Un outil mathématique pour la physique: l'analyse non linéaire MinPlus et l'intégrale de chemin MinPlus

par **Michel et Alexandre Gondran**

Analyse linéaire classique

produit scalaire classique des fonctions L^2 :

$$(f,g) = \int_X f(x)g(x)dx. \qquad (1)$$

est linéaire sur le corps des réels $(\mathbb{R}, +, \times)$

Linéaire / à l'équation de la chaleur

$u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$ solutions $\Rightarrow$
$\lambda_1 u_1(x,t) + \lambda_2 u_2(x,t)$ solution

la transformée de Fourier

les distributions linéaires classiques

$$(\delta(x - x_0), f(x)) = f(x_0). \qquad (2)$$

Analyse non linéaire MinPlus

produit scalaire Minplus des fonctions sci:

$$(f,g)_{min+} = \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\}. \qquad (3)$$

est non linéaire sur les réels, mais linéaire sur le dioïde Minplus $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$

Linéaire / équation Hamilton-Jacobi

$u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$ solutions $\Rightarrow$
$min(\lambda_1 + u_1(x,t), \lambda_2 + u_2(x,t))$ solution

La transformée de Legendre-Fenchel

Les distributions non linéaires Minplus

$$(\delta_{min+}(x - x_0), f(x))_{min+} = f(x_0) \qquad (4)$$

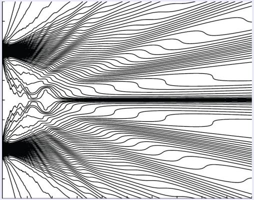
Mécanique quantique (intégrale de chemin de Feynman)

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int F(t, \hbar) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\right) \Psi_0(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 \quad (5)$$

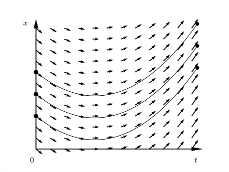
Mécanique classique (intégrale de chemin MinPlus)

$$S(\mathbf{x}, t) = \inf_{\mathbf{x}_0} \{S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\} \quad (6)$$

La particule est pilotée par l'action quantique (phase de l'onde)



La particule est pilotée par l'action classique d'Hamilton-Jacobi (et non par celle d'Euler-Lagrange)



Convergence de l'action quantique vers l'action classique d'Hamilton-Jacobi