact) est un problème d'optimisation à plusieurs composantes, dont les solutions se trouvent sur la frontière de l'espace des configurations : cette frontière (optimum de Pareto) est constituée de chemins différentiables (un grain roulant sur un autre) entre des points où les grains sont bloqués. Ce problème a une solution exacte en dimension infinie [1] : un état fluide d'où il n'est pas possible de sortir par une transition de phase, solidification ou évaporation.

C'est un fluide et non un gaz car, plongée dans un espace de dimensions suffisamment élevées, chaque sphère est en contact avec toutes les autres. Le fluide est simple car chaque sphère ne peut rouler que sur une autre à tout instant. L'état du système est donc un *simplexe*, en statique comme en dynamique. Par exemple, un tétraèdre de quatre grains se meut dans l'espace à trois dimensions comme un pacman à deux bouches orthogonales et indépendantes. Il s'agit de l'équilibre de Nash, introduit en théorie des jeux et utilisé en économie, qui est donc en physique statistique un état spécifique et inaltérable de la matière granulaire dure et sèche en dimensions élevées. Comment évoluer dans un tel équilibre, sans l'aide de transitions de phases (renormalisation dans l'espace — opalescence critique — et dans le temps — ralentissement critique) ? On peut l'étudier en théorie des jeux expérimentale.

On calcule la complexité d'un jeu miniature à somme nulle, représenté par une matrice de gains (*payoff*) \mathbf{M} , dont les éléments sont $+1$ ou -1 (gain ou perte normalisés). La matrice \mathbf{M} est une généralisation (O'Neill) de la matrice d'adjacence \mathbf{A} d'un graphe complet (le $(n-1)$ -simplexe où tous les n sommets sont reliés entre eux par $n(n-1)/2$ arêtes) dont les éléments valent tous 1, sauf les éléments diagonaux notés 0. Les deux matrices ont des spectres caractéristiques similaires. Le graphe complet a une complexité n^{n-2} , maximale parmi tous les graphes de n sommets. On montre que la complexité du jeu de O'Neill \mathbf{M} est légèrement, mais strictement supérieure à celle de \mathbf{A} . Ce résultat étonnant est assuré par la stratégie mixte *maximin* qui conduit (par construction) à un équilibre de Nash. La situation des deux joueurs n'est pas exactement symétrique puisqu'Alice perd, en moyenne (minimalement, grâce au maximin) ce que Bill gagne. Le jeu est donc minimalement inéquitable.

1 Introduction

Nous allons montrer que l'état d'équilibre (défini par la physique statistique) d'un fluide de sphères dures en dimensions élevées est bien un équilibre de Nash (défini en théorie des jeux), ceci en mettant leurs espaces de configurations respectifs en correspondance, et tout particulièrement leurs frontières. L'un est une métaphore de l'autre, sans impliquer que l'un ou l'autre soient des modèles réalistes d'une situation physique pour l'un (toutes les sphères en contact, et roulant sans glisser les unes sur les autres) ou économique pour l'autre.

Cet équilibre constitue un état original de la matière. Dans les granulaires, c'est un fluide en équilibre statistique inaltérable [1]. Ce résultat exact a été obtenu pour un ensemble grand canonique, où les $\langle n \rangle$ grains en moyenne sont contrôlés par un potentiel chimique (développement de Mayer et Mayer de la fonction de partition).

On obtient un fluide élémentaire, d'équation d'état

$$P/(\rho kT) = 1 + (1/2)v_a \rho, \quad \rho = \langle n \rangle / V \quad (1)$$

où v_a est le volume d'une sphère de rayon a en D dimensions (cf. le cas du gaz parfait : $P/(kT\rho) = 1$).

Par dimensions élevées, on entend que chaque grain est voisin de tous les autres : la dimension de l'espace dans lequel les n grains sont plongés est supérieure ou égale à $n - 1$. L'état de matière est donc décrit par un $(n - 1)$ -simplexe, par exemple, un tétraèdre de quatre grains en trois dimensions.

Ce simplexe a deux représentations, paradoxales à première vue :

- (i) statique : la matrice d'adjacence $\mathbf{A} = \mathbf{J} - \mathbf{I}$ est celle d'un graphe complet, de complexité maximale. Cette représentation est évidemment invariante sous permutations des n grains. \mathbf{I} est la matrice $n \times n$ unité, \mathbf{J} est la matrice de Woodstock ou d'Attila (il n'y a que des (H)uns [2]).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

- (ii) dynamique : les $p = n - 2$ degrés de liberté (notés en italique l) sont orthogonaux, indépendants, aux frontières de l'espace de configuration. Ici, la matrice \mathbf{A} est creuse (*sparse*), mais elle est toujours invariante sous permutations des n grains.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & l & . & . \\ 1 & 0 & 1 & l & . \\ l & 1 & 0 & 1 & l \\ . & l & 1 & 0 & 1 \\ . & . & l & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Cette représentation clairsemée mais toujours invariante sous les $n!$ permutations des grains fait penser à la fonction d'onde unique d'une assemblée de bosons.

C'est un fluide, et c'est tout. Aucune transition de phase (changement d'état, condensation en un solide ou évaporation en un gaz, à moins de limiter la dimension de l'espace à strictement moins que $n - 1$), comme nous l'avons constaté avec surprise et quelques regrets [1].

Le retour à l'équilibre est très lent (« tôt ou tard » selon les économistes, mais « tôt ou tard je serai mort », a dit Keynes). Ce n'est pas le bon vieil équilibre de la mécanique, car il est aux frontières de l'espace de configurations. C'est un équilibre de Nash [3].

On considère un granulaire dur et sec avec friction tangentielle infinie, dans un espace de dimension suffisamment élevée, pour que chaque grain soit voisin de tous les autres, sur lesquels il peut rouler sans glisser (à condition d'écarter deux grains en dilatant un nombre minimal d'arêtes pour éliminer les circuits impairs) : un simplexe. Les excitations élémentaires entre grains sont

- (a) Rouler sans glisser, ce qui n'est possible qu'en en l'absence de circuits impairs [4] (triangles, par exemple).
- (b) Déconnexion : par exemple, quatre grains, tous voisins, forment un tétraèdre dans l'espace ordinaire à trois dimensions. Il y a deux déconnexions, perpendiculaires, indépendantes. Les quatre autres arêtes sont des contacts de longueur minimale et forment le polygone de Petrie du simplexe, qui ressemble dynamiquement à un pacman à deux bouches. Les degrés de liberté sont les deux bouches du pacman. Pour rouler sans glisser aux frontières de l'espace de configuration, une des deux bouches reste fermée. Cet équilibre est anti-optimal : les points et les chemins d'équilibre sont sur les frontières de l'espace de configuration, des sphères roulant les unes sur les autres ou se déconnectant, de telle sorte que v^2 , le volume du simplexe au carré, reste minimal. Les $p = n - 2$ modes dynamiques (déconnexion d'un contact, les autres restant minimaux) sont indépendants car perpendiculaires. Ce sont les chemins ou sentiers de Pareto [5].

En général, on a pour un $(n - 1)$ -simplexe, n grains en $n - 1$ dimensions, $p = n - 2$ déconnexions indépendantes.

On a un état original de la matière condensée, inaltérable, un fluide car automatiquement cisailable. Pour en sortir (transition de phase), il faudrait confiner le granulaire (par exemple, avec plus de quatre grains dans l'espace ordinaire). On passerait alors d'un solide fragile (avec avalanches) au fluide, et vice-versa [6]. D'où des applications en économie, en théorie des jeux [3, 7] et en neurophysiologie [8].

2 Tétraèdre de quatre sphères sous cisaillement

Quatre grains durs (modélisés ici par des sphères dures de même rayon R) s'empilent en un tétraèdre, un simplexe, unité compacte à trois dimensions avec six arêtes de longueur minimale $2R$, perpendiculaires deux à deux, et quatre faces triangulaires équilatérales. Tout cisaillement force un grain à rouler sans glisser sur les autres s'il le peut, ou à perdre contact avec eux. La rotation sans glisser n'est possible que dans des circuits pairs de grains en contact. Tout circuit impair doit avoir au moins une déconnexion [4]. Soit un tétraèdre de quatre circuits impairs (faces triangulaires) de grains en contact. Cisailons-le. Il suffit de dilater deux des six arêtes, opposées et perpendiculaires pour que les grains qu'elles connectent perdent contact. Le tétraèdre devient un quadrilatère non planaire de barres (son polygone de Petrie [9]) complété par les deux arêtes dilatables.

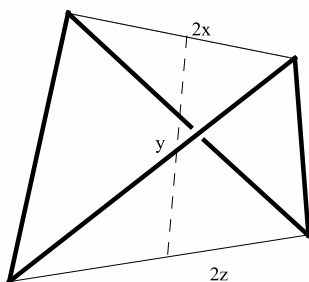


FIGURE 1. Le tétraèdre sous cisaillement devient un quadrilatère non-planaire de barres (traits épais) complété par les deux arêtes dilatables orthogonales (traits fins).

Les deux arêtes dilatables sont orthogonales, de longueurs a , $x = a/(4R) \geq 1/2$ et c , $z = c/(4R) \geq 1/2$. Un segment de longueur b , $y = b/4R$, perpendiculaire à ces deux arêtes, relie leurs points médians (cf. Fig. 1). Les sommets du tétraèdre $(\pm x, -y, 0)$ et $(0, y, \pm z)$ sont connectés par des barres de longueur minimale $2R$ qui forcent les variables sur la sphère unité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Strictement, les variables (x, y, z) sont à l'intérieur d'un double triangle sphérique (domaine de la sphère unité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) bordé par deux cercles, intersection de cette sphère avec les plans $x = 1/2$, $z = 1/2$. Le grand cercle $y^2 = 0$ est à l'intérieur de l'espace de configuration. Il correspond à la limite d'un tétraèdre aplati, de volume géométrique nul (sans tenir compte de l'épaisseur physique des grains $2R$). Le volume au carré du tétraèdre $v^2 = x^2 z^2 (1 - x^2 - z^2)$ (en unités de $(2/3)^2 (2R)^6$) est minimal aux deux sommets $(1/2, \pm 1/\sqrt{2}, 1/2)$ et sur les bords du double triangle sphérique $x = 1/2$ ou $z = 1/2$. Il est donc minimal sur la frontière du domaine, qui peut être explorée par chaque sphère roulant sur les autres et déformant le polygone de Petrie à longueur de barre fixée.

Pour explorer l'intérieur du domaine, il faut dilater quelques barres : le volume au carré du tétraèdre augmente pour atteindre un maximum avec la configuration bcc (cubique centré) $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

3 Le simplexe

Il s'agit d'un graphe complet, décrit par la matrice d'adjacence $A_{ij} = 1$, $i \neq j$, $i = 1, 2, \dots, n$, où chaque grain est adjacent à tous les autres, ce qui est possible si l'espace est de dimension au moins égale à $n - 1$, le nombre de grains moins 1. On a donc n grains (sommets), $n(n - 1)/2$ arêtes, équivalents sous permutation, plongés dans un espace de dimension $n - 1$, avec $p = n - 2$ chemins indépendants, orthogonaux.

Le simplexe est représenté par la matrice d'adjacence \mathbf{A} (Éq. (2)). Il est de complexité (nombre d'arbres couvrants) κ maximale. Son spectre a un état séparé de tous les autres.

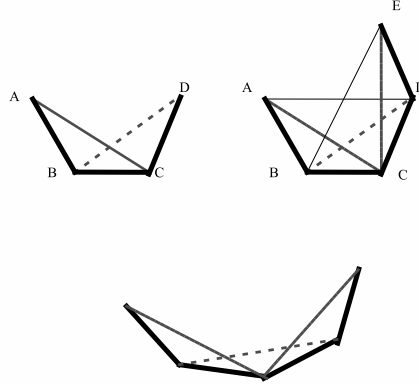


FIGURE 2. Chaîne de Petrie (trait épais) et arêtes dilatables (trait fin ou pointillé). À gauche, tétraèdre ($n = 4$) : les arêtes dilatables AC et BD sont orthogonales. À droite et en bas, le simplexe $n = 5$ en quatre dimensions : les deux tétraèdres $ABCD$ et $BCDE$ ont une face triangulaire commune BCD avec une arête dilatable BD . Cette arête a deux plans orthogonaux en quatre dimensions, pertinents à chaque tétraèdre. Les deux arêtes dilatables AC et CE , contiguës en C , sont donc orthogonales,

Pour un tel simplexe, on construit successivement :

1. une chaîne de $n - 1$ arêtes dite chaîne de Petrie $\{A_{i,i+1}\}$, qui peut se fermer en un polygone gauche avec $A_{n,1}$. Ces arêtes sont des barres rigides de longueur minimale $2x = 1$. Elles sont représentées en traits épais dans la figure ;
2. les $n - 2 = p$ arêtes $\{A_{i,i+2}\}$ sont des arêtes dilatables ($2x > 1$) pour permettre aux grains de rouler sans glisser les uns sur les autres (elles ferment les triangles $(i, i + 1, i + 2)$). Ces arêtes constituent les degrés de liberté du simplexe. Elles sont représentées en traits fins ou traitillés en Fig. 2, et notées en italique 1 dans la matrice \mathbf{A} (Éq. (3)). Nous avons donc deux chaînes de ces arêtes, qui peuvent se fermer en un ou deux polygones par $A_{n+1,1}$ et $A_{n,2}$;
3. les $(n - 2)(n - 3)/2$ arêtes restantes sont sans importance.

La chaîne de Petrie d'un simplexe est une séquence d'arêtes contiguës ne fermant jamais un circuit. Les arêtes dilatables sont alors celles que la chaîne de Petrie évite. Le tout est invariant sous permutation entre grains. On a un discours pour explorer ou se souvenir de la structure. La matrice \mathbf{A} est alors creuse (*sparse*) (Éq. (3)).

Le volume au carré d'un tel simplexe (n grains, $p = n - 2$ chemins orthogonaux) — arêtes dilatables de longueur $2x_k$ — est donné simplement par Pythagore :

$$v^2 = s_1 \dots s_p (c_p - \sum s_k), \quad s_k = x_k^2. \quad (4)$$

Pour le tétraèdre, on a $p = 2$ et $c_2 = 1$.

On vérifie que le fluide de sphères dures en dimensions élevées est bien en équilibre de Nash.

Les $p = n - 2$ chemins orthogonaux vont de $s_k = 1/4$ à $c_p - (p-1)/4$. Donc, l'intégrale de configuration dans [1] se réduit à

$$V_p^2 = \int ds_1 \dots \int ds_p = (c_p - p/4)^p / p! = [(p+2)/8]^p / p!, \quad (5)$$

où les intégrales vont de $1/4$ à $\sum s_i = c_p$. On a $c_p = 3p/8 + 1/4$, donc $c_2 = 1$ pour un tétraèdre.

4 Jeu expérimental (O'Neill)

Il s'agit d'un jeu miniature (*toy game*), caractérisé par une matrice de paiements \mathbf{M} impliquant deux joueurs : Alice (stratégies en lignes) et Bill (stratégies en colonnes), de somme nulle (un gain d'Alice est une perte de Bill), et normalisé. Ici, nous prenons le point de vue d'Alice (son paiement est $+1$ en cas de gain, et -1 en cas de perte).

Le jeu (cf. références [3, pp. 49–50] et [7, p. 41]), défini par la matrice ($n \times n$) de paiements \mathbf{M} reproduit l'espace de configurations donné par v^2 , avec p sentiers orthogonaux Z issus d'un point A . Les p points Z sont donc tous équivalents sous permutation. De plus, on attribue au point A une multiplicité x , avec $n = p + x$. On a équilibre de Nash en stratégie mixte si $x = p - 1$.

Dans un jeu de cartes, A représente un as et Z , les p autres cartes. Si $p = 3$, ce seront les figures, si $p = 1$, le roi seul. Le jeu se joue avec A(lice) contre B(ill). C'est donc un jeu miniature (*toy game*). Les stratégies possibles d'A sont indiquées par les lignes de la matrice des gains. B (colonnes de la matrice) représente l'adversaire, ou le champ moyen contre lequel A joue, et elle devra adopter la stratégie *maximin* pour minimiser ses pertes quelle que soit la stratégie adoptée par son adversaire (B). De plus, le jeu est à somme nulle : dans chaque case de la matrice des gains, la somme des gains de A et de B est exactement zéro, donc le gain (perte) de B est la perte (gain) de A. Chaque case est donc gagnante pour A ou pour B, par le même montant. La matrice des gains est donc normalisée, avec -1 si Alice perd, et 1 si elle gagne. La règle du jeu établit les *payoffs*. Alice gagne si les deux joueurs produisent un as ou des figures Z différentes. Elle perd si l'un de joueurs produit une figure et l'autre un as, ou si les deux joueurs produisent la même figure (roi-roi, dame-dame...). La matrice des gains est donc invariante sous permutations de Z .

Elle peut être étendue pour attribuer à A une multiplicité x . Soit, pour $p = 3$ et $x = 2$,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

On voit que si l'on attribue à l'as une multiplicité de $p - 1$, toutes les stratégies mixtes d'A (lignes de la matrice des gains) et toutes les stratégies mixtes de B (colonnes) ont exactement le même nombre de cases gagnantes. Le *payoff* de A est le même $(p-1) - p = -1$, quelle que soit sa stratégie (tant qu'elle est aléatoire (mixte), sinon B connaîtrait à l'avance la carte que A va jouer). C'est le moins mauvais *payoff* pour une stratégie mixte de B (colonnes). De même pour B, mais il va gagner plus souvent (son *payoff* est $p - (p-1) = +1$). Alice (ou Bill) doivent donc produire, au hasard, l'une des $2p - 1$ cartes (les p figures Z ou l'as avec multiplicité $p-1$). On a équilibre de Nash en stratégie mixte ; cette stratégie est dite *maximin*. Notons que c'est seulement quand p tend vers l'infini que le jeu est équitable (la probabilité de gain d'Alice $p-1/(2p-1) = (1/2)[1-1/(2p-1)]$ tend vers celle de Bill $p/(2p-1) = (1/2)[1+1/(2p-1)]$ et vers $1/2$). Pour $p = 1$ (as et roi), la stratégie maximin est de ne jamais jouer l'as. C'est alors Bill qui gagne, à cause des règles du jeu.

On a donc généralisé \mathbf{A} en matrice de gains \mathbf{M} en théorie des jeux (± 1 , normalisation 1, à somme nulle (gain d'A = - gain de B), $n = p + x$).

Multiplicité x pour l'as : Si $x = 0$, on retrouve la matrice d'adjacence \mathbf{A} qui est manifestement invariante sous permutations.

$$\delta = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{M}) = \lambda^{x-1}[(\lambda + 2)(\lambda - x) - \lambda p](\lambda + 2)^{p-1}.$$

[] est factorisé aux frontières de l'espace de configurations :

$$x = 0 : \quad \delta = (\lambda + 2 - p)(\lambda + 2)^{p-1},$$

$$p = 0 : \quad \delta = \lambda^{x-1}(\lambda - x).$$

et sur le pli maximin (stratégie mixte d'A qui rend B indifférent)

$$p = x + 1 : \quad \delta = \lambda^{p-2}(\lambda + 1)[\lambda - 2(p - 1)](\lambda + 2)^{p-1}.$$

La valeur propre de Perron $2(p - 1)$ est bien séparée. La complexité est alors

$$\kappa = (2p - 2)^{p-2}(2p)^{p-1} = n^{n-2}(1 + 1/n + \dots), \quad \text{avec } n = 2p - 1.$$

Remerciements : Je remercie mon co-auteur J.-Y. Fortin, ainsi que B. Houchmandzadeh (Grenoble) et N. Anantharaman (IRMA, Strasbourg) pour leurs séminaires inspirants récents.

Références

1. D. WYLER, N. RIVIER & H. L. FRISCH, Hard-sphere fluid in infinite dimensions, *Phys. Rev. A*, **36**, 2422–2431 (1987).
2. N. RIVIER, Matériaux granulaires. Désordre, complexité et théorie des graphes, Chap. 12 de *Complexité et Désordre, Éléments de réflexion*, éditeur : J.-C. S. Lévy, collection Grenoble Sciences, EDP Sciences, les Ulis, pp. 187–196 (2015).
3. K.G. BINMORE, *Game Theory. A very short introduction*, Oxford University Press (2007).
4. R. M. BARAM, H. J. HERRMANN & N. RIVIER, Space-filling bearings in three dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 044301 (2004).
5. V. PARETO, *Manuel d'économie politique*, trad. A. Bonnet, Pichon, Paris (1963).
6. N. RIVIER & J.-Y. FORTIN, Unjamming in dry granular matter: Second-order phase transition between fragile solid and dry fluid (bearing) by intermittency, *Solid State Phenom.*, **172–174**, 1106–1111 (2011).
7. G. GIRAUD, *La théorie des jeux*, Flammarion (2009).
8. A. BERTHOZ, *La simplicité*, Odile Jacob (2009).
9. H. S. M. COXETER, *Regular Polytopes*, Dover (1973).

Relaminarisations rares dans un modèle de turbulence de paroi transitionnelle : au-delà des expériences et simulations numériques directes

Joran Rolland

Goethe Universität Frankfurt, Altenhoferallee 1, D60348, Frankfurt, Allemagne
rolland@iau.uni-frankfurt.de

Résumé. Ce texte présente une étude des relaminarisations extrêmement rares dans un modèle de turbulence de paroi à l'aide d'un algorithme de type mutation-sélection. Premièrement, l'effondrement de bouffées turbulentes isolées est étudié. Dans ce cas, il est possible de séparer l'effet du renforcement des bouffées turbulentes et du changement de l'espace des phases sur la dépendance du temps de vie de la turbulence en le nombre de Reynolds. Deuxièmement, l'effondrement de la turbulence dans un domaine initialement à sa fraction turbulente stationnaire est étudiée. Dans ce cas, on montre la croissance exponentielle du temps de vie de la turbulence avec la taille du domaine. De plus, on montre l'augmentation du taux de croissance avec le nombre de Reynolds. Les deux cas sont brièvement discutés dans un cadre théorique de l'étude des événements rares.

Abstract. This text presents a study of extremely rare collapses of turbulence in a model of wall turbulence using a mutation-selection algorithm. We consider two types of relaminarisations. One the one hand, we study the collapse of isolated turbulent puffs. In that case, we can separate the effect of strengthening of the equilibrium puff and the change of the phase space on the dependence of the lifetime of turbulence on Reynolds number. On the other hand, we study the collapse of a domain starting at its steady state turbulent fraction. In that case, we highlight the exponential growth of the lifetime with the size of the domain. Moreover, we show the increase of the growth rate of the lifetime of turbulence with Reynolds number. Both cases are briefly discussed in a theoretical framework for rare events.

1 Introduction

La transition vers la turbulence dans les écoulements de paroi, tels que l'écoulement de Poiseuille dans une conduite, l'écoulement de Couette plan, la couche limite, etc. se distingue notablement des séries de bifurcations et d'instabilités linéaires que l'on retrouve par exemple dans la convection thermique. L'écoulement de base est linéairement stable à des Reynolds bien au-delà du seuil de transition. En conséquence, des perturbations d'amplitude finie sont nécessaires pour créer de la turbulence. On peut de plus constater la coexistence spatiale et temporelle entre écoulement laminaire et écoulement turbulent. Une autre caractéristique est que dans le régime transitionnel, des relaminarisations de tout ou partie de l'écoulement sont observées. La turbulence est alors caractérisée par son temps de vie moyen T [1,2]. Cela peut rendre la turbulence de paroi très intermittente. Comprendre et savoir modéliser cette intermittence est fondamental pour comprendre les couches limites planétaires stables par exemple [3].

Bien qu'il soit clair que le temps de vie moyen de la turbulence T croisse au moins exponentiellement avec le nombre de Reynolds, la dépendance exacte de $\ln(T)$ en R n'est pas entièrement bien connue pour tous les écoulements de paroi. De plus, lorsque l'écoulement a sa fraction turbulente naturelle, la dépendance de T avec la taille du domaine est très partiellement connue [2]. Le principal frein à ces investigations est l'extrême longueur de T . Connaître précisément $T(R, L)$ permettra de confronter les explications proposées pour la physique des relaminarisations.

Un moyen de calculer $T(R, L)$ efficacement est de reformuler le problème en la recherche d'un événement rare. On peut alors utiliser des méthodes numériques dédiées pour obtenir $T(R, L)$ [4]. Le cadre

théorique de l'étude de ces excursions rares peut être utilisé pour interpréter la dépendance de $T(R, L)$ [7]. Ce compte-rendu présente une étude de ce type réalisée sur un modèle de l'écoulement de Poiseuille dans une conduite [1]. Le corps de l'étude concerne le calcul systématique de $T(R)$ pour les bouffées turbulentes isolées et $T(R, L)$ dans les conduites ayant une fraction turbulente naturelle (Sec. 3). Une interprétation du comportement de $T(L)$ selon les valeurs de L est brièvement proposée (Sec. 4).

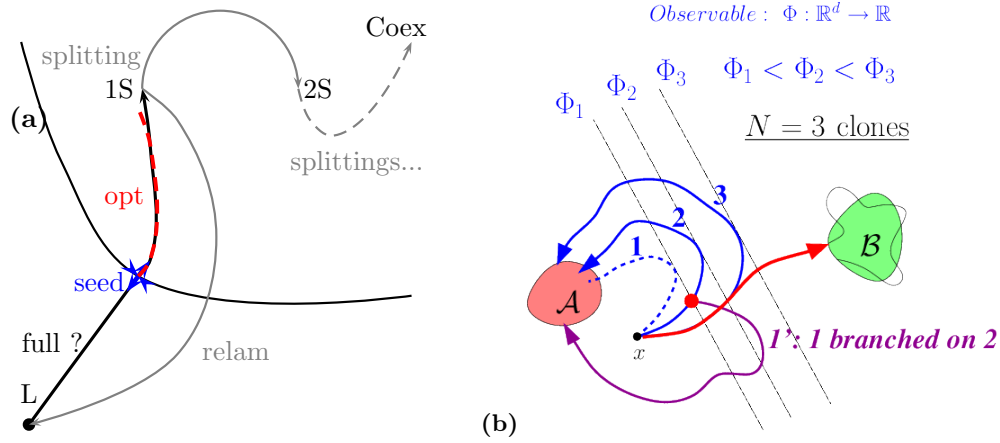


FIGURE 1. (a) Schéma de l'espace des phases de l'écoulement de Poiseuille dans une conduite transitionnel indiquant les états métastables (écoulement laminaire L), un ou plusieurs *puffs* (nS), les régions spécifiques (séparatrice : ligne noire, germe minimal de la turbulence : *seed* [9]) ainsi que les événements particuliers les reliants (*splitting*, *relaminarisation*). (b) Schéma de principe de l'algorithme *Adaptive Multilevel Splitting*, pour le cas de trois clones, indiquant les états de départ \mathcal{A} et d'arrivée \mathcal{B} , les niveaux de coordonnée réactionnelle Φ ainsi que deux exemples de branchement.

2 Modèle et méthode

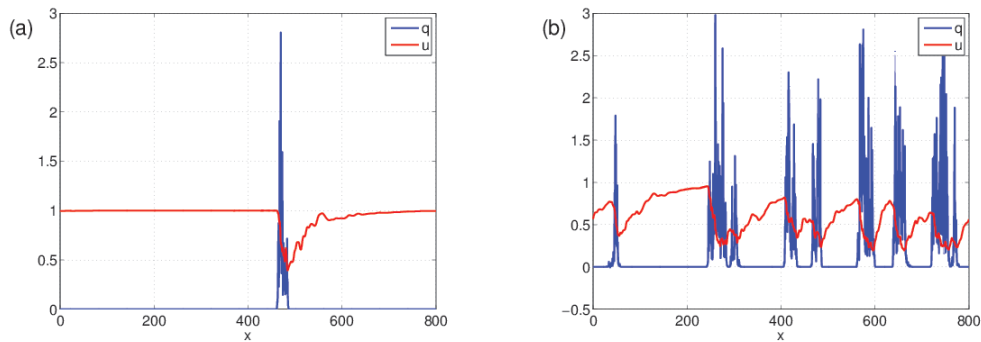


FIGURE 2. Vitesse longitudinale u et intensité de la turbulence q à un instant donné en fonction de la coordonnée longitudinale x dans deux situations : (a) bouffée turbulente isolée, (b) fraction turbulente stationnaire.

2.1 Le modèle stochastique

Le modèle stochastique de l'écoulement de Poiseuille dans une conduite contient le champ $u(x, t)$ rendant compte du champ de vitesse longitudinal et le champ $q(x, t)$ rendant compte de l'intensité de la

turbulence [1]. Les deux champs dépendent du temps et de la coordonnée longitudinale x . La conduite a une longueur longitudinale L et est supposée périodique. Les coordonnées radiales et azimutales de la conduite sont « tout intégrées » dans ce modèle. Les deux équations différentielles stochastiques couplées sont

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(1+U)\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon_1(1-u) - \epsilon_2 u q, \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -U\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + q[u+r-1-(r+\delta)(q-1)^2] + q\sqrt{\frac{2}{\beta}}\eta. \quad (2)$$

Ici r , le nombre de Reynolds, est le principal paramètre de contrôle tandis que $\epsilon_1 = 0,04$, $\epsilon_2 = 0,2$, $\delta = 0,1$ et $\beta = 1,5$ sont choisis pour que le modèle décrive la dynamique désirée. En l'occurrence, il s'agit d'un système excitable, inspiré par les potentiels d'action dans les neurones. Cela produit des bouffées turbulentes ou *puffs* très réalistes (cf. Fig. 2). Il s'agit de l'état de l'écoulement dans la conduite lors de la transition, quand écoulement laminaire et turbulent coexistent de manière permanente. Le modèle décrit aussi fidèlement l'invasion de la conduite par la turbulence à plus haut nombre de Reynolds (régime dit de *slug* [1]).

Pour étudier qualitativement les *splitting* et quantitativement les relaminarisations, on utilise deux types de condition initiale. Le premier type de condition initiale est dit de bouffée turbulente isolée dans la conduite (Fig. 2 (a)). Quelle que soit la taille de la conduite L elle ne contient qu'une seule bouffée. Il ne s'agit pas d'une situation stationnaire. Le second type de condition initiale est dit de fraction turbulente stationnaire (Fig. 2 (b)). Il s'agit de l'état atteint lorsqu'on laisse les bouffées se dédoubler jusqu'à ce que la fraction turbulente $Q = \frac{1}{L} \int_{0 \leq x \leq L} q(x, t) dx$ fluctue autour d'une valeur moyenne.

2.2 L'Adaptive Multilevel Splitting

On rappelle brièvement la méthode numérique utilisée pour calculer les relaminarisation et *splitting* ainsi que les temps de vie de la turbulence associés. Il s'agit de l'algorithme *Adaptive Multilevel Splitting* (AMS) [4] (Fig. 1 (b)). C'est un algorithme de mutation-sélection appartenant à la famille générale de l'*importance sampling*. L'algorithme utilise N dynamiques clones ainsi qu'une coordonnée réactionnelle Φ (ou *observable*) pour calculer itérativement N réalisations de trajectoires réactives. On définit une condition initiale \mathcal{A} (par exemple une bouffée isolée) et un état final \mathcal{B} (par exemple l'écoulement laminaire). La coordonnée réactionnelle mesure la position relative du système par rapport à \mathcal{A} et \mathcal{B} . On choisit souvent $\Phi(\mathcal{A}) = 0$, $\Phi(\mathcal{B}) = 1$ et Φ croissant de manière monotone entre les deux. La construction des trajectoires réactives se réalise en deux temps. Lors d'une étape 0, les N clones partent d'un voisinage de \mathcal{A} et évoluent naturellement jusqu'à ce qu'ils rejoignent \mathcal{A} ou \mathcal{B} . Puis on réalise la mutation-sélection : à chaque étape, la trajectoire allant le moins loin (mesuré par le maximum de Φ sur la trajectoire) est supprimée puis rebranchée sur une des autres, on lui laisse alors avoir sa dynamique naturelle (avec sa propre réalisation du bruit) jusqu'à ce qu'elle rejoigne \mathcal{A} ou \mathcal{B} . Au bout de k itération, toutes les trajectoires ont atteint \mathcal{B} et l'on dispose de N réalisations de trajectoires réactives. Le temps de vie de l'état \mathcal{A} est calculé à partir de k [7]. L'intérêt de l'algorithme est de drastiquement réduire la durée de calcul. Si l'on utilise des simulations numériques directes, le coût est directement proportionnel à T , tandis qu'avec l'AMS il est typiquement proportionnel à $\ln(T)$. Il s'agit d'un gain d'autant plus considérable que l'événement est rare.

On appelle Q_0 la fraction turbulente de la condition initiale. Pour provoquer des relaminarisations, on utilise la coordonnée réactionnelle

$$Q_0 \equiv \frac{1}{L} \int_0^L q(x, t=0) dx, \quad \phi \equiv 1 - \sqrt{\frac{1}{LQ_0} \int_0^L q(x, t) dx}. \quad (3)$$

Cela a l'avantage de ne pas négliger la réduction de la fraction turbulente lorsque la conduite est quasiment laminaire grâce à la racine carrée.

3 Résultats

3.1 Visualisations

À l'aide de l'AMS, des trajectoires de relaminarisations (Fig. 3(a, c, d)) et de *splittings* (Fig. 3(b)) sont calculées. On commence par les décrire à l'aide de diagrammes spatio-temporels de q ou $1 - u$. La relaminarisation d'un *puff* se produit avec une réduction globale de la fraction turbulente. La taille du *puff* ne change que très peu, à la toute fin de la trajectoire. Le *splitting* d'un *puff* se produit par l'éjection de turbulence vers l'avant puis le développement de ce second germe (Fig. 3(b)). L'intérêt de l'utilisation de l'algorithme à ce niveau est de calculer simplement des relaminarisations très rares comme lorsque la turbulence s'effondre dans une conduite qui a initialement sa fraction turbulente stationnaire (Fig. 3(c, d)). À plus bas Reynolds ($r = 1,1$), ce type de relaminarisations se produit par l'écroulement successifs et indépendant des *puffs* (Fig. 3). À plus haut Reynolds ($r = 1,2$), ce type de relaminarisations se produit par l'écroulement en bloc de toutes les bouffées initialement présentes.

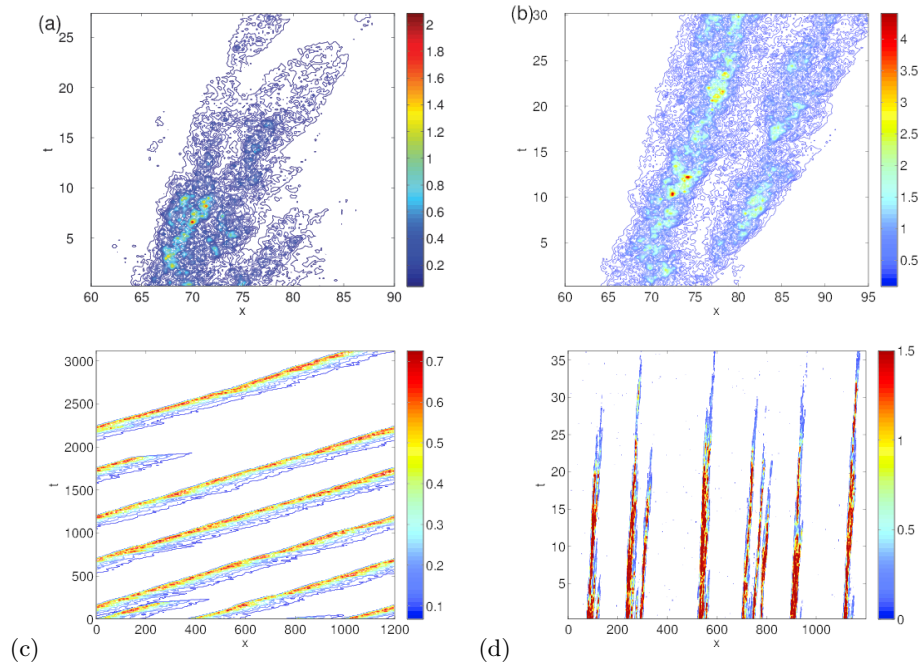


FIGURE 3. Diagrammes spatio-temporels de trajectoires calculées grâce à l'AMS. (a) $q(x, t)$ lors de la relaminarisation d'un *puff* isolé. (b) $q(x, t)$ lors du *splitting* d'un *puff* isolé. (c) $1 - u(x, t)$ lors de la relaminarisation d'une conduite entière partant de la fraction turbulente stationnaire à $r = 1,1$. (d) $q(x, t)$ lors de la relaminarisation d'une conduite entière partant de la fraction turbulente stationnaire à $r = 1,2$.

3.2 Effet de la taille et du nombre de Reynolds

On présente ensuite la dépendance du temps de vie de la turbulence en le nombre de Reynolds et la taille dans deux types de relaminarisations.

Le premier type de relaminarisations concerne des bouffées isolées. On peut utiliser deux types de condition initiale lorsque le nombre de Reynolds est varié. D'une part, on peut utiliser une bouffée isolée à l'équilibre à chaque nombre de Reynolds (Fig. 4(a), pointillés rouges), on peut d'autre part utiliser la même condition initiale (une bouffée à l'équilibre à r_0) pour tous les nombres de Reynolds considérés

(Fig. 4 (a), courbes continues). On note deux comportements distincts selon les types de conditions initiales. Dans le premier cas, $\ln(T)$ est surlinéaire, comme cela est généralement constaté lors d'expériences ou de simulations numériques directes [1]. Cela n'est pas surprenant car il s'agit de la reproduction des expériences classiques. Dans le second cas, on note une dépendance affine $\ln(T) = a(r_0) + b(r_0)r$, les deux coefficients dépendant de r_0 . Il apparaît que b croît nettement avec r_0 .

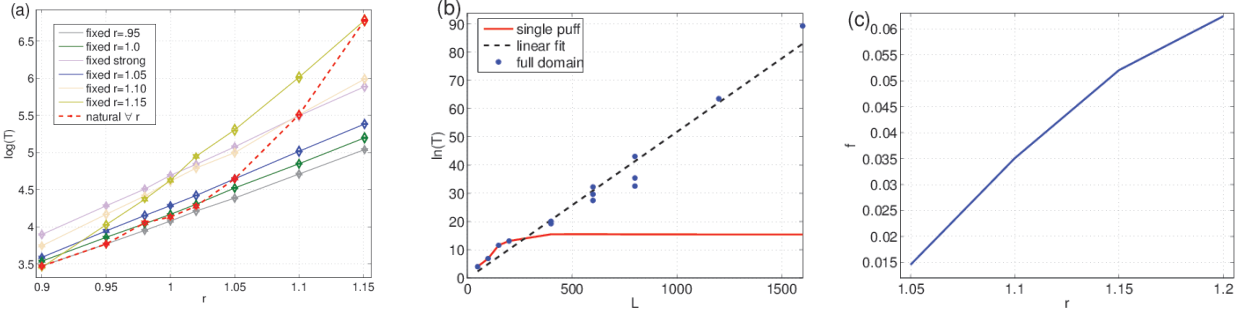


FIGURE 4. (a) Logarithme du temps de vie d'un *puff* isolé en fonction de r dans deux types d'expérience : lorsque l'on prend la même *puff* quel que soit r comme condition initiale ou lorsque la condition initiale est un *puff* à l'équilibre à r . (b) Logarithme du temps de vie de turbulence à $r = 1,15$ en fonction de la taille de la conduite, avec deux types de condition initiale : *puff* isolé ou fraction turbulente stationnaire. (c) *Rate function* des grandes déviations en taille du temps de vie en fonction du nombre de Reynolds.

Le second type d'expérience consiste à prendre une condition initiale de fraction turbulente stationnaire dans des conduites de taille croissante à un nombre de Reynolds donné et d'étudier $\ln(T)$ en fonction de L (Fig. 4 (b)). Une dépendance affine, presque linéaire apparaît. En comparaison, le temps de vie d'une bouffée isolée sature assez rapidement avec l'augmentation de la taille (courbe rouge). Pour la conduite ayant une fraction turbulente stationnaire initialement, on trouve des grandes déviations en la taille du temps de vie de la turbulence

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln(T) = f(r, \mathcal{L}). \quad (4)$$

Ce type de grandes déviations avaient déjà été mises en évidence dans les PDFs de l'énergie cinétique de l'écoulement de Couette plan transitionnel, en particulier à bas Reynolds lorsqu'elles ont une asymétrie claire vers les valeurs basses [11]. On peut finalement reproduire ce second type d'expérience à différents nombre de Reynolds et noter que $f(r)$ croît avec r (Fig. 4 (c)).

4 Discussion

Le cadre théorique de l'étude des événements rares permet de discuter brièvement des résultats numériques. Dans les systèmes stochastiques, le temps de vie d'un état peut se réécrire comme un temps de premier passage moyen T (ou inversement un taux de transition $1/T$). Sous des conditions assez générales, le temps de premier passage moyen peut être formellement écrit dans une limite de faible bruit $\beta \rightarrow \infty$ à l'aide du principe de grandes déviations de Freidlin–Wentzell $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln(T)/\beta = S(\beta)$ où S est l'action de l'équation différentielle stochastique [7, 10]. Cette action apparaît naturellement dans l'intégrale de chemin dite d'Onsager–Machlup. Grossièrement, elle mesure la quantité de bruit sentie par le système lors de la trajectoire conduisant au premier passage. Sous des conditions relativement générales, cette action S peut être écrite comme la différence de *quasi-potentiel* Φ du système entre le col par lequel passe le premier passage et le point de départ. Ce type d'écriture généralise la loi d'Arrhenius et la formule d'Eyring–Kramers à une large variété de systèmes hors équilibre. Le préfacteur α dans $T = \alpha \exp(-\beta \Delta \Phi)$ peut aussi être étudié dans les systèmes hors équilibre [5]. Ce type d'écriture est dans l'esprit des quasi-potentiels apparaissant dans les solutions de faible bruit de l'équation de Fokker–Plank [6].

Le système étudié étant stochastique, il est naturel de considérer les temps de vie dans ce cadre. En particulier, cela permet de généraliser l'intuition acquise lors de l'étude des systèmes gradients à l'étude des systèmes non gradients. Dans les systèmes gradients, la forme du potentiel contrôle la structure des trajectoires de premier passage ainsi que la croissance exponentielle de T . On discute donc le comportement de $T(r, L)$ à l'aide d'un tel quasi-potentiel Φ^1 . Dans le cas de l'effondrement d'une bouffée isolée, cela nous donne des indications sur l'évolution de Φ avec r , en séparant Φ au col et Φ de la bouffée « à l'équilibre ». Dans le cas de la relaminarisation de conduite entière, cela nous permet de comprendre l'effet de la taille en séparant trois gammes de taille. Pour les plus petits domaines, le comportement de $\Delta\Phi \propto L$ s'apparente aux transition dite *flip* dans un système gradient, où le champ se retourne globalement de manière cohérente [7]. Dans une gamme intermédiaire, on peut réécrire $\Delta\Phi \propto L = nL_{puff}$, car il s'agit de faire s'effondrer n bouffées quasiment indépendantes occupant chacune une taille approximativement L_{puff} . Pour les plus grandes tailles, la grande probabilité de division des bouffées fait qu'elles ne sont absolument plus indépendantes et le plus grand nombre d'espaces libérés peut être re-remplis avec une grande probabilité. Les bouffées relaminarisent donc toutes en bloc, comme les *flips* des systèmes gradients et l'on retrouve $\Delta\Phi \propto L$.

Ce compte-rendu présentait l'étude numérique des relaminarisations rares dans un modèle de turbulence de paroi et une brève discussion théorique des résultats. Les résultats présents seront d'abord affinés, en particulier en élargissant la gamme de nombre de Reynolds dans laquelle l'étude est réalisée. Cette étude ouvre un certain nombre de perspectives. Dans un premier temps, une étude similaire peut être réalisée sur un modèle de turbulence de paroi un peu plus réaliste, dont la dynamique est basée sur un réseau d'itérations couplées. Cela nécessitera quelques adaptations pour transposer ce type d'algorithme à un système déterministe [8]. Cela conduira naturellement à des études similaires utilisant la véritable dynamique d'écoulement de paroi. Cela pourra aussi conduire à l'extension du calcul des trajectoires optimales vers la turbulence, en particulier en étant capable de partir de l'écoulement laminaire, et non plus d'un germe minimal sur la frontière entre écoulement laminaire et turbulent dans l'espace des phases [9].

Remerciements : Cette étude a pu utiliser les ressources de HPC et de visualisation du Centre de Calcul Interactif de l'université Nice Sophia Antipolis.

Références

1. D. BARKLEY, Modeling the transition to turbulence in shear flows, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **318**, 032001 (2011); Theoretical perspective on the route to turbulence in a pipe, *J. Fluid Mech.*, **803** (2016).
2. T. M. SCHNEIDER & B. ECKHARDT, Lifetime statistics in transitional pipe flow, *Phys. Rev. E*, **78**, 046310 (2008).
3. C. ANSORGE & J. P. MELLADO, Global intermittency and collapsing turbulence in the stratified planetary boundary layer, *Bound. Lay. Meteorol.*, **153**, 89–116 (2014).
4. F. CÉROU & A. GUYADER, Adaptive multilevel splitting for rare event analysis, *Stoch. Anal. Appl.*, **25**, 417–443 (2007).
5. F. BOUCHET & J. REYGNER, Generalisation of the Eyring–Kramers transition rate formula to irreversible diffusion processes, *Ann. Henri Poincaré*, **17**, 3499–3532 (2016).
6. R. GRAHAM & T. TËL, On the weak noise limit of Fokker–Plank equation, *J. Stat. Phys.*, **35**, 729–748 (1984).
7. J. ROLLAND, F. BOUCHET & E. SIMONNET, Computing transition rates for the 1-D stochastic Ginzburg–Landau–Allen–Cahn equation for finite-amplitude noise with a rare event algorithm, *J. Stat. Phys.*, **162**, 277–311 (2016).
8. J. WOUTERS & F. BOUCHET, Rare event computation in deterministic chaotic systems using genealogical particle analysis, *J. Phys. A*, **49**, 374002 (2016).
9. S. M. E. RABIN, C. P. CAULFIELD & R. R. KERSWELL, Triggering turbulence efficiently in plane Couette flow, *J. Fluid Mech.*, **712**, 244–272 (2012).
10. H. TOUCHETTE, The large deviation approach to statistical mechanics, *Phys. Rep.*, **478**, 1–69 (2009).
11. J. ROLLAND, Mechanical and statistical study of the laminar hole formation in transitional plane Couette flow, *Eur. Phys. J. B*, **88**, 66 (2015).

¹ À noter que dans la plupart des systèmes du type Eqs. (1, 2), la distribution de probabilité stationnaire, dans la limite $t \rightarrow \infty$ et un système de taille L finie est un dirac en $q = 0$, $u = 1 \forall x$.

Impact du mécanisme chaotique sur l'optimisation d'un modèle de mobilité pour un essaim de drones devant réaliser une couverture de zone

Martin Rosalie¹, Grégoire Danoy², Serge Chaumette³ & Pascal Bouvry²

¹ SnT, Université du Luxembourg, Luxembourg

² CSC-FSTC/SnT, Université du Luxembourg, Luxembourg

³ LaBRI, UMR-CNRS 5800, Université de Bordeaux, F-33400, Talence, France

`martin.rosalie@uni.lu`

Résumé. À travers l'utilisation d'attracteurs chaotiques solutions d'équations différentielles ordinaires, cet article met en évidence que l'utilisation de mécanismes chaotiques peut contribuer à l'amélioration de la *diversification* de métaheuristiques sous réserve de trouver un système dynamique adapté au problème considéré. Ici, nous nous intéressons à la diversification d'un algorithme de type colonie de fourmis pour un problème de couverture de zone par un essaim de drones autonomes. Nous montrons que les performances de couverture sont améliorées à l'aide de mécanismes chaotiques issus du système de Ma et du système de Rössler.

1 Introduction

Des travaux récents utilisent des systèmes en régime chaotique pour améliorer les performances de certaines métaheuristiques. Le chaos y remplace l'aléatoire pour améliorer le caractère exploratoire des algorithmes (aussi appelé *diversification*). Gandomi *et al.* exploitent cette approche pour de l'optimisation par essaims de particules (*Particle Swarm Optimization*) [1] et pour de l'optimisation basée sur le comportement de lucioles (*Firefly Algorithm*) [2]. Dans les deux cas, les auteurs testent leurs algorithmes avec plusieurs applications chaotiques (application logistique, application tente, etc.) et comparent les performances résultantes sur des problèmes connus en prenant comme critère un taux de succès d'obtention de la solution optimale. Nous avons pour notre part récemment contribué à ce domaine en proposant le modèle de mobilité CACOC (*Chaotic Ant Colony Optimization for Coverage*) [3]. Ce dernier combine le système de Rössler avec un algorithme de type colonies de fourmis pour obtenir un algorithme de couverture de zone par un essaim de drones autonomes.

Après avoir décrit le problème considéré dans cet article, nous présentons des modèles de mobilité aléatoires et chaotiques pour la couverture d'une zone. Ces modèles sont ensuite évalués à l'aide de différentes mesures d'efficacité de la couverture. Une fois le meilleur modèle identifié, il est possible de l'introduire dans un modèle de colonie de fourmis. L'ensemble de cet article détaille le travail qui a été nécessaire pour que cette approche soit validée par l'intermédiaire du modèle CACOC [3].

2 Définition du problème

Dans le présent article, nous nous intéressons à la coordination entre des drones autonomes à l'aide d'une métaheuristique : le principe de colonie de fourmis [4]. Les fourmis déposent des phéromones au sol pour aider les autres fourmis de la colonie. Ces phéromones, répulsives pour les autres membres de la colonie, s'évaporent avec le temps. Ce mécanisme oriente de fait les autres fourmis pour qu'elles aillent visiter d'autres zones. Cependant dans ce type d'algorithme, lorsqu'il n'y a pas de phéromones pour guider les fourmis, leur comportement est généralement aléatoire. Dans cet article, nous cherchons à améliorer les performances d'une méthode de colonie de fourmis uniquement avec une meilleure diversification en remplaçant donc l'aléatoire par un mécanisme chaotique. Nous allons ainsi définir le comportement d'un essaim dont le but est de couvrir une zone. Pour cette démarche, il existe des modèles de mobilité pour les

drones utilisant des variables aléatoires [5] ou des systèmes chaotiques [6]. Nous proposons une nouvelle approche originale où nous prenons en compte les propriétés dynamiques issues du gabarit des attracteurs chaotiques [7].

3 Modèles de mobilité

3.1 Modèle n° 1 aléatoire

Kuiper & Nadjm-Tehrani [5] utilisent un modèle de mobilité aléatoire pour des drones. Les auteurs considèrent que la vitesse des drones est constante et qu'à chaque étape, le drone doit choisir sa prochaine direction de vol : aller de l'avant (A), aller à 45° sur la gauche (L) ou aller à 45° sur la droite (R). Enfin, les drones volent à des altitudes différentes pour éviter les collisions. Ces aptitudes sont communes à l'ensemble des modèles de mobilité présentés dans cet article. Dans le modèle aléatoire de Kuiper & Nadjm-Tehrani [5] la prochaine direction dépend de la précédente (cf. Tab. 1). Le comportement est symétrique car les probabilités sont les mêmes pour les choix L et R. Dans leur article [5], ce modèle sert de diversification à un algorithme de colonie de fourmis, c'est-à-dire quand il n'y a pas de phéromones pour guider les drones.

Dernière action	Probabilité d'action		
	Gauche (L)	Avant (A)	Droite (R)
Gauche (L)	0,70	0,30	0
Avant (A)	0,10	0,80	0,10
Droite (R)	0	0,70	0,30

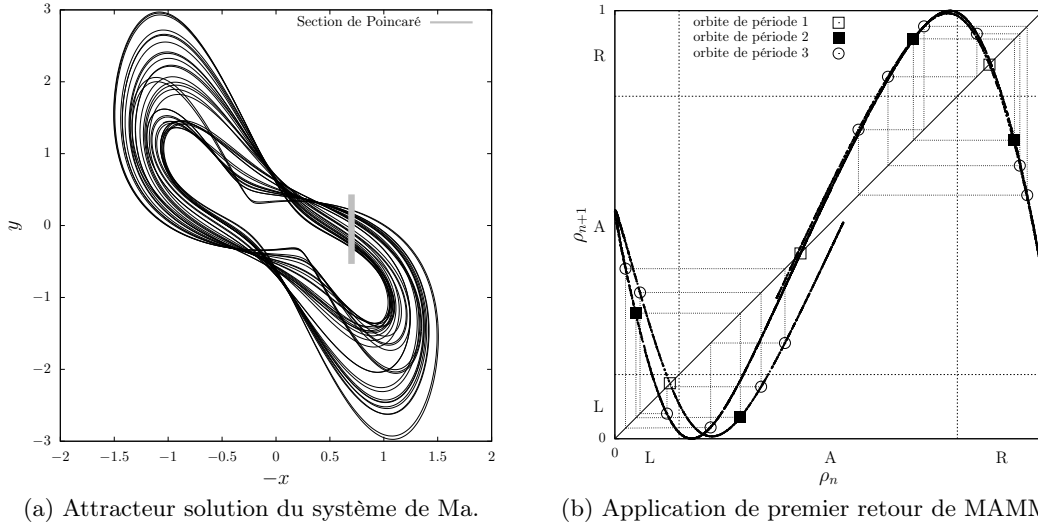
TABLE 1. Dépendance des actions du modèle de mobilité aléatoire [5].

3.2 Modèle n° 2 MAMM

Comme le modèle de mobilité n° 1 aléatoire utilise le précédent choix pour obtenir le suivant, nous cherchons à retrouver ce genre de comportement à l'aide d'un système dynamique en régime chaotique pour pouvoir comparer chaos et aléatoire. Nous choisissons d'utiliser des attracteurs solutions de systèmes d'équations différentielles ordinaires en régime chaotique (Fig. 1 (a)). Ces attracteurs ont des structures particulières qu'il est possible d'étudier et de classer à partir de leur gabarit [7]. Pour réaliser une telle étude d'un attracteur, nous construisons une application de premier retour depuis une section de Poincaré. Cette application détaille la position relative de la trajectoire solution entre ses passages successifs dans la section de Poincaré. Il est alors permis d'identifier si des transitions sont possibles entre certaines portions de l'application. Nous l'utilisons pour construire un modèle de mobilité basé sur une dynamique chaotique qui dépend de l'organisation relative des orbites d'un attracteur. Au sein de l'application de premier retour ces orbites sont représentées par des points périodiques. La résolution du système différentiel fait que les orbites vont être approchées momentanément par la solution. Il est alors important de construire une partition de l'application de telle sorte que ces orbites correspondent à des motifs intéressants pour l'exploration et la couverture d'une zone car il est garanti qu'à un moment donné, ce motif va être réalisé.

Nous avons choisi le système de Ma [8] car il possède la particularité d'avoir une application de premier retour qui permet de reproduire la structure de dépendance du modèle aléatoire (cf. Tab. 1). Le système de Ma est ainsi un bon candidat malgré le fait qu'il y ait une branche additionnelle à l'application de premier retour qui ne perturbe en rien les propriétés dynamiques du système [9]. Nous prenons l'attracteur solution du système pour les paramètres $a = 0,000\ 01$, $b = 0,000\ 01$ et $c = 1,063$ (cf. Fig. 1 (a)). À partir de la section de Poincaré considérée (voir [9] pour une analyse détaillée de cet attracteur), une application de premier retour est construite et les orbites périodiques structurant l'attracteur sont extraites (cf. Fig. 1 (b)).

La partition que nous avons réalisée a pour objectif d'utiliser la dynamique du système avec trois branches dans l'application pour obtenir le modèle de mobilité avec les trois possibilités d'orientation des drones (L, A ou R). On retrouve la notion de dépendance par l'intermédiaire de l'application de premier retour où la prochaine décision dépend de la précédente. Cette partition permet d'obtenir plusieurs motifs sur les orbites de période inférieure à quatre : principalement des virages plus ou moins large (L, R, LA, RA, LLA, LAA, RRA et RAA) avec une ligne droite pour l'orbite de période 1 encodée A. Cette partition reproduit la structure symétrique du modèle aléatoire n° 1 dans lequel les mêmes transitions sont autorisées (cf. Tab. 1). Nous avons choisi de nommer ce modèle n° 2 MAMM (*MA Mobility Model*).



(a) Attracteur solution du système de Ma.

(b) Application de premier retour de MAMM.

FIGURE 1. (a) Attracteur solution du système de Ma avec une section de Poincaré pour les paramètres $a = 0,00001$, $b = 0,00001$ et $c = 1,063$. (b) Application de premier retour partitionnée en L, A, R. Les points périodiques des orbites sont indiqués pour montrer les motifs qu'elles impliquent au niveau du modèle de mobilité : période 1 (L, A, R), période 2 (LA, RA) et période 3 (LLA, LAA, RRA, RAA).

3.3 Modèle n° 3 MAMM2

Nous avons basé cette première partition sur les trois branches de l'application de telle sorte que cela corresponde à la partition réalisée lors de l'étude dynamique d'un attracteur chaotique (voir [7] pour des exemples d'application sur le système de Rössler). À partir du système de Ma, nous proposons de changer la partition de l'application en modifiant les intervalles dont dépendent les actions et le nommons MAMM2. Nous proposons de raccourcir les intervalles liés au changement de direction L et R de telle sorte que la transition de L vers L soit impossible ainsi que celle de R vers R. Il s'ensuit que les virages serrés (L et R) ne sont plus réalisables et deviennent alors des lignes droites (A). Les orbites périodiques de période inférieure à quatre entraînent les virages caractérisés par les séries de symboles LA, RA, LAA et RAA comme l'illustre la figure 2 (a). Nous supposons que ce modèle de mobilité permet une meilleure couverture de zone que MAMM car il y a moins d'orbites qui entraînent des virages et il y a réciproquement plus d'orbites à l'origine de lignes droites.

3.4 Modèle n° 4 CROMM

En comparaison avec le modèle précédent, nous utilisons le système de Rössler pour obtenir un comportement asymétrique pour les drones. Nommé CROMM pour *Chaotic Rössler Mobility Model*, nous reprenons ici la partition de l'application de premier retour présentée dans un de nos articles précédents [3].

Cette partition est particulière car elle ne prend pas en compte la symétrie gauche–droite comme c’est le cas pour les autres modèles. Sur l’application de premier retour (cf. Fig. 2 (b)), nous avons mis en avant deux orbites entraînant une ligne droite (orbite encodée A) et un virage (orbite encodée RA).

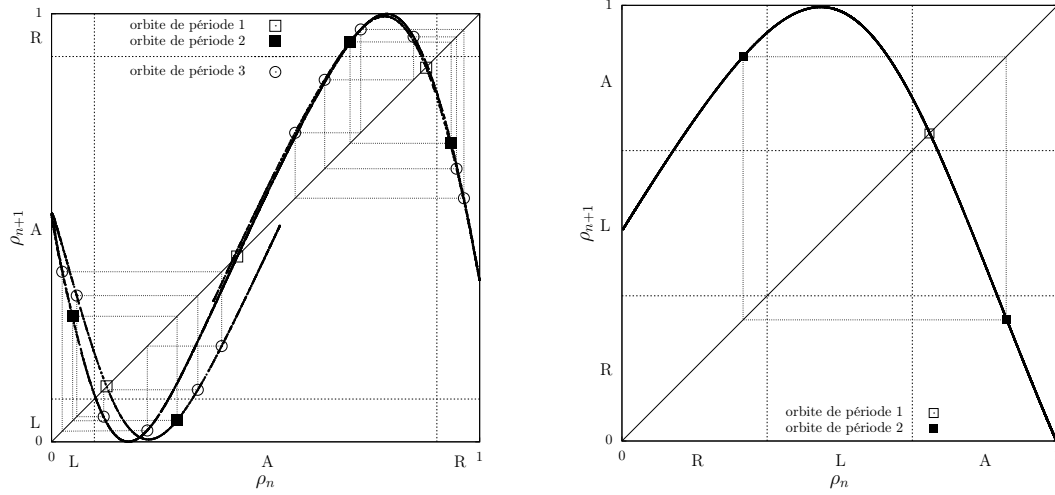


FIGURE 2. (a) Modification de la partition de l’application de la figure 1 pour obtenir le modèle de mobilité n° 3 MAMM2. (b) Application de premier retour obtenue à partir d’un attracteur solution du système de Rössler pour les paramètres $a = 0,1775$, $b = 0,215$ et $c = 5,995$. Les points périodiques représentent les orbites de période 1 (A) et 2 (RA).

4 Expérimentations

Pour tester les modèles de mobilité, nous effectuons des simulations (cf. Tab. 2 pour les paramètres).

Nom du paramètre	Valeur du paramètre
Zone de simulation	
Aire Géographique	100 m × 100 m
Nombre de cases	100 × 100
Drone	
Vitesse	1 m/s
Action possible	tout droit (A), 45° à gauche (L), 45° à droite (R)
Position initiale des drones	au milieu en bas de la zone
Expérimentations	
Modèle de mobilité	[1, 2, 3, 4]
Nombre de drones	10
Étapes de simulation	4000
Nombre de tests indépendants	30 par modèle

TABLE 2. Paramètres d’expérimentations.

Pour évaluer leur performances, nous utilisons trois mesures : le pourcentage de couverture totale de la zone, l’équité de la couverture et la couverture récente. Étant donné que la zone à couvrir est découpée en 100×100 cellules, le pourcentage de couverture donne le nombre de cellules visitées sur l’ensemble de la simulation et la couverture récente indique ce pourcentage uniquement lors des 100 dernières itérations.

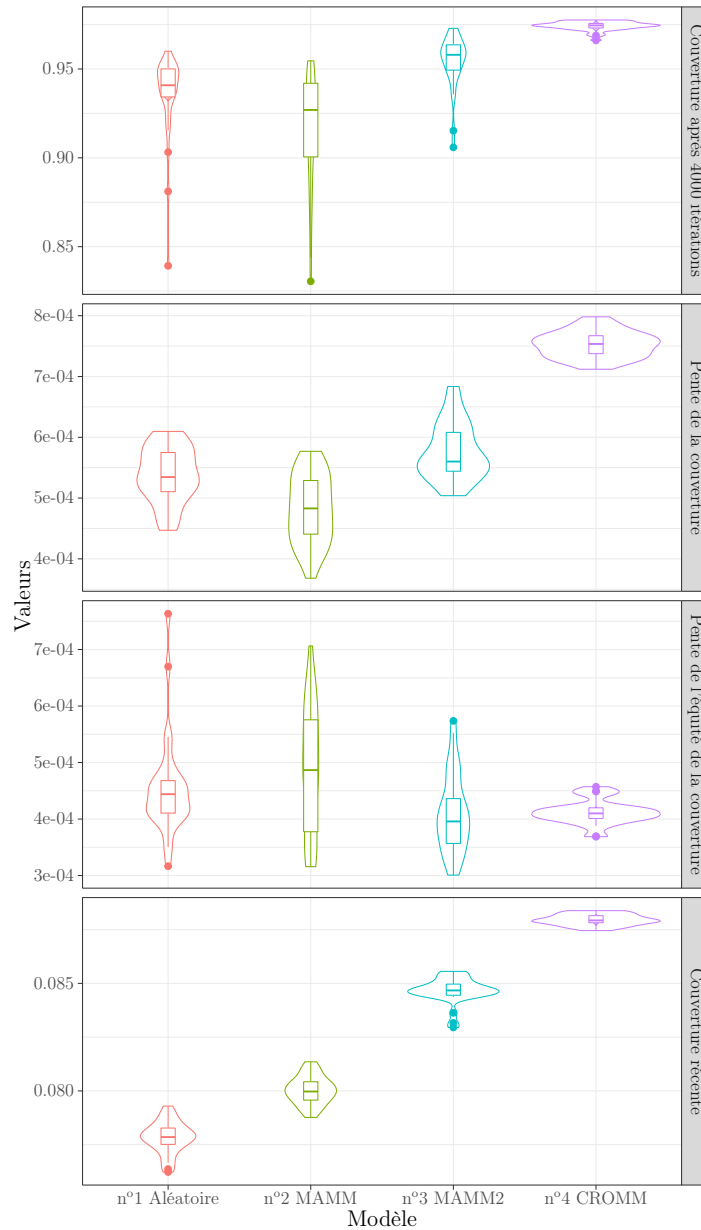


FIGURE 3. Comparaison des performances des modèles de mobilité : moyenne, écart-type et estimation de la distribution des valeurs pour les 30 simulation effectuées.

À partir de la couverture totale, nous calculons la pente moyenne sur les 500 premières itérations ; cela permet de voir comment les drones se répartissent initialement. L'équité de la couverture est donnée par l'écart-type du nombre de visites d'une cellule par rapport à l'ensemble des cellules (cf. [10] pour plus de détails). Plus la pente de cette mesure est faible, plus la couverture est équitable.

La figure 3 présente les résultats pour les quatre modèles de mobilité et les quatre mesures de performance décrits. Le modèle aléatoire se révèle plus performant que le modèle MAMM sauf pour la couverture récente. Nous pouvons supposer que le déterminisme joue un rôle particulier pour cette mesure. Comme supposé lors de la description du modèle n° 3 MAMM2, ce dernier est meilleur que MAMM pour les quatre mesures. Le rôle associé aux orbites (virages ou lignes droites) influence la couverture d'une zone. Enfin, le modèle n° 4 CROMM est plus performant que les précédents sauf pour l'équité où

même si la moyenne n'est pas la meilleure, l'écart-type est vraiment faible par rapport à MAMM2. Le caractère asymétrique du modèle avec la proportion associée au choix A couplé aux virages par le biais de l'orbite encodée RA explique les très bonnes performances de ce modèle de mobilité.

5 Conclusion

Nous avons introduit trois modèles de mobilité construits à partir d'applications de premier retour issues d'attracteurs chaotiques. Après avoir mesuré les performances de ces différentes méthodes, nous pouvons proposer un modèle de mobilité déterministe et imprévisible meilleur qu'un modèle aléatoire. Ces bonnes performances pour la résolution du problème de couverture viennent du fait que nous avons augmenté le nombre de fois où la partition A (pour *avant*) est visitée. Pour le modèle MAMM2, nous avons augmenté la taille de cette partition alors que pour le modèle CROMM, nous avons fait en sorte qu'une grande portion de l'application entraîne le choix A à l'étape suivante tout en gardant des proportions équivalentes pour les trois choix : A, L et R. De plus, nous avons utilisé les orbites comme garantes de l'exécution de motifs exploratoires comme des lignes droites et de grands virages. La combinaison du modèle CROMM avec un algorithme de colonie de fourmis a été réalisée et a donné d'excellents résultats sur ce que nous avons nommé le modèle CACOC (*Chaotic Ant Colony Optimization for Coverage*) [3].

En résumé, nous avons montré qu'à travers l'utilisation d'un système dynamique en régime chaotique, nous avons pu améliorer la diversification d'un algorithme de couverture de zone. Nous avons détaillé les méthodes que l'on peut utiliser pour réaliser une partition d'une application de premier retour. Étant donné la richesse de la littérature sur les applications chaotiques, cette nouvelle méthode peut être appliquée pour de nombreux problèmes d'optimisation.

Remerciements : Les résultats présentés dans cet article ont été obtenus grâce aux équipements de Calcul Haute-Performance de l'Université du Luxembourg [11] (pour plus de détails, voir le site <http://hpc.uni.lu>).

Références

1. A. H. GANDOMI, G. J. YUN, X.-S. YANG & S. TALATAHARIX, Chaos-enhanced accelerated particle swarm optimization, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **18**, 327–340 (2013).
2. A. H. GANDOMI, X.-S. YANG, S. TALATAHARIX & A. H. ALAVI, Firefly algorithm with chaos, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **18**, 89–98 (2013).
3. M. ROSALIE, G. DANNOY, S. CHAUMETTE & P. BOUVRY, From random process to chaotic behavior in swarms of UAVs, in *Proceedings of the 6th ACM International Symposium on Design and Analysis of Intelligent Vehicular Networks and Applications (DIVANet 2016)*, ACM, New York, NY, USA, 9–15 (2016).
4. M. DORIGO, *Optimization, learning and natural algorithms*, Thèse de doctorat, Politecnico di Milano, Italie (1992).
5. E. KUIPER & S. NADJM-TEHRANI, Mobility models for UAV group reconnaissance applications, in *Proceedings of the International Conference on Wireless and Mobile Communications (ICWMC'06)*, IEEE, 33–39 (2006).
6. L. S. MARTINS-FILHO & E. E. N. MACAU, Trajectory planning for surveillance missions of mobile robots, *Autonomous Robots and Agents*, Springer Berlin Heidelberg, 109–117 (2007).
7. M. ROSALIE, Templates and subtemplates of Rössler attractors from a bifurcation diagram, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **49**, 315101 (2016).
8. J. H. MA & Y. S. CHEN, Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system (I), *Appl. Math. Mech.*, **22**, 1119–1128 (2001).
9. M. ROSALIE, *Lois de composition de surface branchée pour la description d'attracteurs bornés par des tores de genre élevé*, Thèse de doctorat, Université de Rouen, France (2014).
10. J. SCHLEICH, A. PANCHAPAKESAN, G. DANNOY & P. BOUVRY, UAV fleet area coverage with network connectivity constraint, in *Proceedings of the 11th ACM international symposium on Mobility management and Wireless access (MobiWac'13)*, ACM (2013).
11. S. VARRETTE, P. BOUVRY, H. CARTIAUX & F. GEORGATOS, Management of an Academic HPC Cluster: The UL Experience, in *Proceedings of the 2014 International Conference on High Performance Computing & Simulation (HPCS 2014)*, IEEE, 959–967 (2014).

Une vue nouvelle sur la dissipation dans les écoulements turbulents

Gilbert Zalczer

SPEC, CEA, CNRS, Université Paris Saclay, 91191 Gif, France
gilbert.zalczer@cea.fr

Résumé. Un montage expérimental original a été réalisé pour mieux visualiser les écoulements turbulents dans une géométrie de von Kármán. Grâce à une caméra rapide, l'évolution temporelle des écoulements peut être suivie. Une observation surprenante est que le développement de petits tourbillons cesse plus tôt que prévu et que l'aspect de l'écoulement reste le même au-dessus d'un nombre de Reynolds de quelques milliers. Ce fait peut expliquer la constance de la dissipation dans ce domaine sans qu'il soit besoin d'introduire de singularité. La cause pourrait être reliée à des observations similaires reportées dans un référentiel en rotation.

Abstract. An original experimental setup has been elaborated in order to get a better view of turbulent flows in a von Kármán geometry. The availability of a very fast camera allowed to follow in time the evolution of the flows. A surprising finding is that the development of smaller whirls ceases earlier than expected and the aspect of the flows remains the same above Reynolds number of a few thousands. This fact provides an explanation of the constancy of the reduced dissipation in the same range without the need of singularity. Its cause could be in relation with the same type of behavior observed in a rotating frame.

1 Introduction

Les écoulements turbulents ont toujours été l'objet de fascination. La première tentative de rationalisation est sans doute due à Richardson [4] qui a introduit le concept de cascade de tourbillons des plus grandes tailles aux plus petites. Cette cascade fut quantifiée par Kolmogorov [2] qui a prédit la distribution d'énergie entre les échelles avec une loi en puissance $-5/3$ vérifiée expérimentalement. Cependant il fut observé que la dissipation ne diminuait pas aux grands nombres de Reynolds comme prévu théoriquement [6]. Ceci conduisit Onsager [3] à conjecturer l'existence de singularités à petite échelle dans le champ de vitesses. Grâce aux progrès techniques des systèmes d'imagerie, une visualisation des champs de vitesse rapide est maintenant possible.

2 Montage expérimental

La géométrie de von Kármán est bien adaptée à l'étude de ces phénomènes puisqu'elle permet des vitesses élevées dans un volume compact. Le fluide est placé dans un récipient cylindrique dont la hauteur et le diamètre sont à peu près égaux. Il est mis en mouvement par deux turbines contra-rotatives aux extrémités. La forme exacte de ces turbines peut varier. Nous avons utilisé un montage préexistant de taille 0,1 m dont les turbines étaient munies de pales courbes. Ces turbines étaient mises en mouvement par des moteurs pas à pas, à vitesse égale et dans le sens où l'effet de la courbure des pales renforçait la force centrifuge. Pour des raisons optiques, la cellule cylindrique était immergée dans un réservoir d'eau à section rectangulaire. Une nappe lumineuse issue d'un laser continu (445 nm ou 532 nm) élargie par une lentille cylindrique passe par le plan méridien de la cellule. Une caméra enregistre l'image des particules éclairées dans le fluide à angle droit. La caméra utilisée est une Phantom M120 qui permet 1035 images par seconde à une résolution de 1460×1080 pixels. Le logiciel Davis de LaVision la pilote. La cellule contenait soit de l'eau pure, soit, pour les petits nombres de Reynolds une solution de sucre ou de glycerol

de viscosité 10 fois supérieure. Le liquide était ensemencé de billes creuses de verre argentées de 0,1 mm de diamètre et de densité voisine de 1 fournies par LaVision. La prise d'image était synchronisée avec les impulsions des moteurs à raison de 300 images par tour sauf aux vitesses les plus élevées et le temps d'exposition pris le plus long possible. Le réglage de l'ouverture (1,6–16) et de la puissance laser (0,1–1 W) permettaient une exposition correcte. Les séries d'images obtenues pouvaient être analysées par des méthodes usuelles de flot optique ou le logiciel PIV de LaVision. L'originalité de ce travail est qu'il permet de voir l'évolution temporelle de l'écoulement tout particulièrement en observant la superposition d'une dizaine d'images successives, équivalant à une pose longue.



FIGURE 1. Un plan laser est envoyé dans un plan méridien de la cellule de von Kármán.

3 Observations

Quelques images sont montrées sur les figures 2 et 3. Les vidéos correspondantes sont disponibles en ligne (http://www.dailymotion.com/user/gz_1/1). L'écoulement laminaire de base se déstabilise et devient de plus en plus complexe quand le nombre de Reynolds croît. Comme décrit par Richardson, « *big whirls have little whirls* » quand Re croît jusqu'à quelques milliers. L'observation surprenante est qu'au-delà de cette valeur l'aspect des écoulements ne change plus et aucune structure de plus petite taille n'apparaît. Il a été vérifié rapidement que ces champs de vitesse sont compatibles avec les lois en $-5/3$ de Kolmogorov en espace et en temps. Une conséquence immédiate de cette observation est que le taux normalisé de dissipation de l'énergie doit aussi être constant puisque défini par une intégrale sur le champ de vitesse qui peut s'écrire :

$$D = \eta \int |\nabla \times \mathbf{v}|^2 dV. \quad (1)$$

Ce fait expérimental suggère une alternative au besoin de singularité dans le champ de vitesse à petite échelle. La raison de cette troncature de la cascade de Richardson reste inconnue mais une possibilité intéressante se trouve dans un résultat expérimental récent de Campagne *et al.* [1]. Les auteurs ont en

effet observé que la turbulence était sensiblement réduite quand elle était provoquée dans un référentiel tournant. L'hypothèse que les grands tourbillons produisent le même effet limitant peut donc être envisagée.

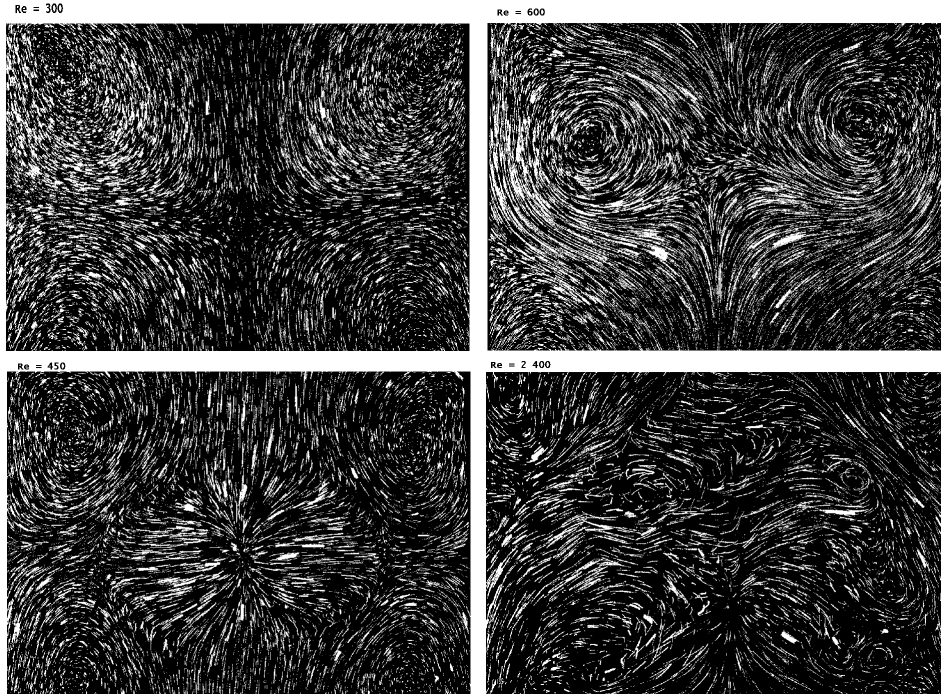


FIGURE 2. : Visualisation d'écoulements à faible nombre de Reynolds. Le champ de base est observé à $Re = 300$. La géométrie se complique à $Re = 450$ et $Re = 600$. De nombreux tourbillons apparaissent à $Re = 2\,400$.

Les expériences portant sur les écoulements turbulents sont particulièrement difficiles et rares, même si les progrès techniques récents ouvrent de nouvelles possibilités. Les tentatives de mise en évidence des singularités ont abouti à la conclusion qu'elles étaient très rares. Une étude récente [5], utilisant des techniques sophistiquées affirme en avoir trouvé des « *footprints* » mais en quantité très réduite : 28 événements possibles sur 30 000 échantillons. La question de la possibilité d'événements aussi rares à contribuer aussi significativement à la dissipation reste ouverte. De nouvelles expériences mettant en jeu des géométries variées ainsi que de nouveaux travaux théoriques sont nécessaires pour clarifier la situation.

Remerciements : Je suis particulièrement reconnaissant envers Antoine Seguin qui m'a prêté la caméra rapide au centre de cette expérience. Enric Meinhardt Llopis m'a beaucoup aidé pour le traitement des images. Je remercie aussi Judith Vatteville pour son aide à l'utilisation du logiciel LaVision, Darius Marin pour une participation à l'expérience et Vincent Padilla pour son assistance technique.

Références

1. A. CAMPAGNE, N. MACHICOANE, B. GALLET, P.-P. CORTET & F. MOISY, Turbulent drag in a rotating frame, *J. Fluid Mech.*, **794**, R5 (2016).
2. A. N. KOLMOGOROV, Dissipation of energy in locally isotropic turbulence, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **32**, 16–18 (1941).
3. L. ONSAGER, Statistical hydrodynamics, *Nuovo Cimento*, **6**, 279–287 (1949).

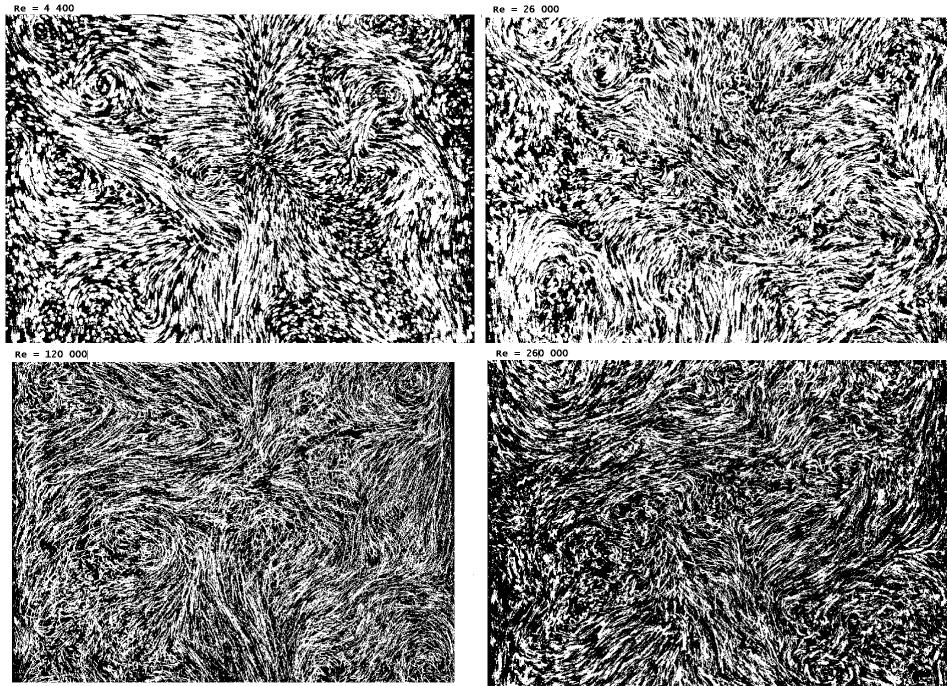


FIGURE 3. : Visualisation d'écoulements à haut nombre de Reynolds. Les écoulements ne peuvent être différenciés.

4. L. RICHARDSON, The supply of energy from and to atmospheric eddies, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **97**, 354–373 (1920).
5. E. W. SAW, D. KUZZAY, D. FARANDA, A. GUITTONNEAU, F. DAVIAUD, C. WIERTEL-GASQUET, V. I. PADILLA & B. DUBRULLE, Experimental characterization of extreme events of inertial dissipation in a turbulent swirling flow, *Nat. Commun.*, **7**, 12466 (2016).
6. G. I. TAYLOR, Statistical theory of turbulence, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **151**, 421–444 (1935).

Extraction du solvant d'un hydrogel par des gouttes de bactéries *B. subtilis*

Marc Hennes, Julien Tailleur, Gaëlle Charron & Adrian Daerr

Laboratoire Matière et Systèmes Complexes (MSC), Université Paris Diderot, 10 Rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75013 Paris, France
marc.hennes@univ-paris-diderot.fr

Résumé. Nous observons que de petites gouttes de suspension de la bactérie *B. subtilis*, déposées sur un gel d'agar, décuplent leur volume en une dizaine d'heures, alors que le volume de gouttes sans bactérie reste inchangé. L'augmentation de la biomasse due à la croissance des bactéries est trop faible pour expliquer le gonflement constaté des gouttes, comme le prouve une mesure directe de la concentration bactérienne au cours de l'expérience et à plusieurs hauteurs au sein de la goutte. Nous montrons que le gonflement est provoqué par la présence d'un surfactant produit par les bactéries, la *surfactine*, lequel induit un pompage d'eau de l'environnement vers la goutte par un effet osmotique capillaire. La concentration requise est très faible (< 1 mM), environ quatre ordres de grandeur plus faible par exemple que la concentration de glucose produisant le même gonflement. Cette capacité de *B. subtilis* à extraire de l'eau de l'environnement contribue probablement à certains modes de migration collective comme le *mass swarming*. Elle donne également lieu à un mode de déplacement original, indépendant de la motilité cellulaire : en associant les effets osmotiques et de mouillage du surfactant, *B. subtilis* parvient à faire activement glisser la colonie sur des substrats inclinés d'à peine quelques dixièmes de degrés.

Abstract. We observe that small drops of a bacterial *Bacillus subtilis* suspension deposited on agar strongly increase in volume while similar bacteria-void drops do not. By measuring the bacterial concentration within the drop at different heights, we show that the biomass increase due to the constant bacterial cell-division is too small to explain the drop bloating. Rather, the increased volume is caused by the presence of *surfactin* — a surfactant produced by the bacteria — which induces a water flow out of the environment by an osmotic capillary effect. The required concentration is very low (< 1 mM), four orders of magnitudes smaller than the concentration of, for example, glucose to produce a similar osmotic effect. The ability of *B. subtilis* to extract water from its environment probably contributes to collective migration modes like *mass swarming*. It also gives rise to a new displacement mode independent of cellular motility: by combining the osmotic and wetting effects of the surfactant, *B. subtilis* can actively induce the sliding of the bacterial colony on substrates tilted by angles as small as 0.1° .

1 Introduction

Les micro-organismes ont développé d'innombrables mécanismes pour faciliter leur prolifération [1] et la colonisation de nouveaux environnements [2–4]. La raison est sans doute à chercher dans la complexité et la variabilité spatiale et temporelle de leur environnement. Que ce soit dans un intestin ou dans le sol, les bactéries se déplacent dans un mélange de phases solide, liquide et de gaz et leur motilité dépendra grandement de l'interaction avec les nombreuses surfaces et d'interfaces présentes. À côté de cette complexité, les études en laboratoire de la motilité de bactéries se limitent à peu d'environnements simples et artificiels. En dehors de la nage en milieu liquide [5], on ne trouve presque que des études à la surface d'hydrogels. Il est donc important de comprendre les mécanismes physiques en jeu pour pouvoir se prononcer sur l'importance d'une expérience de laboratoire dans un contexte plus complexe.

Ici, nous décrivons pour la première fois un mécanisme physico-chimique par lequel la bactérie *Bacillus subtilis*, piégée dans une petite goutte déposée sur la surface de l'hydrogel Agar, est capable d'extraire une quantité importante de solvant, multipliant ainsi le volume de la goutte jusqu'à atteindre 15 fois le volume initial. Ce gonflement est proportionnel à la concentration initiale de bactéries au sein de la goutte, mais est absolument indépendant de leur capacité à s'auto-propulser. Bien qu'on puisse s'interroger sur

la contribution de la division des bactéries à une certaine augmentation du volume, nous montrons que dans les conditions expérimentales présentes, cet effet est négligeable et le gonflement s'explique par la production d'un tensio-actif sécrété par les bactéries, la *surfactine*. Pour des gouttes de bactéries mutantes incapables de produire ce surfactant, aucun gain n'est visible. Le taux de gonflement dépend fortement des conditions expérimentales et de la préparation du gel, où l'humidité à disposition dans l'entourage agit comme facteur limitant. Grâce à des mesures de chromatographie liquide à haute performance, nous montrons que la concentration molaire de surfactine dans les gouttes est cent à mille fois plus faible que la concentration d'autres espèces moléculaires, ce qui soulève la question de ce qui rend la surfactine si efficace pour le pompage osmotique. Nous terminons par une discussion de l'importance de ce mécanisme pour les modes migratoires de *B. subtilis*.

2 Résultats

Description du gonflement de goutte Une goutte de 2 μL provenant d'une culture liquide de *B. subtilis* (densité optique $\text{OD} \approx 0,27$, souche OMG 930 [6]) est déposée à la surface d'un gel d'Agar à 0,7% contenant des nutriments (milieu synthétique B), séché brièvement (2 min) et incubé dans une chambre climatique à température et humidité fixe ($T = 30^\circ\text{C}$, $\text{RH} = 70\%$). Pendant la première heure, un léger étalement radial est visible [7, 8], typique pour une solution aqueuse de surfactant — comportement attendu car notre souche *B. subtilis* produit de la *surfactine*, un lipopeptide cyclique amphiphile [9, 10]. Le volume de la goutte¹ augmente dès le moment du dépôt, de manière monotone et atteint une valeur maximale de sept à huit fois le volume initial après ≈ 350 min (Fig. 1 (a)). En variant la concentration initiale de bactéries (OD pour *optical density*) jusqu'à la concentration de saturation de croissance des bactéries $\text{OD} \approx 1,5$, le gonflement peut atteindre une valeur de $15 V_i$. Si les bactéries sont enlevées de la solution par centrifugation et filtrage, et que seul le surnageant SN est déposé sur le gel, on mesure une augmentation plus faible du volume de la goutte $V_{\text{max}}^{\text{SN}} \approx 3V_i$. Quand le temps de séchage du gel est augmenté (de 1 min à 30 min), l'effet de pompage est affaibli et la quantité de solvant extrait diminue (Fig. 1 (b)). Sur un gel séché pendant $t_{\text{sec}} = 30$ min, une goutte de bactérie ($\text{OD} \approx 0,27$) ne gonfle plus du tout. Ceci s'explique par le fait qu'un tel gel a perdu environ $100 V_i$ d'eau par évaporation et n'est donc plus à l'équilibre : le réseau de polymères devrait être en compression et la pression dans la phase liquide négative. Pour des gouttes d'eau ou de milieu nutritif B, une augmentation du volume n'est jamais observée, et un taux d'évaporation faible dans les coupelles, plus petit que le taux d'évaporation de séchage, fait lentement disparaître ces gouttes.

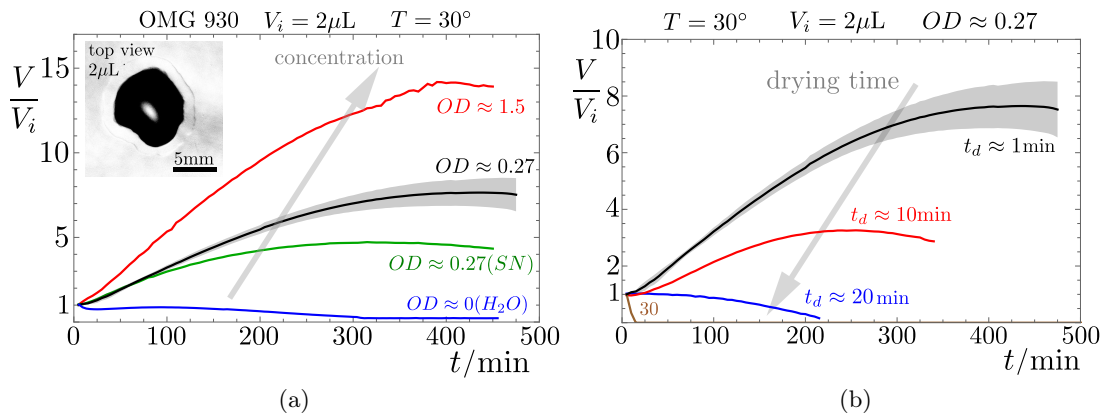


FIGURE 1. (a) Le volume total de gonflement est une fonction de la concentration initiale (OD) de bactéries dans la goutte. Aucun gonflement n'est observable pour des gouttes d'eau pure ou de milieu nutritif B ($\text{OD} = 0$). (b) Le gonflement diminue et disparaît entièrement si le gel est séché plus longtemps à l'air libre avant l'expérience.

¹ Le volume est mesuré grâce à une méthode de profilométrie de projection de moiré [8].

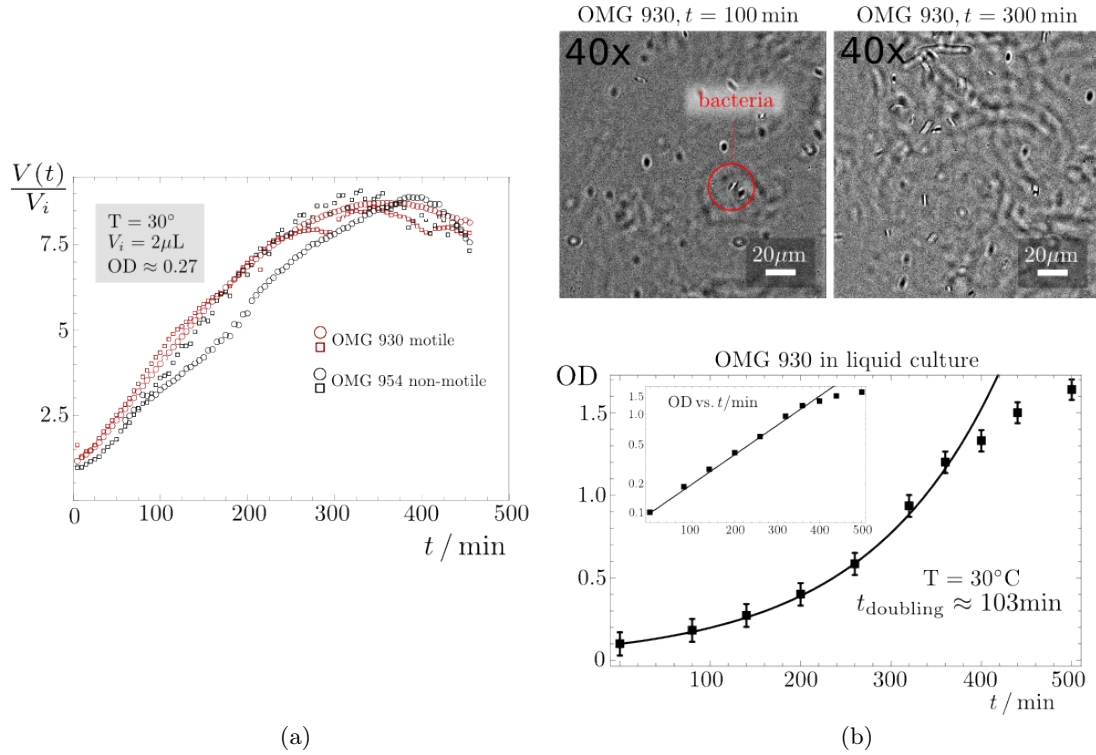


FIGURE 2. (a) La motilité bactérielle, évaluée entre la souche OMG 930 motile et la souche OMG 954 non motile, n’influence pas l’accroissement du volume durant les 500 minutes de l’expérience. (b) L’enregistrement des gouttes bactérielles au microscope optique à fort grossissement montre que le pourcentage surfacique des bactéries est très faible. L’augmentation de la biomasse (avec un temps de doublement de 103 min à 30°C dans un milieu liquide B, en bas) n’explique donc pas le gonflement des gouttes.

L’autopropulsion et la biomasse n’influencent pas le gonflement Le gonflement étant absent pour des gouttes d’eau ou de nutriments, la présence des bactéries est nécessaire pour une augmentation continue du volume de la goutte. Pour vérifier une éventuelle contribution de la motilité individuelle, cruciale pour le mode de migration de *swarming* [3, 6, 11], nous comparons les courbes de volume pour des souches motiles (OMG 930) et non motiles (OMG 954 [11]) (cf. Fig. 2 (a)). La deuxième souche ne se distingue génétiquement de la première que par l’absence d’un gène qui la rend incapable d’exprimer la protéine *flagelline* nécessaire au développement des flagelles. Pour différentes concentrations initiales ($\text{OD} = 0,27$ et $\text{OD} = 1,5$) nous observons que les courbes de volume, à nouveau mesurées sur 500 min, ne diffèrent pas significativement d’une souche à l’autre, montrant ainsi que la motilité ne joue aucun rôle dans le mécanisme d’accroissement de volume.

Une explication serait alors que l’amasement de bactéries par division cellulaire est responsable de l’augmentation en volume. En conditions idéales ($T \approx 40^\circ\text{C}$, milieu LB riche en nutriments), le temps de division peut être de 30 minutes [12] ou moins, obtenant ainsi 14 à 15 cycles de réplication pendant le temps de gonflement ($t \approx 400$ min) d’une goutte. Le nombre absolu de bactéries augmenterait d’un facteur 2^{15} , correspondant à un volume final de $3,5 V_i$ [13]. Pour déterminer la contribution biomassique au gonflement, nous enregistrons la goutte à fort grossissement ($40\times$, Fig. 2 (b), haut) pendant 400 min à différentes hauteurs et calculons le pourcentage surfacique et volumique à travers la goutte. Nous trouvons que ce pourcentage volumique après 7 heures ne dépasse jamais 2% au sein de la goutte et 8% proche de la ligne de contact de bord². De plus, nous mesurons directement la concentration bactérienne en solution liquide dans le milieu nutritif minimal B à 30°C . Ici, nous déterminons un temps de doublement de 90 à

² Un pourcentage plus élevé proche de la ligne triple/ligne de contact de la goutte est probablement dû aux flux convectionnels d’évaporation dans la goutte, entraînant les bactéries vers son bord.

120 minutes (Fig. 2 (b)), donnant ainsi 4 cycles de croissance en 400 min et un volume final de bactéries de $N \times V_{\text{Bact}} \ll V_i$ largement inférieur au volume initial de la goutte.

Détermination et quantification de la surfactine comme agent principal Le comportement de la souche OMG 168 de *B. subtilis*, qui ne produit pas de surfactine [14], permet d’identifier ce surfactant comme premier responsable du mécanisme de pompage : dans le cas de gouttes de OMG 168, les courbes de volume ne montrent aucun gonflement et se rapprochent des courbes d’eau pure ou de solution de nutriment B (cf. Fig. 3 (a)). Nous nous attendons donc à ce que des gouttes de surfactine pure (surfactine de *B. subtilis*, 98 % pure, Sigma-Aldrich) affichent une croissance de volume similaire aux gouttes de bactéries produisant de la surfactine. Effectivement, nous observons pour de telles gouttes un gonflement de magnitude proche des gouttes bactériennes pour des concentrations entre 0,1 g/L et 0,5 g/L. Ici, une goutte de surfactine se comporte comme une goutte de surnageant : dans les premières 100 à 150 minutes, le gain en volume est proche de celui d’une goutte de bactéries, puis s’atténue lentement pour atteindre une valeur 3 à 4 fois au-dessus du volume initial. Afin de vérifier si la quantité de surfactine produite par les bactéries est dans la plage de concentrations dans laquelle les gouttes de surfactines gonflent, nous l’avons quantifié par HPLC (*high precision liquid profilometry*). Cette méthode spectrographique permet d’identifier et de mesurer les pics d’absorption caractéristiques d’une molécule pour remonter à sa concentration (dans un premier temps en unités arbitraires AU). Un étalonnage par des gouttes de concentration connue est nécessaire pour calculer une concentration absolue. La figure 3 (b) montre que la concentration de surfactine dans la goutte bactérienne est initialement proche de 0,1 g/L pour une $OD \approx 0,27$ et de 0,25 g/L pour une $OD \approx 1,5$, avec une marge d’erreur de 0,05 g/L.

Une concentration autour de 0,3 g/L dans les gouttes de bactéries correspond à une concentration molaire de 0,3 mM, largement en dessous de la concentration molaire de 5 M nécessaire pour induire un effet de gonflement comparable avec des gouttes de glucose (50 %) déposées sur le même gel (la molécule de glucose est environ cinq fois plus petite que la molécule de surfactine). Un simple gradient de concentration — entre la goutte contenant de la surfactine et le gel agar n’en contenant pas — avec l’interface gel-eau agissant comme une membrane semi-perméable ne semble pas suffire pour expliquer le mécanisme de pompage car dans ce cas la théorie prédit que la pression osmotique ne dépend que marginalement de l’espèce chimique et principalement de sa concentration molaire. Il est possible que le pompage fasse intervenir une interaction spécifique entre les molécules de surfactine et la matrice de gel d’agar, capable de libérer le solvant et d’induire un accroissement du volume de gouttes déposées en surface. Une observation qui va dans le sens d’une telle interaction est que quand la surfactine ou les bactéries en produisant sont ajoutées directement au gel, celui-ci, soit ne se solidifie plus, soit se liquéfie après quelque temps.

3 Discussion

Dans cet article, nous avons étudié un nouveau mécanisme physico-chimique permettant à des gouttes de bactéries en milieu partiellement humide de croître en volume. Parmi les divers molécules produites et exportées par les bactéries, nous avons identifié la surfactine, un tensio-actif puissant, comme étant responsable de cet effet. Nous pensons que ce mécanisme peut avoir un rôle immense pour *B. subtilis* dans son environnement naturel comme les sols non saturés [18], d’une part en lui permettant en cas de sécheresse d’extraire de l’eau de l’environnement, et d’autre part en lui permettant de mieux migrer. Vitesses et distances de migration sont susceptibles d’augmenter avec la quantité d’eau disponible, que ce soit dans les milieux poreux [19] ou à la surface d’un substrat comme l’agar [15–17]. Pour les gouttelettes étudiées ici, le volume gagné augmente la traction gravitationnelle par rapport au forces capillaires et permet de franchir le seuil d’étalement ou de dévalement sur des substrats non horizontaux. Sur des gels d’agar, les gouttes de bactéries glissent ainsi sur des pentes de l’ordre du degré (cf. Fig. 4), quand des gouttes d’eau de même volume initial restent accrochées même à la verticale, piégées par les forces capillaires.

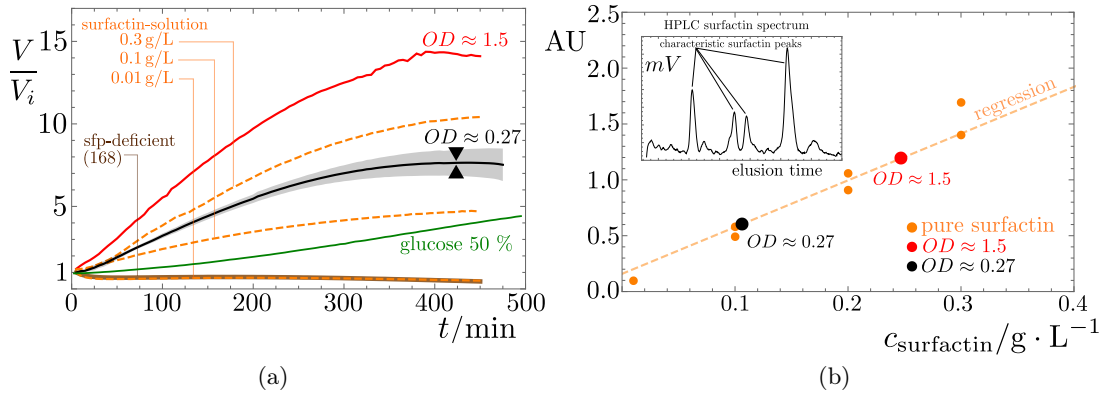


FIGURE 3. (a) Des gouttes de surfactine pure d’une concentration entre 0,1 et 0,5 g/L (0,1–0,5 mM pour une masse molaire de 1030 g/mol) affichent un gonflement similaire aux gouttes de bactéries d’une OD de 0,27. Une augmentation de volume est observable pour des gouttes de glucose (50 %) à une concentration molaires dix mille fois plus grande (5 M). (b) La concentration en surfactine des gouttes de bactéries est estimée à 0,1–0,3 g/L par spectrométrie HPLC. La concentration est obtenue en calculant la superficie en unités arbitraires (AU) des pics caractéristiques d’absorption de la surfactine dans le spectre.

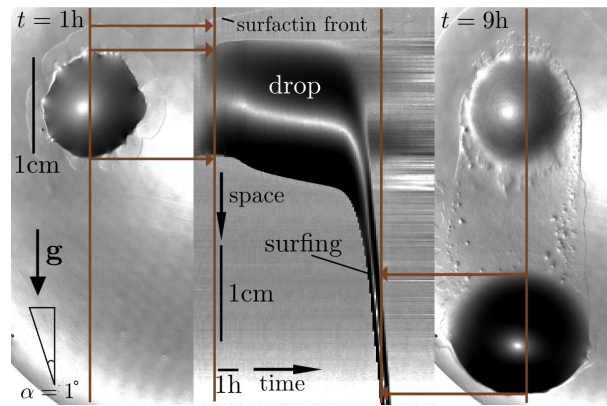


FIGURE 4. Pour une goutte de bactéries ($OD = 0,27$, $V_i = 2 \mu\text{L}$) déposée sur un gel d’agar légèrement incliné (1°), l’accroissement du volume en combinaison avec les propriétés tensio-actifs de la surfactine permet à celle-ci de dévaler le plan 7 à 8 heures après dépôt.

Références

1. L. HALL-STOODLEY, J. WILLIAM COSTERTON & P. STOODLEY, Bacterial biofilms: from the natural environment to infectious diseases, *Nature Rev. Microbiol.*, **2**, 95–108 (2004).
2. E. BEN-JACOB *et al.*, Generic modelling of cooperative growth patterns in bacterial colonies, *Nature*, **368**, 46–49 (1994).
3. H. FUJIKAWA & M. MATSUSHITA, Fractal growth of *Bacillus subtilis* on agar plates, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **58**, 3875–3878 (1989).
4. R. M. HARSHEY, Bacterial motility on a surface: Many ways to a common goal, *Ann. Rev. Microbiol.*, **57**, 249–273 (2003).
5. I. TUVAL *et al.*, Bacterial swimming and oxygen transport near contact lines, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **102**, 2277–2282 (2005).
6. K. HAMZE *et al.*, Single-cell analysis in situ in a *Bacillus subtilis* swarming community identifies distinct spatially separated subpopulations differentially expressing hag (flagellin), including specialized swimmers, *Microbiol.*, **157**, 2456–2469 (2011).
7. K. S. LEE *et al.*, Kinetics of wetting and spreading by aqueous surfactant solutions, *Adv. Colloid Interface Sci.*, **144**, 54–65 (2008).

8. M. BANAHA, A. DAERR & L. LIMAT, Spreading of liquid drops on agar gels, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **166**, 185–188 (2009).
9. K. ARIMA, A. KAKINUMA & G. TAMURA, Surfactin, a crystalline peptidolipid surfactant produced by *Bacillus subtilis*: Isolation, characterization and its inhibition of fibrin clot formation, *Biochem. Biophys. Res. Commun.*, **31**, 488–494 (1968).
10. F. PEYPOUX, J. M. BONMATINM & J. WALLACH, Recent trends in the biochemistry of surfactin, *Appl. Microbiol. Biotechnol.*, **51**, 553–563 (1999).
11. K. HAMZE *et al.*, Identification of genes required for different stages of dendritic swarming in *Bacillus subtilis*, with a novel role for *phrC*, *Microbiol.*, **155**, 398–412 (2009).
12. G. REAL & A. O. HENRIQUES, Localization of the *Bacillus subtilis* *murB* Gene within the *dcw* Cluster is important for growth and sporulation, *J. Bacteriol.*, **188**, 1721–1732 (2006).
13. A. C. YU, J. F. LOO, S. K. KONG & T. F. CHAN, Monitoring bacterial growth using tunbale resistive pulse sensing with a pore-based technique, *Appl. Microbiol. Biotechnol.*, **98**, 855–862 (2014).
14. E. LESUISSE, K. SCHANCK & C. COLSON, Purification and preliminary characterization of the extracellular lipase of *Bacillus subtilis* 168, an extremely basic pH-tolerant enzyme, *FEBS J.*, **216**, 155–160 (1993).
15. V. LECLÈRE *et al.*, The lipopeptides mycosubtilin and surfactin enhance spreading of *Bacillus subtilis* strains by their surface-active properties, *Arch. Microbiol.*, **186**, 475–483 (2006).
16. D. JULKOWSKA *et al.*, Comparative analysis of the development of swarming communities of *Bacillus subtilis* 168 and a natural wild type: Critical effects of surfactin and the composition of the medium, *J. Bacteriol.*, **187**, 65–76 (2005).
17. J. HENRICHSEN, Bacterial surface translocation: A survey and a classification, *Bacteriol. Rev.*, **36**, 478–503 (1972).
18. D. OR *et al.*, Physical constraints affecting bacterial habitats and activity in unsaturated porous media — A review, *Adv. Water Resour.*, **30**, 1505–1527 (2007).
19. Z. SADJADI & H. RIEGER, Scaling theory for spontaneous imbibition in random networks of elongated pores, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 144502 (2013).

Index des auteurs

Amon Axelle, 1
Argentina Médéric, 19

Barker Adrian John, 49
Berhanu Michael, 7
Bertho Yann, 37
Bodo Bertrand, 61
Bouret Yann, 19
Bouvry Pascal, 79

Cazaubiel Annette, 7
Charron Gaëlle, 89
Chaumette Serge, 79
Congy Thibault, 13

Daerr Adrian, 89
Danoy Grégoire, 79

El Amri Ali, 19

Falcon Éric, 7
Favier Benjamin, 49

Gondret Philippe, 37
Grillot Frédéric, 31

Hennes Marc, 89

Ivanov Sergey K., 13

Josserand Christophe, 43
Jumpertz Louise, 31

Kamchatnov Anatoly M., 13

López-Menéndez Horacio, 55
Lachaussée Florent, 37
Le Bars Michael, 49
Le Berre Martine, 43
Le Reun Thomas, 49
Lehner Thierry, 43

Marquié Patrick, 61
Martin Rosalie, 79
Morfu Saverio, 61
Morize Cyprien, 37

Nguyen Thai Binh, 1
Noblin Xavier, 19

Pavloff Nicolas, 13
Pomeau Yves, 43

Rivier Nicolas, 67
Rodríguez José Felix, 55
Rolland Joran, 73
Rossé Mathieu, 61

Sauret Alban, 37
Schires Kevin, 31
Sciamanna Marc, 31
Spitz Olivier, 31

Tailleur Julien, 89

Zalczer Gilbert, 85

Annexes :

Programme du mini-colloque

Programme de la 20^e rencontre

« Interactions non linéaires entre ondes »

Université Paris Diderot, 21 mars 2017
Amphithéâtre Buffon, 15 rue Hélène Brion, Paris 13e

Les interactions non linéaires entre ondes sont un mécanisme de base pour transférer de l'énergie entre différentes échelles d'un système. Durant ce mini-colloque, les propriétés de ces interactions, dites à 3 ou à 4 ondes, seront présentées dans divers domaines de la physique : hydrodynamique, optique, élasticité, ou acoustique. Un des objectifs sera d'identifier les analogies et les différences entre ces systèmes pour, par exemple, détecter la présence d'interactions entre ondes ou sonder le rôle des interactions non résonantes.

9h25 : Introduction

9h30 : Michel Benoit* (IRPHE & Ecole Centrale Marseille)

[Interactions non-résonantes dans la dynamique de champs de vagues océaniques](#)

10h05 : Félicien Bonnefoy* (Ecole Centrale de Nantes)

[Observation d'une cascade de quasi-résonances entre ondes de gravité à la surface d'un fluide](#)

10h40 – 11h10 : Pause Café

11h10 : Nicolas Mordant* (LEGI, Univ. Grenoble-Alpes)

[Couplages non linéaires en turbulence d'ondes à la surface d'un fluide](#)

11h45 : *Exposé court* - M. Berhanu (MSC, CNRS / Univ. Paris Diderot)

[Interactions non-linéaires à 3 ondes de vagues gravito-capillaires hors de la résonance](#)

12h00 : *Exposé court* - H. Roumaïssa (LEGI, Univ. Grenoble-Alpes)

[Transition entre régime de turbulence faible et régime de gaz de solitons](#)

12h15 : *Exposé court* – G. Rousseaux (Pprime / CNRS, Univ. Poitiers)

[Génération d'harmoniques libres en interaction ondes-courant](#)

12h30 – 14h00 : déjeuner

14h00 : Thierry Dauxois* (CNRS / ENS de Lyon)

[Instabilités de faisceaux d'ondes internes: expériences et résultats théoriques récents](#)

14h35 : Sabine Ortiz* (LadHyX Polytechnique)

[Doubles triades résonantes : when a daughter wave is engaged with two fiancés](#)

15h10 : Pierre-Philippe Cortet* (FAST)

[Turbulence en rotation et ondes d'inertie : quelques expériences](#)

15h45 : *Exposé court* - T. Le Reun (IRPHE, Univ. Aix Marseille)

[Turbulence d'ondes inertielles générées par instabilité elliptique](#)

16h00 – 16h30 : Pause Café

16h30 : Pierre Suret* (PHLAM, Univ. Lille)

[Propriétés statistiques des ondes non linéaires unidirectionnelles : une comparaison expérimentale entre hydrodynamique et optique](#)

17h05 : Christophe Barrière* (ESPCI Paris)

[Interactions non linéaires d'ondes acoustiques et conjugaison de phase](#)

17h40 : Cyril Touzé* (ENSTA Paristech)

[Transition à la turbulence d'ondes en vibration de plaques minces: rôle des résonances internes](#)

18h15 : *Exposé court* - S. Chibbaro (UJLRA, Univ. Pierre et Marie Curie)

[Turbulence forte et faible dans le modèle MMT](#)

18h30 : Clôture

*exposés invités

20^e Rencontre du Non-Linéaire

Université Paris Diderot, 22 – 23 mars 2017

Bienvenue à la 20^e Rencontre du Non-Linéaire 2017 qui aura lieu, pour la quatrième année consécutive, à l'Université Paris Diderot, amphithéâtre Buffon, 15 rue Hélène Brion, Paris 13^e.

Nous aurons 95 contributions se répartissant en 4 conférences invitées, 12 communications longues et 79 communications courtes.

Mercredi 22 mars 2017

09h15 - 10h00 : **Conférence invitée 1 (40 + 5 minutes)**

10h00 - 10h30 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 12 communications courtes

10h30 - 11h15 : **Pause café Posters (45 minutes)**

11h15 - 11h45 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 12 communications courtes

11h45 - 12h30 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues

12h30 - 14h00 : Pause déjeuner (ou Posters)

14h00 - 14h45 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues

14h45 - 15h35 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 20 communications courtes

15h35 - 17h00 : **Pause café Posters (85 minutes)**

17h00 - 17h45 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues

17h45 - 18h30 : **Conférence invitée 2 (40 + 5 minutes)**

18h45 - 20h45 : Cocktail pour l'anniversaire des 20 ans de la Rencontre du Non Linéaire

Jeudi 23 mars 2017

09h15 - 10h00 : **Conférence invitée 3 (40 + 5 minutes)**

10h00 - 10h50 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 20 communications courtes

10h50 - 11h45 : **Pause café Posters (55 minutes)**

11h45 - 12h30 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues

12h30 - 14h00 : Pause déjeuner (ou Posters)

14h00 - 14h45 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues

14h45 - 15h20 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 15 communications courtes

15h20 - 16h30 : **Pause café Posters (70 minutes)**

16h30 - 17h15 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues

17h15 - 18h00 : **Conférence invitée 4 (40 + 5 minutes)**

Nous remercions l'Université Paris Diderot de mettre à notre disposition les locaux de la Rencontre. Nous remercions également le CNRS, l'Université Côte d'Azur, l'Institut des Systèmes Complexes, les laboratoires INLN, MSC, PMMH, l'Institut Langevin, LP ENS Lyon et le GDR Phenix, de subvenir aux frais de la Rencontre et des éditions des actes, ce qui la rend entièrement gratuite pour tous les participants. Cette année, nous sommes 142 inscrits au 03 mars 2017.

Le Comité d'Organisation des RNL 2017 :

E. Falcon (CNRS / Univ. Paris Diderot), M. Lefranc (Univ. Lille 1), F. Pétrélis (CNRS / ENS Paris) & C.T. Pham (Univ. Paris Sud)

Mercredi 22 mars 2017

09h15 - 10h00 : Conférence invitée par Howard A. STONE (40 + 5 minutes)

Particle Motions in Simple Geometries: Surprises at Both Low and High Reynolds Numbers

10h00 - 10h30 : Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) - 12 communications courtes

[Why does time reversal break down in granular media?](#)

M. Harazi, Y. Yang, M. Fink, A. Tourin, X. Jia, présenté par M. Harazi

[Dynamique et mécanisme d'accrétion granulaire](#)

G. Saingier, A. Sauret, P. Jop, présenté par G. Saingier

[Mesure de température effective dans les gaz granulaires](#)

A. Naert, J.-Y. Chastaing, J.-C. Géminard, présenté par A. naert

[Rhéologie de suspensions magnétiques actives](#)

B. Vincenti, C. Douarche, E. Clément, présenté par B. Vincenti

[Interférométrie non linéaire en temps réel et fracture de géomatériaux](#)

P. Walczak, F. Mezzapesa, A. Bouakline, J. Ambre, S. Bouissou, S. Barland, présenté par P. Walczak

[Resonator property of a neuromimetic excitable laser system](#)

A. Dolcemascolo, B. Garbin, B. Peyce, S. Barland, R. Veltz, présenté par A. Dolcemascolo

[Régime faiblement non linéaire de la turbulence intégrable: expérience et nouvelle approche théorique](#)

R. El Koussaifi, M. Onorato, S. Randoux, P. Suret, présenté par R. El Koussaifi

[Observation d'ondes de Riemann aléatoires en turbulence intégrable : une expérience d'optique](#)

F. Gustave, G.A. El, P. Suret, S. Randoux, présenté par F. Gustave

[Ondes internes axisymétriques en stratification non-linéaire](#)

P. Maurer, S. Joubaud, P. Odier, T. Peacock, présenté par P. Maurer

[Effets du vent et de la viscosité sur les ondes océaniques : réduction à un dynamique 2D](#)

A. Armaroli, D. Eeltink, M. Brunetti, J. Kasparian, présenté par J. Kasparian

[Ondes de surface produites par un jet turbulent immergé](#)

A. Cazaubiel, M. Berhanu, E. Falcon, présenté par A. Cazaubiel

[Rouleaux de recirculation dans les ondes stationnaires](#)

E. Saggese, D. Clamond, J. Rajchenbach, présenté par J. Rajchenbach

10h30 - 11h15 : Pause café Posters (45 minutes)

11h15 - 11h45 : Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) - 12 communications courtes

[Two-fold framework for verification of Gyrokinetic codes](#)

N. Tronko, A. Bottino, T. Goerler, D. Told, E. Sonnendruecker, présenté par N. Tronko

[Etude numérique de l'impact de la magnétoconvection sur le refroidissement d'une bobine par du ferrofluide](#)

R. Zanella, C. Nore, F. Bouillault, X. Mininger, J.-L. Germond, I. Tomas, L. Cappanera, présenté par R. Zanella

[Simulations numériques directes de la dynamo dipolaire axisymétrique de l'expérience de Von-Karman-Sodium](#)

C. Nore, D. Castanon Quiroz, L. Cappanera and J.-L. Guermond, présenté par C. Nore

[La cloche électrostatique](#)

G. Martrou, M. Léonetti, présenté par G. Martrou

[Critère d'arrêt d'étalement d'un liquide par solidification sur un substrat](#)

R. de Ruiter, P. Colinet, P. Brunet, J. H. Snoeijer, H. Gelderblom, présenté par P. Brunet

[Instabilité vibratoire d'une goutte posée excitée par une onde acoustique de surface](#)

N. Chastrette, P. Brunet, L. Royon, M. Baudoin, R. Wunenburger, présenté par N. Chastrette

[Les dessous d'une goutte en Leidenfrost sur un bain chauffé](#)

L. Maquet, A. Duchesne, B. Sobac, S. Dorbolo, présenté par A. Duchesne

[Impact du mécanisme chaotique sur l'optimisation d'un modèle de mobilité d'un essaim de drones \(couverture de zone\)](#)

M. Rosalie, G. Danoy, S. Chaumette, P. Bouvry, présenté par M. Rosalie

[Étude numérique de l'effet du contraste de viscosité sur le murissement hydrodynamique](#)

H. Henry, G. Tegze, présenté par H. Henry

[Relaminarisations rares dans un modèle de turbulence de paroi transitionnelle : au delà des expériences et DNS](#)

J. Rolland, présenté par J. Rolland

[Stochastic attractors in a turbulent von Karman flow](#)

F. Daviaud, D. Faranda, Y. Sato, B. Saint-Michel, V. Padilla, C. Wiertel-Gasquet, B. Dubrulle, présenté par F. Daviaud

[Nouvelle vue sur la dissipation dans les écoulements turbulents](#)

G. Zalczer, présenté par G. Zalczer

11h45 - 12h30 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

[Observation de la cascade de Kolmogorov](#)

M. Le Berre C. Josserand, Th. Lehner, Y. Pomeau, présenté par M. Le Berre

[Une prédiction simple de la rupture de gels de caséine](#)

T. Gibaud, S. Manneville, B. Saint-Michel, présenté par B. Saint-Michel

12h30 - 14h00 : Pause déjeuner (ou Posters)

14h00 - 14h45 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

[Onde de choc balistique dans les fibres optiques](#)

J. Nuno, C. Finot, J. Fatome, présenté par C. finot

[Propagation asymétrique d'ondes de surface : réalisation expérimentale d'une diode](#)

F. Haudin, A. Maurel, P. Petitjeans, V. Pagneux, présenté par F. Haudin

14h45 - 15h35 : Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) – 20 communications courtes

[Couplage d'oscillateurs : l'instabilité d'un système d'équilibrage axial d'une turbo-pompe](#)

P. Le Gal, G. Verhille, présenté par P. Le Gal

[Généralisation de la loi de Darcy dans les milieux poreux pour les fluides à seuils : une approche statistique](#)

L. Talon, T. Chevalier, présenté par L. Talon

[Régime d'entraînement ou de type Rayleigh-Bénard pour la dynamique d'un système mixte convectif/stratifié](#)

L.-A. Couston, D. Lecoanet, B. Favier, M. Le Bars, présenté par L. Couston

[Influence de l'inertie dans les écoulements forcés électromagnétiquement](#)

J. Boisson, R. Monchaux, S. Aumaître, présenté par J. Boisson

[Dynamiques de pelage d'un ruban adhésif et instabilités de stick-slip](#)

V. De Zotti, L. Vanel, P.-P. Cortet, S. Santucci, présenté par V. De Zotti

[Croissance confinée par un substrat plan](#)

L. Gagliardi, O. Pierre-Louis, présenté par L. Gagliardi

[Une fibre auxiliaire souple pour permettre l'enroulement élasto-capillaire de fibres fonctionnelles](#)

P. Grandgeorge, A. Antkowiak, R. Wunenburger, S. Neukirch, présenté par P. Grandgeorge

[Anomalous Mullins effect in crosslinked actin networks under cyclic protocol](#)

H. Lopez-Menendez, J. F. Rodriguez, présenté par H. P. Lopez

[Controlling superfluid vortices in polariton fluids](#)

S. Pigeon, présenté par S. Pigeon

[Chaotic dynamics in Dynamic Nuclear Polarisation: observations of a solid-state NMR MASER](#)

E. Weber, D. Kurzbach, G. Bodenhausen, D. Abergel, présenté par D. Abergel

[Le problème de Riemann pour les ondes de polarisation dans les condensats de Bose-Einstein à deux composantes](#)

T. Congy, S. Ivanov, A. M. Kamchatnov, N. Pavloff, présenté par T. Congy

[Dynamique des vortex dans un modèle non local de superfluide](#)

J. Reneuve, L. Chevillard, J. Salort, présenté par J. Reneuve

[Etude quantitative des structures cohérentes de l'écoulement de Taylor-Couette turbulent par PIV-stéréoscopique](#)

A. Talioua, A. Prigent, I. Mutabazi, présenté par A. Talioua

[Simulation numérique des fluctuations extrêmes de traînée sur un objet immergé dans un écoulement turbulent](#)

T. Lestang, F. Bouchet, E. Lévêque, présenté par T. Lestang

[Temps de corrélation de champs de vitesses incompressibles](#)

A. Cameron, A. Alexakis, M.-E. Brachet, présenté par A. Cameron

[Onde de propagation: un modèle de vibration couplé](#)

A. El Amri, M. Argentina, Y. Bouret, X. Noblin, présenté par A. El Amri

[Investigation expérimentale de la turbulence d'onde de gravité en 1D](#)

I. Redor, N. Mordant, E. Barthelemy, H. Michallet, présenté par I. Redor

[Équilibre thermodynamique en turbulence d'ondes capillaires](#)

G. Michel, F. Pétrélis, S. Fauve, présenté par G. Michel

[Adapté ou adaptable, une problématique des systèmes vivants](#)

É. Herbert, Y. D'Angelo, V. Bels, H. Ouerdane, P. Lecoeur, Y. Apertet, C. Goupil, présenté par É. Herbert

[Conditions aux limites et rétroaction dans les systèmes thermodynamiques](#)

C. Goupil, H. Ouerdane, É. Herbert, G. Benenti, Y. D'Angelo, V. Bels, P. Lecoeur, présenté par C. Goupil

15h35 - 17h00 : Pause café Posters (85 minutes)

17h00 - 17h45 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

[Rupture d'un milieu granulaire : bifurcation et localisation](#)

T. B. Nguyen, A. Amon, présenté par A. Amon

[Comprendre la biophysique des bursts d'activités dans des réseaux neuronaux grâce à un modèle dynamique 2D](#)

T. Fardet, P. Monceau, S. Bottani, S. Métens, présenté par T. Fardet

17h45 - 18h30 : Conférence invitée par Laurent DESVILLETES (40 + 5 minutes)

Aspects mathématiques de l'instabilité de Turing: l'exemple de la dynamique des populations

18h30 – 18h45 : 20 ans de Rencontre du Non Linéaire animé par E. Falcon

18h45 – 20h45 : Cocktail pour l'anniversaire des 20 ans de la Rencontre du Non Linéaire
(présentation du badge obligatoire)

Jeudi 23 mars 2017

09h15 - 10h00 : Conférence invitée par Mathias FINK (40 + 5 minutes)
Time-reversal physics with space-time transformations

10h00 - 10h50 : Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) – 20 communications courtes

Capture capillaire dans des films liquides de suspensions

A. Sauret, M. Gomez, E. Dressaire, présenté par A. Sauret

Dynamique de mouillage d'un pont capillaire avec solidification sur une surface en translation

R. Herbaut, P. Brunet, L. Limat, L. Royon, présenté par R. Herbaut

Wetting on soft gels

M. Zhao, J. Dervaux, T. Narita, F. Lequeux, L. Limat, M. Roché, présenté par M. Zhao

B. subtilis est capable d'induire l'étalement de gouttes accrochées à des surfaces

M. Hennes, J. Tailleur, A. Daerr, présenté par M. Hennes

Croissance de stries longitudinales dans des rivières de laboratoire

A. Abramian, O. Devauchelle, É. Lajeunesse, présenté par A. Abramian

Dynamique d'une nappe phréatique à deux dimension

V. Jules, O. Devauchelle, É. Lajeunesse, présenté par V. Jules

Coarsening dynamics of a granular lattice gas

É. Opsomer, M. Noirhomme, F. Ludewig, N. Vandewalle, présenté par É. Opsomer

Impact des couches limites visqueuses sur l'émission d'ondes internes : une approche quasi linéaire

A. Renaud, A. Venaille, présenté par A. Renaud

Échantillonnage et comportement asymptotique en moyenne spatiale en turbulence

F. Paraz, M. M. Bandi, présenté par F. Paraz

Etude du bruit basse fréquence en $1/f$ contrôlé par la turbulence et les symétries

M. Pereira, C. Gissinger, S. Fauve, présenté par M. Pereira

La mécanique du tricot

S. Poincloux, M. Adda-Bedia, F. Lechenault, présenté par S. Poincloux

Dynamic fracture in heterogeneous material: Influence of the elastic wave field

A. Dubois, D. Bonamy, présenté par A. Dubois

Statistiques de déformation d'une fibre flexible dans un écoulement turbulent

A. Gay, B. Favier, G. Verhille, présenté par A. Gay

Dynamics of fibers transported in confined viscous flow

J. Cappello, M. Daëff, C. Duprat, O. Du Roure, A. Lindner, présenté par J. Cappello

Supratransmission dans une ligne électrique de Klein-Gordon

S. Morfu, B. Bodo, P. Marquié, M. Rossé, présenté par S. Morfu

Dynamique non-linéaire de la simple et double ionisation du magnésium par impact d'électron

J. Dubois, S. A. Berman, C. Chandre, T. Uzer, présenté par J. Dubois

Synchronization and memory in neural networks beyond their fixed point

B. A. Marquez, L. Larger, M. Jacquot, Y. K. Chembo, D. Brunner, présenté par B. Marquez

New experiments on subcritical transition to turbulence in Couette-Poiseuille flow

L. Klotz, J. E. Wesfreid, présenté par J. E. Wesfreid

Convection thermique d'un fluide confiné dans un anneau cylindrique en rotation auquel est appliqué une force DEP

A. Meyer, C. Kang, H. N. Yoshikawa, I. Mutabazi, présenté par A. Meyer

Équilibre de Nash : un fluide inaltérable de complexité maximale

N. Rivier, présenté par N. Rivier

10h50 - 11h45 : Pause café Posters (55 minutes)

11h45 - 12h30 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

Utilisation du flambement d'une membrane pour l'étude des contraintes de séchage

F. Boulogne, Y. L. Kong, J. K. Nunes, H. A. Stone, présenté par F. Boulogne

Growth and coarsening of quantum dots on a strained semi-conductor film

T. Frisch, G. Schifani, M. Argentina, J.-N. Aqua, présenté par T. Frisch

12h30 - 14h00 : Pause déjeuner (ou Posters)

14h00 - 14h45 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

Bioconvection induite par un faisceau lumineux dans une culture de micro-algues

J. Dervaux, M. Capellazzi Resta, P. Brunet, présenté par J. Dervaux

Motifs d'érosion dans le sillage d'un cylindre

F. Lachaussée, Y. Bertho, C. Morize, A. Sauret, P. Gondret, présenté par F. Lachaussée

14h45 - 15h20 : Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) – 13 communications courtes

Etude expérimentale de la propagation des ondes et de la formation d'écoulements à grande échelle

G. Ruiz Chavarria, P. Le Gal, M. Le Bars, présenté par G. Ruiz Chavarria

Waves and velocity field produced by a parabolic wave maker around a liquid-gas interface

I. J. Hernández Hernández, G. Ruiz Chavarría, présenté par I. J. Hernández Hernández

Une simulation numérique de la formation d'ondes internes dans un système stratifié avec une géométrie cylindrique

S. Hernández Zapata, G. Ruiz Chavarría, présenté par S. Hernandez-Zapata

Dynamique à retard dans un laser à cascade quantique émettant au moyen infra-rouge

L. Jumpertz, K. Schires, O. Spitz, M. Sciamanna, F. Grillot, présenté par F. Grillot

Le soliton de Peregrine comme structure universelle de la compression d'impulsion dans les fibres optiques

A. Tikan, C. Billet, A. Tovbis, G. El, M. Bertola, G. Genty, F. Gustave, T. Sylvestre, S. Randoux, J. M. Dudley, P. Suret, présenté par A. Tikan

Effet du retard sur la stabilité d'un oscillateur optoélectronique basé sur un résonateur à mode de galerie

V. Lecocq, R. Modeste Nguimdo, Y. Kouomou Chembo, T. Erneux, présenté par V. Lecocq

Tidal dynamos in stratified fluids

J. Vidal, R. Hollerbach, N. Schaeffer, D. Cébron, présenté par J. Vidal

Instabilité de précession dans un ellipsoïde

C. Nobili, P. Meunier, M. Le Bars, Favier, présenté par C. Nobili

Motion of a neutrally buoyant ellipsoid in viscous shear flow

J. Peixinho, J.-R. Angilella, présenté par J. Peixinho

Instabilité d'écoulement de streaming d'un fluide viscoélastique

S.-A. Bahrani, M. Costalonga, L. Royon, P. Brunet, présenté par S.-A. Bahrani

Dynamique non-linéaire des flammes de prémélange : description en pôles

B. Radisson, C. Almarcha, J. Quinard, E. Villermaux, B. Denet, présenté par B. Radisson

Triangular Fractographic patterns reveal the nature of slip-stick transition in polymeric materials

A. V. Vasudevan, T. M. Grabois, L. Ponson, présenté par A. V. Vasudevan

Les ondelettes Minplus et l'analyse multirésolution non linéaire

M. Gondran, A. Kenoufi, T. Lehner, A. Gondran, présenté par M. Gondran

[Propagation d'un demi vortex-ring connecté à une surface libre](#)

A. Vilquin, V. Pagneux, A. Maurel, P. Petitjeans, présenté par A. Vilquin

[Un circuit génétique générant des pulses de protéines de manière robuste mais flexible](#)

B. Lannoo, E. Carlon, M. Lefranc, présenté par M. Lefranc

15h20 - 16h30 : Pause café Posters (70 minutes)

16h30 - 17h15 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

[Nonlinear mode excitations in two coupled superfluids](#)

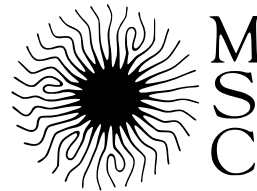
L. Sébastien, P. Parnaudeau, I. Danaila, F. Chevy, présenté par S. Laurent

[Dissipation and singularities in a turbulent swirling flow](#)

B. Dubrulle, D. Kuzzay, P. Debue, E.-W. Saw, D. Faranda, F. Daviaud, présenté par D. Kuzzay

17h15 - 18h00 : Conférence invitée par Basile AUDOLY (40 + 5 minutes)

The non-linear mechanics of slender deformable bodies



Institut **Langevin**
ONDES ET IMAGES

GDR CNRS PHENIX

20^e Rencontre du Non-Linéaire
Université Paris Diderot
Paris 2017

ISBN 978-2-9538596-6-9
EAN 9782953859669

Non-Linéaire Publications (NL Pub.)
Site universitaire du Madrillet — BP 12
78801 St-Étienne du Rouvray Cedex



**20^e Rencontre du Non Linéaire
Université Paris Diderot
Paris 2017**

ISBN 978-2-9538596-6-9
EAN 9782953859669

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/>