Empilements compacts de sphères dures et équilibre de Nash

Nicolas Rivier. IPCMS, Université de Strasbourg

RNL 16/3/2016

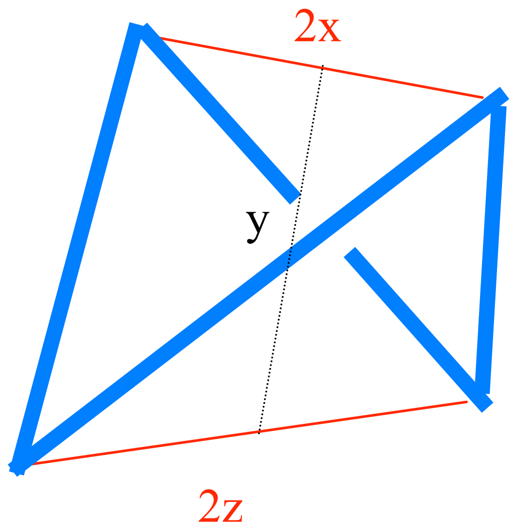
•Fluide de sphères dures en dimension infinie (toutes sphères en contact - graphe complet = simplex)
Un fluide: $P/(kT\rho) = 1+(1/2)v_a\rho$, $\rho=\langle N\rangle/V$

Équilibre statistique (min $\Omega(T,V,\mu) = - PV$)
(champ moyen, sans transition de phase)
Wyler, Rivier, Frisch. PRA **36** (87) 2422

C'est un **équilibre de Nash**.

Équilibre « anti-optimal »: pts. et chemins d'équilibre sur les frontières de l'espace de configuration
Sphères roulant les unes sur les autres. Triangles et autres circuits impairs impossibles - qqes. contacts perdus
(volume du simplex)^2 = v^2 minimal

•**Graphe complet** (N sommets, tous en contact mutuel = N-simplex dans espace à D=N-1 dim.);
graphe de **complexité maximum** (# arbres couvrants - spanning trees) N^{N-2}
La complexité est l'**essence** de cet équilibre de Nash (économie). et sa seule spécificité, quantitative et qualitative



• 4 sphères: **tétraèdre**. Rouler sans glisser, 2 degrés de liberté (2 arêtes extensibles), perp., indépendants

$$v^2 = s_1\, s_2\, [1 - (s_1 + s_2)],$$

$s_1 = x^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $v^2 = x^2 z^2 y^2$

Espace de configuration (x,y,z): Triangle sur sphère unité, borné par obstacles physique $x \geq 1/2$, $z \geq 1/2$ ou conceptuel $y \geq 0$.
Volume **minimal** aux **frontières** $v^2 = x^2 z^2 [1 - (x^2+z^2)]$
Equilibre de Nash $(1/2, 1/\sqrt{2}, 1/2)$, $(1/2, 0, \sqrt{3}/2)$ et $(\sqrt{3}/2, 0, 1/2)$,
Volume maximal à l'intérieur de l'espace de configuration: bcc $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, sur le chemin de Bain $x = z > 1/2$.

Équilibre de Nash (théorie des jeux): un état **stabl**e d'un système impliquant plusieurs (p) participants en interaction pour lequel **aucun** participant ne peut **augmenter son gain** (payoff) en modifiant **seu**l son choix (stratégie). Le choix de autres participants reste inchangé (champ moye). ($p>2$, jeu à champ moyen).

Payoff min. forcé sur la frontière de l'espace de configuration

• Jeu (2 joueurs) choisissent indép. un nombre ≥ 2. Etats (x,y).
Payoff {p(x),p(y)} , $p(x) = x$ (si $x<y$), $y-2$ si $x \geq y$.
Équilibre de Nash (2,2) {0,0}, (2,3) {2,0} et (3,2) {0,2}
(3,3) {1,1} n'est pas en équilibre de Nash
Frontières de l'espace de config. (2,y) {2,0 }et (x,2) {0,2}. Payoff minimal