

Éric FALCON
Marc LEFRANC
François PÉTRÉLIS
Chi-Tuong PHAM

Comptes-rendus de la 19^e
Rencontre du Non Linéaire
Paris 2016

Université Paris Diderot
Amphithéâtre Buffon

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/>

É. FALCON, M. LEFRANC
F. PÉTRÉLIS, C.-T. PHAM
ÉDITEURS

Comptes-Rendus de la 19^e
Rencontre du Non-Linéaire
Paris 2016

Université Paris Diderot
Non-Linéaire Publications

19^e RENCONTRE DU NON-LINÉAIRE
 Université Paris Diderot, PARIS
 15–17 Mars 2016

Nous remercions vivement l’Institut des Systèmes Complexes-Paris Île-de-France (ISC-PIF), l’Université Paris Diderot, le laboratoire Matière et Systèmes Complexes, le Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), pour leur soutien matériel et financier.

Le comité scientifique est composé de :

José BICO PMMH — ESPCI
 Éric FALCON MSC — Paris Diderot
 David GÉRARD-VARET IMJ — Paris Diderot
 Özgür GÜRCAN LPP — École Polytechnique
 Mariana HARAGUS LMB — Univ. Franche-Comté
 Xiaoping JIA Inst. Langevin – ESPCI
 Kirone MALLICK IPhT — CEA Saclay
 Philippe MARMOTTANT LIPhy — UJF Grenoble
 François PÉTRÉLIS LPS — ENS
 Chi-Tuong PHAM LIMSI — Paris-Sud
 Stéphane RANDOUX PhLAM — Lille
 Valérie VIDAL Lab. de Physique — ENSL

Les Rencontres annuelles du Non Linéaire sont organisées par :

Éric FALCON MSC — Paris Diderot
 Marc LEFRANC PhLAM — Lille
 François PÉTRÉLIS LPS — ENS
 Chi-Tuong PHAM LIMSI — Paris-Sud

Le colloque *Dualité onde-corpuscule à l’échelle macroscopique* est organisé par :

Antonin EDDI PMMH — ESPCI
 François PÉTRÉLIS LPS — ENS

Ces Comptes-Rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

Non-Linéaire Publications, Avenue de l’université, BP 12
 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Toutes les informations concernant les Rencontres sont publiées sur le serveur :

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/>

Renseignements :

rnl@univ-lille1.fr

Table des matières

Effets du couplage non linéaire dans un système de sine-Gordon modifié <i>Roland Alima, Savério Morfu, Bertrand Bodo, Patrick Marquié, Bernard Zobo Essimbi</i>	1
Approximation d'interface liquide–solide dans l'hydrosphère de Ganymède par un schéma de type Glimm <i>Sabrina Carpy, Hélène Mathis</i>	7
La danse des Funam-Bulles : promenades de bulles sur un fil chaud immergé dans un bain. <i>Alexis Duchesne, Charles Dubois, Hervé Caps</i>	13
Cavitation wave propagation: A coupled vibrations model <i>Ali El Amri, Yann Bouret, Xavier Noblin, Médéric Argentina</i>	19
Un modèle heuristique de particule étendue compatible avec la mécanique quantique <i>Michel Gondran, Alexandre Gondran</i>	25
Un outil mathématique pour la physique : l'analyse non linéaire MinPlus et l'intégrale de chemin MinPlus <i>Michel Gondran, Alexandre Gondran</i>	31
Numerical investigation into the choice of gait parameters in 2D anguilliform swimmers <i>David Gross, Yann Roux, Médéric Argentina</i>	37
Transport de particules par ondes internes <i>Ernesto Horne, Diane Micard, Pascal Metz, Marc Moulin, Philippe Odier, Sylvain Joubaud</i>	43
Un modèle chaotique pour l'épidémie de maladie à virus Ebola d'Afrique de l'Ouest en 2014 <i>Mireille Huc, Sylvain Mangiarotti</i>	49
Un modèle mathématique d'interaction liquide–vapeur <i>François James, Hélène Mathis</i>	55
Instabilité interfaciale sous érosion granulaire <i>Pierre Jop, Gautier Lefebvre, Aymeric Merceron</i>	61
Chaos quantique et micro-lasers <i>Mélanie Lebental, Aurélien Pascal, Joseph Zyss, Christian Ulysse, Dominique Decanini, Stefan Bittner</i>	67
La modélisation du chaos appliquée à la classification des couverts agricoles (bassin versant de Berambadi, Inde du Sud) <i>Sylvain Mangiarotti, Amit Kumar Sharma, Muddu Sekhar, Samuel Corgne, Laurent Ruiz, Laurence Hubert-Moy, Yann Kerr</i>	73

On the dynamics of laminar-turbulent patterns in plane Couette flow <i>Paul Manneville</i>	79
Caractérisation acoustique de la réflexion d'une onde de surface <i>Guillaume Michel, François Pétrélis, Stéphan Fauve</i>	85
Relation de dispersion d'ondes de surface paramétriquement excitées <i>Jean Rajchenbach, Didier Clamond</i>	91
Instabilités thermiques et hydrodynamiques des écoulements parallèles de fluides newtoniens ou viscoélastiques <i>Yoann Requîlé, Mohamed Najib Ouarzazi, Silvia Hirata</i>	97
Un gabarit pour tous les attracteurs d'un diagramme de bifurcation du système de Rössler <i>Martin Rosalie</i>	103
Effet du milieu poreux sur la désorganisation d'un écoulement de Taylor dans un canal millifluidique <i>Marion Serres, Régis Philippe, Valérie Vidal</i>	109
L'efficacité évaporative du sol modélisée par approche globale <i>Vivien Stefan, Sylvain Mangiarotti, Olivier Merlin, Aandré Chanzy</i>	115
Diffusionless hydromagnetic modes in rotating ellipsoids: a road to weakly nonlinear models? <i>Jérémie Vidal, David Cébron, Nathanaël Schaeffer</i>	121
Modélisation par technique globale du débit de trois sources karstiques (le Doubs, la Touvre et le Lez) <i>Yan Zhang, Sylvain Mangiarotti, Marc Leblanc</i>	127
Index des auteurs	135
Annexes	137

Effets du couplage non linéaire dans un système de sine-Gordon modifié

Roland Alima^{1,2}, Savério Morfu², Bertrand Bodo¹, Patrick Marquié² & Bernard Zobo Essimbi¹

¹ Laboratoire d'Energie, Systèmes électriques et électroniques Unité de Recherche et de Formation Doctorale en Physique et Applications Université de Yaoundé 1 — P.O. Box 812 Yaoundé-Cameroun

² Université de Bourgogne Franche-Comté, Laboratoire LE2I, UMR 6306, Aile des sciences de l'ingénieur, BP 47870, 21078 Dijon Cedex, France

alimaroland85@yahoo.com

Résumé. Cette communication porte sur une étude numérique visant à montrer les conditions d'existence du phénomène de supratransmission dans un milieu gouverné par l'équation de sine-Gordon à couplage mixte : le couplage linéaire pur étant associé à un couplage non linéaire. Nous montrons également l'effet de la variation du coefficient du couplage non linéaire sur l'amplitude seuil du signal exciteur nécessaire pour déclencher le phénomène de supratransmission dans le milieu, en maintenant constant le coefficient du couplage linéaire pur.

Abstract. This communication focuses on a numerical study aimed to show the conditions of existence of the supratransmission phenomenon in a physical system governed by the mixed coupling sine-Gordon equation: the pure linear coupling is associated with the nonlinear one. We also show the effect of the variation of the coefficient of nonlinear coupling on the amplitude threshold of signal exciter required to trigger the supratransmission phenomenon, keeping the coefficient of pure linear coupling constant.

1 Introduction

Lorsqu'un milieu de transmission non linéaire et discret est excité avec une fréquence choisie dans une bande interdite, il transmet de l'énergie si et seulement si l'amplitude du signal exciteur est supérieure ou égale à un seuil. Ce phénomène appelé supratransmission non linéaire, a été introduit par Geniet et Léon [1] lorsqu'ils ont observé une soudaine augmentation d'amplitude du signal transmis par une chaîne non linéaire excitée avec une fréquence prise dans le *gap*. Par la suite, plusieurs études théoriques et/ou numériques ont également montré l'existence de ce phénomène dans plusieurs systèmes, notamment dans des lignes électriques non linéaires et discrètes. Certains de ces travaux ont été réalisés sur des systèmes de lignes électriques à couplage linéaire pur [2–11], d'autres sur des systèmes à couplage mixte, le couplage linéaire pur étant alors associé à un couplage non linéaire [4, 12]. Cependant, ces études n'ont pas considéré l'influence de la variation du coefficient de couplage non linéaire sur l'amplitude du signal exciteur nécessaire pour déclencher l'observation du phénomène de supratransmission dans le milieu. L'objet de notre travail consiste donc à étudier un modèle de sine-Gordon modifié associant couplage linéaire pur et couplage non linéaire. Cette étude a pour but de montrer les conditions d'existence du phénomène de supratransmission dans le milieu et montrer également l'effet de l'augmentation du coefficient du couplage non linéaire sur l'amplitude seuil du signal exciteur, nécessaire pour le déclenchement du phénomène de supratransmission, en maintenant le coefficient du couplage linéaire pur constant.

2 Modèle et mise en évidence du phénomène de supratransmission

Le réseau de sine-Gordon modifié étudié consiste en une chaîne d'oscillateurs linéairement et non linéairement couplés. Le déplacement du n ème élément $u_n(t)$ est gouverné par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = -\gamma \frac{du_n}{dt} + \omega_L^2 (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \omega_{NL}^2 \left[(u_{n+1} - u_n)^3 + (u_{n-1} - u_n)^3 \right] - \omega_0^2 \sin(u_n). \quad (1)$$

Pour s'assurer qu'il n'y a pas de réflexion en bout de chaîne, le coefficient d'amortissement γ est constant pour tous les oscillateurs de la chaîne.

Lorsque le système de sine-Gordon modifié, caractérisé par l'équation (1), est forcé sinusoïdalement avec une amplitude suffisamment faible pour rester en régime linéaire, le nombre d'onde k et la pulsation ω des ondes linéaires se propageant dans le réseau obéissent à la relation de dispersion :

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_L^2(1 - \cos k). \quad (2)$$

Cette relation de dispersion définit un comportement passe-bande avec une pulsation de coupure basse qui correspond au *gap* ω_0 et une pulsation de coupure haute $\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 + 4\omega_L^2}$. Notre étude sera exclusivement consacrée au cas de pulsations situées dans la bande interdite basse fréquence, c'est-à-dire $\omega < \omega_0$. Dans ce cas de figure, pour les faibles amplitudes d'excitation, l'étude dans le cas linéaire conduit à une onde évanescente définie par le profil suivant [1] :

$$u_n(t) = A \sin(\omega t) e^{-\lambda n}. \quad (3)$$

Le coefficient λ se déduit en considérant un nombre d'onde k imaginaire pur. Ainsi en imposant $k = i\lambda$ dans la relation de dispersion (2), nous obtenons

$$\lambda = \operatorname{argch} \left(1 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_L^2} \right). \quad (4)$$

Les simulations numériques présentées dans cette communication ont été obtenues avec les mêmes conditions aux bords que celles considérées par Geniet et Léon [1] :

- Une extrémité de la chaîne est forcée avec une pulsation ω et une amplitude A .
- La chaîne est initialement au repos.
- Le profil des vitesses des particules de la chaîne correspond à celui d'une onde évanescente.

Les conditions aux bords se limitent donc à

$$u_0(t) = A \sin(\omega t), \quad u_n(0) = 0, \quad \dot{u}_n(0) = A\omega e^{-\lambda n}. \quad (5)$$

La figure 1 présente l'état de la ligne à l'instant $t = 30$, état obtenu à partir des simulations numériques de l'équation (1) et du profil théorique obtenu par Geniet et Léon, donné à l'expression (3), et pris ici par extrapolation. Le trait plein représente le profil théorique (3) tandis que les symboles « \circ » représentent les simulations numériques de l'équation (1). Les paramètres sont pris tels que pour les figures 1 (a-d), le coefficient de couplage non linéaire ω_{NL}^2 prend respectivement les valeurs 0, 4, 25 et 49, pendant que ω_L^2 est fixé à 4. Les figures 1 (a-d) révèlent un bon accord entre la valeur théorique donnée par Geniet et Léon et les résultats obtenus par simulations numériques. L'augmentation de la valeur du coefficient du couplage non linéaire semble ne pas influencer l'état de la ligne : le profil théorique prédit par Geniet et Léon donné à l'expression (3) et pris ici par extrapolation pourrait être considéré comme le profil de l'onde évanescente supportée par notre système d'étude lorsqu'il est forcé dans le *gap*.

L'amplitude A_n d'une cellule n de la chaîne non linéaire, prise comme cellule de contrôle, s'atténue en $Ae^{-\lambda n}$ où A est l'amplitude de la cellule excitatrice à l'entrée de la ligne et λ est l'amortissement dans la bande interdite, déterminé avec l'équation (4). Ainsi, le phénomène de supratransmission existe dans le milieu, pour une pulsation ω du signal d'entrée d'amplitude A donnée, si et seulement si l'amplitude A_n de la cellule n de la ligne, prise comme cellule de contrôle, est strictement supérieure à A (soit $A_n > A$).

3 Résultats des simulations numériques

Pour simuler le modèle de sine-Gordon modifié défini par l'équation (1), nous avons utilisé une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas d'intégration temporel $dt = 10^{-2}$ ainsi que les conditions (5).

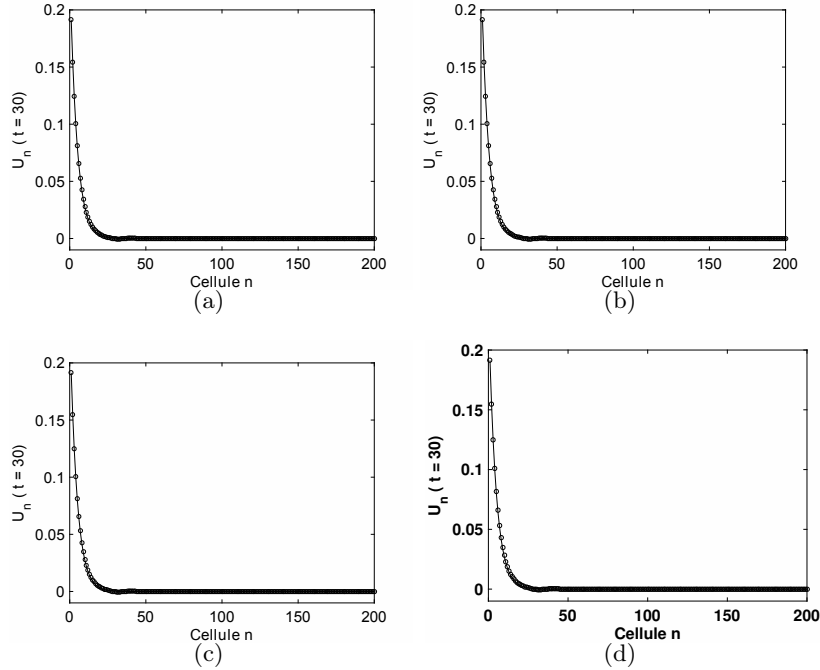


FIGURE 1. Profil d'ondes évanescents obtenues dans le *gap* d'un milieu de sine-Gordon modifié pour différentes valeurs du couplage non linéaire ω_{NL}^2 . L'état du milieu est représenté à l'instant $t = 30$ pour les paramètres fixés suivants : $A = 0,2$, $\gamma = 0,01$, $N = 1800$ cellules, $\omega_0^2 = 1$, $\omega_L^2 = 4$, $\omega = 0,9$. Le couplage non linéaire vaut respectivement (a) $\omega_{NL}^2 = 0$, (b) $\omega_{NL}^2 = 4$, (c) $\omega_{NL}^2 = 25$ et (d) $\omega_{NL}^2 = 49$. Le trait plein représente le profil théorique (3) tandis que les symboles « \circ » représentent les simulations numériques de l'équation (1).

Pour plus de simplicité d'écriture et de clarté dans la lecture, on notera $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$ l'amplitude seuil correspondant à la valeur d'amplitude qui déclenche le phénomène de supratransmission dans le milieu avec pour coefficient de couplage linéaire pur ω_L^2 et pour coefficient de couplage non linéaire ω_{NL}^2 .

Les formes d'ondes présentées sont les résultats des simulations réalisées avec des amplitudes à $\pm 0,01$ de la valeur d'amplitude seuil $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$, qui déclenche le phénomène de supratransmission dans le milieu d'étude, correspondant à la pulsation ω utilisée. En effet, nous avons choisi la pulsation $\omega = 0,95$ et la valeur de $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$ correspondante, pour tous les jeux de paramètres traités. À chaque fois, nous avons fixé la valeur du coefficient du couplage linéaire et avons fait varier celle du coefficient du couplage non linéaire. Ainsi, nous avons choisi de fixer les valeurs du coefficient de couplage linéaire ω_L^2 à 1 et 4. Pour chaque valeur de ω_L^2 , nous avons choisi deux valeurs du coefficient ω_{NL}^2 du couplage non linéaire, soient $\omega_{NL}^2 = 0$ et $\omega_{NL}^2 = 4$ correspondant respectivement à un milieu de sine-Gordon classique et à un milieu de sine-Gordon modifié.

Les figures 2 et 3 montrent respectivement l'évolution temporelle de la cellule $n = 30$ dans les cas sans couplage non linéaire ($\omega_{NL}^2 = 0$) et avec couplage non linéaire ($\omega_{NL}^2 = 4$) lorsque le couplage linéaire est maintenu fixe à $\omega_L^2 = 1$. Le cas $\omega_L^2 = 4$ est présenté aux figures 4 (sans couplage non linéaire) et 5 (avec couplage non linéaire $\omega_{NL}^2 = 4$).

Pour ces jeux de paramètres, les figures 2 (a), 3 (a), 4 (a) et 5 (a) montrent bien qu'il y a absence du phénomène de supratransmission dans le milieu pour une amplitude du signal d'excitation inférieure à la valeur critique $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$ correspondant à la pulsation ω utilisée. Les figures 2 (b), 3 (b), 4 (b) et 5 (b) quant à elles, montrent que lorsque l'amplitude de l'onde d'excitation est prise supérieure à la valeur seuil $A_{th,(\omega_L^2, \omega_{NL}^2)}$, de manière prévisible, le milieu transmet bien de l'énergie sous forme de modes non linéaires.

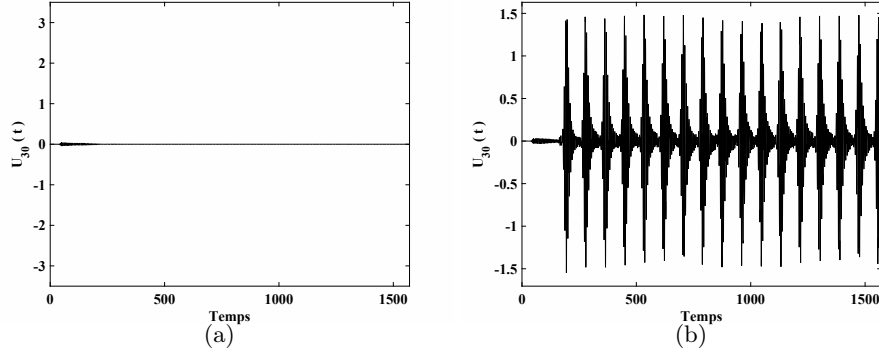


FIGURE 2. Évolution temporelle de la cellule $n = 30$ pour deux amplitudes spécifiques, l'une n'autorisant pas la supratransmission (a) et l'autre déclenchant la supratransmission (b). Figure 2 (a) : pour $A = 1,27 < A_{\text{th},(1,0)} = 1,28$, il n'y a pas de supratransmission à la différence de la figure 2 (b) où $A = 1,29$ et pour lequel il y a déclenchement de modes non linéaires par supratransmission. Paramètres : $N = 300$ cellules, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 0,95$, $\omega_L^2 = 1$ et $\omega_{\text{NL}}^2 = 0$.

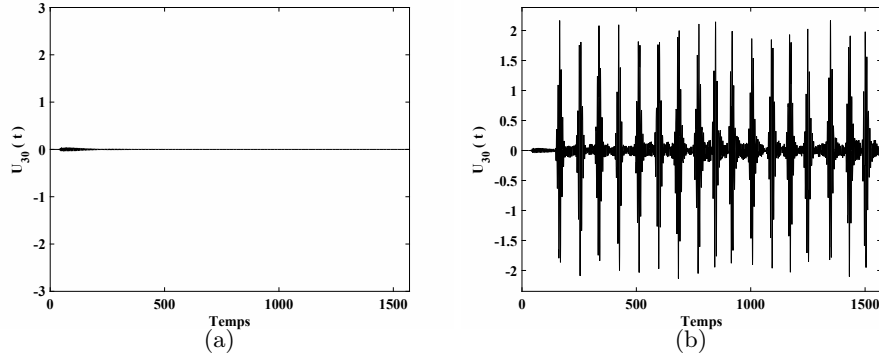


FIGURE 3. Évolution temporelle de la cellule $n = 30$ pour deux amplitudes spécifiques, l'une n'autorisant pas la supratransmission (a) et l'autre déclenchant la supratransmission (b). Figure 3 (a) : pour $A = 1,25 < A_{\text{th},(1,4)} = 1,26$, il n'y a pas de supratransmission à la différence de la figure 3 (b) où $A = 1,27$ et pour lequel il y a déclenchement de modes non linéaires par supratransmission. Paramètres : $N = 300$ cellules, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 0,95$, $\omega_L^2 = 1$ et $\omega_{\text{NL}}^2 = 4$.

4 Seuil de supratransmission

Pour caractériser le phénomène de supratransmission dans un système, il faut déterminer, pour chaque pulsation ω prise dans le *gap*, la valeur d'amplitude critique $A_{\text{th},(\omega_L^2, \omega_{\text{NL}}^2)}$ permettant au système de transmettre de l'énergie sous forme de modes non linéaires. Pour chaque pulsation ω , ce seuil critique $A_{\text{th},(\omega_L^2, \omega_{\text{NL}}^2)}$ a été obtenu numériquement en considérant que si l'amplitude de la cellule $n = 30$, prise ici comme cellule de contrôle, excède l'amplitude A de forçage, alors il y a supratransmission.

La figure 6 présente l'évolution de cette valeur critique $A_{\text{th},(\omega_L^2, \omega_{\text{NL}}^2)}$ en fonction de la pulsation ω d'excitation pour les deux couplages linéaires considérés $\omega_L^2 = 1$ (figure 6 (a)) et $\omega_L^2 = 4$ (figure 6 (b)) et cinq valeurs du couplage non linéaire ω_{NL}^2 allant de 0 à 49. La figure 6 nous montre clairement que, pour un coefficient de couplage linéaire pur donné et constant, plus la valeur du coefficient de couplage non linéaire augmente, plus l'amplitude seuil, nécessaire pour déclencher le phénomène de supratransmission dans le modèle de sine-Gordon modifié, diminue. Les figures 6 (a) et 6 (b) montrent également que l'augmentation de la valeur du coefficient du couplage linéaire ω_L^2 entraîne la diminution de l'écart entre les courbes

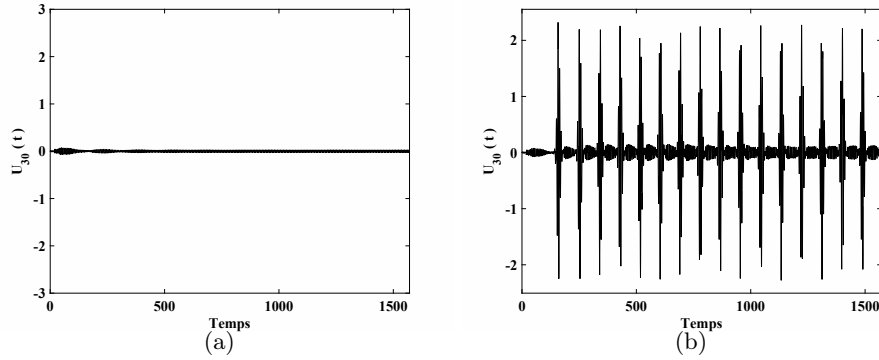


FIGURE 4. Évolution temporelle de la cellule $n = 30$ pour deux amplitudes spécifiques, l'une n'autorisant pas la supratransmission (a) et l'autre déclenchant la supratransmission (b). Figure 4(a) : pour $A = 1,13 < A_{\text{th},(4,0)} = 1,14$, il n'y a pas de supratransmission à la différence de la figure 4(b) où $A = 1,15$ et pour lequel il y a déclenchement de modes non linéaires par supratransmission. Paramètres : $N = 300$ cellules, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 0,95$, $\omega_L^2 = 4$ et $\omega_{\text{NL}}^2 = 0$.

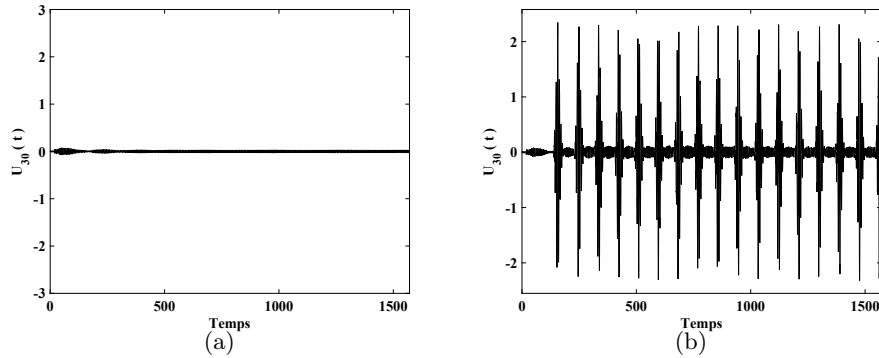


FIGURE 5. Évolution temporelle de la cellule $n = 30$ pour deux amplitudes spécifiques, l'une n'autorisant pas la supratransmission (a) et l'autre déclenchant la supratransmission (b). Figure 5(a) : pour $A = 1,08 < A_{\text{th},(4,4)} = 1,09$, il n'y a pas de supratransmission à la différence de la figure 5(b) où $A = 1,1$ et pour lequel il y a déclenchement de modes non linéaires par supratransmission. Paramètres : $N = 300$ cellules, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 0,95$, $\omega_L^2 = 4$ et $\omega_{\text{NL}}^2 = 4$.

d'amplitudes seuil. L'effet du couplage non linéaire semble donc plus prononcé pour les milieux à faible couplage.

5 Conclusion

Nous avons réalisé l'étude de la supratransmission dans une chaîne de sine-Gordon modifiée. Pour des pulsations prises dans le *gap* du système, les résultats obtenus par différentes simulations confirment ceux proposés par Geniet et Léon. Suite à cette étude, nous pouvons tirer quelques conclusions : tout naturellement, le phénomène de supratransmission dépend de l'amplitude du signal de forçage. L'intérêt de notre étude montre surtout que pour une valeur du coefficient de couplage linéaire pur ω_L^2 donnée, l'amplitude seuil permettant le déclenchement du phénomène de supratransmission dans le milieu diminue lorsque la valeur du coefficient de couplage non linéaire ω_{NL}^2 augmente.

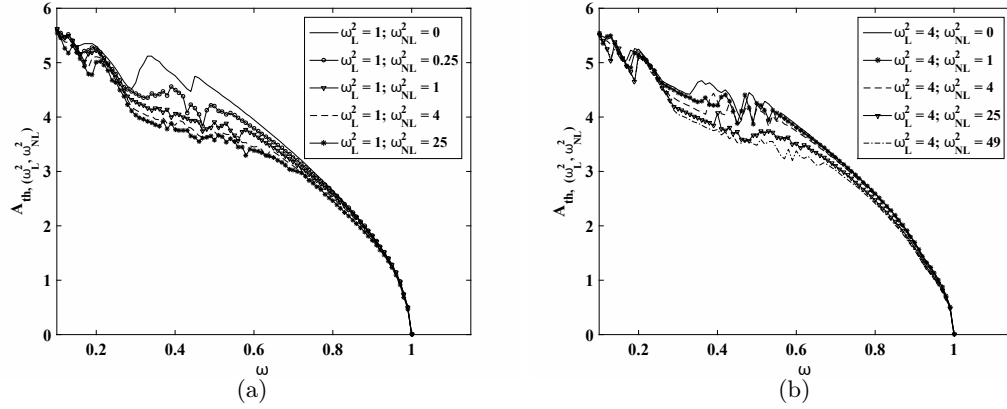


FIGURE 6. Diagramme de bifurcation donnant l'amplitude critique $A_{\text{th},(\omega_L^2, \omega_{\text{NL}}^2)}$ déclenchant la supratransmission en fonction de la pulsation d'excitation ω . Les paramètres du réseau sont : $N = 300$ cellules, $\gamma = 0,01$, $\omega_0^2 = 1$. Pour la figure 6 (a), le couplage linéaire est $\omega_L^2 = 1$ tandis que pour la figure 6 (b) le couplage linéaire est $\omega_L^2 = 4$.

Remerciements : Les auteurs remercient le Conseil Régional de Bourgogne pour le soutien financier apporté (PARI – Convention 2014-9201AAO49S01401 (SSTIC 6)).

Références

1. F. GENIET & J. LEON, Energy transmission in the forbidden band gap of a nonlinear chain, *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 134102 (2002).
2. J.-G. CAPUTO, J. LEON & A. SPIRE, Nonlinear energy transmission in the gap, *Phys. Lett. A*, **283**, 129–135 (2001).
3. F. GENIET & J. LEON, Nonlinear supratransmission, *J. Phys.: Condens. Matter*, **15**, 2933–2949 (2003).
4. R. KHOMERIKI, S. LEPRI & S. RUFFO, Nonlinear supratransmission and bistability in the Fermi-Pasta-Ulam model, *Phys. Rev. E*, **70**, 066626 (2004).
5. J. E. MACÍAS-DÍAZ & A. PURI, On the propagation of binary signals in damped mechanical systems of oscillators, *Physica D*, **228**, 112–121 (2007).
6. J. E. MACÍAS-DÍAZ & A. PURI, An application of nonlinear supratransmission to the propagation of binary signals in weakly damped, mechanical systems of coupled oscillators, *Phys. Lett. A*, **366**, 447–450 (2007).
7. S. B. YAMGOUÉ, S. MORFU & P. MARQUIÉ, Noise effects on gap wave propagation in a nonlinear discrete LC transmission line, *Phys. Rev. E*, **75**, 036211 (2007).
8. J. E. MACÍAS-DÍAZ, Numerical study of the transmission of energy in discrete arrays of sine-Gordon equations in two space dimensions, *Phys. Rev. E*, **77**, 016602 (2008).
9. A. B. TOGUEU MOTCHEYO, C. TCHAWOUA & J. D. TCHINANG TCHAMEU, Supratransmission induced by waves collisions in a discrete electrical lattice, *Phys. Rev. E*, **88**, 040901 (2013).
10. A. B. TOGUEU MOTCHEYO, C. TCHAWOUA, M. SIEWE SIEWE & J. D. TCHINANG TCHAMEU, Supratransmission phenomenon in a discrete electrical lattice with nonlinear dispersion, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **18**, 946–952 (2013).
11. B. BODO, S. MORFU, P. MARQUIÉ & M. ROSSÉ, A Klein-Gordon electronic network exhibiting the supratransmission effect, *Electron. Lett.*, **46**, 123–124, (2010).
12. F. KENMOGNE, G. B. NDOMBOU, D. YEMÉLÉ & A. FOMETHE, Nonlinear supratransmission in a discrete nonlinear electrical transmission line: Modulated gap peak solitons, *Chaos Soliton. Fract.*, **75**, 263–271 (2015).

Approximation d'interface liquide–solide dans l'hydrosphère de Ganymède par un schéma de type Glimm

Sabrina Carpy¹ & Hélène Mathis²

¹ Laboratoire de Planétologie et Géodynamique de Nantes, UMR 6112, CNRS, Université de Nantes, 2 chemin de la Houssinière, BP 92205, 44322 Nantes Cedex 3, France

² Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, UMR 6629, CNRS, Université de Nantes, 2 chemin de la Houssinière, BP 92205, 44322 Nantes Cedex 3, France

sabrina.carpy@univ-nantes.fr

Résumé. Ce travail concerne la modélisation et la simulation numérique de l'évolution en espace et en temps de l'interface eau–glace hautes pressions présente dans l'hydrosphère de Ganymède. On considère un modèle de type Stefan à deux phases, qui intègre les phénomènes de transferts de masse à l'interface. On met au point un schéma volumes finis original pour résoudre le suivi d'interface en adoptant une projection aléatoire de l'interface à la Glimm.

Abstract. This work deals with the modelling and the numerical simulation of the evolution — in space and time — of the interface liquid–high pressure ice present in the hydrosphere of Ganymede. We consider a two-phase Stefan-like model, which takes into account the mass transfers occurring at the interface. We propose an original finite volume scheme for the front tracking problem by means of a Glimm random sampling projection of the interface.

1 Introduction

Contexte géophysique. Les données récoltées par la mission spatiale Galiléo ont permis d'évaluer la structure interne de Ganymède. Ce satellite de Jupiter, composé essentiellement de glace d'eau, contiendrait un océan profond, probablement enrichi en ammoniac, situé entre un manteau supérieur de glace d'eau de type I (proche des glaciers terrestres) et d'une couche inférieure de glace de type VI hautes pressions (dont les caractéristiques sont moins connues) [1] (cf. Fig. 1 (a)). Cette particularité est liée aux changements de phase de la glace en fonction de la pression (cf. Fig. 1 (b)). Dans cet article, nous considérons le problème

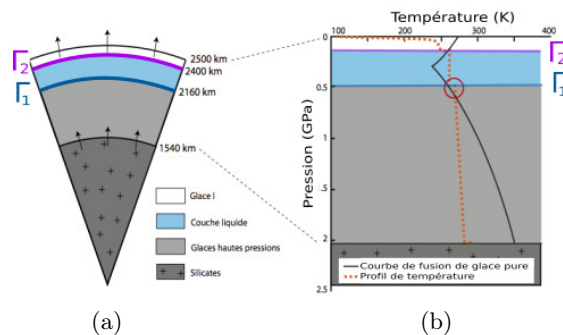


FIGURE 1. (a) Structure interne de Ganymède. (b) Profil de la température dans l'hydrosphère de Ganymède en fonction de la pression.

unidimensionnel et nous nous concentrons sur l'évolution en temps de l'interface $\Gamma_1(t)$, l'interface inférieure glace hautes pressions–eau liquide, l'interface Γ_2 , entre eau liquide et glace I, étant supposée fixe en

$x = 0$. On se ramène alors à un problème en domaine semi-infini $(t, x) \in [0, T_{\text{final}}] \times \mathbb{R}^+$. La température à l'interface Γ_1 , entre le liquide et la glace VI hautes pressions, est la température de fusion de la glace. Or une analyse du profil convectif (de type Rayleigh-Bénard) indique la présence d'une couche limite thermique qui coupe la courbe de fusion de la glace hautes pressions (cf. Fig. 1 (b)). Par conséquent le système n'est pas à l'équilibre thermodynamique. La question est de déterminer le taux de glace fondue et de modéliser le devenir de cette zone d'instabilité. En particulier il s'agit de déterminer le profil de température au sein des couches liquide et glace hautes pression, en suivant le déplacement de l'interface $\Gamma_1(t)$ tout en prenant en compte les transferts de masse qui s'opèrent à l'interface.

On considère ici un modèle de type Stefan à deux phases qui permet de déterminer la température dans chacune des phases et son évolution au cours du temps. Le modèle est enrichi par la prise en compte des changements de phase en considérant une concentration de sels (typiquement de l'ammoniac) dans le système en suivant la modélisation proposée par Rubinstein [2].

Afin de capturer précisément les instabilités qui se produisent à l'interface Γ_1 , il est nécessaire de développer une méthode numérique robuste et simple pour le suivi d'interface. Les méthodes de type *level set* sont classiquement utilisées pour résoudre les problèmes de type Stefan. Elles reposent sur l'utilisation d'une fonction, appelée *level set*, dont le zéro indique l'interface. Cette fonction satisfait une équation de transport. La diversité des méthodes *level set* réside dans la définition de la vitesse de transport. Si ces méthodes donnent de bons résultats sur grilles cartésiennes, elles peuvent être difficiles à mettre en œuvre en particulier en dimension supérieure sur géométrie complexe [3–6]. De plus elles nécessitent des étapes de régularisation, assez coûteuses, qui empêchent la détection d'interfaces peu régulières.

On propose ici une méthode originale pour les problèmes de type Stefan, basée sur une approximation par volumes finis et un suivi d'interface par une approche ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*). On utilise une étape de projection basée sur un schéma aléatoire de type Glimm [7]. Ce type de méthode s'avère très robuste dans le cadre d'écoulements compressibles multiphasiques [8, 9]. Afin de simplifier la présentation, on décrit dans la section 2.2 la méthode dans le cadre d'un problème de Stefan à deux phases (sans tenir compte des transferts de masse à l'interface). Une description de la méthode numérique et quelques-unes de ses propriétés sont données en section 3. Les résultats numériques, présentés en section 4, sont confrontés à ceux obtenus par une méthode *level set* sur un exemple académique.

2 Modèles de Rubinstein et Stefan à deux phases

On présente un modèle complet unidimensionnel qui régit le déplacement de l'interface Γ_1 en temps et les transferts de masse à l'interface. Afin de simplifier la présentation de la méthode numérique, on se limite ensuite à un modèle simplifié de Stefan à deux phases.

2.1 Modèle complet de Rubinstein

On considère un système binaire, semi-infini, constitué d'une phase liquide et d'une phase solide, séparées par l'interface $\Gamma_1(t)$. On désigne par $T_k(t, x)$ les températures dans les phases liquide et solide, $k = l, s$. On note $C_k(t, x)$ la concentration en ammoniac dans les phases liquide et solide, $k = l, s$, telle que $0 < C(t, x) < 1$. Suivant les travaux de Rubinstein (voir [2] et les références données), on suppose que le processus de solidification est donné par les courbes liquidus $T(t, x) = f_l(C)$ et solidus $T(t, x) = f_s(C)$ qui définissent la température en fonction de la concentration. On suppose ici $f_l(C) > f_s(C)$. Ainsi le système est liquide si $T(t, x) \geq f_l(C)$ et solide si $T(t, x) \leq f_s(C)$. Si $f_s(C) < T(t, x) < f_l(C)$, alors le système présente une zone de mélange de la glace fondue.

L'évolution de la température et le changement de phase sont donnés par le système diffusif suivant

$$\rho \partial_t (c_k T_k)(t, x) + \partial_x (-K_k \partial_x T_k)(t, x) = 0, \quad t > 0, x \in \Omega_k(t), \quad (1)$$

$$\partial_t C_k(t, x) + \partial_x (-D_k \partial_x C)(t, x) = 0, \quad t > 0, x \in \Omega_k(t), \quad (2)$$

où ρ désigne la masse volumique de l'eau ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$), c_k la capacité thermique massique ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$), K_k la conductivité thermique ($\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) de la phase $k = l, s$ et D_k ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) le coefficient de

diffusion. De plus $x \in \Omega_l(t)$ (resp. $\Omega_s(t)$) désigne le domaine liquide (resp. solide) c'est-à-dire $0 < x < \Gamma_1(t)$ (resp. $\Gamma_1(t) < x$). L'évolution de l'interface $\Gamma_1(t)$ est régie par la condition de Stefan :

$$\rho L \Gamma_1'(t) = K_s \partial_x T|_{(t, \Gamma_1(t)^+)} - K_l \partial_x T|_{(t, \Gamma_1(t)^-)}, \quad (3)$$

où L désigne la chaleur latente ($J \cdot kg^{-1}$) de solidification. À l'interface la température du système satisfait

$$T_l(t, \Gamma_1(t)) = T_s(t, \Gamma_1(t)) = T_m, \quad (4)$$

où T_m est la température de fusion donnée par l'équilibre solidus–liquidus $T_m = f_s(C_s(t, \Gamma_1(t))) = f_l(C_l(t, \Gamma_1(t)))$. Le domaine étant supposé semi-infini, on impose les conditions aux limites et initiales suivantes

$$T_l(t, 0) = T_l^0 \text{ pour } t \geq 0, \partial_x T_s(t, x) = 0 \text{ à l'infini, } \forall t > 0. \quad (5)$$

De même pour la concentration, on a $C_l(t, 0) = C_l^0$ pour $t \geq 0, \partial_x C_s(t, x) = 0$ à l'infini, $\forall t > 0$.

2.2 Réécriture du modèle et couplage

Afin de faciliter la présentation de la méthode numérique, on simplifie maintenant le modèle pour ne tenir compte que du problème de Stefan à deux phases régi par (1)–(3), muni des conditions aux limites (4) sur la température. Le modèle peut être réécrit sous la forme suivante

$$\partial_t(\rho c(t, x)T(t, x)) + \partial_x(-K(t, x)\partial_x T(t, x)) = (-\rho L - \rho T_f(c_s - c_l)) \Gamma_1'(t) \delta_0(x - \Gamma_1(t)), \quad (6)$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en $x = 0$. Les paramètres physiques sont constants de part et d'autre de l'interface $\Gamma_1(t)$ tels que

$$c(t, x) = \begin{cases} c_l, & 0 < x < \Gamma_1(t), \\ c_s, & x > \Gamma_1(t), \end{cases} ; \quad K(t, x) = \begin{cases} K_l, & 0 < x < \Gamma_1(t), \\ K_s, & x > \Gamma_1(t). \end{cases} \quad (7)$$

Le problème de Stefan est présenté sous forme conservative de sorte à rentrer dans le cadre proposé par [8]. Il est à noter que l'évolution de la température est définie sur tout le domaine spatial. La condition de saut du flux de température à l'interface n'est pas explicitement imposée mais est implicitement contenue dans le terme source. Celui-ci est nul sur tout le domaine, hormis en $x = \Gamma_1(t)$, c'est-à-dire au niveau de l'interface.

Proposition 1. *Le modèle (6)–(7), muni des conditions aux limites (5), est équivalent au modèle (1) et à la condition de Stefan (3).*

En effet, la propriété de conservation d'énergie induit la condition de Stefan. On retrouve cette condition en faisant un équilibre local au voisinage de l'interface, dans le même esprit que les relations de saut de Rankine–Hugoniot pour les lois de conservation. La condition de Stefan (3) est donc implicitement contenue dans le modèle (6)–(7).

3 Méthode numérique

On propose d'approcher le modèle (6)–(7), muni des conditions (5), par une méthode de type volumes finis avec suivi d'interface par une approche ALE. L'originalité de la méthode repose sur une projection aléatoire de l'interface par une méthode de type Glimm [7]. Initialement développée pour des modèles d'écoulements diphasiques compressibles (voir [9] et références incluses) ou couplage fluide–particule [8]. Dans ce contexte il est démontré que la méthode ALE admet de bonnes propriétés : elle est conservative en moyenne, converge rapidement et préserve la positivité. De plus l'extension à la dimension 2 est directe grâce à un *splitting* directionnel de Strang [7].

3.1 Schéma volumes finis dans le cas d'une vitesse constante

Il s'agit dans un premier temps de définir un schéma volumes finis (sans tenir compte des conditions aux limites), lorsque l'interface est supposée se déplacer à vitesse constante v .

On note $x_{i+1/2} = i\Delta x$ les arêtes du maillage, $i \in \mathbb{Z}$, où Δx désigne le pas d'espace, Δt le pas de temps, et T_i^n l'approximation de la température T au temps $t^n = n\Delta t$ en $K_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. Il est à noter que l'on considère une approximation constante par maille. Supposons maintenant l'interface placée en $x_{1/2}$. Le schéma volumes finis s'écrit

$$T_i^{n+1} = T_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{\rho c_i} (g_0(T_i^n, T_{i+1}^n) - g_0(T_{i-1}^n, T_i^n)), \quad \forall i \neq 0, 1. \quad (8)$$

Le flux numérique g_0 est supposé monotone et consistant avec le flux de température $-K\partial_x T$. Proche de l'interface les flux numériques doivent tenir compte du terme source ponctuel. On a alors :

$$\begin{aligned} T_0^{n+1} &= T_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{\rho c_0} (g_v^-(T_0^n, T_1^n) - g_0(T_{-1}^n, T_0^n)), \\ T_1^{n+1} &= T_1^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{\rho c_1} (g_0(T_1^n, T_2^n) - g_v^+(T_0^n, T_1^n)), \end{aligned} \quad (9)$$

où les flux g_v^\pm à l'interface $x_{1/2}$ sont définis par

$$\begin{aligned} g_v^-(T_0, T_1) &= -K_0 \frac{T_m - T_0}{\Delta x/2} - vP^-(x_{1/2} + v\Delta t/2), \quad \text{avec } P^-(x) = \frac{T_1 - T_m}{\Delta x/2} (x - x_{1/2}) + T_m, \\ g_v^+(T_0, T_1) &= -K_1 \frac{T_1 - T_m}{\Delta x/2} - vP^+(x_{1/2} + v\Delta t/2), \quad \text{avec } P^+(x) = \frac{T_m - T_0}{\Delta x/2} (x - x_0) + T_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Le schéma ainsi défini satisfait la propriété de consistance suivante.

Proposition 2. *Considérons la condition initiale $T_i^0 = \alpha x_i$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors le schéma (9)–(10) préserve exactement le profil initial, c'est-à-dire $T_i^n = T_i^0$, $\forall n \geq 0$ et $\forall v \in \mathbb{R}$.*

3.2 Schéma général

On étend maintenant le schéma numérique précédent au cas d'une vitesse d'interface régie par la condition de Stefan. On rappelle à nouveau que cette condition est implicitement contenue dans le modèle au travers du terme source ponctuel et qu'elle est gérée numériquement au travers des flux numériques g_v^\pm . Suivant l'approche développée dans [8], on propose l'algorithme suivant :

1. Supposons donnés $(T_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$, Γ_1^n et v^n qui désignent respectivement la représentation constante par maille de la température, la position et la vitesse de l'interface à l'instant t^n . On suppose que l'interface est placée à une arête du maillage en $\Gamma_1^n = x_{I_n+1/2}$. Soient g_0 un flux numérique consistant avec $-K\partial_x T$ et g_v^\pm un flux numérique consistant avec $-K\partial_x T - vT$.
2. Loin de l'interface, utiliser le schéma volumes finis (8), $\forall i \neq I_n, I_n + 1$.
3. Pour les cellules I_n et $I_n + 1$ adjacentes à l'interface $\Gamma_1^n = x_{I_n+1/2}$, résoudre

$$\begin{aligned} (\Delta x + v^n \Delta t) \tilde{T}_{I_n}^{n+1} &= \Delta x T_{I_n}^n - \Delta t \frac{1}{\rho c_{I_n}} (g_v^-(T_{I_n}^n, T_{I_n+1}^n) - g_0(T_{I_n-1}^n, T_{I_n}^n)) \\ (\Delta x + v^n \Delta t) \tilde{T}_{I_n+1}^{n+1} &= \Delta x T_{I_n+1}^n - \Delta t \frac{1}{\rho c_{I_n+1}} (g_0(T_{I_n+1}^n, T_{I_n+2}^n) - g_v^+(T_{I_n}^n, T_{I_n+1}^n)). \end{aligned} \quad (11)$$

4. Prendre $y \in (0, \Delta x)$ aléatoirement.
 - Si $v^n > 0$, prendre

$$\begin{cases} T_{I_n}^{n+1} &= \tilde{T}_{I_n}^{n+1} \\ (I_{n+1}, T_{I_{n+1}}^{n+1}) &= \begin{cases} (I_n + 1, \tilde{T}_{I_n}^{n+1}) & \text{si } y < v^n \Delta t \\ (I_n, \tilde{T}_{I_n+1}^{n+1}) & \text{sinon,} \end{cases} \end{cases}$$

– Si $v^n < 0$, prendre

$$\begin{cases} (I_{n+1}, T_{I_{n+1}}^{n+1}) = \begin{cases} (I_n, \tilde{T}_{I_n}^{n+1}) & \text{si } y > -v^n \Delta t \\ (I_n - 1, \tilde{T}_{I_n - 1}^{n+1}) & \text{sinon,} \end{cases} \\ T_{I_{n+1}}^{n+1} = \tilde{T}_{I_{n+1}}^{n+1}. \end{cases}$$

5. Évaluer la vitesse de l'interface à l'instant t^{n+1} par

$$\rho L v^{n+1} = (g_{v^n}^+(T_{I_n}^n, T_{I_{n+1}}^n) - g_{v^n}^-(T_{I_n}^n, T_{I_{n+1}}^n)). \quad (12)$$

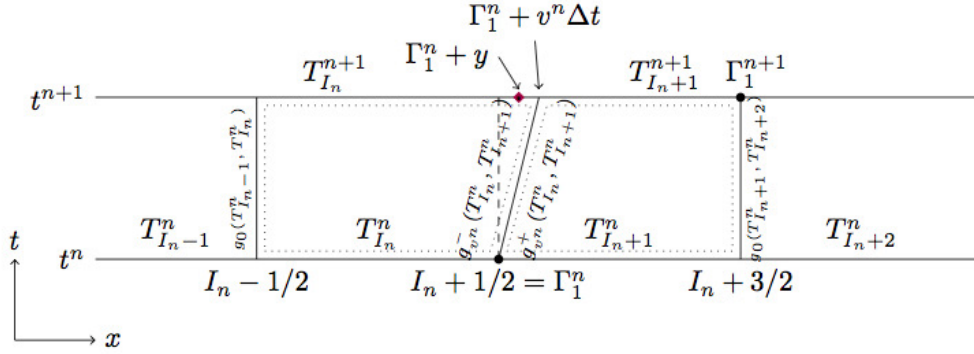


FIGURE 2. Représentation de l'algorithme au niveau de l'interface.

Le modèle (6)–(7) est intégré sur le trapèze espace-temps (cf. Fig. 2). L'équation sur le trapèze $[I_n - 1/2, I_n + 1/2, \Gamma_1^n + v^n \Delta t, I_{(n+1)} - 1/2]$ (à gauche de l'interface) revient à l'équation de la chaleur homogène, mais puisque l'interface est inclinée, le flux numérique à l'interface doit être consistant avec $-K \partial_x T - v^n T$. L'intégration sur les cellules adjacentes à l'interface donnent les formules (11) pour les trapèzes à gauche et droite de l'interface. La mise à jour de la température est effectuée à l'étape 4 de manière aléatoire. En pratique on sélectionne un réel $y \in [0, \Delta x]$ par échantillonnage aléatoire au moyen de la suite de *van der Corput* (se référer à [9] pour un algorithme). Sur la figure 2, le tirage aléatoire impose $y < v^n \Delta t$, si bien que l'interface, située à l'instant t^n en $I_n + 1/2$ (point noir), sera déplacée en $I_n + 3/2$ à l'instant t^{n+1} (point noir). La mise à jour de la vitesse de l'interface (étape 5) repose sur la définition (10) des flux à l'interface. Il est à noter que l'on fait le choix de fixer la vitesse à l'itération t^{n+1} par les flux calculés au temps t^n .

4 Résultat numérique

On considère un cas test proposé dans [4] pour une donnée initiale de température

$$T(0, x) = \begin{cases} 0,53, & 0 < x < \Gamma_1(0) \text{ (zone liquide),} \\ T_m = 0, & x = \Gamma_1(0) \text{ (température de fusion à l'interface),} \\ 0,1, & \Gamma_1(0) < x \text{ (zone solide),} \end{cases}$$

où la position initiale de l'interface est $\Gamma_1(0) = 0,2$. La température dans la phase solide est artificiellement fixée supérieure à la température de fusion $T_m = 0$. Les paramètres physiques sont $L = 0,53$, $K_1 = 0,005$, $K_s = 1$, $c_l = c_s = 1 = \rho = 1$. Le calcul est mené sur le domaine $[0, 5]$, pour un maillage uniforme de 2000 mailles, et un temps final $T_{\text{final}} = 0,25$ s. On compare sur la figure 3 la méthode numérique définie dans la section 3 à une méthode de *level set* implicite en temps proposée dans [3] et à une solution exacte

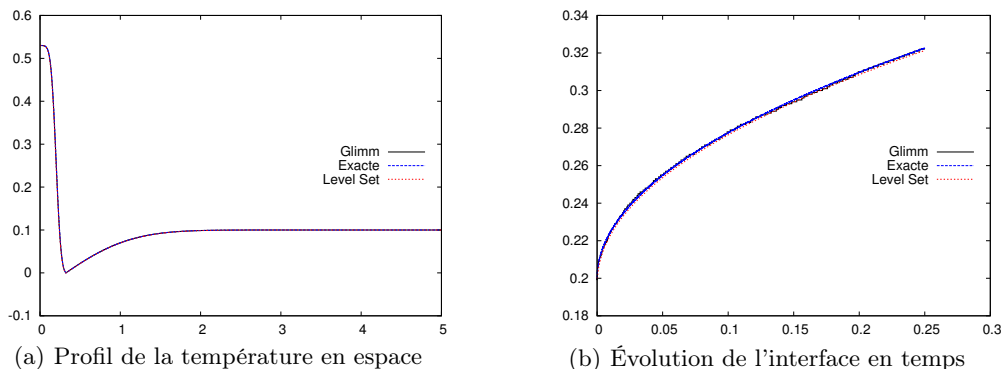


FIGURE 3. Comparaison des méthodes *level set* et Glimm avec la solution exacte.

explicitée dans [4]. On constate que la méthode *level set* et la méthode Glimm donnent des résultats comparables à la solution exacte. On observe que l'évolution de l'interface en temps par la méthode Glimm a un profil en escalier. Ceci est dû à la projection aléatoire de l'interface à chaque itération en temps.

5 Conclusion et perspectives

On propose une nouvelle méthode numérique pour résoudre un problème de Stefan à deux phases. Cette méthode repose sur une formulation volumes finis couplée à une méthode de projection de type Glimm pour suivi d'interface. L'extension de la méthode en dimension supérieure est directe par un *splitting* de Strang mais se limitera à une discrétisation sur maillage cartésien. Il s'agit maintenant d'étendre la méthode au modèle complet de Rubinstein (avec prise en compte des transferts de masse à l'interface). La méthode numérique envisagée est la même, la difficulté résidant, dans ce cas, dans la définition rigoureuse des courbes liquidus et solidus du mélange eau-ammoniac dans l'océan de Ganymède. À terme, il s'agira de proposer un modèle bi-dimensionnel complet pour simuler l'évolution des interfaces Γ_1 et Γ_2 .

Références

1. F. SOHL, M. CHOUKROUN, J. KARGEL, J. KIMURA, R. PAPPALARDO, S. VANCE & M. ZOLOTOV, Subsurface water oceans on icy satellites: Chemical composition and exchange processes, *Space Science Reviews*, **153**, 485–510 (2010).
2. L. I. RUBINSTEIN, *The Stefan problem*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence (1971).
3. S. CHEN, B. MERRIMAN, S. OSHER & P. SMERKA, A simple level set method for solving Stefan problems, *J. Comput. Phys.*, **135**, 8–29 (1997).
4. E. JAVIERRE, C. VUIK, F. J. VERMOLEN & S. VAN DER ZWAAG, A comparison of numerical models for one-dimensional Stefan problems, *J. Comput. Appl. Math.*, **192**, 445–459 (2006).
5. C. BUI, CH. DAPOGNY & P. FREY, An accurate anisotropic adaptation method for solving the level set advection equation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **70**, 899–922 (2012).
6. C. DAPOGNY & P. FREY, Computation of the signed distance function to a discrete contour on adapted triangulation, *Calcolo*, **49**, 193–219 (2012).
7. E. F. TORO, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer-Verlag, Berlin (1999).
8. B. ANDREIANOV, F. LAGOUTIÈRE, N. SEGUIN & T. TAKAHASHI, Small solids in an inviscid fluid, *Netw. Heterog. Media*, **5**, 385–404 (2010).
9. M. BACHMANN, P. HELLUY, J. JUNG, H. MATHIS & S. MÜLLER, Random sampling remap for compressible two-phase flows, *Comput. Fluids*, **86**, 275–283 (2013).

La danse des Funam-Bulles : promenades de bulles sur un fil chaud immergé dans un bain.

Alexis Duchesne, Charles Dubois & Hervé Caps

GRASP, Physics Department B5, University of Liège, B-4000 Liège, Belgium.
alexis.duchesne@ulg.ac.be

Résumé. Lorsque l'on chauffe un fil résistif horizontal dans un bain liquide et que l'on dépasse localement la température d'ébullition dudit liquide, des bulles de vapeur vont nucléer à la surface du fil. Les différentes théories présentes dans la littérature prédisent que les bulles générées depuis des sites de nucléation actifs vont grandir puis quitter la surface chauffante en raison des forces d'inertie et de la poussée d'Archimède. Néanmoins, on observe ici un comportement différent : les bulles glissent le long du fil chaud. Dans cette situation, des états inattendus ont pu être observés, allant de la simple translation à la formation d'amas de bulles. Nous avons également remarqué que les bulles pouvaient brusquement changer de sens de déplacement sur le fil et interagir. Enfin, nous proposons une interprétation des phénomènes de maintien de la bulle sur le fil et de déplacement de la bulle en terme d'effets Marangoni.

Abstract. When a horizontal resistive wire is heated up to the boiling point in a subcooled liquid bath, some vapor bubbles will nucleate on the wire surface. Traditional nucleate boiling theory predicts that bubbles generated from active nucleate sites, grow up and depart from the heating surface due to buoyancy and inertia. However, we observed here a different behavior : the bubbles slide along the heated wire. In this situation, unexpected states are observed from the simple sliding motion to bubbles clustering. We noticed that bubbles could rapidly change their moving direction and may also interact. Finally, we propose an interpretation for both the attraction between the bubble and the wire and for the motion of the bubbles on the wire in term of Marangoni effects.

1 Introduction

Lorsque l'on chauffe un fil métallique dans un bain liquide au-delà de son point d'ébullition T_{ebul} , des bulles de vapeur vont naturellement nucléer à la surface du fil. La théorie traditionnelle en matière d'ébullition prédit que les bulles générées depuis un site de nucléation actif vont grossir puis quitter la surface chauffée en raison de la poussée d'Archimède, et ce quelles que soient les conditions de mouillage [1]. Si l'on chauffe davantage le fil, on obtient le phénomène de *film boiling* [2].

Wang et coll. [3,4] ont reporté un scénario différent. Dans un bain d'eau ou d'alcool refroidi, des bulles peuvent glisser le long d'un fil horizontal de platine. D'autres aspects ont également été investigués, en particulier les mécanismes de détachement du fil, de collision et de fusion entre bulles [5], mais aussi de saut [7] ou encore d'oscillation de bulles sur le fil [8]. Des modèles ont été établis pour expliquer le mouvement des bulles [6,9,10]. Ils reposent essentiellement sur la force de Marangoni comme moteur du mouvement. Des simulations numériques ont également été proposées pour démontrer les hypothèses qui sous-tendent à ces modèles [11,12]. Cela étant, très peu de mesures quantitatives ont été effectuées et les études se sont essentiellement concentrées sur des situations de mouillage partiel (alcool ou eau sur platine).

Dans cet article, nous reportons de nouvelles expériences effectuées en situation de mouillage total qui ont donné lieu à l'observation de situations nouvelles en matière de comportement de bulles sur une fibre. Nous avons également cherché à évaluer la pertinence des mécanismes proposés jusqu'à présent, et ce, à l'aide de mesures quantitatives comparées à des lois d'échelles simples. Nous avons principalement cherché à répondre à deux questions :

- (i) Quelles sont les forces qui maintiennent la bulle sur le fil ?
- (ii) Quelles sont les forces susceptibles d'expliquer le mouvement de la bulle sur le fil ?

2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est partiellement représenté sur la figure 1. Un fil résistif est alimenté par un générateur électrique via deux électrodes d'aluminium. Lorsque le courant passe dans le circuit, le fil résistif s'échauffe par effet Joule. Ce dispositif est placé dans un récipient en verre transparent rempli d'huile silicone 1,5 cS, thermalisée en bain-Marie. La température du liquide autour du fil peut ainsi être contrôlée et varie entre 5 et 95 °C.

Le fil chauffant est un fil de constantan de 5 cm de long. Plusieurs diamètres de fils ϕ ont été utilisés, de 0,1 à 1 mm. Le courant délivré varie entre 0 et 64 A et les puissances injectées P peuvent atteindre jusqu'à 240 W. Aux fortes puissances les plus petits fils peuvent brûler. Les images ont été acquises au taux de 1000 images/s via une caméra rapide placée en face du fil.

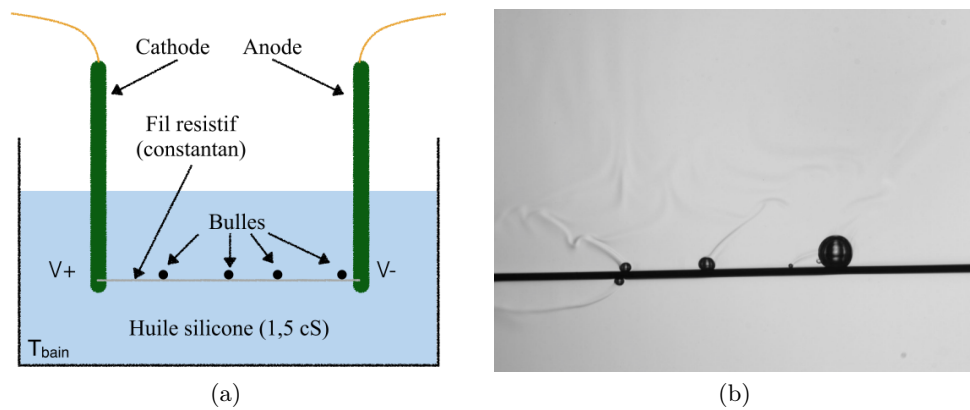


FIGURE 1. (a) Schéma du dispositif expérimental : deux électrodes alimentent un fil résistif de constantan immergé dans un bain d'huile silicone basse viscosité maintenu à T_{bain} . (b) Image de bulles se déplaçant sur le fil, le diamètre du fil ϕ est égal à 200 μm et la puissance injectée P à 15 W.

3 Premières observations

3.1 Régime de mouvement libre

Une fois les bulles apparues sur le fil, elles vont immédiatement et spontanément se mettre à se déplacer sur le fil sans sens préférentiel à une vitesse pouvant atteindre plus de 100 $\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$. Quelques comportements typiques sont mis en lumière sur la figure 2 (a), mais nous invitons le lecteur curieux à consulter la référence [13] pour observer les vidéos de cette expérience. Sur ces images, on remarque qu'un panache thermique dû au changement de densité du liquide chauffé suit chaque bulle. De manière générale, dans ce régime, on peut constater que :

(i) les bulles peuvent se déplacer en dessous et au-dessus du fil, bien que la situation au-dessus reste privilégiée, en raison de la poussée d'Archimède ;

(ii) les bulles interagissent entre elles : lorsqu'elles se rencontrent, elles peuvent fusionner (entre 0,01 s et 0,02 s sur la figure 2(a)) ou rebondir l'une sur l'autre (entre 0,04 s et 0,06 s sur la figure 2(a)) ;

(iii) on observe une gamme de tailles de bulles allant de la limite de la résolution de la caméra à des rayons de l'ordre du millimètre. Les bulles peuvent voir leur volume augmenter soit par évaporation soit lors de fusions. On observe que la vitesse des bulles ne dépend pas, en première approximation, de leur volume. Au-delà d'un rayon critique R_{max} , les bulles quittent le fil en raison de la poussée d'Archimède.

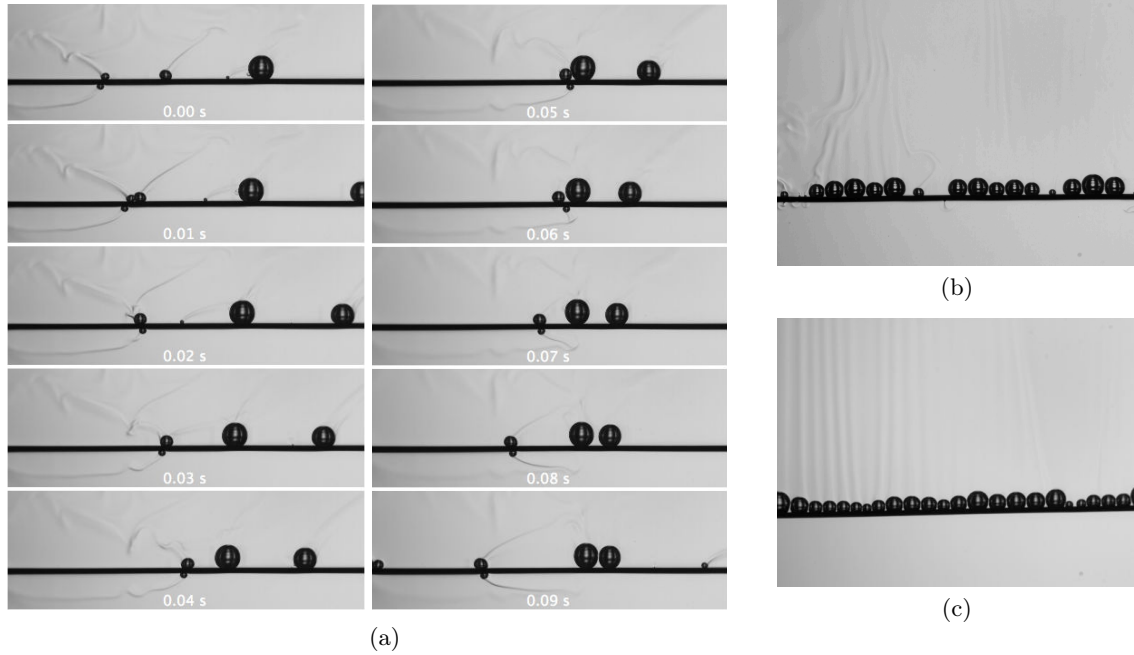


FIGURE 2. (a) Déplacement de bulles à la surface d'un fil chauffé ($\phi = 200 \mu\text{m}$, $P = 15 \text{ W}$ et $T_{\text{bain}} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$). Les images sont séparées de 0,01 s. On peut en particulier observer une fusion entre 0,01 et 0,02 s et un rebond entre 0,04 et 0,06 s. (b) Régime d'amas pour un fil de même diamètre, $P = 17,5 \text{ W}$. La taille typique d'un amas est 5 bulles et des bulles circulent entre ces amas. (c) Les amas de bulles ont envahi toute la largeur du fil (même diamètre et $P = 20 \text{ W}$).

3.2 Régime d'amas

Au milieu de ce régime de mouvement libre de bulles, on constate un phénomène inattendu : l'apparition d'amas immobiles de 3 ou 4 bulles. Il s'agit généralement d'assez grosses bulles ($\sim 0,5 \text{ mm}$). Des bulles, souvent plus petites, continuent à circuler entre ces amas. Cette situation est décrite sur la figure 2 (b).

En observant plus finement ce phénomène, on constate que, à ϕ fixé, lorsque l'on augmente P par rapport à la puissance d'apparition P_a dudit phénomène, les amas vont grossir en nombre de bulles et donc s'allonger le long du fil jusqu'à ce qu'un unique amas couvre toute la longueur du fil, comme illustré sur la figure 2 (c). Si l'on continue à augmenter P l'amas unique se disloque, laissant la place à de plus petits amas dont la taille va réduire à mesure que P augmente.

Une fois les amas disparus, on retrouve le régime de mouvement libre. On notera que l'encombrement sur le fil est, dès lors, plus important que pour les puissances situées avant ce régime d'amas, comme illustré sur la figure 3 (c).

3.3 État de *film boiling*

Aux fortes valeurs de puissance P , on peut observer une situation de *film boiling*, c'est-à-dire que le fil chauffant est entouré d'un film de vapeur l'isolant du liquide. Ce film de vapeur va ensuite se déstabiliser via l'instabilité de Rayleigh–Taylor en faisant apparaître une longueur d'onde bien déterminée [2]. La forme de l'instabilité du film de gaz dépend du diamètre du fil : pour de petits diamètres on aura un régime de « perles » (Fig. 3 (e)) tandis que les grands diamètres présentent plutôt des formes de « méduses » (Fig. 3 (d)).

3.4 Diagramme de phase

Il est possible de reporter toutes les informations pré-citées sur un diagramme de phases figurant le diamètre du fil ϕ et la puissance de chauffage P . Un tel diagramme est représenté sur la figure 3. On peut constater que, dans la gamme de puissance testée, on n'observe jamais d'amas pour un fil d'un diamètre $\phi = 1$ mm.

Les mesures représentées sur le diagramme ont été répétées plusieurs fois et deux récipients de dimensions différentes ont été utilisés. On a donc pu vérifier que nos résultats concernant les régimes de mouvement libre et d'amas sont bien reproductibles, que les transitions ne sont pas hystérétiques et que les mécanismes physiques impliqués dans ces régimes sont bien localisés autour du fil.

Ce n'est pas le cas pour le régime de *film boiling*, où l'on a observé une dépendance à la taille du récipient utilisé et du système de fixation du fil. En outre, la transition vers ce régime est profondément hystérétique. Nous n'avons donc pas fait figurer sur notre diagramme cette transition et avons seulement indiqué par une ligne pointillée la limite au-delà de laquelle nous avons observé des phénomènes de *film boiling*.

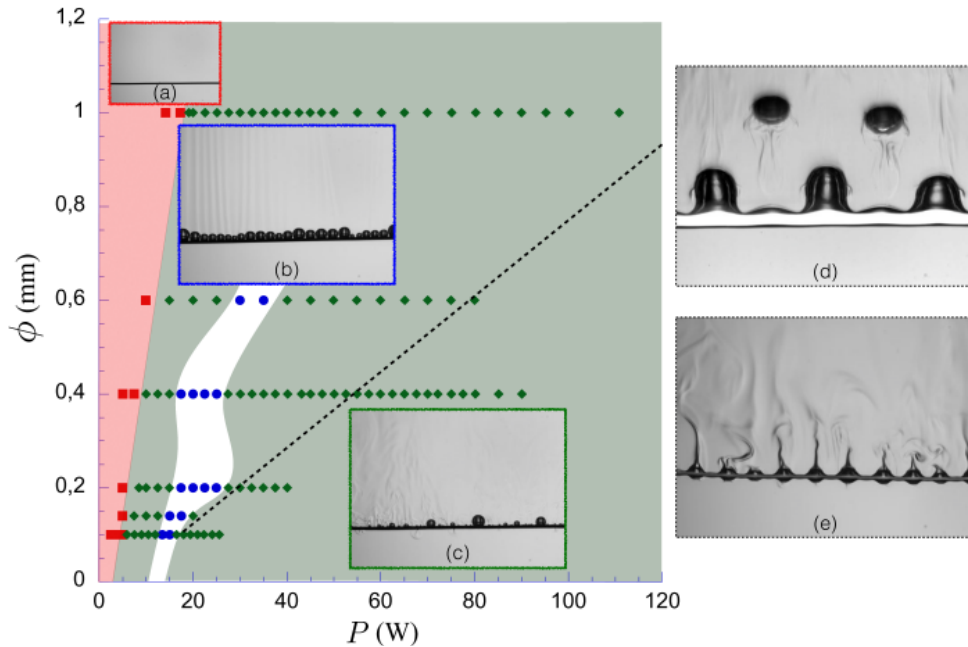


FIGURE 3. Diagramme de phases figurant le diamètre du fil ϕ et la puissance de chauffage P . Les carrés rouges représentent la situation sans bulles (chauffage insuffisant), les losanges verts un régime de mouvement de bulles et les cercles bleus traduisent la présence d'amas de bulles sur le fil. La ligne pointillée indique la limite au-delà de laquelle on peut observer un régime de *film boiling*. (a) $\phi = 0,2$ mm, $P < 10$ W. (b) $\phi = 0,2$ mm, $P = 20$ W. (c) $\phi = 0,2$ mm, $P = 30$ W. (d) $\phi = 0,6$ mm, $P = 90$ W. (e) $\phi = 0,2$ mm, $P = 45$ W.

4 Attraction entre la bulle et le fil

On peut légitimement se demander quelle est la force qui permet de maintenir la bulle sur le fil. En effet, l'huile silicone mouillant totalement le fil métallique, la bulle n'est pas en contact avec celui-ci. Cela est observable dans les travaux de Lu et Peng [7]. Pour autant, la bulle est bien soumise à la poussée d'Archimède qui pousse à son décollement.

Lu et Peng expliquent les sauts d'une bulle par l'action des forces de Marangoni et d'Archimède [7]. Nous proposons, ici, de généraliser cette approche pour expliquer le maintien de la bulle sur le fil. En

effet, le bas de la bulle est proche du fil, il est donc à une température proche de T_{ebul} tandis que le haut de la bulle est bien au-delà de la couche limite thermique et donc à une température proche de T_{bain} . Comme décrit dans la littérature [14–16], cette différence de température engendre une différence de tension de surface qui a pour effet de générer des écoulements autour de la bulle. Ces derniers sont à l’origine d’une surpression qui s’oppose à la poussée d’Archimède.

Nous proposons, en conséquence, de modéliser les bulles de notre expérience, par des sphères de gaz de rayon R soumises à un gradient de température $G = T_{\text{ebul}} - T_{\text{bain}}$. Les données du problème sont représentées sur un schéma explicatif sur la figure 4 (a).

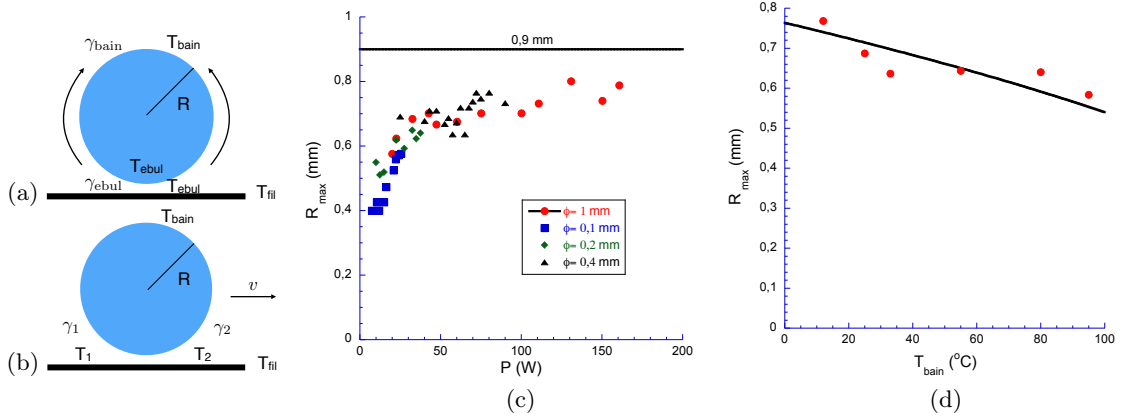


FIGURE 4. (a) Schéma de principe de l’attraction de la bulle par le fil : la différence de température entre le bas et le haut de la bulle induit un effet Marangoni. (b) Schéma de principe du déplacement de la bulle par le fil : une différence de température entre l’avant et l’arrière de la bulle provoque un effet Marangoni moteur. (c) R_{max} en fonction de la puissance injectée pour $\phi = 0,1$ mm (carrés bleus) ; $0,2$ mm (losanges verts) ; $0,4$ mm (triangles noirs) et 1 mm (disques rouges). $T_{\text{bain}} = 25$ °C. La ligne noire indique la valeur attendue par l’équation (2). (d) Évolution de R_{max} en fonction de T_{bain} . $\phi = 0,4$ mm et $P = 55$ W. La ligne droite est un ajustement des données expérimentales par une loi en $\sqrt{T_{\text{ebul}} - T_{\text{bain}}}$.

D’après la loi établie par Hardy [16] la vitesse d’ascension d’une bulle d’air dans un gradient de température est donnée par :

$$v = \frac{1}{3\mu} \left(\rho_{\text{liq}} g R^2 - \frac{3}{2} \gamma' R G \right), \quad (1)$$

où μ est la viscosité dynamique, ρ_{liq} la masse volumique du liquide, g l’accélération gravifique et $\gamma' = d\gamma/dT$. La loi décrivant la taille maximale R_{max} des bulles sur le fil est donc donnée par $v = 0$ soit :

$$R_{\text{max}} = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{\gamma' (T_{\text{ebul}} - T_{\text{bain}})}{\rho_{\text{liq}} g}}. \quad (2)$$

Cette loi peut bien sûr être testée expérimentalement et on s’attend à trouver $R_{\text{max}} \approx 0,9$ mm à $T_{\text{bain}} = 25$ °C, considérant $T_{\text{ebul}} = 200$ °C. Cette estimation est comparée aux valeurs expérimentales sur la figure 4(c). Nous avons également fait varier la température du bain T_{bain} sur la figure 4(d) et comparé les résultats de nos expériences à la tendance en racine attendue.

Sur la figure 4(c), on peut constater que l’accord en ordre de grandeur avec (2) est tout à fait satisfaisant. On observe, en outre, que tous les points s’ajustent sur une même courbe maîtresse, indépendante du diamètre du fil. Le plateau observé autour de $0,75$ millimètre pour les grandes valeurs de puissance tend à nous conforter dans notre modèle. En effet, c’est pour les fortes valeurs de puissance et pour les fils épais que l’expérience s’approche le plus du modèle-jouet proposé : c’est-à-dire une sphère dans un gradient de température sans composante horizontale.

Sur la figure 4(d), où l'on s'intéresse au comportement de R_{\max} en $\sqrt{T_{\text{ebul}} - T_{\text{bain}}}$, on observe, à diamètre de fil et puissance donnés, un accord raisonnable avec la tendance attendue. Toutefois la gamme de température semble un peu faible pour conclure définitivement sur la validité de l'équation (2).

5 Mouvement de la bulle

On peut également se poser la question du mouvement de la bulle sur le fil. Wang et coll. proposent une explication pour ce phénomène dans [9]. L'idée est que si une bulle est mise en mouvement par une petite perturbation, la couche limite thermique derrière elle sera mélangée au liquide environnant. La température T_1 à l'arrière de la bulle sera donc légèrement plus faible que celle de la région avant de la bulle où la couche limite thermique est restée intacte (température T_2). Un schéma récapitule ces éléments sur la figure 4(b). On induit ainsi une différence de température qui génère elle-même une différence de tension de surface. Cette différence de tension de surface sera à l'origine d'écoulements de Marangoni qui joueront un rôle moteur de propulsion de la bulle.

Nous avons cherché à vérifier, dans notre situation, cette hypothèse. Nous avons donc équilibré d'une part la force de Marangoni et d'autre part les forces de frottements (principalement inertiaux). En raisonnant en ordre de grandeur et en laissant pour inconnu $\Delta T = T_2 - T_1$, nous avons obtenu des ΔT de l'ordre de 5 °C pour les vitesses typiques observées dans nos expériences. Le mécanisme proposé semble donc être un candidat crédible pour expliquer ce phénomène de déplacement.

6 Conclusion

Dans le présent article, nous avons pu mettre en évidence les différents régimes qui surviennent lors de l'ébullition autour d'un fil résistif plongé dans un bain d'huile silicone : les bulles se déplacent le long du fil, interagissent entre elles et peuvent s'agréger en amas. Nous avons proposé une interprétation des phénomènes d'attraction entre bulle et fil et de déplacement sur le fil en terme d'effets Marangoni. La comparaison de modèles simples et de nos données expérimentales tend à valider notre compréhension des mécanismes en jeu.

Remerciements : Les auteurs remercient l'Université de Liège pour son support financier à ces travaux via l'ARC Supercool. Nous remercions également Médéric Mélard et Samuel Rondia de l'atelier du département de physique de l'Université de Liège pour leur assistance technique.

Références

1. E. HAHNE & U. GRIGULL, *Heat transfer in boiling*, Hemisphere Publ. Corp., Washington, USA (1977).
2. J. H. LIENHARD & P. T. Y. WONG, *J. Heat Transfer*, **86**, 220–225 (1964).
3. H. WANG, X. F. PENG, B. X. WANG & D. J. LEE, *Int. J. Heat Mass Tran.*, **46**, 863–869 (2003).
4. H. WANG, X. F. PENG, B. X. WANG W. K. LIN & C. PAN, *Exp. Heat Transfer*, **18**, 1–11 (2005).
5. J. F. LU & X. F. PENG, *Int. J. Heat Mass Tran.*, **48**, 4726–4737 (2005).
6. J. F. LU & X. F. PENG, *Int. J. Heat Mass Tran.*, **49**, 2337–2346 (2006).
7. J. F. LU & X. F. PENG, *Int. J. Heat Mass Tran.*, **45**, 908–916 (2006).
8. J. F. LU & X. F. PENG, *Int. J. Heat Mass Tran.*, **51**, 4461–4469 (2008).
9. H. WANG, X. F. PENG, B. X. WANG & D. J. LEE, *Sci. China Ser. E*, **46**, 225–233 (2003).
10. D. M. CHRISTOPHER, H. WANG & X. F. PENG, *J. Heat Transfer*, **127**, 1260–1268 (2005).
11. D. M. CHRISTOPHER, H. WANG & X. F. PENG, *Int. J. Heat Mass Tran.*, **49**, 3626–3633 (2006).
12. D. M. CHRISTOPHER & J. JIANG, *Int. J. Heat Mass Tran.*, **52**, 5020–5028 (2009).
13. A. DUCHESNE, C. DUBOIS & H. CAPS, *Gallery of Fluid Motion*, APS/DFD (2015).
<http://gfm.aps.org/meetings/dfd-2015/55e5c6c169702d060d760000>
14. N. O. YOUNG, J. S. GOLDSTEIN & M. J. BLOCK, *J. Fluid Mech.*, **6**, 350–356 (1959).
15. J. F. HARPER, D. W. MOORE YOUNG & J. R. A. PEARSON, *J. Fluid Mech.*, **27**, 361–366 (1967).
16. S. C. HARDY, *J. Colloid Interf. Sci.*, **69**, 157–162 (1979).

Cavitation wave propagation: A coupled vibrations model

Ali El Amri¹, Yann Bouret², Xavier Noblin² & Médéric Argentina¹

¹ Institut Non Linéaire de Nice 1361 route des Lucioles Sophia Antipolis F-06560 Valbonne, FRANCE

² Laboratoire de Physique de la Matière Condensée CNRS UMR 7336 Université de Nice-Sophia Antipolis Parc Valrose 06108 Nice cedex 2

ali.el_amri@inln.cnrs.fr

Résumé. La propagation d'une onde de cavitation a été mise en évidence à la fois dans le mécanisme d'éjection des spores de fougère (système 1D) et aussi dans un dispositif expérimental biomimétique fait d'hydrogel (système 2D). Tous deux sont des systèmes avec de l'eau sous-tension, il n'y a pas de *collapse* de bulles. Par onde de cavitation, nous décrivons que l'apparition d'une première bulle de cavitation crée d'autres bulles de cavitation qui à leur tour recréent de nouvelles bulles, un peu comme une réaction en chaîne. Ces créations de bulles se font dans des temps bien plus petits que le temps caractéristique d'apparition de la première bulle. Dans cet article nous proposons un modèle pour la propagation d'une onde de cavitation avec deux microcavités. Après un temps caractéristique de quelques millisecondes, une bulle de cavitation apparaît dans l'une des deux microcavités. Cette bulle vibre autour de sa position d'équilibre et induit une variation de la pression dans la deuxième microcavité par l'intermédiaire de la paroi de séparation qui est déformable. En substance, ces deux sous-systèmes se couplent et permettent d'augmenter la probabilité de nucléation dans la deuxième microcavité. Nous montrerons, grâce à des résultats numériques et analytiques, quels sont les paramètres de contrôle de la propagation.

Abstract. The propagation of a cavitation wave has been demonstrated in the ejection mechanism of the fern spores (1D system) in a biomimetic experimental fact hydrogel (2D system), as well. Both are systems with water under voltage, there is no bubble collapse. By wave cavitation we describe that the appearance of a first cavitation bubble creates other cavitation bubbles which in turn recreate new bubbles, a bit like a chain reaction. These bubble creations are made in a much smaller time than the characteristic time of onset of the first bubble. In this paper we propose a model for the propagation of a cavitation wave with two microcavities. After a characteristic time of a few millisecond, a cavitation bubble appears in one of the two microcavities. This bubble vibrates around its equilibrium position and does induce the pressure variation in the second microcavity through the separative wall which is deformable. In essence, these two subsystems are coupled and can increase the probability of nucleation in the second microcavity. We will show, through numerical and analytical results, what are the propagation control parameters.

Introduction

The cavitation is a widespread phenomenon. For example in hydronautics, we can observe its occurrence near boat propellers. Following Bernoulli Principle, as the velocity increases, the pressure goes down. This pressure might reach values lower than the saturation vapor pressure, and provokes a bubble nucleation [1]. The bubble created eventually implodes near the surface of the propellers, which results in damaging the surface. Cavitation bubbles can also appear in trees. Indeed, the water climbs up from roots to leaves, by capillarity. But inside the tree vessels, the pressure reaches very high negative values, and cavitation bubbles might appear and embolize the vessels [2]. In both cases, the cavitation might be interpreted as a disadvantage. Nevertheless, in some cases, cavitation can be useful. For example in ferns, the plant uses the cavitation mechanism to eject its spores [3]. All the spores are contained into the sporangia. Each sporangium is composed by a beam itself divided into several microcavities, filled with water (see Fig. 1 (a)). The liquid can evaporate, and during its evaporation the liquid pressure decreases, until it reaches negative pressure. At some point, many cavitation bubbles are created, each of them in a microcavity. The observation showed that a bubble which appears by spontaneous nucleation provokes the creation of all the others cavitation bubbles (see Fig. 1 (b)) [3].

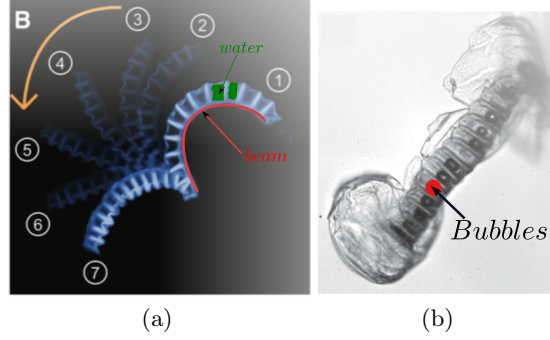


Figure 1. (a) The sporangium of *Polypodium aureum*. The annulus act as a beam in red. In (1), this beam is composed by several microcavited filled by water (in green). When the water goes throughout the microcavities, the annulus bend until its curvature changes from (2) to (7) [5]. (b) One sporangium with bubbles inside the microcavities [3].

Additionally, in order to understand this phenomenon, biomimetic experiments have been performed [3, 4]. A 2D system made by microfabrication in hydrogel, is created with many microcavities filled with water. Water evaporates from this device, and like the fern, the evaporation yields the decrease of the liquid pressure, until a bubble is created. Unlike the fern, we can explore the effect of the geometry (dimension of the microcavities, separation) on the cavitation wave. In the experiments the wall separation thickness between two consecutive microcavities has been varied. Three different behaviors has been uncovered during the M. Pellegrin PhD thesis, depending on the thickness separation of consecutive cavities [4]:

- (i) If the thickness is large in both directions, propagations are scarce.
- (ii) If the wall is sufficiently thin in only one direction, there is propagation along the more thinnest wall direction.
- (iii) Finally, if the walls are thin, the propagation occurs in both directions, resulting in the creation of bubble clusters.

The general homogeneous nucleation theory gives a radius threshold from which a cavitation bubble can be created. We denote

$$R_c = \frac{2\gamma}{(P_V - P_L)} \quad (1)$$

the radius threshold with γ the surface tension, P_V the gas pressure inside the bubble and P_L the liquid pressure. Nevertheless this theory assumes that the nucleation domain is an infinite volume of liquid. As confined water is used in microcavities, the fluid volume is small and then the compressibility needs to be carefully addressed. This confinement saturates the free energy and selects an equilibrium state. After the nucleation, the bubble oscillates around its equilibrium value at a given frequency [6, 7]. This vibration changes the liquid pressure in the compartment of the bubble and increases temporally the nucleation probability in the neighboring microcavities. We try to understand how a bubble created by a spontaneous nucleation can create other bubbles in its vicinity, which in turn create other, in a chain-like fashion.

We explain in this article how the oscillation of the bubble might induce the vibration of the separative membrane [8]. We will consider the coupling of the bubble and the wall separation vibrations. We begin with modeling the coupling of the bubble, the cavitation, and the wall separation. We study the bubble oscillation frequency and the equilibrium radius, then we propose a fit of the numerics which we compare with a analytical result.

1 Coupling of the bubble and of the separation membrane

We propose a theoretical model for the cavitation wave propagation. In order to model the biomimetic experiment, we investigate the simplest case with two coupled microcavities. We suppose that these two microcavities have the same geometry, which is showed in Fig. 2.

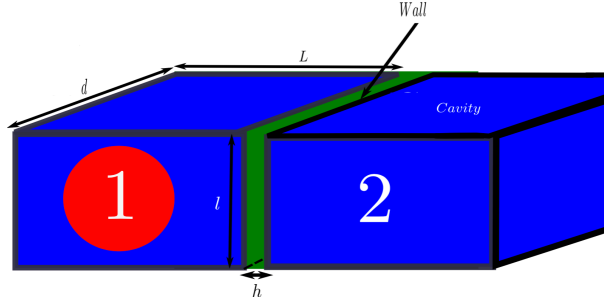


Figure 2. Two neighbors microcavities in 1D representation. The bubble of vapor is the red circle in the microcavity 1 and the liquid water is in blue in both microcavities.

The cavity containment wall are assumed to be rigid, with the exception of the shared wall which is deformable. In this model, we suppose that the bubble is located in the center of the microcavity 1. We did some hypothesis: (i) The vapor pressure is constant throughout the transformation. (ii) The vapor behaves like an ideal gas. For the liquid we use the ideal fluid equation state:

$$P_L = P_V + \frac{1}{\psi} (\rho - \rho_L^*),$$

where the reference pressure is the saturated vapor pressure P_V , ρ the liquid density, ρ_L^* the corresponding liquid density at the saturated vapor pressure, ψ the compressibility. (iii) At the beginning the liquid pressure is equal to $P_1 = -20$ MPa as measured in experiments.

The radius evolution is described by a Rayleigh-Plesset-like equation. In our case, the density and pressure depend on the time, because the fluid is compressible. Indeed, as it was observed in the experiment, the bubble expansion characteristic speed is smaller than the sound velocity $u^* \ll c$:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 - \frac{1}{\rho(t)} \left(P_V - P_1(t) - 4\eta\frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\gamma}{R} \right) = 0, \quad (2)$$

with R is the bubble radius, P_1 is the liquid pressure of microcavity 1, η is the water viscosity, γ is the surface tension.

The bubble vibration induces pressure changes in the liquid and results in the movement of the separation wall. Its deformation is noted ζ_1 . We assume that the dynamic of the wall is given by a beams equation, forced by the pressure difference between the two microcavities. In this case, the most general equation is: [9]

$$-D\Delta^2\zeta_1 + \rho_w h \partial_t^2 \zeta_1 - (P_1(t) - P_2(t)) = 0, \quad (3)$$

with $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ is the flexural rigidity of the plate, ρ_w is the density of the biomimetic hydrogel, h is the separative wall thickness (see Fig. 2) and, P_2 is the liquid pressure of the microcavity 2.

The pressure of the liquid in the microcavity 1 depends on the radius of the bubble and the deformation of the membrane, while the pressure of the second microcavity, P_2 , only depends on the deformation of the membrane.

In order to keep the system as simple as possible, we consider only one mode of deformation for the wall,

$$\zeta_1(x, y, z, t) = \zeta(t) \sin \frac{\pi}{d}x \sin \frac{\pi}{l}z,$$

which simplifies Eq. (3) into:

$$\partial_t^2 \zeta + \omega_w^2 \zeta = \frac{P_1(t) - P_2(t)}{\rho_w h} \quad (4)$$

with $\omega_w = \sqrt{\frac{D}{\rho_w h} \left(\frac{\pi^2 (d^2 + l^2)}{d^2 l^2} \right)^2}$ the natural vibrating frequency of the wall.

2 Numerical equation solution

The dynamics of the two coupled microcavities:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 - \frac{1}{\rho(t)} \left(P_v - P_1(t) - 4\eta \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\gamma}{R} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\partial_t^2 \zeta + \omega_w^2 \zeta - \frac{P_1(t) - P_2(t)}{\rho_w h} = 0. \quad (6)$$

In this proceeding, we consider the conservative case, and we neglect the viscosity of the water and the dissipative term in the equation of vibration of the plate. This system presents stable stationary equilibrium $R = R_{\text{eq}}$ and $\zeta = \zeta_{\text{eq}}$:

$$R_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{V_{\text{cav}} \rho_l^* - m_0}{\rho_l^* - \rho_{\text{ig}}} \right)^{1/3} - \frac{2}{3} \frac{\gamma \psi_1}{\rho_l^* - \rho_{\text{ig}}} \frac{m_0 - \rho_{\text{ig}} V_{\text{cav}}}{\rho_l^* V_{\text{cav}} - m_0}, \quad (7)$$

with $\rho_{\text{ig}} = \frac{P_v M}{R_{\text{ig}} T}$ the ideal gaz density where T is the temperature of the system, M the molar mass of water and R_{ig} the ideal gas constant, $V_{\text{cav}} = L \times l \times d$ the microcavity volume, m_0 the initial mass of water into the microcavity at the initial pressure P_1 . Near to the equilibrium $R \gg R_c$ and then we can neglect the part of equation related with the surface tension.

The initial conditions are: $R(0) = R_0$ the initial radius of the bubble, $R_c < R_0 < R_{\text{eq}}$, where R_c the critical radius and R_{eq} the equilibrium radius respectively. $\dot{R}(0) = v_0$ a initial velocity is chosen in such a way as not to raise too much kinetic energy and cause the disappearance of this initial germ. The initial speed and deformation are both made zero.

To simplify the system, we perform a non-dimensional procedure: we define the new non-dimensional radius regarding $R = R_{\text{eq}} r$, while the non-dimensional time is define regarding the bubble vibration frequency $s = \omega_s t$,

$$\omega_s = \frac{1}{R_{\text{eq}}} \sqrt{\frac{1}{\psi_1} \frac{\rho_{\text{ig}}}{\rho_{\text{L,eq}}}}, \quad (8)$$

where $\rho_{\text{L,eq}}$ is the liquid density at equilibrium and the non-dimensional deformation depends on the biggest microcavity length $\zeta = \frac{\pi^2}{4} Lz$. We numerically solve the system (5) and (6). We show in Fig. 3, the temporal evolution of the bubble and in Fig. 4, the dynamics of the wall displacement where $R_0 = 3 \times 10^{-7}$ m and $v_0 = 111.1$ m · s⁻¹.

In Fig. 4, we can note that the deformation becomes slightly negative near $s \sim 0.5$. This indicates that the coupling of the vibration of the bubble and the separation membrane, results in setting temporally

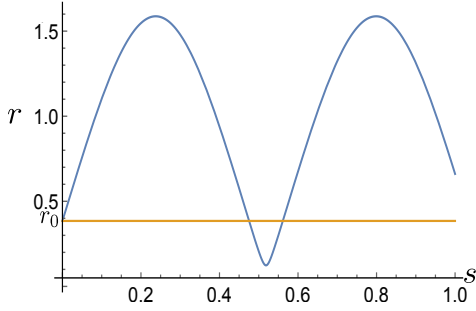


Figure 3. Temporal evolution of the non dimensional radius of the bubble.

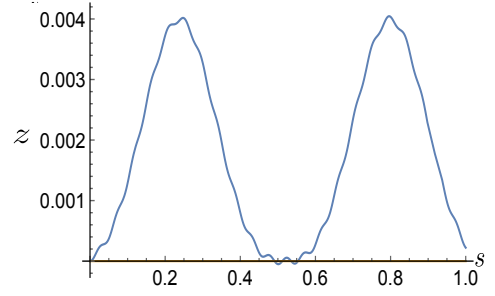


Figure 4. Temporal evolution of the non dimensional deformation of the separative wall.

the cavity 2 in high tension. The displacement of the membrane will further decrease the pressure in this microcavity 2. Following the homogenous nucleation theory (Eq. (1)) the nucleation probability increases in the cavity 2. In Fig. 4 we note that the wall deformation ζ exhibits two times scales: the first one is related to the bubble dynamics, whereas the second one is related to the wall vibration. The latter, which is much smaller yields a negative displacement near $s \approx 0.5$.

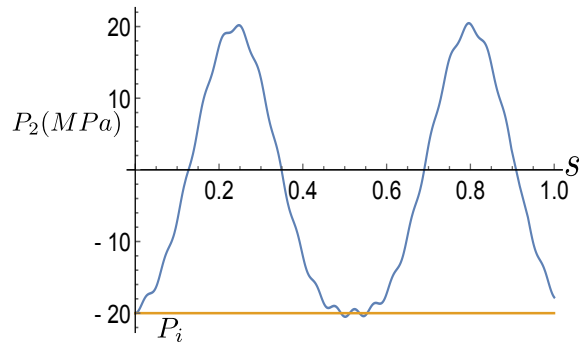


Figure 5. Microcavity 2 pressure P_2 , versus dimensionless time. At $s \sim 0.5$, the fastest oscillation of the pressure passes below the initial pressure P_i .

Fig. 5(a) and Fig. 6(a) show that the pressure P_2 might reach values below the initial pressure. Nevertheless, the difference between the pressure reached and the initial pressure is very small. We wondered how this small difference could have an effect on the nucleation probability. Following the homogenous nucleation theory, the probability per unit of time and unit of fluid volume at pressure P to create a bubble reads

$$\lambda(P) \propto \exp \left[-\frac{16\pi\gamma^3}{3k_B T} \left(\frac{1}{(P - P_v)^2} \right) \right],$$

where γ is the surface tension, k_B is the Boltzmann constant and T the temperature.

Let $\mathcal{R}(t)$ be the ratio of the probability to nucleate at pressure P_2 , over the probability to nucleate at pressure P_1 :

$$\mathcal{R}(t) = \frac{\lambda(P_2(t))}{\lambda(P_1)}. \quad (9)$$

$\mathcal{R}(s)$ presents two peaks which are related to domains where $P_2 < P_1$. On Fig. 6(b), we note that, even if the pressure difference is very small, it has a tremendous influence on the probability of nucleation

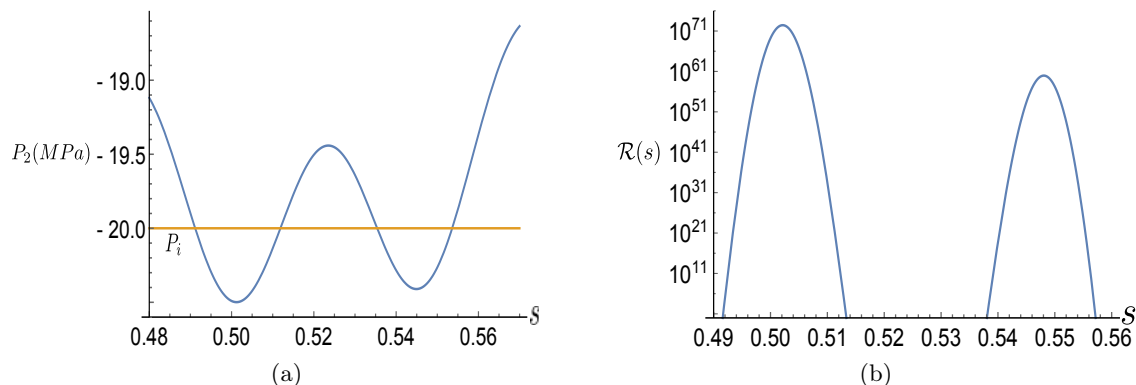


Figure 6. (a) Zoom of the pressure around $s = 0.5$ in order to observe the pressure becoming smaller than the initial pressure. (b) Plot of the function $\mathcal{R}(s)$ in function of time when $P_2 < P_1$. We note that for this initial condition the probability increases. The probability to nucleate at P_2 becomes 10^{70} times more greater than the probability at P_1 . We take $R_0 = 3 \times 10^{-7}$ m.

pressure to P_2 . So the coupling of the bubble oscillation with the wall vibration allows to increase the probability to nucleate in the microcavity without bubble. We may say that we have a propagation of a cavitation wave because the coupling of two systems which vibrate and then which are a source of wave emission, make more likely the creation of the bubble.

Conclusion

In this article we proposed a model that takes into account the coupling of two subsystems. With this coupling we found that the probability of nucleation of a bubble increases at the neighbor microcavity have cavitated. The condition is to impose an initial rate of expansion on the bubble; if the velocity is zero the membrane does not move. We should fit the numerical result to be able to know the minimum of the pressure P_2 , and compare it with the initial pressure P_1 . Moreover, although we impose an initial velocity for the bubble we remarked that it is not a sufficient condition to have the formation of a cavitation bubble. With the fitted expression we could understand the reason of this observation.

References

1. J. FRANC, F. AVELLAN, B. BELAHADJI, J. BILLARD, L. BRIANÇON-MARJOLLET, D. FR'ÉCHOU, D. FRUMAN, A. KARIMI, J. KUENY & J. MICHEL, *La cavitation. Mécanismes physiques et Aspects industriels*, Presses Universitaires de Grenoble (1995).
2. H. COCHARD, Cavitation in tree, *C. R. Phys.*, **7**, 1018–1026 (2006).
3. X. NOBLIN *et al.*, Cavitation avalanches in natural and artificial cellular systems, to be submitted.
4. M. PELLEGRIN, *Nucléation et dynamique de bulles de cavitation dans des liquides confinés sous tension : expériences dans des systèmes microfabriqués et simulations de la dynamique moléculaire*, PhD Thesis, Nice (2015).
5. X. NOBLIN, N. O. ROJAS, J. WESTBROOK, C. LLORENS, M. ARGENTINA & J. DUMAIS, The fern sporangium: a unique catapult, *Science*, **335**, 1322–1322 (2012).
6. O. VINCENT, *Dynamique de bulle de cavitation dans de l'eau micro-confinée sous tension*, PhD Thesis, Université de Grenoble (2012).
7. O. VINCENT, P. MARMOTTANT & K. ANDO, The fast dynamics of cavitation bubbles within water confined in elastics solids, *Soft Matt.*, **10**, 1455–1458 (2013).
8. E. H. MANSFIELD, *The bending and stretching of plates*, Cambridge University Press (1989).
9. L. D. LANDAU & E. M. LIFSHITZ, *Course of Theoretical Physics, Vol. 7: Theory of Elasticity*, Pergamon Press (1959).

Un modèle heuristique de particule étendue compatible avec la mécanique quantique

Michel Gondran¹ & Alexandre Gondran²

¹ University Paris Dauphine, Lamsade, 75016 Paris, France

² École Nationale de l'Aviation Civile, 31000 Toulouse, France

michel.gondran@polytechnique.org

Résumé. Nous proposons un modèle non ponctuel de particule en dimension 2 : la particule étendue est représentée par quatre points qui définissent la structure d'une petite corde élastique qui vibre, en alternant entre un processus de création et un processus d'annihilation.

Nous montrons d'abord comment le spin et les relations d'incertitude d'Heisenberg émergent de cette particule étendue. Nous montrons ensuite comment l'action complexe, associée à cette particule étendue, vérifie, à partir d'un principe de moindre action généralisé, une équation d'Hamilton–Jacobi complexe du second ordre. Alors la fonction, qui admet cette action comme une phase complexe, vérifie l'équation de Schrödinger. Finalement, nous montrons que le centre de gravité de cette particule étendue suit une trajectoire de de Broglie–Bohm.

Ce modèle est construit sur deux concepts mathématiques nouveaux : une mécanique analytique complexe généralisant l'analyse non linéaire MinPlus que nous avons introduite [1, 2] à la suite de Maslov [3] et les processus déterministes périodiques que nous avons développés [4, 5].

Abstract. We propose an extended particle model whose evolution is deterministic. In dimension 2, the extended particle is represented by four points that define a small elastic string that vibrates, alternating between a creation process and an annihilation process.

First we show how the spin and the Heisenberg uncertainty relations emerge from this extended particle. We then show how the complex action associated with this extended particle satisfies, from a generalized principle of least action, a second order complex Hamilton–Jacobi equation. Third, we show that the wave function, which admits this action as a complex phase, satisfies the Schrödinger equation. Finally, we show that the gravity center of this extended particle follows the trajectories proposed by the de Broglie–Bohm interpretation.

This model is built on two new mathematical concepts : complex analytical mechanics on complex-valued functions, which we have introduced [1, 2] following Maslov [3], and a periodic deterministic process, which we have developed [4, 5].

1 Un modèle de particule étendue et sa trajectoire

Dans un repère orthonormé de l'espace \mathbb{R}^2 , considérons les quatre sommets $u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ du carré unité. Il existe deux permutations circulaires de ces quatre sommets, l'une s^+ dans le sens des aiguilles d'une montre, l'autre s^- dans le sens inverse. On a pour chacune de ces deux permutations $s \in S = \{s^+, s^-\}$ et pour tout $j = 1, \dots, 4$, $s^4 u^j = u^j$.

On considère une particule étendue représentée par quatre points. Pour tout pas de temps $\varepsilon > 0$ et à chacune des deux permutations $s \in S$, l'évolution de ces quatre points, au temps $t = n\varepsilon$ avec $n = 4q + r$ (n , q , r entiers et $0 \leq r \leq 3$), est définie par la partie réelle des 4 processus discrets $Z_\varepsilon^j(t) \in \mathbb{C}^2$ ($j = 1, \dots, 4$) suivants :

$$Z_\varepsilon^j(n\varepsilon) = Z_\varepsilon^j((n-1)\varepsilon) + \mathcal{V}(4q\varepsilon)\varepsilon + \gamma(s^n u^j - s^{n-1} u^j), \quad (1)$$

$$Z_\varepsilon^j(0) = Z_0 \quad \text{pour tout } j, \quad (2)$$

où $\gamma = (1 + i)\sqrt{\frac{\hbar\varepsilon}{4m}}$, $\mathcal{V}(t)$ correspond à une fonction complexe continue, \hbar est la constante de Planck, m la masse de la particule, et Z_0 est un vecteur donné de \mathbb{C}^2 .

Soit $\widetilde{Z}_\varepsilon(t)$ la solution dans \mathbb{C}^2 du système discret défini à l'instant $t = n\varepsilon$ avec $n = 4q + r$ (n , q et r entiers et $0 \leq r \leq 3$) par :

$$\widetilde{Z}_\varepsilon(n\varepsilon) = \widetilde{Z}_\varepsilon(n\varepsilon - \varepsilon) + \mathcal{V}(4q\varepsilon)\varepsilon, \quad (3)$$

$$\widetilde{Z}_\varepsilon(0) = Z_0. \quad (4)$$

On vérifie alors par récurrence que l'on a en tout instant $t = n\varepsilon$:

$$Z_\varepsilon^j(n\varepsilon) = \widetilde{Z}_\varepsilon(n\varepsilon) + (1+i)\sqrt{\frac{\hbar\varepsilon}{4m}}(s^n u^j - u^j). \quad (5)$$

Comme $s^4 u^j = u^j$, on déduit de (5) que $Z_\varepsilon^j(4q\varepsilon) = \widetilde{Z}_\varepsilon(4q\varepsilon)$ pour tout j .

Comme $\sum_{j=1}^4 s^n u^j = 0$, on déduit de (1) que le processus $\widetilde{Z}_\varepsilon(t)$ correspond à la moyenne des quatre processus $Z_\varepsilon^j(t)$. Sa partie réelle $\widetilde{X}_\varepsilon(t)$ peut être interprétée comme la position moyenne de la particule. La position $X_\varepsilon^j(t)$ de chaque point $j = 1, \dots, 4$, partie réelle du processus $Z_\varepsilon^j(t)$, vérifie l'équation :

$$X_\varepsilon^j(n\varepsilon) = \widetilde{X}_\varepsilon(n\varepsilon) + \sqrt{\frac{\hbar\varepsilon}{4m}}(s^n u^j - u^j). \quad (6)$$

Cette équation donne l'évolution des 4 points de la particule étendue par rapport à son centre de gravité. L'évolution de cette particule étendue sur une période de 4ε est visualisée sur la figure 1. On

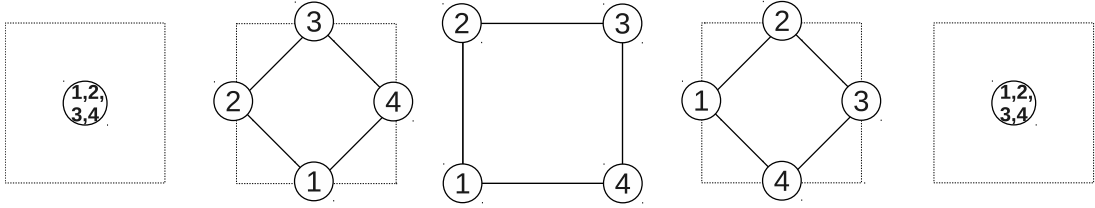


FIGURE 1. Évolution des quatre points de la particule étendue sur une période 4ε de la gauche à la droite (ponctuelle à $4q\varepsilon$, en extension à $(4q+1)\varepsilon$ et $(4q+2)\varepsilon$, puis en contraction en $(4q+3)\varepsilon$ et $4(q+1)\varepsilon$).

considérera que les quatre points $X_\varepsilon^j(t)$ de la particule définissent la structure d'une corde. Le mouvement de ses quatre points correspond à la vibration de la corde. À l'instant $t = 4q\varepsilon$, les quatre points sont au centre d'un carré et la longueur de la corde à cet instant est donc nulle. Aux instants $t \neq 4q\varepsilon$, elle prend une extension. Aux instants $(4q+1)\varepsilon$ et $(4q+3)\varepsilon$, les quatre points sont au centre des arêtes du carré. À l'instant $(4q+2)\varepsilon$, les quatre points sont sur les quatre sommets du carré. Bien plus, cette interprétation suggère une sorte de processus de création entre les instants $t = 4q\varepsilon$ et $(4q+1)\varepsilon$ suivi d'un processus d'annihilation entre les instants $(4q+3)\varepsilon$ et $(4q+4)\varepsilon$.

L'équation (5) entraîne $Z_\varepsilon^j(t) = \widetilde{Z}_\varepsilon(t) + O(\sqrt{\varepsilon})$ pour tout j et tout $t = n\varepsilon$.

Soit $\widetilde{Z}(t)$ la solution de l'équation différentielle classique :

$$\frac{d\widetilde{Z}(t)}{dt} = \mathcal{V}(t), \quad \widetilde{Z}(0) = Z_0. \quad (7)$$

Puisque $\mathcal{V}(t)$ est continûment différentiable, nous avons $\widetilde{Z}_\varepsilon(t) = \widetilde{Z}(t) + O(\varepsilon)$ pour tout $t = n\varepsilon$, et donc $Z_\varepsilon^j(t) = \widetilde{Z}(t) + O(\sqrt{\varepsilon})$. On en déduit

Théorème 1 *Chaque processus $\widetilde{Z}_\varepsilon^j(t)$ converge continûment vers la trajectoire classique $\widetilde{Z}(t)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$.*

Terminons cette section par quelques remarques sur les processus $Z_\varepsilon^j(t)$.

Remarque 1 Les quatre processus $Z_\varepsilon^j(t)$ ressemblent aux processus stochastiques de Nelson [9] basées sur les processus de Wiener, mais contrairement aux processus de Nelson ils sont déterministes. Cependant, bien que déterministes, ces processus paraissent aléatoires par rapport à l'extension spatiale de la corde car, à l'instant t , le reste modulo 4 du nombre $n = \frac{t}{\varepsilon}$ est un nombre pseudoaléatoire.

Remarque 2 Feynmann et Hibbs montrent que les « important paths » de la mécanique quantique, bien que continus, sont très irréguliers et nulle part différentiables. Ils admettent une vitesse moyenne $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \langle \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} \rangle = v$, mais non une vitesse quadratique moyenne car $\langle (\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t})^2 \rangle = \frac{i\hbar}{m\Delta t}$. Les quatre processus $X_\varepsilon^j(t)$ vérifient les mêmes propriétés que les chemins de Feynmann, de plus en plus irréguliers et non différentiables quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$; cependant, la valeur de $\varepsilon = \Delta t$, bien que très petite, reste finie.

2 Émergence du spin et des relations d'incertitude d'Heisenberg

On a associé à une particule étendue quatre points et un cycle de variation en quatre instants durant la période $T = 4\varepsilon$. On fait l'hypothèse que les propriétés d'une telle particule correspondent à la moyenne des propriétés des quatre points pris sur les quatre instants de la période. On obtient les théorèmes suivants :

Théorème 2 (Référence [10]) Pour tout $\varepsilon > 0$, la particule étendue correspondant à la partie réelle des processus (1) et (2), admet un moment angulaire intrinsèque moyen $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ pour la permutation s^+ et $s_z = +\frac{\hbar}{2}$ pour la permutation s^- .

Théorème 3 (Référence [10]) Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $s \in S$, la particule étendue correspondant à la partie réelle des processus (1) et (2) vérifie les relations d'incertitude d'Heisenberg :

$$\langle \Delta x \rangle \cdot \langle \Delta p_x \rangle = \frac{\hbar}{2}. \quad (8)$$

3 L'équation d'Hamilton–Jacobi complexe du second ordre

Nous montrons que l'évolution correspondant aux processus $Z_\varepsilon^j(t)$ définis par les équations (1) et (2), est régie par une équation d'Hamilton–Jacobi complexe du second ordre. Pour cela, nous utilisons une *mécanique analytique complexe* et un *principe de moindre action généralisé*. La mécanique analytique complexe est une généralisation de la mécanique analytique classique, avec des objets ayant une position complexe $Z(t) \in \mathbb{C}^2$, une vitesse complexe $\mathcal{V}(t) \in \mathbb{C}^2$, et utilisant le minimum d'une fonction complexe et l'analyse MinPlus complexe que nous avons introduite dans [6–8].

On peut alors définir une action d'Hamilton–Jacobi complexe pour la particule étendue correspondant aux processus (1) et (2). On se donne, à l'instant 0, une action complexe $\mathcal{S}^0(Z)$, fonction holomorphe de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} . L'action d'Hamilton–Jacobi complexe associée aux processus (1) et (2) est obtenue à partir d'une généralisation du principe de moindre action.

Définition 1 On définit l'action complexe $\mathcal{S}_\varepsilon(Z, t)$ par l'équation d'optimalité suivante définie aux instants $t = 4q\varepsilon$:

$$\mathcal{S}_\varepsilon(Z, t) = \min_{\mathcal{V}(t)} \frac{1}{4} \sum_j \{ \mathcal{S}_\varepsilon(Z - \mathcal{V}(t)\varepsilon - \gamma(s^4 u^j - s^3 u^j), t - \varepsilon) + L(Z, \mathcal{V}(t), t)\varepsilon \}, \quad (9)$$

où le min est pris au sens du minimum complexe sur les vitesses complexes possibles $\mathcal{V}(t)$. Pour $t = 0$, on a la condition initiale :

$$\mathcal{S}_\varepsilon(Z, 0) = \mathcal{S}^0(Z), \quad \forall Z \in \mathbb{C}^2.$$

Théorème 4 (Référence [10]) *Si un processus complexe vérifie le nouveau principe de moindre action (9) et admet $L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ comme lagrangien, alors l'action complexe vérifie l'équation d'Hamilton–Jacobi complexe du second ordre :*

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \mathcal{S})^2 + V(Z) - i\frac{\hbar}{2m}\Delta \mathcal{S} = 0 \quad \forall (Z, t) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}^+, \quad (10)$$

$$\mathcal{S}(Z, 0) = \mathcal{S}^0(Z), \quad \forall Z \in \mathbb{C}^2. \quad (11)$$

4 L'équation de Schrödinger

En posant comme fonction d'onde $\Psi = e^{i\frac{\mathcal{S}}{\hbar}}$ et en prenant la restriction de (10) et (11) à la partie réelle de Z , le théorème 4 devient :

Théorème 5 (Référence [10]) *Si un processus complexe suit le nouveau principe de moindre action (9) et admet $L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ comme lagrangien, alors sa fonction d'onde Ψ vérifie l'équation de Schrödinger :*

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \Psi + V(X)\Psi, \quad \forall (X, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ \Psi(X, 0) = \Psi^0(X), \quad \forall X \in \mathbb{R}^2.$$

et la trajectoire du centre de gravité de la particule $\tilde{X}(t)$ vérifie l'équation différentielle classique :

$$\frac{d\tilde{X}(t)}{dt} = \frac{\nabla S}{m}, \quad \tilde{X}(0) = X_0. \quad (12)$$

Cette trajectoire est celle proposée par de Broglie [11] et Bohm [12] (cf. figure 2).

Remarque 3 *Pour préciser notre modèle, il faut faire un choix de ε . L'hypothèse la plus naturelle est de le lier à la longueur d'onde de de Broglie ou à la longueur d'onde de Compton. Or, le mouvement interne du processus (1) et (2) a une période de 4ε . On peut alors identifier cette période à celle de de Broglie en posant :*

$$4\varepsilon = T = \frac{\lambda_{dB}}{v} = \frac{h}{mv^2} \quad (13)$$

ou à celle de Compton en posant

$$4\varepsilon = T = \frac{\lambda_C}{c} = \frac{h}{mc^2}. \quad (14)$$

Avec l'hypothèse de la longueur d'onde de de Broglie, ε varie le long de la trajectoire en fonction de la vitesse de la particule. Par contre, avec l'hypothèse de la longueur d'onde de Compton, ε reste constant le long de la trajectoire.

Références

1. M. GONDRAN, Analyse MinPlus, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **323**, 371–375 (1996).
2. M. GONDRAN & M. MINOUX, *Graphes, Dioïdes et Semi-anneaux*, Lavoisier (2004) ; *Graphs, Dioïds and Semi-rings: New models and Algorithms*, Springer, Operations Research/Computer Science Interfaces (2008).
3. V. P. MASLOV, *Analyse idempotente*, édition Mir (1989).
4. M. GONDRAN, Processus complexe stochastique non standard en mécanique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **333**, 592–598 (2001).
5. M. GONDRAN, Schrödinger equation and MinPlus analysis, *Russ. J. Math. Phys.*, **11**, 130–139 (2004).
6. M. GONDRAN, Analyse MinPlus complexe, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **333**, 592–598 (2001).

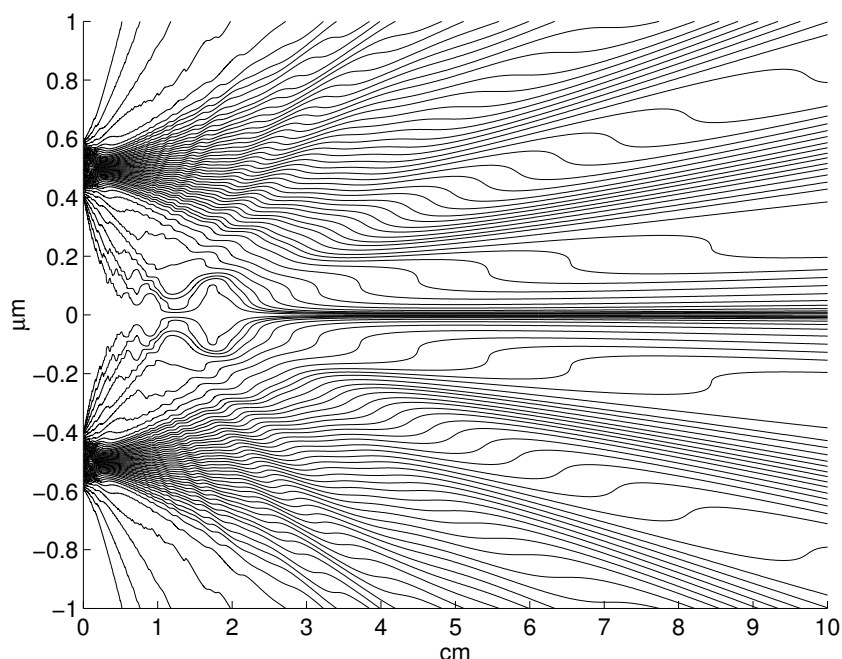


FIGURE 2. Simulation des trajectoires d'électrons définies par la théorie de de Broglie–Bohm au sortir des deux fentes dans l'expérience d'interférence de Young (données numériques issues de l'expérience de Jönsson [13]). Le centre de gravité de la corde vibrante suit ce type de trajectoire. L'ordre de grandeur de ε si l'on considère la longueur d'onde de de Broglie est de 10^{-20} s sachant que le temps de parcours d'un électron le long de ces 10 cm de trajectoire est d'environ 10^{-9} s. Cela correspond à 10^{-11} cycles contraction/extension de la corde le long de ces 10 cm. De plus, la taille maximale de la corde est dans ce cas de l'ordre de 10^{-12} m.

7. M. GONDRAN, Calcul des variations complexe et solutions explicites d'équations d'Hamilton-Jacobi complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **332**, 677–680 (2001).
8. M. GONDRAN & R. HOBLOS SAADE, Complex calculus of variations, *Kybernetika*, **39**, 249–263 (2003).
9. E. NELSON, *Quantum fluctuations*, Princeton University Press, Princeton (1985).
10. M. GONDRAN & A. GONDRAN, A heuristic extended particle 2D-model compatible with quantum mechanics, [arXiv:1507.08777](https://arxiv.org/abs/1507.08777) [math-ph] (2015).
11. L. DE BROGLIE, La mécanique ondulatoire et la structure de la matière et du rayonnement, *J. Phys. Radium*, **8**, 225–241 (1927).
12. D. BOHM, A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “Hidden” Variables. II, *Phys. Rev.*, **85**, 166–193 (1952).
13. C. JÖNSSON, Elektroneninterferenzen an mehreren künstlich hergestellten Feinspalten, *Z. Phys. A-Hadron Nucl.*, **161**, 454–474 (1961).

Un outil mathématique pour la physique : l'analyse non linéaire MinPlus et l'intégrale de chemin MinPlus

Michel Gondran¹ & Alexandre Gondran²

¹ University Paris Dauphine, Lamsade, 75016 Paris, France

² École Nationale de l'Aviation Civile, 31000 Toulouse, France

michel.gondran@polytechnique.org

Abstract. In classical mechanics, there exists an analog to the Feynman path integral : *the MinPlus path integral* that connects the Hamilton–Jacobi action $S(\mathbf{x}, t)$ to the Euler–Lagrange action $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ by the equation:

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)), \quad (1)$$

where the minimum is taken on the set of the initial positions \mathbf{x}_0 and where $S_0(\mathbf{x})$ is the Hamilton–Jacobi action at the initial time. This equation is an integral in the MinPlus nonlinear analysis [1] we introduced in 1996, following Maslov [2]. In classical mechanics, this equation explains the least action principle, and in quantum mechanics, it serves to refute Everett's many-worlds interpretation and strengthen the argument for the de Broglie–Bohm pilot wave for unbound particles (de Broglie–Bohm weak interpretation). In the conclusion, we discuss the wide-ranging potential this nonlinear analysis offers in physics.

1 Introduction

Le premier objectif de ce papier est de montrer qu'il existe une nouvelle branche des mathématiques qui permet d'étudier certains problèmes non linéaires de la physique par des approches linéaires : c'est l'analyse MinPlus [1] que nous avons introduite en 1996, à la suite de Maslov [2]. Cette analyse est construite en prenant dans l'espace des fonctions définies sur un ensemble X à valeur sur \mathbb{R} , le produit scalaire MinPlus défini par :

$$(f, g)_{\min+} = \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\}. \quad (2)$$

Ce produit scalaire est l'analogue du classique produit scalaire des fonctions L^2 :

$$(f, g) = \int_X f(x)g(x) dx. \quad (3)$$

Pour passer de (3) à (2), c'est-à-dire de l'analyse classique à l'analyse MinPlus, nous devons passer de la structure de corps classique sur les réels $(\mathbb{R}, +, \times)$ à la structure du dioïde MinPlus $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$, c'est-à-dire l'ensemble des réels (auquel on a ajouté un élément infini $\{+\infty\}$) muni de l'opération Min (minimum de deux réels) à la place de l'addition, et de l'opération $+$ (somme de deux réels) à la place de la multiplication. On a ajouté l'élément $\{+\infty\}$ à \mathbb{R} , car cet élément correspond à l'élément neutre pour l'opération Min, $\text{Min}(\{+\infty\}, a) = a, \forall a \in \mathbb{R}$.

La propriété essentielle du produit scalaire MinPlus est qu'il est linéaire dans le dioïde MinPlus, bien qu'il soit non linéaire dans le corps des réels $(\mathbb{R}, +, \times)$. En effet, avec le produit scalaire MinPlus (2), on peut montrer [1] que :

$$(f, (\min(g_1, g_2)))_{\min+} = \min((f, g_1)_{\min+}, (f, g_2)_{\min+}), \quad (4)$$

$$(\lambda f, g)_{\min+} = \lambda + (f, g)_{\min+}. \quad (5)$$

Pour cette raison, cette approche correspond à un analogue de la théorie des distributions dans le cas non linéaire ; elle est linéaire continue par rapport à la structure du dioïde MinPlus et « non linéaire »

continu par rapport à la structure classique du corps des réels. Il est alors naturel d'étudier l'analogue de ce que donnent toute l'analyse hilbertienne, les théorèmes de Riesz et de Hahn–Banach, les transformées de Fourier, l'analyse spectrale, les distributions, la théorie de la mesure, etc. (cf. Maslov [2] et Gondran–Minoux [3] chapitre 7). Par exemple, la transformée de Legendre–Fenchel définie par :

$$\widehat{f}(\mathbf{r}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x} - f(\mathbf{x})) = - \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} (f(\mathbf{x}) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{x}).$$

correspond à la transformée de Fourier lorsque l'on passe de l'espace des fonctions L^2 à l'espace des fonctions convexes semi-continues inférieurement (sci) propres.

Le second objectif de ce papier est de montrer que cette analyse MinPlus va avoir une grande importance en physique classique et quantique.

On montrera d'abord qu'il existe en mécanique classique un analogue de l'intégrale de chemin de Feynman : c'est *l'intégrale de chemin MinPlus* qui relie l'action d'Hamilton–Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ à l'action classique d'Euler–Lagrange $S_{\text{cl}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ par l'équation :

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{\text{cl}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)), \quad (6)$$

où le minimum est pris sur l'ensemble des positions initiales \mathbf{x}_0 et où $S_0(\mathbf{x})$ est l'action d'Hamilton–Jacobi à l'instant initial. Cette équation est une intégrale dans l'analyse non linéaire MinPlus, d'où son appellation.

Nous verrons que cette équation permet en mécanique classique de mieux comprendre le principe de moindre action, et en mécanique quantique de réfuter l'interprétation des mondes multiples d'Everett et de conforter l'interprétation de l'onde pilote de de Broglie–Bohm pour les particules non liées (interprétation faible de de Broglie–Bohm).

En conclusion, nous évoquons les nombreuses perspectives ouvertes par cette analyse non linéaire.

2 Les actions d'Euler–Lagrange et d'Hamilton–Jacobi

Considérons l'évolution d'un système évoluant de la position \mathbf{x}_0 à l'instant initial vers la position \mathbf{x} à l'instant t où la variable de commande $\mathbf{u}(s)$ est la vitesse :

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \mathbf{u}(s), \quad \text{pour } s \in [0, t], \quad (7)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}. \quad (8)$$

Si $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ est le lagrangien du système, quand les deux positions \mathbf{x}_0 et \mathbf{x} sont données, *l'action d'Euler–Lagrange* $S_{\text{cl}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ est la fonction définie par :

$$S_{\text{cl}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}(s), 0 \leq s \leq t} \left\{ \int_0^t L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s) ds \right\}, \quad (9)$$

où le minimum (ou plus généralement l'extremum) de (9) est pris sur les commandes $\mathbf{u}(s)$, $s \in [0, t]$, l'évolution de l'état $\mathbf{x}(s)$ étant donnée par les équations d'évolution (7) et (8). C'est le principe de moindre action défini par Euler en 1744 et Lagrange en 1755.

La solution $(\tilde{\mathbf{u}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s))$ de (9), si le lagrangien $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ est deux fois différentiable, vérifie l'équation d'Euler–Lagrange. Pour une particule non relativiste dans un champ de potentiel linéaire avec le lagrangien $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$, cette équation donne $\frac{d}{ds}(m\dot{\mathbf{x}}(s)) - \mathbf{K} = 0$. Nous obtenons successivement $\tilde{\dot{\mathbf{x}}}(s) = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{K}}{m}s$, $\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0s + \frac{\mathbf{K}}{2m}s^2$. La vitesse initiale \mathbf{v}_0 est obtenue en faisant $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}$ (Éq. (8)) dans la dernière équation. Finalement, la trajectoire optimisant l'action est $\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \frac{s}{t}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \frac{\mathbf{K}}{2m}ts + \frac{\mathbf{K}}{2m}s^2$ et l'action d'Euler–Lagrange est égale à

$$S_{\text{cl}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = m \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{2t} + \frac{\mathbf{K} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)}{2}t - \frac{\mathbf{K}^2}{24m}t^3. \quad (10)$$

Considérons maintenant qu'une action initiale $S_0(\mathbf{x})$ est donnée, alors l'action d'Hamilton–Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ est la fonction définie par :

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(s), 0 \leq s \leq t} \left\{ S_0(\mathbf{x}_0) + \int_0^t L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s) ds \right\}, \quad (11)$$

où le minimum (et plus généralement l'extremum) de (11) est pris sur toutes les positions initiales \mathbf{x}_0 et sur les commandes $\mathbf{u}(s)$, $s \in [0, t]$, l'évolution de l'état $\mathbf{x}(s)$ étant donnée par les équations d'évolution (7) et (8).

Comme le terme $S_0(\mathbf{x}_0)$ n'intervient pas dans (11) pour la minimisation (ou l'extremum) sur $\mathbf{u}(s)$, on en déduit que l'action d'Hamilton–Jacobi peut s'écrire à partir de l'action d'Euler–Lagrange :

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{x_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)). \quad (12)$$

Cette équation est une généralisation de la formule de Hopf–Lax $S(\mathbf{x}, t) = \min_{x_0} \left(S_0(\mathbf{x}_0) + m \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{2t} \right)$ qui correspond au cas particulier où il n'y a pas de potentiel et donc à une action d'Euler–Lagrange égale à $m \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{2t}$.

Pour une particule dans un potentiel linéaire $V(\mathbf{x}) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$ avec comme action initiale $S_0(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}$, nous déduisons des équations (12) et (10) que l'action d'Hamilton–Jacobi est égale à :

$$S(\mathbf{x}, t) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 t + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}t - \frac{1}{2}\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_0 t^2 - \frac{\mathbf{K}^2 t^3}{6m}. \quad (13)$$

Dans le cas d'une particule non relativiste dans un champ de potentiel $V(\mathbf{x}, t)$, on a le théorème suivant :

Théorème 1 *La vitesse d'une particule classique non relativiste dans un champ de potentiel est donnée en chaque point (\mathbf{x}, t) par :*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m}, \quad (14)$$

où $S(\mathbf{x}, t)$ est l'action d'Hamilton–Jacobi, solution des équations d'Hamilton–Jacobi :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \quad (15)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (16)$$

L'équation (14) montre que la solution $S(\mathbf{x}, t)$ des équations d'Hamilton–Jacobi permet de définir le champ de vitesse en tout point (\mathbf{x}, t) à partir du champ de vitesse $\frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$ à l'instant initial. En particulier, si à l'instant initial, on connaît la position initiale \mathbf{x}_{init} d'une particule, sa vitesse à cet instant est égale à $\frac{\nabla S_0(\mathbf{x}_{init})}{m}$. On en déduit qu'à partir de la solution $S(\mathbf{x}, t)$ des équations d'Hamilton–Jacobi, on déduit par (14) la trajectoire de la particule. L'action d'Hamilton–Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ est donc un champ qui « pilote » le mouvement de la particule.

Pour une particule dans un potentiel linéaire $V(\mathbf{x}) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$ avec l'action initiale $S_0(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}$, le champ de la vitesse initiale est constant, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m} = \mathbf{v}_0$ et le champ de la vitesse à l'instant t est aussi constant, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{K}t}{m}$. La figure 1 montre ces champs de vitesse.

3 Les actions d'Euler–Lagrange et d'Hamilton–Jacobi et le principe de moindre action

Nous allons voir comment la distinction entre l'action d'Hamilton–Jacobi et l'action d'Euler–Lagrange permet d'éclairer l'interprétation du principe de moindre action en mécanique classique. En effet, le débat

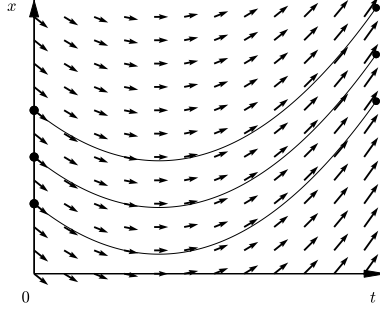


FIGURE 1. Champ de vitesse correspondant à l'action d'Hamilton–Jacobi $S(\mathbf{x}, t) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 t + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} t - \frac{1}{2}\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_0 t^2 - \frac{\mathbf{K}^2 t^3}{6m}$, soit $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{K}t}{m}$. On a aussi représenté trois trajectoires de particules pilotées par ce champ.

intense qui a lieu depuis plus de 80 ans sur l'interprétation de la fonction d'onde de la mécanique quantique a laissé dans l'ombre le débat sur l'interprétation de l'action et du principe de moindre action en mécanique classique, depuis leur introduction en 1744 par Pierre-Louis Moreau de Maupertuis. Maupertuis avait compris que, sous certaines conditions, les équations de Newton sont équivalentes au fait qu'une quantité, qu'il appelle l'action, soit minimale. Ce *principe de moindre action* est le principe le plus puissant à notre disposition pour découvrir les lois de la nature. Il permet de déterminer sous la même approche aussi bien les équations du mouvement des particules (si l'on minimise sur les trajectoires) que les lois de la nature (si l'on minimise sur les paramètres définissant les champs).

Cependant, pour les trajectoires de particules, ce principe a embarrassé un grand nombre de scientifiques comme le rappelle Henri Poincaré, pourtant l'un de ses grands utilisateurs [4] :

« *L'énoncé même du principe de moindre action a quelque chose de choquant pour l'esprit. Pour se rendre d'un point à un autre, une molécule matérielle, soustraite à l'action de toute force, mais assujettie à se mouvoir sur une surface, prendra la ligne géodésique, c'est-à-dire le chemin le plus court. Cette molécule semble connaître le point où on veut la mener, prévoir le temps qu'elle mettra à l'atteindre en suivant tel et tel chemin, et choisir ensuite le chemin le plus convenable. L'énoncé nous la présente pour ainsi dire comme un être animé et libre; il est clair qu'il vaudrait mieux le remplacer par un énoncé moins choquant, et où, comme diraient les philosophes, les causes finales ne sembleraient pas se substituer aux causes efficientes.* »

Nous allons voir que les difficultés d'interprétation de l'action sur les *causes finales* et les *causes efficientes* proviennent de l'action d'Euler–Lagrange $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ et non de l'action d'Hamilton–Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$.

Pourtant l'équation (9) de définition de l'action d'Euler–Lagrange semble montrer que, parmi les trajectoires qui arrivent à (\mathbf{x}, t) à partir de la position initiale \mathbf{x}_0 , le principe de moindre action permet de choisir la vitesse à chaque instant. En réalité, le principe de moindre action utilisé dans l'équation (9) ne choisit pas la vitesse à chaque instant s entre 0 et t , mais seulement à l'instant t quand la particule arrive en \mathbf{x} . La connaissance de la vitesse à chaque instant s ($0 \leq s \leq t$) requiert la résolution de l'équation d'Euler–Lagrange avec la condition initiale (8) sur la trajectoire entière. Dans le cas d'une particule non relativiste dans un potentiel linéaire, la vitesse à l'instant s ($0 \leq s \leq t$) est $\tilde{\mathbf{v}}(s) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} - \frac{\mathbf{K}t}{2m} + \frac{\mathbf{K}s}{m}$ avec pour vitesse initiale

$$\tilde{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} - \frac{\mathbf{K}t}{2m}. \quad (17)$$

On en déduit que la vitesse initiale $\tilde{\mathbf{v}}_0$ dépend de la position \mathbf{x} de la particule à l'instant final t . Cette dépendance des « causes finales » est générale. C'est la principale critique de Poincaré sur le principe de moindre action : « *Cette molécule semble connaître le point où on veut la mener, prévoir le temps qu'elle mettra à l'atteindre en suivant tel et tel chemin, et choisir ensuite le chemin le plus convenable.* »

Nous devons donc conclure que, sans connaissance de la vitesse initiale, l'action d'Euler–Lagrange répond à un problème posé par un observateur, et non par la nature : « *Quelle doit être la vitesse de la particule à l'instant initial pour atteindre \mathbf{x} au temps t ?* » La résolution de ce problème implique que l'observateur résolve l'équation d'Euler–Lagrange avec la condition (8) *après* l'observation de \mathbf{x} au temps t . C'est un point de vue *a posteriori*.

L'équation (11) de définition de l'action d'Hamilton–Jacobi semble aussi montrer que, parmi les trajectoires qui arrivent à (\mathbf{x}, t) à partir d'une position initiale inconnue et un champ de vitesse connu, le principe de moindre action choisit la position initiale et à chaque instant la vitesse qui correspond au minimum (ou l'extremum) de l'action d'Hamilton–Jacobi.

Les équations (14)–(16) confirment cette interprétation. Elles montrent que l'action d'Hamilton–Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ ne résout pas seulement un problème donné avec une simple condition initiale $(\mathbf{x}_0, \frac{\nabla S_0(\mathbf{x}_0)}{m})$, mais un ensemble de problèmes avec une infinité de conditions initiales, toutes les paires $(\mathbf{y}, \frac{\nabla S_0(\mathbf{y})}{m})$. L'action d'Hamilton–Jacobi répond à la question : « *Si on connaît l'action (ou le champ de vitesse) à l'instant initial, peut-on déterminer l'action (ou le champ de vitesse) à chaque instant ultérieur ?* » Ce problème est résolu séquentiellement par l'équation d'évolution (15). C'est un point de vue *a priori*. Il peut être considéré comme le problème résolu par la nature avec le principe de moindre action. On peut donc considérer l'action d'Euler–Lagrange comme une action épistémique et l'action d'Hamilton–Jacobi comme l'action ontologique.

Enfin, l'analyse MinPlus permet de voir la différence mathématique entre les actions d'Euler–Lagrange et d'Hamilton–Jacobi. Dans l'analyse MinPlus, l'équation d'Hamilton–Jacobi est linéaire, car si $S_1(\mathbf{x}, t)$ et $S_2(\mathbf{x}, t)$ sont solutions de (15), alors $\min\{\lambda + S_1(\mathbf{x}, t), \mu + S_2(\mathbf{x}, t)\}$ est aussi solution de l'équation d'Hamilton–Jacobi (15). L'analogue de la distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x})$ dans l'analyse MinPlus est la distribution non linéaire $\delta_{\min}(\mathbf{x})$ définie par $\delta_{\min}(\mathbf{x}) = \{0 \text{ si } \mathbf{x} = \mathbf{0}, +\infty \text{ sinon}\}$. Avec cette distribution de Dirac non linéaire, on peut définir des solutions élémentaires d'une manière analogue à la théorie classique des distributions. On a en particulier :

Théorème 2 *L'action d'Euler–Lagrange, $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$, définie par l'équation (9) est la solution élémentaire de l'équation d'Hamilton–Jacobi (15)–(16) dans l'analyse MinPlus avec la condition initiale*

$$S(\mathbf{x}, 0) = \delta_{\min}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (18)$$

L'action d'Hamilton–Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ est alors donnée par l'intégrale MinPlus

$$S(\mathbf{x}, t) = \inf_{\mathbf{x}_0} \{S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\}, \quad (19)$$

d'une manière analogue à la solution de l'équation de la chaleur donnée par l'intégrale classique :

$$u(x, t) = \int u_0(y) \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

4 Intégrale de chemin MinPlus et interprétation de la mécanique quantique

L'intégrale de chemin MinPlus (Éq. (19)) est l'analogue en mécanique classique de la l'intégrale de chemin de Feynman qui relie la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{x}, t)$ au temps t à partir de la fonction d'onde initiale $\Psi_0(\mathbf{x})$ [5] :

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int F(t, \hbar) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\right) \Psi_0(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0, \quad (20)$$

où $F(t, \hbar)$ est une fonction indépendante de \mathbf{x} et de \mathbf{x}_0 .

On considère parfois que l'interprétation des mondes multiples d'Everett [6] peut s'appuyer sur l'intégrale de chemin de Feynman car elle est fondée aussi sur un ensemble de possibilités. Si cela était le

cas, il faudrait aussi étendre l'interprétation des mondes multiples à la mécanique classique qui vérifie l'intégrale de chemin MinPlus. L'intégrale de chemin de Feynman ne peut donc pas être utilisée comme une justification pour l'interprétation des mondes multiples d'Everett.

Il en est tout différemment de l'interprétation faible de Broglie–Bohm. Nous appelons interprétation faible de de Broglie–Bohm, l'interprétation de de Broglie–Bohm restreinte aux particules quantiques libres ou non liées comme les jets de particules libres ou de particules dans un champ linéaire, jets de fullerènes dans une expérience de fentes de Young, jets d'atomes dans des expériences de Stern et Gerlach.

Dans l'interprétation faible de de Broglie–Bohm, la particule quantique est décrite par le couple $(\Psi(\mathbf{x}, t), \mathbf{X}(t))$ où $\Psi(\mathbf{x}, t)$ est la fonction d'onde qui comme d'habitude vérifie l'équation de Schrödinger et où $\mathbf{X}(t)$ est la position de la particule. L'évolution de la position est alors donnée par l'équation

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \left. \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t)}, \quad (21)$$

où $S(\mathbf{x}, t)$ est la phase de la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{x}, t)} \exp(i \frac{S(\mathbf{x}, t)}{\hbar})$. C'est l'onde pilote de de Broglie–Bohm. Elle est analogue au cas de la particule classique donnée au Théorème 1. On peut de plus montrer [7–9] que, si l'on fait tendre \hbar vers 0, les trajectoires faibles de de Broglie–Bohm convergent vers les trajectoires classiques.

5 Conclusion

L'analyse MinPlus et l'intégrale de chemin MinPlus nous ont permis de mieux comprendre le principe de moindre action en mécanique classique, et en mécanique quantique de réfuter l'interprétation des mondes multiples d'Everett et de conforter l'interprétation de l'onde pilote de de Broglie–Bohm pour les particules non liées (interprétation faible de de Broglie–Bohm).

La généralisation de cette analyse MinPlus aux nombres complexes nous a aussi permis de proposer [10] un modèle non ponctuel d'une particule quantique (corde vibrante) et un principe de moindre action généralisée permettant d'associer à cette particule une onde qui vérifie l'équation de Schrödinger et au centre de gravité de cette particule une trajectoire de de Broglie–Bohm.

Enfin, cette analyse MinPlus s'avère être un outil précieux pour étudier les propriétés fractales, et en particulier pour calculer les coefficients de Hölder [11].

Références

1. M. GONDRAN, Analyse MinPlus, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **323**, 371–375 (1996).
2. V. P. MASLOV, *Analyse idempotente*, édition Mir (1989).
3. M. GONDRAN & M. MINOUX, *Graphes, Dioïdes et Semi-anneaux*, Lavoisier (2004); *Graphs, Dioïds and Semi-rings: New models and Algorithms*, Springer, Operations Research/Computer Science Interfaces (2008).
4. H. POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, (1902); traduit dans : *The Foundations of Sciences: Science and Hypothesis, The Value of Science, Science and Method*, New York: Science Press (1913).
5. R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON & M. SANDS, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. II, Addison-Wesley (1964).
6. B. DEWITT & N. GRAHAM, *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton Series in Physics (1973).
7. M. GONDRAN & A. GONDRAN, Discerned and non-discerned particles in classical mechanics and convergence of quantum mechanics to classical mechanics, *Ann. Fond. Louis Broglie*, **36**, 117–135 (2011).
8. M. GONDRAN & A. GONDRAN, The two limits of the Schrödinger equation in the semi-classical approximation: Discerned and non-discerned particles in classical mechanics. *Foundations of Probability and Physics-6, AIP Conf. Proc.*, **1424**, 111–115 (2012).
9. M. GONDRAN & A. GONDRAN, A synthetic interpretation: The double-preparation theory, *Phys. Scripta*, **163**, 014029 (2014).
10. M. GONDRAN & A. GONDRAN, Un modèle heuristique de particule étendue compatible avec la mécanique quantique (*à paraître*).
11. M. GONDRAN & A. KENOUIFI, Numerical calculations of Hölder exponents for the Weierstrass functions with (min,+)-wavelets, *Tend. Mat. Apl. Comput.*, **15**, 261–273 (2014).

Numerical investigation into the choice of gait parameters in 2D anguilliform swimmers

David Gross^{1,2}, Yann Roux² & Médéric Argentina¹

¹ Université Nice Sophia-Antipolis, Institut non linéaire de Nice, CNRS UMR 7335, 1361 route des lucioles, 06560 Valbonne, France

² K-Epsilon SARL, 300 route des crêtes, 06902 Valbonne, France
david@k-epsilon.com

Résumé. Dans cet article, nous étudions numériquement la relation entre les paramètres cinématiques de la nage d'organismes macroscopique et sa vitesse de locomotion. Nous utilisons la méthode d'interaction fluide-structure de méthode panneau mince instationnaire en 2D appliquée à un nageur anguilliforme. Nous comparons ces résultats avec ceux obtenus au l'écoulement obtenu par un méthode d'interaction fluide-structure avec une méthode *Reynolds-averaged Navier-Stokes* instationnaire et les résultats théoriques [1] dans la régime laminaire. Avec ces calculs numériques, nous retrouvons la corrélation observée entre le swimming number, $Sw = \frac{\omega AL}{\nu}$ et le nombre de Reynolds, $Re = \frac{UL}{\nu}$ résultant, où ω est la fréquence angulaire, A l'amplitude de l'onde à la queue, L la longueur du nageur, et ν la viscosité cinématique du fluide. Cette corrélation a été dérivée théoriquement en équilibrant l'effort propulsif et la traînée visqueuse d'une plaque avec une couche limite de type Blasius. L'influence de l'amplitude A et la longueur d'onde λ est ensuite examinée.

Abstract. In this article, the relation between swimmer gait parameters and the resulting swimming motion are examined numerically in 2D using an unsteady thin vortex panel fluid-structure interaction method for an anguilliform swimmer. The results are compared against laminar unsteady Reynolds-averaged Navier-Stokes fluid-structure interaction results as well as the results of [1] for the laminar regime. These support the observed relation between swimming number, $Sw = \frac{\omega AL}{\nu}$, and the swimmer's resulting Reynolds number, $Re = \frac{UL}{\nu}$ where ω is the angular frequency, A is the wave amplitude at the tail, L is the swimmer's body length, and ν the kinematic viscosity of the fluid. This correlation was derived from a theoretical approach of balancing the propulsive force and the drag of a flat plate with Blasius boundary layer. The effect of amplitude A and wavelength λ is then examined.

1 Introduction

Fish and swimmers in general, exhibit a wide variation in body length L , tail amplitudes A , and angular frequency ω of the traveling body wave they use to propel themselves. A simple scaling law relating these parameters to swimming velocity U and the kinematic viscosity of the fluid, ν can be observed as $Re \propto Sw^{\frac{4}{3}}$ for laminar flows [1], where the swimming kinematics are represented by the swimming number $Sw = \frac{\omega AL}{\nu}$ and the Reynolds number, $Re = \frac{UL}{\nu}$. While this scaling relation defines the product of $A\omega$, the exact selection of amplitude and frequency is not clearly defined. The swimmer must choose a gait which maximizes propulsive efficiency, while permitting it to obtain a reasonable speed within the limits of its muscular capacity. Lighthill [2,3] developed the theoretical approach of elongated body theorem which in its simplest form would indicate that efficiency is dependant only on the slip ratio, the ratio between the swimming velocity and that of the traveling body wave. This approach neglects both the effect of the amplitude and oscillations in the swimming velocity. Cheng [4] showed that, when the tail local slope is not equal to zero, both frequency and amplitude are present in the equation for efficiency. Eloy [5] attempted to optimize the choice of Strouhal number, St and slip ratio, but as these are derived from frequency, wavelength and amplitude, it is ambiguous about the choice of these three parameters. Gazzola *et al.* [6] take into consideration the structure of the fish and found that peaks in efficiency occur at the structural resonance frequencies of the fish. This present work aims at modeling the influence of the imposed amplitude and wavelength of the traveling wave used to propel a 2D anguilliform

swimmer on its propulsion. Anguilliform swimming is characterized by undulations along the entire or nearly entire length of the swimmer such that the wave amplitude profile is non-zero along the entire length of the swimmer with at least an entire wave present along the length [7]. This in contrast to other forms of swimming such as thunniform swimming which exhibit little to no lateral movement on most of the body with large amplitudes near the tail [7].

2 Methodology

The approach taken in this work is to impose the body deformation and to then resolve the fluid dynamics and applied forces to determine the rigid body motions. The swimming motion can be represented by a traveling wave whose amplitude linearly increases along the length with the form:

$$y(x, t) = \frac{A(\frac{x}{L} + b)}{1 + b} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right), \quad (1)$$

where λ is the wavelength, L is the body length, t is the time, x is the position along the swimmer with $x = 0$ at the head, and $x = L$ taken to be the tail, and b is a constant taken to be 0.25 for the cases studied here. The constant b alters the proportion of the tail amplitude exhibited by the head. The wave amplitude in this work vary linearly between $0.2A$ at the head and A at the tail.

To numerically resolve the swimming behavior of the swimmer both a fluid and rigid body motion solution must be solved. In order to permit a large number of cases to be considered, a potential flow method is considered. The fluid solver, is a 2D version of Avanti, an unsteady thin vortex panel code with a wake particle method [8–10]. In this approach the fluid problem is divided into a lifting body problem based on a boundary integral and a wake problem in which vortex carrying particles are advected downstream in a Lagrangian framework. This method has the advantage over panel wake methods of permitting the wake to roll up into a reverse von Kármán street. This is important as the wake of a propulsive foil or swimmer consist of alternating pairs of vortices with rotation direction opposite those of a normal von Kármán street [11–13]. The resulting wake imparts propulsive momentum to the flow rather than extracting momentum as drag like a regular von Kármán street. The swimmer is represented by the mid-body generator with the body thickness neglected. The panel vertices have their displacements relative to the center of gravity imposed to reflect the desired gait while respecting the inextensibility constraint. As an inviscid method, the viscous drag is not resolved. However, in the laminar regime the viscous forces are dominant and form the basis of the relation between Sw and Re [1]. In order to correctly capture this relation a viscous force must be introduced. A viscous drag force equivalent to that of an equivalent Blasius flat plate is added to the hydrodynamic forces obtained by the potential flow solution when solving the swimmers motions. This force is given as:

$$F_{\text{Blasius}}(t) = \frac{4}{3}\rho LU(t)^2 \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad (2)$$

where ρ is the fluid density. The rigid body motions of the swimmer are resolved in the forward and transverse motions utilizing ARA, a finite element structural solver as a rigid body solver. This explicitly captures the variations in forward velocity present as well as assuring the recoil motion is properly resolved. A second order Newmark–Bossak temporal scheme [14] is used with the resolution ensured by a Newton method through the computation of the tangent matrix associated with an Aitken relaxation. We use this scheme because it provides the necessary filtering of non-physical high frequencies while maintaining an accurate description of the low frequencies. The scheme is conservative and hence avoids the generation of numerical energy in the case of very large nonlinearities. At each time step, an equilibrium between the internal and external forces on all of the elements is required. To achieve this, the derivative of the forces with respect to the position, velocity, and acceleration of each node is found.

The coupling between ARA and the vortex panel code Avanti is accomplished using a quasi-monolithic fluid–structure interaction (FSI) coupling [15,16]. This approach permits efficiently resolving FSI problems where the added mass is of the same or greater magnitude than the body’s mass. The quasi-monolithic

approach is an implicit, segregated approach which can be viewed as a block LU factorization of the linearized monolithic system with an approximation of its Jacobian using the added mass operator. The resulting coupling is both robust and fast. An example of a swimmer and its wake with reverse von Kármán street is shown in Figure 1.



Figure 1. Self-propelled swimmer using vortex panel based FSI approach with wake particles colored by vorticity, orange positive, blue negative.

A second approach was developed which considers the swimmer's body thickness and directly resolves the viscous forces. This was accomplished using 2D unsteady Reynolds-averaged Navier–Stokes (URANS) FSI computations performed with ISIS [17], an unsteady, incompressible, finite volume URANS solver which is also coupled to ARA. A second order backward Euler temporal scheme is used by ISIS. The URANS computations were performed in laminar with the swimmer having an assumed thickness profile of :

$$w(x) = W \sqrt[3]{x(x-L)^3}, \quad (3)$$

Where W is a constant taken in this case to be 0.04. An example of URANS self-propelled swimmer is shown in Figure 2. The vorticity in the boundary layer is visible with the vortex detachment occurring at the tail.

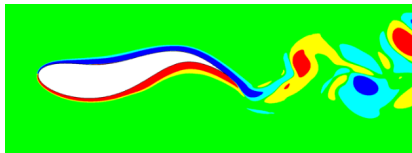


Figure 2. Self-propelled swimmer using URANS FSI approach with flow domain colored by vorticity, red and yellow positive vorticity, light and dark blue negative vorticity, green zero vorticity.

3 Results

Before investigating the influence of different gait parameters on the swimming performance, the ability to replicate the relation $\text{Re} \propto \text{Sw}^{4/3}$ in Gazzola *et al.* [1] was assessed for the laminar regime. This relation is important as it defines the link between propulsive force and the obtained swimming speed. A higher obtained swimming speed for a given Sw indicates a lower drag coefficient such that the equilibrium of drag and propulsive force occurs at a higher speed. As the derivation of the relation between Sw and Re is based on a small flapping amplitude, initial test were performed with the amplitude, A equal to 2.5% of L . The results are compared in Figure 3 to those of the regression in Gazzola *et al.* and shows that the power relation is closely captured, but that the Reynolds number Re increases faster than seen in nature due to the multiplicative constant term. This indicates that the approximated drag force as in Equation (2) is qualitatively correct, but the numerical prefactor is overestimated. If viscous forces are neglected entirely the resulting Sw – Re relation is linear as found in the turbulent regime, but with a non-physical asymptotic behavior as $A \rightarrow 0$ the average locomotion velocity remains finite. This behavior makes sense in that while the input power and thrust are decreasing, so does the pressure drag which

they must balance. As A tends to zero, the velocity should also go to zero; nonetheless this is the limit where Re should also tend to zero which is not allowed by an inviscid model. In contrast, the URANS computations are qualitatively closer to that of the regression of Gazzola *et al.* however the power is too large.

Like the Sw - Re relation the Strouhal number $St = \frac{fA}{U}$ with frequency f , has been shown to have a dependency on $Re^{-0.25}$ in the laminar regime [1]. This behavior is also captured with the thin vortex panel results as shown in Figure 4. The URANS method in contrast predicts a higher power law.

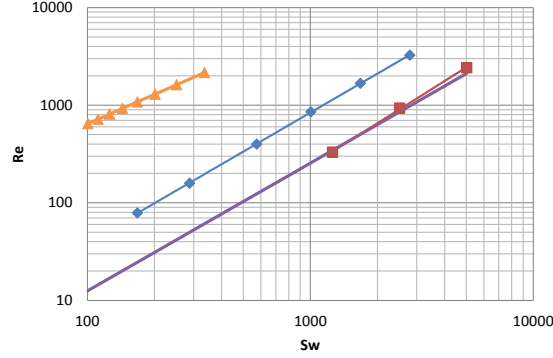


Figure 3. Swimming number versus Reynolds number in laminar regime. Blue diamonds: panel method with viscous drag, Red squares: laminar URANS, Gold triangles: panel method without viscous drag, Purple curve: regression of Gazzola *et al.* $Re = 0.03 Sw^{1.31}$, Blue curve: $Re = 0.0874 Sw^{1.3275}$, Red curve: $Re = 0.012 Sw^{1.4344}$, Gold curve: $Re = 6.4444 Sw + 0.0038$.

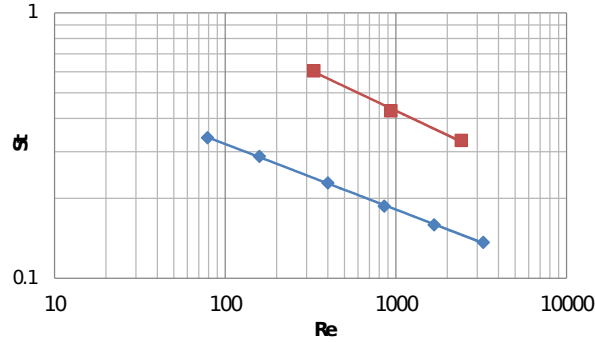


Figure 4. Dependence of Strouhal number on Reynolds number in laminar regime, Blue diamonds: panel method with viscous drag. Red squares: laminar URANS, Blue curve: $St = 0.9985 Re^{-0.247}$, Red curve: $St = 3.4884 Re^{-0.304}$.

The effect of amplitude and wave length are investigated on the achieved swimming speed using the vortex panel method. Values of A/L between 0.625% and 3.750% were examined for a fixed frequency. These limits in amplitude was chosen to keep the solved swimming speed within the laminar regime and avoid Stokes or transition Reynolds numbers. As $Re \propto Sw^{\frac{4}{3}}$, the velocity can be normalized by the product of ν/L and $Sw^{\frac{4}{3}}$. The resulting velocities when plotted against A/L ratio show a weak linear dependence on the ratio as shown in Figure 5 with increasing amplitude leading to smaller values of the

normalized velocity. This indicates that even if a higher absolute velocity is being achieved with a greater amplitude, the swimmer is achieving this additional speed less efficiently. This is expected from elongated body theory as the local slope at the tail increases with amplitude [2, 4].

If one examines the effect of λ/L ratio it can be seen that a clear peak in the normalized velocity is found in the vicinity of $\lambda/L = 1.2$ – 1.3 (Fig. 6). This peak also exists in the velocity without normalization. The swimming velocity follows a quadratic fit of λ/L . Investigations of the cause of this peak and the examination of this peak for other amplitude distributions is the subject of further research in progress. This result is somewhat surprising in that the wavelengths of interest correspond more closely to carangiform swimmers, where as eels and anguilliform swimmers in general have λ/L closer to 0.6 [18, 19]. This distinction of swimming forms based on wavelengths is however misleading as pointed out in [7] as the amplitude profiles are quite similar between the different classifications. The distinction in hydrodynamic performance between the different classes of swimmers is more likely due to 3D form effects [7].

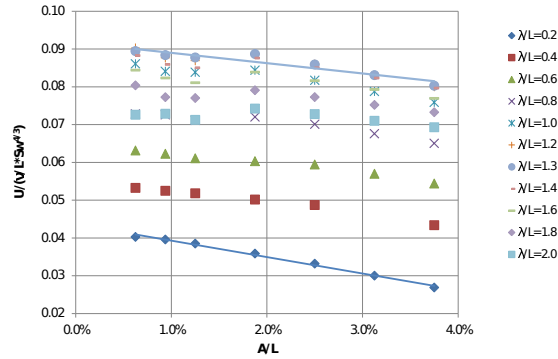


Figure 5. Influence of tail amplitude on normalized swimming velocity, Dark blue curve: $y = -0.4350x + 0.0436$, Light blue curve: $y = -0.2724x + 0.0917$, with $y = U/(\frac{\nu}{L S_w^4/3})$ and $x = \frac{A}{L}$.

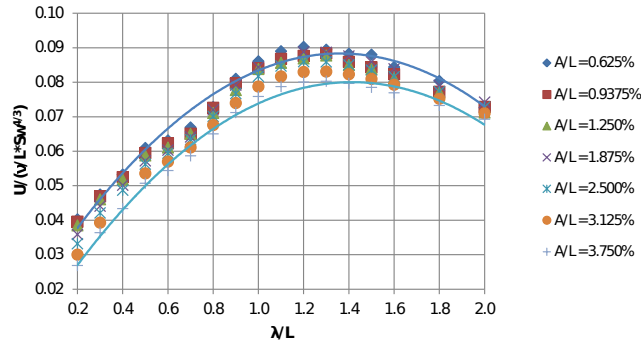


Figure 6. Influence of λ/L ratio on normalized velocity, Dark blue curve: $y = -0.0375x^2 + 0.1022x + 0.0081$, Light blue curve: $y = -0.0360x^2 - 0.1018x + 0.3153 + 0.0188$ with $y = U/(\frac{\nu}{L S_w^4/3})$ and $x = \frac{\lambda}{L}$.

4 Conclusions

The Sw–Re and Re–St number relations in the laminar regime have been obtained using a 2D unsteady inviscid flow method. It has been shown that the capability to successfully recreate the Sw–Re relation in the laminar regime necessitates that a viscous force be included in some form. The use of an unsteady 2D panel method which represents the swimmer by its midline with an added viscosity force can provide as good of an answer as a 2D URANS computations while being approximately 500 times less computationally expensive. The normalized velocity is found to decrease linearly with increasing amplitude while a peak is observed in wavelengths around of 1.3 body lengths.

References

1. M. GAZZOLA , M. ARGENTINA, & L. MAHADEVAN, Gait and speed selection in slender inertial swimmers, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **112** , 3874–3879 (2015).
2. M. J. LIGHTHILL, Note on the swimming of slender fish, *J. Fluid Mech.*, **9**, 305–317 (1960).
3. M. J. LIGHTHILL, Large-amplitude elongated-body theory of fish locomotion, *Proc. R. Soc. Lond. B*, **179**, 125–138 (1971).
4. J. Y. CHENG & R. BLICKHAN, Note on the calculation of propeller efficiency using elongated body theory, *J. Exp. Biol.*, **192**, 169–177 (1994).
5. C. ELOY, Optimal Strouhal number for swimming animals, *J. Fluid. Struct.*, **30**, 205–218 (2012).
6. M. GAZZOLA , M. ARGENTINA, & L. MAHADEVAN, Scaling macroscopic aquatic locomotion, *Nature Phys.*, **10**, 758–761 (2014).
7. G. V LAUDER & E. D. TYTELL, Hydrodynamics of undulatory propulsion, *Fish Physiol.*, **23**, 425–468 (2006).
8. T. CHARVET, F. HAUVILLE & S. HUBERSON, Numerical simulation of the flow around sails in real sailing conditions, *J. Wind Eng. Ind. Aerod.*, **63**, 111–129 (1996).
9. F. HAUVILLE, M. DURAND & Y. ROUX, Aéroélastique appliqué à la déformation d’un gréement, *Eur. J. Environmental and Civil Engineering*, **12**, 549–560 (2008).
10. W. MENOTTI, M. DURAND, D. GROSS, Y. ROUX & D. GLEHEN, An unsteady FSI investigation into the cause of the dismasting of the Volvo 70 Groupama 4, *INNOVSail, Innovation in high performance sailing yachts*, **12-5** (2008).
11. M. S. TRIANTAFYLLOU, G. S. TRIANTAFYLLOU, R. GOPALKRISHNAN, Wake mechanics for thrust generation in oscillating foils, *Phys. Fluids*, **3**, 2835–2837 (1991).
12. M. S. TRIANTAFYLLOU, G. S. TRIANTAFYLLOU & M. A. GROSENBAUGH, Optimal thrust development in oscillating foils with application to fish propulsion, *J. Fluid. Struct.*, **7**, 205–224 (1993).
13. J. M. ANDERSON, K. STREITLIEN, D. S. BARRETT & M. S. TRIANTAFYLLOU, Oscillating foils of high propulsive efficiency, *J. Fluid Mech.*, **360**, 41–72 (1998).
14. W. WOOD, M. BOSSAK & O. C. ZIENKIEWICZ, An alpha modification of Newmark’s method, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **15**, 1562–1566 (1980).
15. M. DURAND, *Interaction fluide–structure souple et légère, application aux voiliers*, PhD Thesis, École Centrale de Nantes (2012).
16. M. DURAND , A. LEROYER, C. LOTHODE, F. HAUVILLE, M. VISONNEAU, R. FLOCH & L. GUILLAUME, FSI investigation on stability of downwind sails with an automatic dynamic trimming, *Ocean Eng.*, **90**, 129–139 (2014).
17. A. HAY, A. LEROYER & M. VISONNEAU, H-adaptive Navier–Stokes simulations of free-surface flows around moving bodies, *J. Mar. Sc. Technol.*, **11**, 1–18 (2006).
18. C. S. WARDLE, J. J. VIDELER & J. D. ALTRINGHAM, Review tuning in to fish swimming waves: body form, swimming mode and muscle function, *J. Exp. Biol.*, **198**, 1629–1636 (1995).
19. E. D. TYTELL, The hydrodynamics of eel swimming II. Effect of swimming speed, *J. Exp. Biol.*, **207**, 3265–3279 (2004).

Transport de particules par ondes internes

Ernesto Horne^{1,2}, Diane Micard^{1,2}, Pascal Metz¹, Marc Moulin¹, Philippe Odier¹ & Sylvain Joubaud¹

¹ Laboratoire de Physique, Ens de Lyon, Université de Lyon, CNRS, F-69342 Lyon, France

² Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, École Centrale de Lyon, CNRS, Écully, France
sylvain.joubaud@ens-lyon.fr

Résumé. Nous étudions expérimentalement l'interaction entre des ondes internes et des particules sédimentant lentement dans un milieu stratifié. La colonne granulaire, formée par les particules, oscille autour d'une position d'équilibre. Ces oscillations sont causées par le mouvement du fluide associé à la présence de l'onde. Pour une certaine gamme de paramètres (fréquence et amplitude de l'onde), la colonne est, de manière inattendue, globalement déplacée dans le sens opposé au sens de propagation des ondes. Nous observons que ce déplacement suit un comportement résonant en fréquence des ondes internes.

Abstract. We study experimentally the effect of internal waves on slowly settling particles in a stratified environment. The granular column formed by the particles oscillates around an equilibrium position due to the presence of the internal gravity waves. Depending on the frequency and the amplitude of the internal waves, the column can even be displaced as a whole. Surprisingly, this displacement is directed towards the source of the waves. A resonant behavior of this displacement with the frequency of the internal waves is observed.

1 Introduction

La sédimentation de particules organiques (« neige marine ») vers l'océan profond joue un rôle dans l'équilibre global des océans. Elle est nécessaire pour le développement de la biodiversité océanique mais peut également séquestrer du CO₂ provenant de l'atmosphère. La dispersion et concentration de cette neige va dépendre fortement de la dynamique océanique. Les ondes internes, omniprésentes dans les océans, peuvent soit re-suspendre des particules situées sur le fond océanique [1] ou générer un transport de cette neige marine et ainsi influencer dans le comportement des espèces marines [2].

Des études expérimentales et numériques ont été faites pour comprendre la dynamique d'un objet sédimentant dans un fluide stratifié [3], tout comme la dynamique collective de particules en sédimentation dans une stratification [4]. Les ondes internes de gravité sont des ondes atypiques se propageant dans les fluides continûment stratifiés. Leur originalité se trouve particulièrement dans leur relation de dispersion. À une pulsation donnée, les ondes sont contraintes de se propager selon une direction donnée, c'est-à-dire selon un angle β avec l'horizontale $\sin \beta = \omega/N$, où N est la fréquence de flottabilité typique caractérisant la stratification $\rho_0(z)$: $N^2 = -g/\bar{\rho}\partial\rho_0/\partial z$, où $\bar{\rho}$ est la densité moyenne. Dans le travail décrit dans ce papier, nous souhaitons mettre en évidence les effets principaux apparaissant lors de l'interaction entre des ondes internes et une colonne de particules sédimentant lentement.

2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 1 (a). Une cuve de 160 cm de large et 17 cm de profondeur est remplie d'un fluide linéairement stratifié avec une pulsation de flottabilité constante N sur toute la hauteur du fluide (40 cm). Le déplacement du fluide est caractérisé par les variations du gradient de densité ($\partial_x[\rho(x, z, t) - \rho_0(z)]$, $\partial_z[\rho(x, z, t) - \rho_0(z)]$) mesurées à l'aide de la technique de schlieren synthétique [5].

Les ondes internes se propageant dans le fluide sont produites à l'aide d'une évolution du générateur développé précédemment à l'Ens de Lyon [6, 7]. Le but principal de cette évolution est de produire

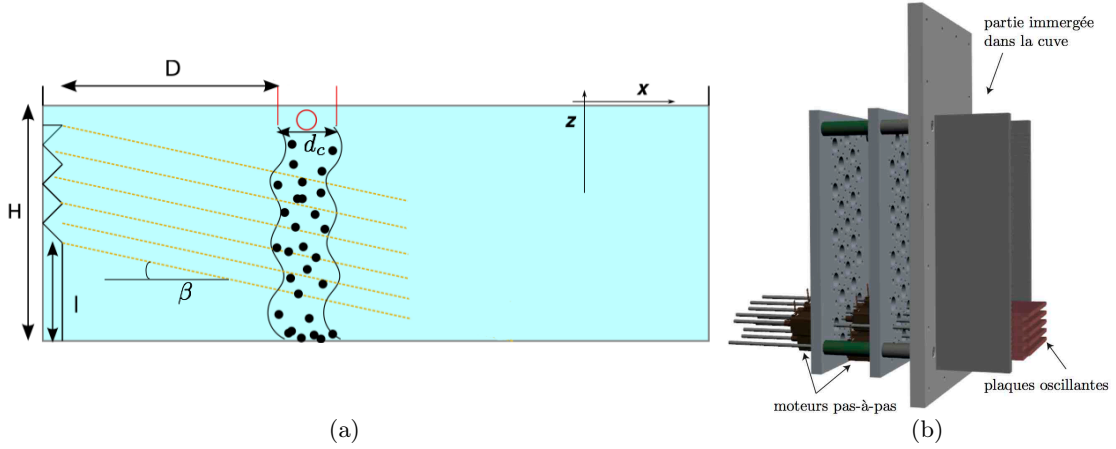


FIGURE 1. (a) Schéma du dispositif expérimental. La colonne, de largeur d_c est créée à une distance D du générateur d'ondes situé à gauche du dessin. Les ondes internes générées se propagent selon un angle β avec l'horizontale. (b) Schéma du générateur d'ondes. Il est formé d'un empilement de 50 plaques, chacune étant contrôlée indépendamment des autres à l'aide d'un moteur pas-à-pas linéaire.

des conditions aux limites totalement contrôlées en forme, amplitude et temps (cf. Fig. 1 (b)). Chacune des plaques du générateur est contrôlée électroniquement de manière indépendante. Plus précisément, le générateur est divisé en deux parties. La première partie est constituée de 50 plaques de 6,5 mm d'épaisseur s'intégrant dans la cuve et étant ainsi immergées dans le fluide stratifié. La seconde partie permet de contrôler continûment le déplacement des plaques et est composée de 50 moteurs pas-à-pas linéaires contrôlés par un automate. Le déplacement horizontal de chaque plaque est donné par une fonction temporelle $x_i = X_i(t)$. Dans le travail présenté dans ce papier, X_i est une fonction sinusoïdale dont l'amplitude, fréquence et phase peuvent être ajustées

$$X_i(t) = A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i). \quad (1)$$

Les phases entre chaque plaque sont choisies de telle sorte que les ondes internes générées sont des ondes planes sur une largeur de faisceau de 3 longueurs d'onde

$$\begin{aligned} x(z, t) &= A \cos(\omega t - mz) && \text{pour } \ell < z < \ell + 3\lambda, \\ x(z, t) &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned} \quad (2)$$

Un exemple d'ondes générées est présenté sur la figure 2.

La seconde partie expérimentale est la formation d'une colonne verticale de particules en suspension granulaire. L'objectif est de réaliser une colonne dont on peut contrôler la largeur d_c , l'écart D avec le générateur dans la direction x et la fraction volumique de particules $\varphi = V_{\text{grains}}/V_T$, définie comme le volume occupé par les grains, V_{grains} , dans un volume total V_T . Comme la propagation des ondes est quasi-bidimensionnelle, nous souhaitons garder la même symétrie pour la sédimentation des grains, c'est-à-dire obtenir une colonne quasi-homogène dans la direction transverse (y) dans la cuve. Pour cela, le protocole suivant a été mis en point. Des grains polydispersés et non sphériques de polystyrène (Goodfellow, diamètre moyen 200 μm , densité $\rho_g = 1050 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ sont tout d'abord mélangés dans un fluide porteur. Afin d'éviter une formation d'agrégats, le fluide porteur est de l'eau pure (densité $\rho_P = 998 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) à laquelle quelques gouttes de surfactant (antistatique, Tetenal Mirasol 2000) ont été ajoutées. Ce fluide traverse ensuite un tube de cuivre entaillé dans la direction transverse sur la totalité de la largeur de la cuve. Deux pompes péristaltiques imposent que le débit d'entrée du fluide dans le tube soit égal à celui de sortie. Ce tube est placé 2 cm en dessous de la surface libre. Les particules plus lourdes sédimentent dans le fluide stratifié tandis que le fluide porteur, moins dense que le fluide environnant,

reste dans le tube ou remonte à la surface. Les particules vont tout d'abord former un nuage de particules (dont la dynamique a été décrite dans [4]). L'extension du nuage est contrainte à l'aide de deux plaques de PVC fixant la largeur de la colonne d_c . Une fois le nuage formé, les particules sédimentent sous celui-ci en formant une colonne granulaire, quasi-homogène dans la direction y . Au bout d'un certain temps, cette colonne est stationnaire; la fraction volumique, constante dans le temps, est de l'ordre de 0,2%. Cette valeur peut être modifiée en changeant la concentration c des grains dans le fluide porteur et le débit d'injection. Elle sera inférieure à 1% dans les expériences décrites dans cet article. Un exemple de colonne ainsi créée, observée par ombroscopie, est montré sur la figure 2.

3 Influence de la colonne sur la propagation d'ondes internes

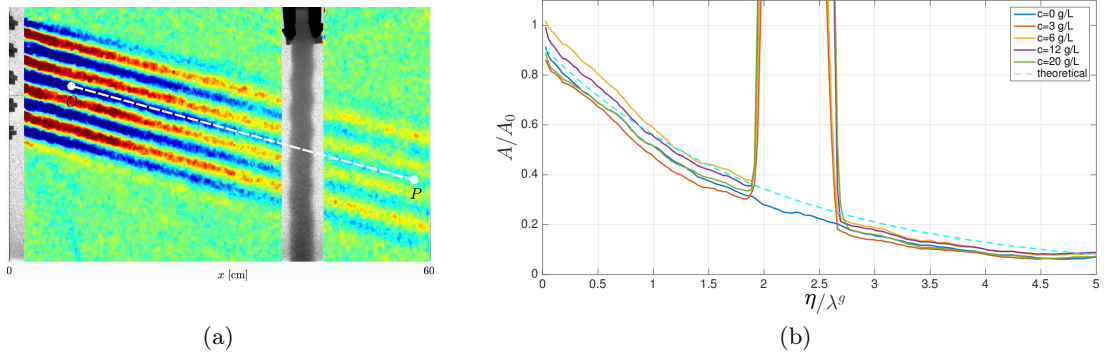


FIGURE 2. (a) Image typique de l'expérience. Le générateur et la colonne sont observés par ombroscopie. Le champ du gradient vertical de densité est présenté comme fond de l'image. La ligne pointillée OP indique une ligne iso-phase. (b) Amplitude de $\partial_z[\rho - \rho_0(z)]$, normalisée par l'amplitude au point O , est tracée en fonction la distance au point O le long de (OP) , notée η , normalisée par la longueur d'onde verticale imposée par le générateur, λ_g . Les différentes courbes sont obtenues pour différentes fractions volumiques (modifiées par la concentration c des grains dans le fluide porteur). Le décroissance théorique de l'amplitude due à la viscosité est tracée en pointillé.

Nous allons dans un premier temps nous concentrer sur les effets de colonne sur la propagation des ondes. Si la densité de particules est élevée, les ondes internes se réfléchiront sur la colonne comme sur un mur. Au contraire, si la densité est faible, les ondes traverseront la colonne sans voir les particules. Dans le cas intermédiaire, il y aura coexistence d'ondes transmises à travers la colonne et d'ondes réfléchies. Les ondes transmises auront une amplitude plus faible car une partie de l'énergie aura été donnée aux ondes réfléchies. La figure 2 montre que, dans la gamme des paramètres expérimentaux étudiés, les ondes internes sont uniquement transmises. Afin de quantifier une éventuelle réflexion, une transformée de Hilbert est réalisée. Une telle méthode permet de séparer des ondes s'éloignant du générateur (ondes incidentes) des ondes s'en rapprochant (ondes réfléchies) [8]. Seul le bruit de mesure est visible indiquant que l'énergie réfléchie est inférieure à 1% de l'énergie incidente. Par ailleurs, la ligne pointillée (OP) tracée sur la figure 2 indique une ligne iso-phase. Cette ligne montre que la phase n'est pas modifiée dans la direction de propagation des ondes après leur passage dans la colonne. Ceci indique que la fréquence de flottabilité N dans la colonne est identique avec ou sans particules.

Nous terminons cette étude en regardant si la colonne a un effet sur l'amplitude des ondes. Pour cela, nous mesurons celle-ci dans la direction de propagation de l'onde le long du segment (OP) indiqué par une ligne pointillée sur la figure 2; la distance au point O le long de ce segment est notée η . L'amplitude des ondes normalisées par l'amplitude au point O , A/A_0 , est tracée en fonction de la distance η normalisée par la longueur d'onde imposée par le générateur, λ_g sur la figure 2 (b). Dans le cas sans colonne, l'amplitude des ondes décroît par dissipation visqueuse. La décroissance mesurée est compatible avec celle prédite

théoriquement, qui est de la forme $\exp(-\Lambda\eta)$ où $\Lambda = \frac{|k^3|}{2\sqrt{N^2-\omega^2}}$ [7]. La variation de l'amplitude avec η n'est pas modifiée en présence de la colonne pour la gamme de fraction volumique utilisée, c'est-à-dire inférieure à 1 %.

Nous avons montré que la colonne n'avait aucune influence observable sur les ondes. Nous allons désormais nous intéresser à la colonne en elle-même et étudier les modifications engendrées par la présence de l'onde.

4 Oscillations et transport de la colonne granulaire

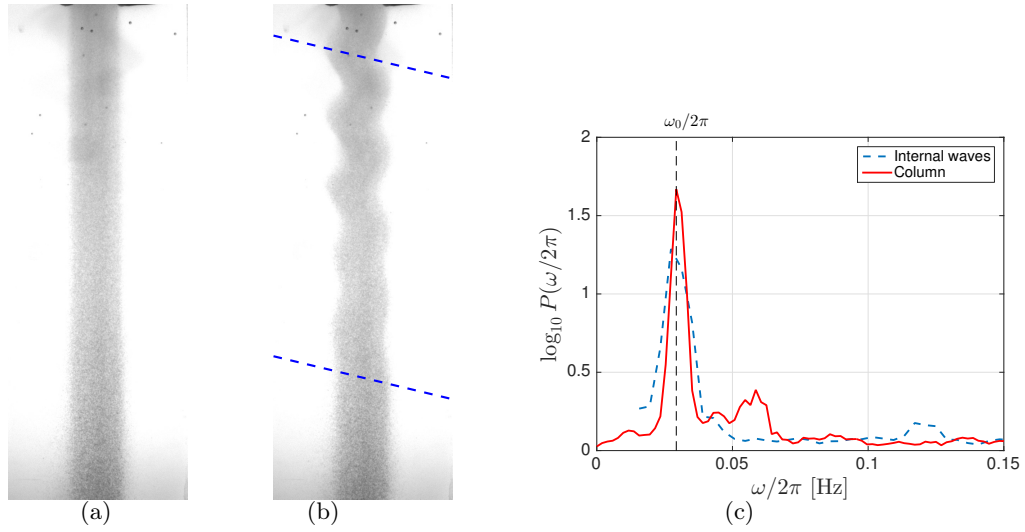


FIGURE 3. Photographie de la colonne de la particules en sédimentation observée par ombroscopie (a) lorsque qu'aucune onde n'est présente ($t = 0$) et (b) 100 périodes après le démarrage du générateur. Les traits pointillés indiquent la localisation du faisceau d'ondes. (c) Spectre temporel du champ d'ondes internes mesuré par schlieren synthétique (ligne pointillée bleue) et des contours de la colonne granulaire (ligne continue rouge).

Une comparaison de l'allure de la colonne entre le cas sans onde et le cas avec ondes est présentée sur la figure 3 (a) et (b). Sur cette dernière figure, les lignes bleues pointillées indiquent la zone où est localisé le faisceau d'ondes internes. La colonne granulaire est affectée par l'onde : en effet les bords de la colonne oscillent avec le temps. Ces oscillations sont générées par le mouvement du fluide associé aux ondes et on peut ainsi voir la projection verticale de la longueur d'onde au niveau des contours de la colonne. De manière contre-intuitive, ces oscillations ont la particularité de s'étendre en dehors de la région atteinte par le faisceau et aussi de persister après que le faisceau a disparu, révélant une « élasticité » de la colonne de grains. Ce phénomène est reproductible et il est visible que la composante verticale de la vitesse de groupe soit dans le même sens que la vitesse de sédimentation ou dans le sens opposé.

Pour justifier que le déplacement de la colonne est dû à la présence des ondes internes, le spectre des oscillations des bords de la colonne est comparé à celui des ondes internes (Fig. 3 (c)). Nous observons, comme attendu, que la colonne oscille à une fréquence ω_0 , égale à celle de l'onde. Une seconde fréquence, plus élevée, est visible. Une première exploration (non montrée ici) montre que cette seconde fréquence est indépendante de la fréquence des ondes internes ω_0 mais qu'elle semble être d'autant plus marquée que l'amplitude des ondes est grande. De plus, elle semble dépendre fortement de la fréquence de flottabilité N ou encore de la vitesse de sédimentation des particules. Une étude plus détaillée de ces paramètres est en cours afin de comprendre si cette fréquence « propre » est liée à l'élasticité et si elle est due aux

effets collectifs entre particules. Le générateur développé et décrit ici permettra facilement de tester ce phénomène sans modifier les autres paramètres et notamment la fréquence de flottabilité N .

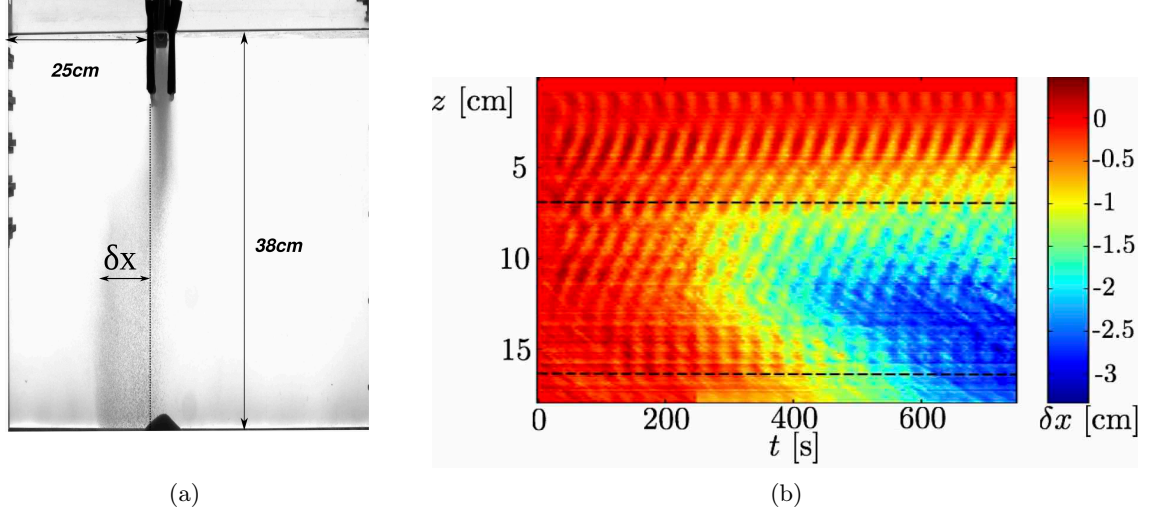


FIGURE 4. (a) Photographie de la colonne lorsqu'elle est déplacée par les ondes internes. (b) Déplacement de la colonne en fonction de z et du temps t . L'échelle de couleur indique le déplacement en cm. Les deux lignes horizontales représentent la position du faisceau d'ondes internes. L'amplitude du générateur est $A = 0,9$ cm et la fréquence de flottabilité est $N = 1,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour une certaine gamme de paramètres, on observe également un déplacement global de la colonne dans le sens opposé au sens de propagation des ondes comme présenté sur la figure 4 (a). Le déplacement horizontal, δx , peut être déterminé à l'aide d'une détection précise des contours, en fonction de la hauteur z et du temps, c'est-à-dire $\delta x(z, t)$. Un exemple type de déplacement observé est tracé en fonction de t et de z sur la figure 4 (b). L'image montre que durant les 200 premières secondes, la colonne oscille autour d'une position d'équilibre. Ces oscillations sont visibles par les stries rouges et noires. Il faut noter de même que précédemment que ces oscillations sont aussi bien présentes dans la zone du faisceau d'ondes internes (indiquée par les lignes pointillées noires) qu'en dehors. La pente de ces stries correspond à la projection verticale de la vitesse de phase des ondes. Après 200 s, la colonne commence à se déformer dans la direction du générateur ($\delta x < 0$). Après 700 s, le déplacement est supérieur à l'amplitude initiale des oscillations et atteint 3 cm (environ 3 fois supérieur à la largeur initiale de la colonne). Ce déplacement est dû à la présence des ondes car il est important dans la zone du faisceau (et en dessous); la partie localisée au-dessus du faisceau n'est que peu affectée par un déplacement moyen.

Afin d'étudier l'influence des paramètres de contrôle de l'expérience, cette procédure est répétée pour différentes expériences en changeant la fréquence ω_0 et l'amplitude A des ondes internes. Ces expériences ont été réalisées pour un fluide stratifié avec $N = 0,85 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Le déplacement est mesuré 750 s après le départ du générateur (soit 25 périodes de l'onde). Nous représentons sur la figure 5 (a) le déplacement δx en fonction de ω_0/N pour différentes amplitudes du générateur pour des ondes internes se déplaçant vers le bas. Nous observons comme attendu que plus l'amplitude des ondes est grande, plus le déplacement est important. Ce déplacement est également plus important si la valeur de ω_0/N est grande indiquant également une dépendance en fonction de la pulsation de l'onde. L'expérience a été répétée pour une forte amplitude en faisant varier ω_0 . La valeur de la fréquence de flottabilité est désormais $N = 1,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (impliquant une vitesse de sédimentation plus faible). La figure 5 (b) montre que la dépendance en ω_0/N est une résonance et qu'elle est maximale pour une valeur de $\omega_0/N = 0,2$.

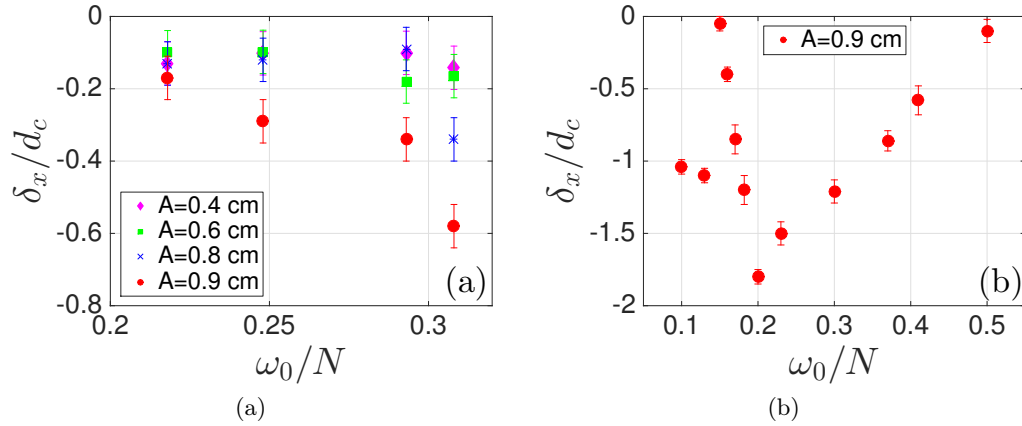


FIGURE 5. (a) Déplacement de la colonne, mesuré 700 s après le démarrage du générateur, tracé en fonction de ω_0/N . d_c désigne la largeur de la colonne. Pour cette expérience, $N = 0,85 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. (b) Déplacement de la colonne pour $A = 0,9 \text{ cm}$, $N = 1,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ en fonction de ω_0/N .

5 Conclusions

Nous avons développé un dispositif expérimental permettant l'étude de l'interaction entre des ondes internes et des particules en suspension. Nous avons montré, d'une part, que la colonne avec une fraction volumique de l'ordre de 0,2 % n'a pas d'effets mesurables sur les ondes. Nous avons observé, d'autre part, deux effets lors du passage des ondes internes à travers la colonne : celle-ci oscille autour d'une position d'équilibre. Dans certains cas, la colonne est même déplacée globalement vers la source des ondes. Nous avons mesuré ce déplacement en fonction de différents paramètres (amplitude et fréquence de l'onde, vitesses de sédimentation). Le déplacement, tout comme l'élasticité de la colonne sont encore incompris et feront l'objet d'une étude tant expérimentale que théorique dans la suite.

Références

1. P. HOSEGOOD, J. BONNIN & H. VAN HAREN, Solibore-induced sediment resuspension in the Faeroe–Shetland Channel, *Geophys. Res. Lett.*, **31**, L09301 (2004).
2. J. PINEDA, V. STARCZAK, J. C. B. DA SILVA, K. HELFRICH, M. THOMPSON & D. WILEY, Whales and waves: Humpback whale foraging response and the shoaling of internal waves at Stellwagen Bank, *J. Geophys. Res. – Oceans*, **120**, 2555–2570, (2015).
3. K. Y. YICK, C. R. TORRES, T. PEACOCK & R. STOCKER, Enhanced drag of a sphere settling in a stratified fluid at small Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **632**, 49–68, (2009).
4. J. W. M. BUSH, B. A. THURBER & F. BLANCHETTE, Particle clouds in homogeneous and stratified environments, *J. Fluid Mech.*, **489**, 29–54, (2003).
5. S. B. DALZIEL, G. O. HUGHES & B. R. SUTHERLAND, Whole-field density measurements by synthetic schlieren, *Exp. Fluids*, **28**, 322–335 (2000).
6. L. GOSTIAUX, H. DIDELLE, S. MERCIER & T. DAUXOIS, A novel internal waves generator, *Exp. Fluids*, **42**, 123–130 (2007).
7. M. J. MERCIER, D. MARTINAND, M. MATHUR, L. GOSTIAUX, T. PEACOCK & T. DAUXOIS, New wave generation, *J. Fluid Mech.*, **657**, 308–334 (2010).
8. M. J. MERCIER, N. B. GARNIER & T. DAUXOIS, Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the Hilbert transform, *Phys. Fluids*, **20**, 086601 (2008).

Un modèle chaotique pour l'épidémie de maladie à virus Ebola d'Afrique de l'Ouest en 2014

Mireille Huc & Sylvain Mangiarotti

CESBIO, UPS-CNRS-CNES-IRD, 18 av. Ed. Belin, 31401 Toulouse cedex 9, France
sylvain.mangiarotti@ird.fr

Résumé. Dans le contexte d'épidémies, il peut être utile de disposer d'approches de modélisation et d'analyses phénoménologiques qui puissent être mises en place à partir de jeux de données très restreints. Dans cette étude, la technique de modélisation globale est utilisée pour obtenir un jeu d'équations aux dérivées ordinaires pour modéliser la dynamique de l'épidémie de maladie à virus Ébola de 2014 en Afrique de l'Ouest. Deux observables sont considérées, le nombre d'infections détectées et le nombre de décès. La technique de modélisation globale permet d'obtenir un modèle chaotique de dimension 4 d'une grande complexité dynamique.

Abstract. It can be useful to have phenomenological approaches that can be applied to epidemics in the context of scarce data. In this study, the global modeling technique is used to obtain a set of ordinary differential equations for the dynamics of Ebola virus disease identified in 2014 in West Africa. Two observables are considered, the number of detected infections due to Ebola virus and the number of deaths. Based on this approach, a four-dimensional chaotic model that exhibits a complex dynamics is obtained.

1 Introduction

Dans le contexte d'épidémies de maladies émergentes comme les maladies à virus Ebola ou Marburg, qui présentent des taux de mortalité extrêmement élevés, il peut être utile de disposer d'outils numériques, que ce soit pour le suivi en temps réel des besoins potentiels immédiats en termes d'infrastructure d'urgence, de personnel soignant et de matériel, pour aider à identifier les éléments pathogènes et les réservoirs, ou pour mieux comprendre le transfert de ces maladies de ces réservoirs à l'homme.

Ce suivi est particulièrement difficile dans le cadre de maladies émergentes du fait de devoir faire face à la fois à des défis humanitaires parfois sans précédent et à des défis scientifiques, fondamentaux et appliqués, pour identifier les différents réservoirs et les variables impliqués, comprendre les multiples processus en jeu et trouver des moyens d'y remédier à court et à long termes. La difficulté de la tâche apparaît d'autant plus complexe qu'elle implique un très grand nombre de facteurs touchant, de façon très directe dans le cas de la maladie d'Ebola, à une très grande diversité de problématiques : problèmes de diagnostic, de management, de biologie, d'écologie, de société, de pratiques culturelles, de prévention, d'économie, de climatologie, d'environnement, etc. dont les imbrications sont multiples et d'une très grande complexité [1, 2].

Une grande majorité des modèles de maladies infectieuses s'appuie sur des modèles compartimentaux dont les concepts sont issus des travaux de pionniers de Kermack & McKendrick [3]. De tels modèles sont utilisés aujourd'hui pour les épidémies de maladie à virus Ebola [4]. Modéliser la dynamique d'une épidémie comme Ebola s'avère toutefois particulièrement délicat en raison de la variabilité observée d'une épidémie à l'autre, tout particulièrement lors d'une épidémie d'une ampleur sans précédent comme celle de 2014 [2].

Dans un tel contexte, il s'avère nécessaire d'adopter une approche très pragmatique d'adaptation des modèles dont on dispose pour pouvoir effectuer des estimations. Cette adaptation peut se faire par re-calibration des paramètres des modèles, leur formulation algébrique étant supposée invariante.

Disposer de modèles dont la formulation est connue apparaît d'une utilité évidente pour effectuer des simulations. Néanmoins, l'invariance présumée de la structure algébrique peut également s'avérer difficile à justifier dans le cadre de maladies émergentes pour lesquels les éléments les plus importants

à prendre en considération sont souvent mal identifiés, ou pour lesquels on ne dispose que de jeux de données restreints.

La modélisation par technique globale apparaît comme une approche complémentaire, intéressante à explorer en de tels contextes. Cette approche s'appuie sur la théorie des systèmes dynamiques non linéaires, permettant d'adopter un point de vue à la fois déterministe et non linéaire, et s'accordant pleinement aux problèmes de sensibilité aux conditions initiales (et de prévisibilité à horizon limité). La modélisation globale vise à obtenir des jeux d'équations permettant de reproduire la dynamique observée à partir de séries temporelles.

Cette approche a été récemment appliquée à l'épidémie de peste de Bombay en s'appuyant sur un jeu de données historiques [5]. L'approche s'est montrée particulièrement intéressante, permettant notamment d'obtenir un modèle — directement à partir de séries temporelles observées et sans faire d'hypothèse de structure — et dont tous les termes ont pu être interprétés.

L'objet du présent travail est de montrer que la technique de modélisation globale présente un potentiel pour la modélisation des épidémies de maladies à virus Ebola, même à partir d'un jeu de données réduit. Seules deux séries observationnelles sont utilisées pour appliquer l'approche — les nombres journaliers de cas d'infections et de décès — prises dans une phase très active de développement de l'épidémie (en 2014). Les données utilisées pour cette étude sont présentées en section 2. L'approche de modélisation est présentée en section 3. Les résultats sont présentés en section 4.

2 Contexte et données

L'épidémie de maladie à virus Ebola qui a frappé l'Afrique de l'Ouest en 2014 a été identifiée comme étant due à l'espèce Zaïre, la plus mortelle des cinq espèces de virus Ebola identifiées à ce jour, dont les taux de létalité sont proches de 70 % [6]. L'épidémie a démarré en Guinée dans une région située à proximité des frontières du Libéria et de la Sierra Leone, dans une zone relativement dense en population et bien desservie par un réseau routier récent. Ces éléments différencient nettement l'épidémie d'Afrique de l'Ouest des autres cas rapportés en Afrique et ont probablement joué un rôle très important bien que d'autres facteurs aient également pu contribuer à cette différenciation [7].

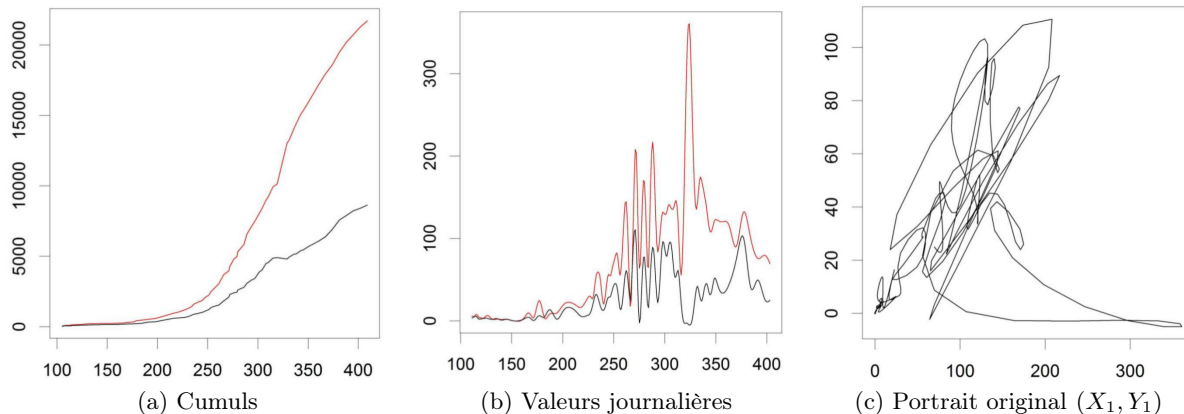


FIGURE 1. Nombres cumulés X_0 et Y_0 (a) et journaliers X_1 et Y_1 (b) d'infections (en rouge) et de décès (en noir) pour une région couvrant La Guinée, le Liberia et la Sierra Leone. La date de référence est prise au 6 décembre 2013 correspondant à la date d'infection du cas index [8]. Valeurs moyennes pour la fenêtre considérée ici : $\sim 71,23$ cas d'infection confirmés par jour, et $\sim 28,42$ décès par jour. (c) Portrait de phase original, projection (X_1, Y_1) . Source des données : [9].

L'objectif étant ici d'appliquer la technique globale à un jeu de données restreint, nous nous sommes appuyés sur deux variables fréquemment observées en épidémiologie : le nombre de cas infectés par la maladie et le nombre de décès en ayant résulté (rapportés ici sous la forme d'un cumul à partir du début de l'épidémie). Les données utilisées dans cette étude sont issues des rapports diffusés par l'Organisation Mondiale de la Santé [9]. La grande majorité des cas d'infection et de décès étant situés en Guinée, au Liberia et en Sierra Leone, les séries temporelles correspondant au cumul sur ces trois régions ont été utilisées pour l'analyse sur la période centrée sur l'année 2014 (du 23 mars 2014 au 21 janvier 2015).

Ces données résultent d'une collecte d'information en cours d'épidémie [9] basées sur des informations officielles rapportées par les ministères de la santé des pays concernés. Ces valeurs résultant d'une collecte en temps réel, elles sont sujettes à des modifications pouvant faire suite à des reclassifications, des investigations rétrospectives, et des délais dans la disponibilité des résultats de laboratoire [10]. Pour cette raison, les données peuvent présenter certaines contradictions. Dans le cas présent, ces contradictions sont apparues rares et assez ponctuelles et ont été résolues numériquement en éliminant les valeurs semblant incohérentes. Les deux séries temporelles ont alors été rééchantillonnées à un pas de temps régulier de 1 jour en utilisant une spline cubique (les valeurs retirées étant ainsi réinterpolées). Les courbes des deux variables X_0 et Y_0 ainsi obtenues sont présentées sur la figure 1 (a). Ces cumulés montrent que ~ 200 jours après le début de l'épidémie (la date d'infection du cas index ayant été identifiée au 6 décembre 2013 [8]), une inflexion très significative commence à être observée pour les deux variables X_0 et Y_0 pour atteindre un niveau de croissance moyen à partir de 250 jours. Au-delà de cette date, le cumul ne présente pas de ralentissement marqué si ce n'est un début d'inflexion au jour ~ 350 .

Les nombres journaliers d'infections et de décès ont été déduits des séries rééchantillonnées de cumul par simple dérivation en utilisant un filtre de type Savitzky–Golay [11]. Ce filtre a également permis de calculer les dérivées d'ordres supérieurs qui seront utilisées par la suite. Les nombres de cas d'infection X_1 et de décès Y_1 journaliers présentés sur la figure 1 (b) correspondent à une période où la progression de l'épidémie était très forte (du 23 mars 2014 au 21 janvier 2015). L'évolution temporelle des deux variables est d'une évidente complexité (avec notamment des oscillations d'amplitude et de durées très variables). En même temps, les deux variables X_1 et Y_1 semblent mettre en évidence des comportements temporels cohérents, les oscillations apparaissant souvent en phase quoique clairement différenciées en forme comme en amplitude. Malgré les possibles limites de ce jeu de données, les séries temporelles qui en résultent semblent suffisamment cohérentes pour tester la technique de modélisation globale présentée au paragraphe suivant.

3 Méthodologie

La technique de modélisation globale vise à obtenir, directement à partir de séries observationnelles, des modèles permettant de reproduire les comportements observés [12, 13]. Dans sa formulation différentielle, son objectif est d'obtenir un jeu d'équations aux dérivées ordinaires. Dans la présente étude, on propose d'utiliser la modélisation globale dans la formulation généralisée [14]

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_i = X_{i+1}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, (n_X - 1), \\ \vdots \\ \dot{W}_i = W_{i+1}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, (n_W - 1), \\ \dot{X}_{n_X} = F_X(X_1, \dots, X_{n_X}, \dots, W_1, \dots, W_{n_W}), \\ \vdots \\ \dot{W}_{n_W} = F_W(X_1, \dots, X_{n_X}, \dots, W_1, \dots, W_{n_W}), \end{array} \right. \quad (1)$$

où les variables X_1, \dots, W_1 sont les variables observées dont les séries temporelles seront utilisées pour reconstruire le modèle ; les X_i, \dots, W_i leurs dérivées successives ; les n_X, \dots, n_W sont les nombres de dérivation maximum utilisés pour chaque variable. Le modèle résultant est de dimension $m = \sum n_k$.

Dans le cas monovarié, on retrouve la forme canonique basée sur X_1 et ses dérivées X_i . Le cas multivarié simple (sans dérivées) [5] est obtenu en prenant $n_k = 1, \forall k \in \{X, \dots, W\}$.

L'une des difficultés spécifiques au cas généralisé est de devoir retrouver en plus des fonctions F_k (pour les n variables observées X_1 à W_1), les valeurs des paramètres n_X à n_W . Ne disposant d'aucune information a priori pour estimer ces paramètres, l'ensemble des modèles sera exploré de façon systématique en considérant successivement les modèles de dimension $m = 3, m = 4$, etc.

4 Analyses

L'espace des phases permet une représentation géométrique du comportement dynamique reconstruit à partir d'une ou de plusieurs séries temporelles ; un portrait de phase est une projection particulière de cet espace sur un plan choisi. Le portrait issu des données présenté sur la figure 1 (c) correspond à la projection (X_1, Y_1) . Bien que la majorité des valeurs se trouve le long d'une orientation diagonale, faisant ressortir une corrélation moyenne entre les deux variables, le portrait qui résulte de cette projection reste néanmoins très complexe et ne permet pas d'identifier de structure évidente, privilégiant l'idée d'une dynamique difficile à réduire à un petit nombre de dimensions.

L'approche présentée en section 3 a été appliquée aux variables X_1 et Y_1 en considérant le modèle de forme (1), pour $m = 3$ à $m = 5$. Seul le modèle quadridimensionnel ($n_X = 1$ et $n_Y = 3$)

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = a_1 Y_1 Y_3 + a_2 Y_1^2 - a_3 X_1 Y_1, \\ \dot{Y}_1 = Y_2, \\ \dot{Y}_2 = Y_3, \\ \dot{Y}_3 = b_1 + b_2 Y_3 + b_3 Y_3^2 + b_4 Y_2 + b_5 Y_2^2 + b_6 Y_1 + b_7 Y_1 Y_3 + b_8 Y_1 Y_2 + b_9 Y_1^2 \\ \quad + b_{10} X_1 + b_{11} X_1 Y_3 + b_{12} X_1 Y_2 + b_{13} X_1 Y_1 + b_{14} X_1^2, \end{cases} \quad (2)$$

a pu être obtenu, dont les paramètres a_i et b_i sont donnés dans le tableau 1. Le fait d'obtenir de ces deux variables un modèle en équation aux dérivées ordinaires apporte un argument fort de déterminisme de petite dimension pour la dynamique épidémiologique de cette maladie. D'autre part, le spectre des exposants de Lyapunov montre que cette dynamique présente une forte sensibilité aux conditions initiales ($\lambda_1 \gg 0$) : $\lambda_1 = 2,62 \pm 0,03$; $\lambda_2 = 0,02 \pm 0,03$; $\lambda_3 = -1,87 \pm 0,03$; $\lambda_4 = -30,2 \pm 0,06$. Ces deux conditions réunies nous apportent un argument très fort d'une dynamique chaotique.

Le déterminisme associé à cette forte sensibilité aux conditions initiales montre en effet que le terrain est très propice au développement de la maladie : une fois qu'une zone est touchée par l'épidémie, sa propagation est très fortement déterminée, et donc extrêmement difficile à stopper (il est important de rappeler que ce modèle a été obtenu pour la période de pleine croissance de l'épidémie, avant que la courbe ne s'infléchisse clairement, cf. Fig. 1 (a)).

a_1	$1,0894896 \times 10^{-4}$	b_1	5791,076327	b_4	-1921,271852	b_7	-0,057295177	b_{10}	-17867,66051	b_{13}	300,3855818
a_2	1,4135051035	b_2	3,744720590	b_5	-0,1614398401	b_8	14,52947493	b_{11}	-0,06616088061	b_{14}	179,1636118
a_3	-0,9815931187	b_3	$2,2511395 \times 10^{-5}$	b_6	34650,56048	b_9	-1056,142579	b_{12}	-24,91575291		

Tableau 1. Paramètres du modèle global, Éq. (2).

Trois projections de l'espace des phases du modèle global 4D, (voir Éq. (2)), sont présentées sur la figure 2. L'observation du portrait de phase ne permet pas de faire ressortir de structure simple. On note toutefois clairement, notamment suivant la projection (X_1, Y_2) présentée sur la figure 2 (b), deux types d'oscillations très distinctes : d'une part, des oscillations de faibles amplitudes qui se caractérisent par une progression très rapide du nombre de décès journaliers mais conduisant à une saturation rapide du nombre de cas d'infection ; d'autre part, des oscillations de fortes amplitudes, caractérisées par une croissance plus lente du nombre de décès et du nombre d'infections, mais avec une saturation beaucoup

plus tardive, à des niveaux pouvant être beaucoup plus hauts. Ces deux types d'oscillations ne sont pas faciles à expliquer en l'état mais pourraient résulter d'une imbrication de processus à temps de réaction différents qui pourraient correspondre à des contextes géographiques de propagations différents (urbain et suburbain), ou à des contextes sociétaux, selon que la maladie ait déjà été diagnostiquée et que les modes et les risques de propagation aient pu être communiqués ou non.

Portraits de phase du modèle global quadridimensionnel

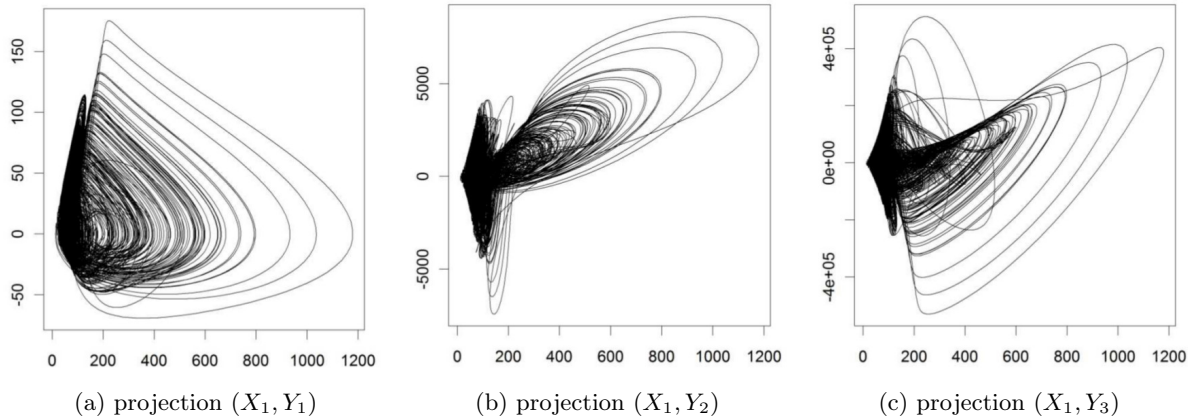


FIGURE 2. Portraits de phase du modèle global 4D présenté suivant trois projections différentes.

L'évolution temporelle du nombre de cas d'infections X_1 (Fig. 3) simulée par le modèle fait ressortir un comportement très complexe. Le terrain étant très propice au développement de la maladie, l'épidémie peut facilement être relancée alors que l'épidémie semblait terminée, comme l'illustre les nombreuses reprises de l'épidémie. Elle montre également que les pics observés au cours de la période 2014 étaient très loin des extrema potentiels simulés par le modèle, quoique l'occurrence de telles possibilités ne puisse être vérifiée. Notons que d'un point de vue théorique, le fait d'obtenir des amplitudes qui soient plus fortes que les observations n'a rien de contradictoire pour la présente méthode. Cette possibilité tient au fait d'ajuster le modèle dans l'espace des phases plutôt que de chercher à l'ajuster à la série temporelle.

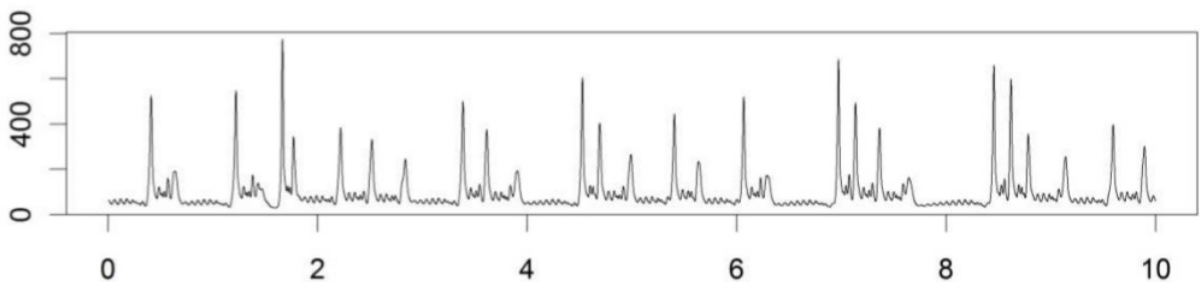


FIGURE 3. Simulation longue (en années) du nombre de cas d'infection par le virus Ebola.

Notons que le modèle est numériquement très stable puisque nous avons pu en tester l'intégration sur une durée de plus de cent ans. Cette stabilité numérique tient vraisemblablement au fait que, malgré la légère inflexion observée sur la fin de la fenêtre considérée (jour 350, Fig. 1 (a)), les efforts développés étaient malgré tout insuffisants pour endiguer la progression de la maladie. Cela montre également que

le risque d'endémie est encore très fort et ne doit pas être écarté, et que les précautions prises avant de déclarer la fin de l'épidémie sont pleinement justifiées.

5 Conclusions

La technique de modélisation globale est appliquée ici dans une formulation multivariée généralisée qui permet d'obtenir un modèle épidémiologique pour l'épidémie de maladie à virus Ebola en cours d'épidémie. La modélisation par technique globale semble bien présenter un potentiel très intéressant pour modéliser la dynamique épidémiologique de maladies émergentes. Le modèle obtenu permet de mettre en évidence un contexte très favorable à la propagation de la maladie (déterminisme du modèle et forte sensibilité aux conditions initiales). Le modèle obtenu met aussi en évidence une dynamique très complexe avec notamment deux types d'oscillations différentes. D'un point de vue topologique, ces oscillations correspondent très probablement à des variétés distinctes qu'il serait utile d'analyser. Bien que la caractérisation topologique d'objets quadridimensionnels reste un problème très difficile, on dispose de nouveaux éléments [14] qui pourraient servir à analyser cet objet.

Références

1. H. FELDMANN & T. W. GEISBERT, Ebola haemorrhagic fever, *NIH-PA*, **377**, 849–862 (2011).
2. K. A. ALEXANDER, C. E. SANDERSON, M. MARATHE, B. L. LEWIS, C. M. RIVERS, J. SHAMAN, J. M. DRAKE, E. LOFGREN, V. M. DATO, M. C. EISENBERG & S. EUBANK, What factors might have led to the emergence of Ebola in West Africa?, *PLoS Negl. Trop. Dis.*, **9**, e0003652 (2015).
3. W. O. KERMACK & A. G. MCKENDRICK, A contribution to the mathematical theory of epidemics, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **115**, 700–721 (1927).
4. J. SHAMAN, W. YANG & S. KANDULA, Inference and forecast of the current West African Ebola tweet outbreak in Guinea, Sierra Leone and Liberia, *PLoS Currents*, **6**, Oct. 31 (2014).
5. S. MANGIAROTTI, Low dimensional chaotic models for the plague epidemic in Bombay (1896–1911), *Chaos Soliton. Fract.*, **81**, 184–196 (2015).
6. M. D. VAN KERKHOVE, A. I. BENTO, H. L. MILLS, N. M. FERGUSON & C. A. DONNELLY, A review of epidemiological parameters from Ebola outbreaks to inform early public health decision-making, *Sci. Data*, **2**, 150019 (2015).
7. G. D. MAGANGA, J. KAPETSHI, N. BERTHET, B. KEBELA ILUNGA, F. KABANGE P. MBALA KINGEBENI, V. MONDONGE, J.-J. T. MUYEMBE, E. BERTHERAT, S. BRIAND, J. CABORE, A. EPELBOIN, P. FORMENTY, G. KOBINGER, L. GONZÁLEZ-ANGULO, I. LABOUBA, J.-C. MANUGUERRA, J.-M. OKWO-BELE, C. DYE & E. M. LEROY, Ebola virus disease in the Democratic Republic of Congo, *New Engl. J. Med.*, **371**, 2083–2091 (2014).
8. S. BAIZE, D. PANNETIER, L. OESTEREICH, T. RIEGER, L. KOIVOGUI, ET AL., Emergence of Zaire Ebola virus disease in Guinea – Preliminary report. *New Engl. J. Med.*, **371**, 1418–1425 (2014).
9. Centers for Disease Control and Prevention (2014), Ebola (Ebola Virus Disease). <http://www.cdc.gov/vhf/ebola/outbreaks/2014-west-africa/previous-case-counts.html>. Consulté le 25 Janvier 2015.
10. World Health Organization (2014), Ebola Response Roadmap. <http://apps.who.int/iris/bitstream/10665/131596/1/EbolaResponseRoadmap.pdf>. Consulté le 25 Janvier 2015.
11. A. SAVITZKY & M. J. GOLAY, Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures, *Anal. Chem.*, **36**, 1627–1639 (1964).
12. G. GOUESBET & C. LETELLIER, Global vector field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 -approximation on nets, *Phys. Rev. E*, **49**, 4955–4972 (1994).
13. S. MANGIAROTTI, R. COUDRET, L. DRAPEAU & L. JARLAN, Polynomial search and global modeling: two algorithms for modeling chaos, *Phys. Rev. E*, **86**, 046205 (2012).
14. S. MANGIAROTTI, *Modélisation globale et caractérisation topologique de dynamiques environnementales : de l'analyse des enveloppes fluides et du couvert de surface de la Terre à la caractérisation topodynamique du chaos*, Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Toulouse 3 (2014).

Un modèle mathématique d'interaction liquide–vapeur

François James¹ & Hélène Mathis²

¹ Mathématiques — Analyse, Probabilités, Modélisation — Orléans (MAPMO), Université d'Orléans & CNRS UMR 7349, BP 6759, F-45067 Orléans Cedex 2, France

² Laboratoire Jean Leray, Université de Nantes & CNRS UMR 6629, BP 92208, F-44322 Nantes Cedex 3, France
francois.james@univ-orleans.fr

Résumé. On propose une modélisation de la transition de phase liquide–vapeur autorisant l'apparition d'états métastables. Dans un premier temps, en appliquant le second principe, on formule un problème de minimisation sous contraintes sur une énergie non convexe du système. Cette approche statique permet de retrouver les équilibres « classiques » que sont les phases pures liquide/vapeur et les états de coexistence. Puis en introduisant une dépendance en temps, on définit un système dynamique dont les équilibres en temps long capturent à la fois les équilibres classiques et les états métastables. L'étude de ces équilibres s'appuie sur une caractérisation précise des bassins d'attraction.

Abstract. We propose a model for liquid–vapor phase transition which allows the apparition of metastable states. In a first step, applying the second principle, we formulate a constrained minimization problem on a non convex energy of the system. This static approach allows to recover “classical” equilibria, that is pure phases and coexistence states. Next, introducing a time dependance, we define a dynamical system whose long time equilibria catch both the classical equilibria and the metastable states. The study of these equilibria relies on a precise study of the attraction basins.

1 Introduction

Nous proposons une formulation mathématique d'un corps pur se présentant sous forme liquide ou vapeur et prenant en compte les états purs, la coexistence ainsi que les états métastables. Habituellement la stratégie consiste à utiliser un modèle « bi-fluide », chaque phase étant décrite par une énergie convexe. D'après le second principe de la thermodynamique, l'énergie du système diphasique est donnée par le minimum de l'énergie totale et elle coïncide avec l'enveloppe convexe des énergies partielles. On obtient ainsi une loi de pression monotone, constante dans la zone de coexistence, mais qui exclut de fait les états métastables.

Toujours basé sur la formulation de Gibbs et le second principe, le modèle que nous proposons se présente également comme un problème de minimisation sous contraintes, mais pour une seule énergie *non convexe*, en l'espèce celle de van der Waals. L'analyse de ce problème permet dans un premier temps de retrouver la règle des phases de Gibbs, sachant qu'on ne présuppose pas connu le nombre de phases en présence. Les conditions nécessaires d'optimalité permettent de caractériser tous les états d'équilibre, aussi bien stables qu'instables (zone spinodale). Les extrema globaux sont les états stables : états purs et coexistence, et la loi des aires de Maxwell apparaît comme une condition nécessaire d'optimalité. On retrouve ainsi les équilibres classiques (phases pures et coexistence), mais on ne capture pas les extrema locaux qui sont les états métastables.

Le fait est que cette caractérisation statique de l'ensemble des états d'équilibre ne permet pas d'atteindre les états métastables. Nous introduisons donc une dépendance temporelle et proposons un système dynamique qui répond à cette question. En effet, ses états d'équilibre sont bien ceux identifiés précédemment (aussi bien stables qu'instables). En revanche, les états thermodynamiquement intéressants sont tous les équilibres *asymptotiques* du système. En particulier, dans les domaines de densité qui autorisent coexistence et états métastables, nous avons une caractérisation précise en termes de bassin d'attraction.

2 Thermodynamique du fluide seul

On s'intéresse à un fluide de masse M occupant un volume V , supposé isotherme. Suivant le formalisme de Gibbs [2], le fluide est à l'équilibre isotherme si l'énergie libre de Helmholtz F s'écrit $F(M, V)$, avec une fonction F positivement homogène de degré 1 des variables extensives M et V , telle que

$$\forall \lambda > 0, \quad F(\lambda M, \lambda V) = \lambda F(M, V). \quad (1)$$

La fonction F n'est pas supposée convexe ici, et il n'est pas encore question d'équilibre stable. Par contre on suppose que F admet des dérivées partielles, qui nous permettent de définir la pression p et potentiel chimique μ :

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V}(M, V), \quad \mu = \frac{\partial F}{\partial M}(M, V). \quad (2)$$

Ceci n'est autre que la classique relation thermodynamique isotherme $dF = -p dV + \mu dM$.

L'exemple type d'une fonction d'énergie non convexe est fourni par une loi de van der Waals, sous la forme

$$F(M, V) = -\frac{aM^2}{V} + RT \left(M \log \frac{M}{V - Mb} - M \right), \quad (3)$$

pression et potentiel chimique étant donnés par

$$p \left(\frac{M}{V} \right) = -\frac{aM^2}{V^2} + RT \frac{M}{V - Mb}, \quad \mu \left(\frac{M}{V} \right) = -2\frac{aM}{V} + RT \log \frac{M}{V - Mb} + RT \frac{Mb}{V - Mb}. \quad (4)$$

En introduisant la densité $\rho = M/V$, et en posant $f(\rho) = F(M/V, 1) = F(M, V)/V$, on écrit une forme intensive de la loi d'état. Un calcul simple permet d'obtenir pression et potentiel chimique en fonction de ces variables. Au prix d'un léger abus de notation, on a

$$\mu(\rho) = f'(\rho), \quad p(\rho) = \rho f'(\rho) - f(\rho). \quad (5)$$

La loi de van der Waals prend alors la forme

$$\begin{aligned} f(\rho) &= -a\rho^2 + RT\rho \left(\log \left(\frac{\rho}{1 - b\rho} \right) - 1 \right), \\ p(\rho) &= -a\rho^2 + \frac{\rho RT}{1 - b\rho}, \quad \mu(\rho) = -2a\rho + RT \log \frac{\rho}{1 - b\rho} + RT \frac{b\rho}{1 - b\rho}. \end{aligned} \quad (6)$$

Les propriétés classiques de la loi de pression de van der Waals sont résumées sur la figure 1. On travaillera ici sur la version réduite de la loi de van der Waals (cf. [1]), où la température critique est normalisée à 1, et la densité varie entre 0 et 3.

3 Modèle diphasique

On suppose que le système est constitué d'un nombre I de « copies » (ce ne sont pas encore des phases) du corps pur, $I \geq 1$ arbitraire pour le moment. Chaque copie a son volume V_i et sa masse M_i , $1 \leq i \leq I$, et est supposée à l'équilibre, avec la même fonction d'énergie $F(M_i, V_i)$, non nécessairement convexe, mais positivement homogène de degré 1. Puisque l'on travaille en variables extensives, l'énergie libre totale est la somme des énergies partielles et l'on cherche les états minimisant cette énergie, sous contraintes de volume total et de masse totale fixés. On écrit donc le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{I \geq 1, M_i \geq 0, V_i \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^I F(M_i, V_i); \sum_{i=1}^I V_i = V, \sum_{i=1}^I M_i = M \right\}. \quad (7)$$

Dans ce problème le nombre de copies n'est pas fixé a priori. Des résultats abstraits d'analyse convexe montrent cependant que ce problème définit une fonction *convexe* des seules variables (M, V) , qui est

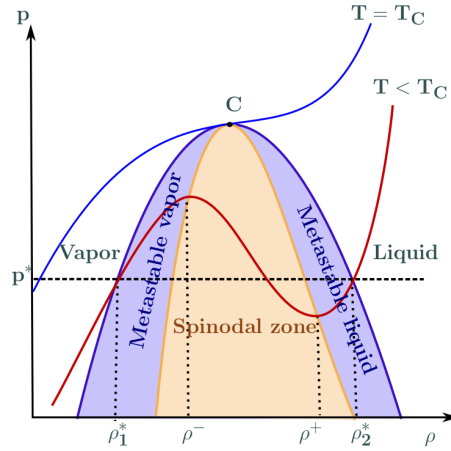


FIGURE 1. Diagramme de phase pour une loi d'état de van der Waals dans le plan (p, ρ) . En deçà de la température critique T_C , la courbe isotherme est décroissante dans la zone spinodale, délimitée par les densités $\rho^- < \rho^+$. Les densités ρ_1^* et ρ_2^* délimitent les frontières entre zone de coexistence et états purs stables (la construction est donnée par la proposition 3 ci-dessous).

en fait la convexe régularisée de la fonction F , souvent notée F^{**} . Et, plus précisément, le théorème de Carathéodory (voir par exemple [5, Chap. 17]), précise la représentation de cette fonction : il faut au plus deux copies pour la déterminer complètement, soit $I \leq 2$. Ceci donne une forme de la *règle des phases de Gibbs* (cf. [4, Chap. 9]), qui donne bien dans ce contexte l'existence de deux phases au plus. Avec une variable supplémentaire, par exemple l'énergie interne, nous aurions trouvé $I \leq 3$, soit 3 phases possibles. Si la fonction F est convexe, on trouve nécessairement $I = 1$, soit existence d'une unique phase. Munis de ce résultat, nous prenons dorénavant $I = 2$ et désignons par le mot *phase* les « copies » précédentes.

Nous reformulons le problème initial en variables intensives et en tenant compte de la règle des phases. En introduisant les densités partielles $\rho_i = M_i/V_i$ et les fractions volumiques $\alpha_i = V_i/V$, l'énergie libre s'écrit alors $\alpha_1 f(\rho_1) + \alpha_2 f(\rho_2)$, et le problème (7) devient

$$\inf \{ \alpha_1 f(\rho_1) + \alpha_2 f(\rho_2) \mid \rho_i \geq 0, \quad \alpha_i \in [0, 1] \}, \quad (8)$$

sous les contraintes

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 = \rho, \quad (9)$$

qui expriment respectivement la conservation du volume et de la masse. Les phases pures sont données soit par $\alpha_i = 0$ (ρ_j indéterminé pour $j \neq i$), soit par $\rho_1 = \rho_2$ (α_i quelconques). On choisit d'exclure ce dernier cas en supposant, sans restriction comme on le verra par la suite, que

$$\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \quad \rho_1 < \rho_2. \quad (10)$$

En résolvant (9), on obtient alors les relations suivantes, dont on déduit en particulier que les phases pures sont données par $\rho_1 = \rho$ ou $\rho_2 = \rho$:

$$\alpha_1 = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 - \rho_2}. \quad (11)$$

Moyennant quoi, en introduisant les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes (9), on obtient les états d'équilibre possibles comme minimisateurs du problème (8) :

Lemme 1. *Les états d'équilibre sont*

1. **États pur liquide ou gazeux** : $\alpha_1 = 0$ (resp. $\alpha_2 = 0$), avec $\rho_2 = \rho$, $\rho_1 < \rho$ arbitraire (resp. $\rho_1 = \rho$, $\rho < \rho_2$ arbitraire);

2. **États de coexistence** : $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$, avec (ρ_1, ρ_2) vérifiant $\mu(\rho_1) = \mu(\rho_2)$ et $p(\rho_1) = p(\rho_2)$.

Un calcul simple permet de retrouver une caractérisation des états de coexistence :

Proposition 3. *Si $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$, les deux énoncés suivants sont équivalents et définissent de manière unique le couple de densités $\rho_1^* < \rho_2^*$.*

1. *Égalité des pressions et des potentiels chimiques*

$$\mu(\rho_1^*) = \mu(\rho_2^*), \quad (12)$$

$$p(\rho_1^*) = p(\rho_2^*). \quad (13)$$

2. *La loi des aires de Maxwell sur le potentiel chimique*

$$\int_0^1 \mu(\rho_2 + t(\rho_1 - \rho_2)) dt = \mu(\rho_1^*) = \mu(\rho_2^*). \quad (14)$$

La loi des aires est plus connue exprimée sur la pression, ce serait le cas dans une formulation en volume spécifique $\tau = V/M$.

Insistons sur le fait que ce résultat caractérise *tous* les états d'équilibre du système, qu'ils soient instables (zone spinodale), métastables ou stables (corps purs et coexistence). Le problème (8)–(9) définit comme précédemment la convexe régularisée f^{**} de f , fonction convexe par construction. Les états dont l'énergie libre vaut $f^{**}(\rho)$ sont donc, suivant Gibbs, des états stables : on retrouve les états purs, ainsi que les états de mélange donnés par la loi des aires.

Ce faisant, on élimine les minima locaux de la fonction, qui sont les états métastables, pour lesquels la pression est encore croissante. Landau & Lifshitz [4, §21] proposent une caractérisation de ces états : « [...] we must distinguish between **metastable** and **stable** equilibrium states. A body in a metastable state **may not return to it** after a sufficient deviation. » C'est cette caractérisation essentiellement dynamique que nous nous proposons de retrouver maintenant, en construisant un système dynamique dont les bassins d'attraction correspondent aux divers équilibres possibles.

4 Un système thermo-dynamique

On cherche à construire un système dynamique pour l'évolution temporelle des quantités (ρ, ρ_1, ρ_2) . L'évolution de la densité totale ρ est donnée pour simplifier par la conservation de la masse, soit $\dot{\rho} = 0$. Pour le moment, ρ est donc un paramètre fixé au temps $t = 0$, et l'on s'intéresse donc à l'évolution temporelle de la répartition des masses entre les 2 phases.

On demande ensuite deux choses :

- que le système admette comme états d'équilibre les états précédemment obtenus dans le lemme 1 ;
- que l'énergie libre de Helmholtz soit dissipée le long des trajectoires.

Ici, la définition de l'énergie libre doit être comprise comme une fonction de ρ, ρ_1, ρ_2 , soit $\mathcal{F}(\rho, \rho_1, \rho_2) = \alpha_1(\rho, \rho_1, \rho_2)f(\rho_1) + \alpha_2(\rho, \rho_1, \rho_2)f(\rho_2)$, les α_i étant donnés par (11). Dans ces conditions, on vérifie que

$$\nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \begin{pmatrix} f(\rho_1) - f(\rho_2) \\ \alpha_1(\mathbf{r})f(\rho_2|\rho_1) \\ -\alpha_2(\mathbf{r})f(\rho_1|\rho_2) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

où $f(\rho_2|\rho_1)$ est l'énergie libre relative de la phase 2 par rapport à la phase 1

$$f(\rho_2|\rho_1) := f(\rho_2) - f(\rho_1) - \mu(\rho_1)(\rho_2 - \rho_1). \quad (16)$$

Nous proposons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\rho} = 0, \\ \dot{\rho}_1 = -(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)f(\rho_2|\rho_1), \\ \dot{\rho}_2 = +(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)f(\rho_1|\rho_2). \end{cases} \quad (17)$$

Clairement les états vérifiant les conditions du lemme 1 annulent le second membre et sont donc des états d'équilibre pour le système. Le facteur $(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)$ permet d'assurer que l'hypothèse (10) reste vérifiée pour tout temps si elle l'est initialement. Enfin, l'expression (15) du gradient permet de calculer l'évolution de l'énergie libre le long des trajectoires, qui est bien négative sous l'hypothèse (10) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(\rho(t), \rho_1(t), \rho_2(t)) &= \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} [\alpha_1(\mathbf{r})f(\rho_2|\rho_1)\dot{\rho}_1 - \alpha_2(\mathbf{r})f(\rho_1|\rho_2)\dot{\rho}_2] \\ &= -(\rho - \rho_1) [\alpha_1(\mathbf{r})f(\rho_2|\rho_1)]^2 + (\rho - \rho_2) [\alpha_2(\mathbf{r})f(\rho_1|\rho_2)]^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Le comportement en temps long du système dynamique est précisé dans le résultat suivant. On y retrouve non seulement les états d'équilibre attendus, mais aussi les bassins d'attraction correspondants.

Théorème 1 *Supposons que les données initiales $(\rho(0), \rho_1(0), \rho_2(0))$ du système (17) vérifient (10). Alors les états d'équilibre sont donnés par*

1. **zone spinodale** : $\rho_1^* < \rho(0) < \rho_2^*$. L'unique état d'équilibre est (ρ_1^*, ρ_2^*) caractérisé par la proposition 3, avec α_i donnés par (11). Le bassin d'attraction est $(0, \rho) \times (\rho, 3)$.
2. **états purs gazeux** : $\rho(0) < \rho_1^*$ (resp. **états liquides purs** : $\rho(0) > \rho_2^*$). L'ensemble des états d'équilibre est $\{\rho\} \times (\rho, 3)$, avec $\alpha_1 = 1$ (resp. $(0, \rho) \times \{\rho\}$ avec $\alpha_2 = 1$). Le bassin d'attraction est $(0, \rho) \times (\rho, 3)$.
3. **états métastables** : $\rho_1^* \leq \rho(0) \leq \rho^-$ (resp. $\rho^+ \leq \rho(0) \leq \rho_2^*$). Il y a deux ensembles d'états d'équilibre
 - (a) **perturbation intra-phase** : $\rho_2(0) \leq \rho^-$ (resp. $\rho_1(0) \geq \rho^+$). L'ensemble des états d'équilibre est alors $\{\rho\} \times (\rho, \rho^-)$, avec $\alpha_1 = 1$ (resp. $(\rho^+, \rho) \times \{\rho\}$ avec $\alpha_2 = 1$). Le bassin d'attraction est alors $(0, \rho) \times (\rho, \rho^-)$ (resp. $(\rho^+, \rho) \times (\rho, 3)$).
 - (b) **perturbation extra-phase** : $\rho^- \leq \rho_2(0) \leq \rho_2^*$ (resp. $\rho^+ \geq \rho_1(0) \geq \rho_1^*$). Il y a alors un unique équilibre (ρ_1^*, ρ_2^*) , caractérisé par la proposition 3, avec α_i donnés par (11). Le bassin d'attraction est $(0, \rho) \times (\rho^-, 3)$ (resp. $(0, \rho^+) \times (\rho, 3)$).

Les bassins d'attraction sont caractérisés à l'aide de fonctions de Lyapunov, et illustrés par la figure 2. En particulier, la figure 2(a) montre que, dans le domaine de densité $\rho_1^* \leq \rho \leq \rho_-$ où l'on peut avoir coexistence ou métastabilité, il y a deux bassins d'attraction. Ceci est la formalisation de la citation de Landau & Lifshitz ci-dessus : tant que la donnée initiale reste dans le bassin métastable (\\) l'équilibre asymptotique est un corps pur, mais une « déviation suffisante » envoie dans l'autre bassin d'attraction (//) et l'équilibre sera un mélange.

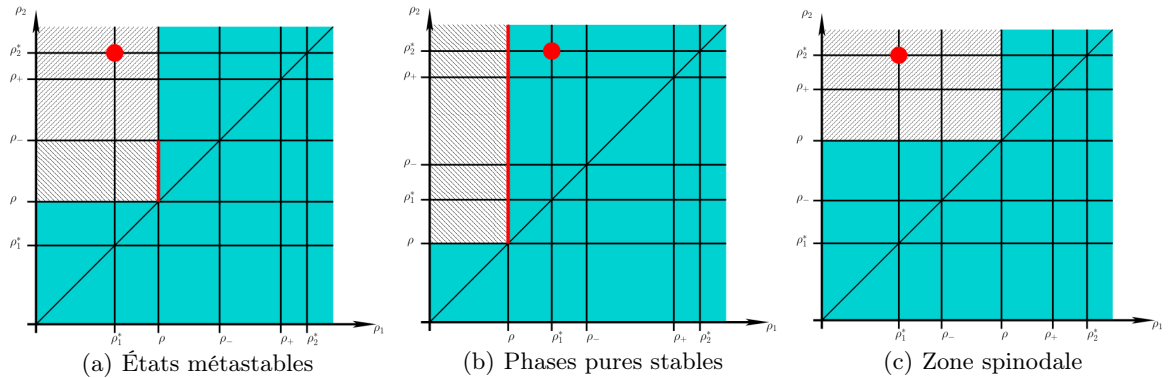


FIGURE 2. États d'équilibre (en rouge) et bassins d'attraction (hachures : \\) métastable; //) coexistence) du système (17). Les figures (a) et (b) correspondent à des états purs gazeux, les états liquides conduisent à des images similaires.

Nous proposons pour terminer un exemple de réalisation numérique pour ce système, en utilisant une méthode de différentiation rétrograde. On se donne 50 densités initiales $\rho(0)$ entre ρ_1^* et ρ_- , c'est-à-dire dans la zone métastable et pour chacune d'elle, on calcule la solution du système au temps 10^3 . Les données initiales sont $\rho_1(0) = \rho(0) - 0,1$ et $\rho_2(0) = \rho(0) + 0,2$, de sorte que l'on observe à la fois des perturbations à l'intérieur et à l'extérieur du bassin d'attraction. On constate sur la figure 3 que pour $\rho(0) < 0,45$ l'équilibre est atteint pour la pression de van der Waals, la perturbation initiale restant dans le domaine de métastabilité, alors que pour $\rho(0) > 0,45$ on atteint la ligne de Maxwell.

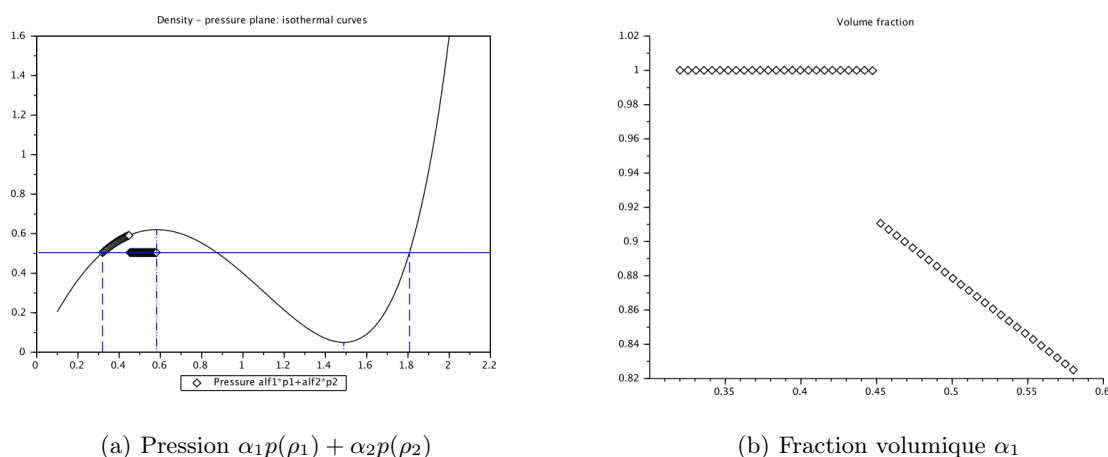


FIGURE 3. Simulation numérique du système (17) : perturbation d'une donnée initiale $\rho(0)$ métastable gazeuse.

5 Conclusion

Le modèle présenté ici permet de calculer les états stables et métastables d'un corps pur en régime isotherme. C'est un modèle strictement dynamique, une caractérisation statique ne permet pas de récupérer les états métastables. C'est pour l'instant un modèle d'école, il a vocation à être généralisé à des cas plus complexes : non isotherme, réactions chimiques... Il n'est pas vu non plus comme une fin en soi et ses interactions avec des modèles moyennés sont à explorer. Par exemple, il a été utilisé dans [3] comme un terme de relaxation vers l'équilibre dans un système d'Euler isotherme, permettant des calculs de transition de phase (cavitation, nucléation) dans ce contexte. Il serait intéressant d'étudier les liens avec par exemple l'équation de Cahn–Hilliard ou le problème de Stefan.

Références

1. H. B. CALLEN, *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics, second edition*, Wiley and Sons (1985).
2. J. W. GIBBS, *The Collected Works of J. Willard Gibbs, vol I: Thermodynamics*, Yale University Press (1948).
3. F. JAMES & H. MATHIS, A relaxation model for liquid-vapor phase change with metastability, preprint <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01178947>
4. L. D. LANDAU & E. M. LIFSHITZ, *Course of Theoretical Physics, Vol. 5: Statistical Physics*, Pergamon Press (1968).
5. R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton (1997).

Instabilité interfaciale sous érosion granulaire

Pierre Jop¹, Gautier Lefebvre¹ & Aymeric Merceron¹

Surface du Verre et Interfaces, CNRS/Saint-Gobain, 39 quai Lucien Lefranc, 93303 Aubervilliers
 pierre.jop@saint-gobain.com

Résumé. L'érosion des sols par des ruissellements de surfaces est un phénomène couramment observé qui peut mener à des morphologies variées : cascades, ravines, gorges, bassins. Pour un éboulement de terrain, l'écoulement est constitué cette fois-ci d'un ensemble dense de blocs, de cailloux, de grains. Modéliser l'érosion du sol lors d'un tel événement est primordial pour déterminer la vitesse du front ou sa masse. Nous avons étudié expérimentalement l'évolution d'un tas modèle cohésif constitué de billes de verre en interaction capillaire soumis à un écoulement granulaire. Il en résulte une érosion lente du tas. Nous avons mis en évidence que cette érosion peut être régulière, en maintenant la pente initiale parallèle à elle-même si le débit ou la pente sont suffisamment faibles. Au contraire, pour des pentes ou des débits élevés, l'interface plane se déstabilise et une succession de marches apparaît. Cette série de marches continue de s'éroder plus lentement et migre vers l'amont. Leur morphologie est directement liée à la nature granulaire de l'écoulement. Cette instabilité est le pendant granulaire de celle qui mène à la formation des cascades des torrents. Nous montrons premièrement que le mécanisme de l'instabilité est inertiel et nous proposons un modèle pour caractériser l'évolution des taux de croissance. Deuxièmement, cette modélisation implique que le moteur de l'érosion lui-même est l'inertie de l'écoulement. Les perspectives de ce travail autoriseraient une meilleure quantification de l'érosion naturelle par des lits granulaires denses.

Abstract. The complex interplay between the topography and the erosion and deposition phenomena is a key feature to model granular flows such as landslides. Here, we investigate the instability that develops during the erosion of a wet granular pile by a dry dense granular flow. The morphology and the propagation of the generated steps are analyzed in relation to the specific erosion mechanism. The selected flowing angle of the confined flow on a dry heap appears to play an important role both in the final state of the experiment, and for the shape of the structures. We show that the development of the instability is governed by the inertia of the flow through the Froude number. We model this instability and predict growth rates that are in agreement with the experimental results. We hope these results will provide better models for natural erosion.

1 Introduction

Comprendre le transport de sédiments dans la nature est essentiel pour modéliser l'évolution du paysage, tels que les processus de transport dans les rivières et leur formation [1, 2]. Des motifs se développent spontanément au fond du lit des rivières en fonction du couplage entre l'écoulement et la géométrie du lit aux travers des lois d'érosion ou de transport [3, 4]. Les écoulements granulaires brutaux tels que les glissements de terrain peuvent également modifier le sol sous-jacent. Cependant, contrairement au cas des fluides, les mécanismes d'érosion sont moins claires lorsque le matériau granulaire est dense. Ainsi des études récentes ont mis l'accent sur l'évolution de l'interface entre une couche érodable et un écoulement granulaire [5–7], en particulier dans le but de modéliser les taux d'entraînement, les vitesses et les distances d'arrêt. En outre, bien que les instabilités de lits de rivières aient été largement caractérisés [8], les études sur les instabilités dans les écoulements granulaires se sont généralement concentrées sur la couche fluide, décrivant ainsi les fronts avalanche, les ondes de surfaces, l'évolution de perturbations d'épaisseurs [9–12], permettant une meilleure compréhension des écoulements granulaires. En conséquence, peu de travaux ont été consacrés à l'évolution d'un lit granulaire sous l'effet d'une contrainte mécanique [13, 14]. Enfin, alors que les études antérieures sur le taux d'érosion d'un média de cohésion par un écoulement granulaire dense se sont concentrées sur les propriétés physiques des matériaux cohésifs (ponts liquides, résistance en traction, module élastique) [7, 15], le couplage entre le mécanisme de l'érosion et de la morphologie de l'interface avec le flux granulaire est encore une question ouverte.

2 Dispositif expérimental

Nous utilisons des billes de verre de $300\ \mu\text{m}$ de diamètre. Celles-ci sont mélangées avec une faible quantité d'eau contrôlée pour les rendre cohésives. Ce matériau est inséré dans une cellule de faible épaisseur en verre (6 mm et 12 mm), pour former un tas cohésif homogène ayant une surface lisse de pente bien définie et de longueur 30 cm environ. Des billes sèches s'écoulent ensuite par dessus l'interface à débit imposé (Fig. 1 (a)). Les billes sèches érodent progressivement le tas et la position ainsi que la forme de l'interface est suivie par caméra au cours du temps. Celle-ci peut rester parallèle à la pente initiale θ_i ou bien se destabiliser en formant des marches comme le montrent les images de la figure 1 (b). À la fin de l'expérience, l'érosion s'arrête lorsque la pente a atteint une valeur d'équilibre θ_f .

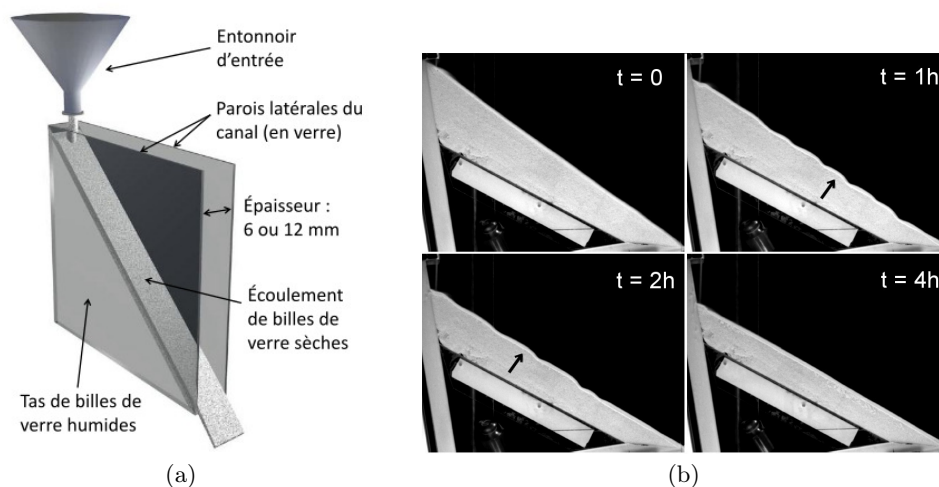


FIGURE 1. (a) Schéma de l'expérience (@ J. Roman). (b) Évolution de l'interface avec le temps, dans une situation présentant une destabilisation sous l'effet de l'érosion, débit de $3,3\ \text{g}\cdot\text{s}^{-1}$ et inclinaison de $35,8^\circ$.

3 Morphologie des marches

La figure 2 (a) montre la superposition de différents profils toutes les 15 minutes. Nous observons premièrement la propagation des marches vers l'amont à vitesse constante. De plus leur forme est conservée et le dos des marches ne semble plus être érodé, seulement leur face abrupte. Les profils de différents marches sont superposés sur la figure 2 (b). Nous remarquons que bien qu'elles aient des hauteurs différentes, la forme du front est identique, ainsi que la pente du dos des marches. Les lignes rouges montrent une pente identique à la pente finale et une parabole correspondant à une chute libre à partir d'une vitesse de $22\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$, du même ordre que la vitesse moyenne de $11\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$. Pour comprendre l'origine de cette pente sélectionnée, nous les comparons à celles bien connues des écoulements de matériaux granulaires secs sur tas sec dans la même configuration confinée. La figure 2 (c) permet de conclure que l'érosion s'arrête lorsque l'écoulement atteint un état d'équilibre (son épaisseur maximale) et qu'elle n'est donc pas limitée par la nature du matériau cohésif constituant le tas. Ce résultat confirme le fait que ces processus d'érosion sont liés à la nature fluctuante des forces dans les milieux granulaires [7].

4 Propagation des marches

Nous reportons le diagramme spatio-temporel des positions des maxima et des minima par rapport à la pente moyenne sur la figure 3 (a). Les différentes caractéristiques des marches varient au cours du temps.

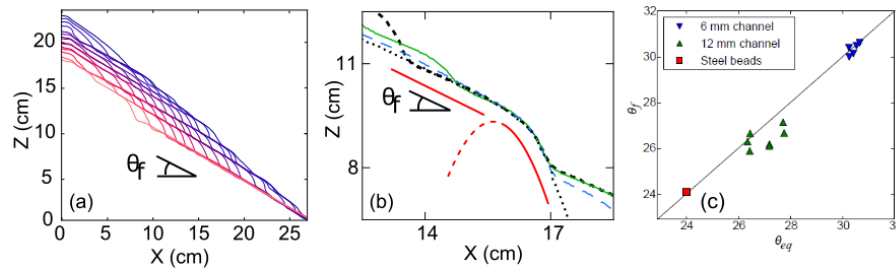


FIGURE 2. (a) Profils successifs espacés de 15 min pour un angle initial de $39,4^\circ$ du bleu vers le rouge. (b) Superposition de plusieurs profils de marches obtenus à des pentes différentes. Les lignes rouges correspondent à la pente finale et à une portion de parabole. (c) Angle final en fonction de l'angle d'équilibre observé pour un écoulement stationnaire au même débit sur un tas sec.

Un régime transitoire de formation des structures a d'abord lieu, qui occupe quelques dizaines de minutes. Après cette phase, un régime stationnaire est atteint, où les caractéristiques des marches sont relativement stables. D'autre part, des phénomènes ponctuels se produisent, comme la fusion de deux marches que l'on peut voir avant 50 minutes, dans la partie aval du canal, entre 30 et 35 cm. Ces événements ne sont pas génériques dans les différentes expériences et semblent dépendants des hétérogénéités initiales du système. Au milieu du canal, les structures présentent une forme et un comportement similaire. Les courbes sont parallèles, ce qui indique des vitesses de propagation semblables, et les tailles de marches sont également du même ordre.

À partir des diagrammes spatio-temporels, on peut déduire facilement la vitesse des structures qui est simplement la pente des courbes dans ces coordonnées. Comme on peut le voir, la vitesse diminue avec la pente initiale du tas.

Nous pouvons voir sur la figure 3 (b) que les plus grandes marches sont globalement plus lentes pour un même débit. Cela pourrait être cohérent avec le fait qu'il faut éroder plus de matière pour transporter une marche de plus grande taille. Mais une autre interprétation est préférable. Pour les plus petites marches, l'écoulement ne décolle pas et l'écoulement au pied de la marche peut ralentir l'écoulement en amont en le contraignant à rester dense, donc à avoir un taux d'érosion élevé. Au contraire, lorsque l'écoulement décolle, un régime gazeux se développe et le taux d'érosion diminue fortement. Ceci se produit de manière identique pour toutes les hautes marches ce qui explique que les grandes marches se déplacent à la même vitesse et de façon plus lente que les toutes petites.

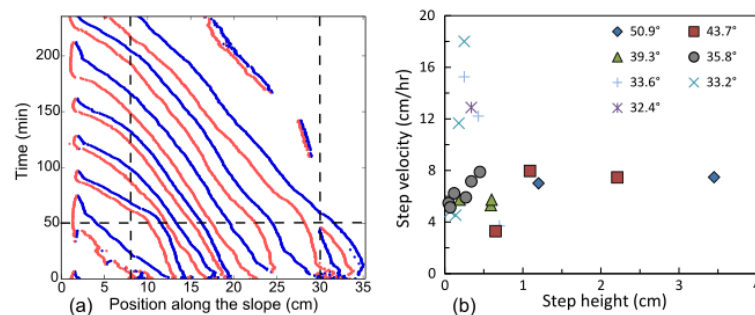


FIGURE 3. (a) Position des maxima et des minima par rapport à la pente moyenne montrant la vitesse de dérive vers l'amont constante en dehors des effets de bords. (b) Vitesse moyenne de remontée des marches dans le régime stationnaire.

5 Instabilité

5.1 Nombre de Froude

Cette instabilité rappelle à plusieurs égards celle observée dans les lits de torrents ou de rivières sur de fortes pentes [3]. Dans ces cas là, la surface du sol présente généralement une succession de bassins et de cascades. Cette instabilité est pilotée par le nombre de Froude $Fr = u/\sqrt{gh \cos \theta_i}$ où u est la vitesse moyenne, h la hauteur de l'écoulement et g la gravité. Lorsque l'inertie de l'écoulement est trop importante, il ne s'adapte plus instantanément à la morphologie du sol et un déphasage apparaît entre les position du maximum de vitesse et de la plus forte pente. Nous vérifions tout d'abord qu'un mécanisme similaire est à l'oeuvre ici en traçant les nombres de Froude de nos écoulements (Fig. 4 (a)). Les expériences présentant une déstabilisation semblent se regrouper au-dessus d'une ligne de $Fr = 0,75$.

Pour aller plus avant dans la modélisation, nous utilisons la rhéologie granulaire bien établie $\mu(I)$ [16], préalablement calibrée sur des expériences annexes [18]. En appliquant cette rhéologie à notre configuration confinée, nous pouvons tracer le diagramme de phase $\theta_i - Q$ du canal de 12 mm, et en particulier les lignes iso-Froude (ligne pointillée sur la figure 4 (b)). Là encore, nous voyons que cette courbe ($Fr = 0,87$) permet de séparer les domaines de stabilité.

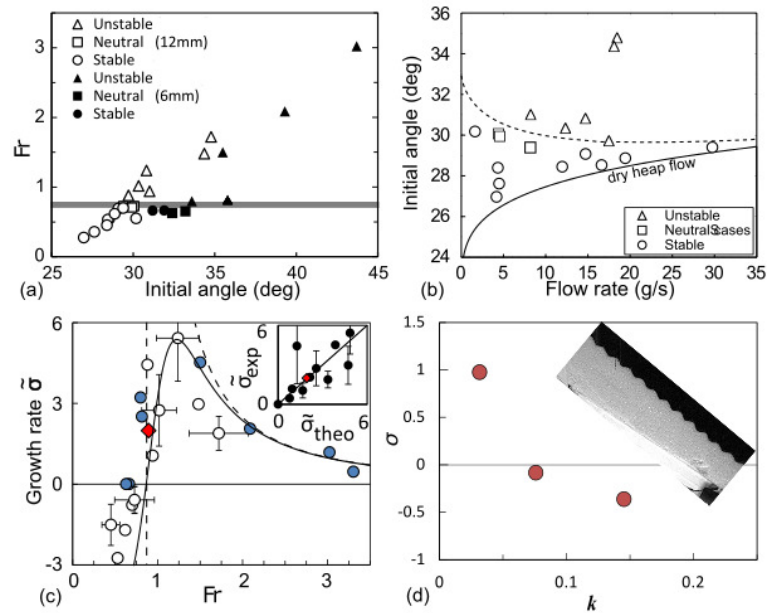


FIGURE 4. (a) Nombre de Froude pour les différentes expériences. la barre grise s'étend de 0,7 à 0,8. (b) Diagramme de phase pour le canal de 12 mm montrant la zone de déstabilisation. (c) Taux de croissance adimensionné en fonction du nombre de Froude pour les deux largeurs de canaux. Les droites sont les courbes théoriques pour le mode le plus instable ($k \rightarrow \infty$, tirets), et pour un mode correspondant environ aux longueurs d'onde observées : $hk \approx 0,1$ (ligne continue). (d) Résultats préliminaires montrant les taux de croissances obtenus à partir d'une interface initiale ondulée comme présenté dans l'insert.

5.2 Taux de croissance

Pour mieux comprendre le mécanisme de l'instabilité, nous modélisons l'écoulement en utilisant une approche de Saint-Venant dans une approximation des ondes longues [20]. Dans ce qui suit, nous allons négliger l'influence de la paroi latérale dans l'équation de quantité de mouvement pour plus de simplicité

puisque dans notre expériences $h/W < 0,48$ au plus, mais nous autorisons une modification du profil de vitesse de référence. Le repère de référence est la surface de pente moyenne initiale érodée à taux constant E_0 , ce qui représente la vitesse normale de l'interface. L'évolution de l'épaisseur h , l'élévation de l'interface η et la vitesse moyenne u sont ensuite décrits par trois équations : la conservation de la masse à l'intérieur du flux de la fraction de volume constant, la loi d'érosion et l'équation de mouvement, le tout intégré sur la profondeur z . Nous avons vérifié la séparation entre les échelles de temps du processus de lente érosion (quelques $\text{cm} \cdot \text{h}^{-1}$) et de l'écoulement ($10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$), ce qui permet de supposer que l'écoulement granulaire est presque à l'équilibre avec la topographie et de négliger la dérivée temporelle dans l'équation de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \rho \frac{\partial(\alpha hu^2)}{\partial x} = \rho gh \cos \theta \left(\tan \theta - \mu_b(u, h) - \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad (1)$$

où α tient compte du profil de vitesse exact (par exemple $5/4$ pour un profil de vitesse Bagnold ou $4/3$ pour un profil de vitesse linéaire). Le terme de gauche est l'inertie ; dans le membre de droite, les termes sont le poids de la couche, la friction basale et la dérivée de la pression. La friction basale est modélisé par la rhéologie $\mu(I)$ [9, 17]. Suite aux récents résultats sur l'érosion granulaire [7], l'équation de l'érosion est la suivante : $\frac{\partial \eta}{\partial t} \propto -\frac{F_{\text{cap}}}{F} \exp(-\frac{F_{\text{cap}}}{F})$, où F_{cap} est la force de capillaire responsable de la cohésion et F est la force moyenne agissant sur les grains. Cette expression est valable lorsque la force moyenne est en fait plus faible que la force capillaire. Comme suggéré par la ligne d'iso-Froude dans le diagramme de phase, l'instabilité de l'érosion est lié à l'inertie des grains s'écoulant, donc F doit dépendre de leur inertie. Un récent travail numérique [19] a proposé que la force moyenne d'impact des grains est liée à leur énergie cinétique, tel que $F \propto (\rho u^2)^{\beta/2}$ with $\beta = 1,2$. Les paramètres sont adimensionnés en utilisant le taux d'érosion stationnaire de l'interface plane E_0 , l'épaisseur h_0 , le débit par unité de largeur q , et la force moyenne F_0 : $\tilde{h} = h/h_0$, $\tilde{x} = x/h_0$, $\tilde{\eta} = \eta/h_0$, $\tilde{u} = uh_0/q$, $\tilde{t} = tE_0/h_0$. Après linéarisation autour de l'état d'équilibre initial (sur une interface plane de pente θ_i) nous décomposons l'écoulement selon les modes normaux $\propto \exp(-i(\tilde{k}\tilde{x} + \tilde{\omega}\tilde{t}))$ et pour finalement trouver un taux de croissance :

$$\tilde{\sigma} = \text{Im}(\tilde{\omega}) = c \frac{\tilde{k}^2(\alpha \text{Fr}^2 - 1)}{(a - b)^2 + \tilde{k}^2(\alpha \text{Fr}^2 - 1)^2}, \quad (2)$$

où a et b sont $\partial\mu_b/\partial u$ et $\partial\mu_b/\partial h$ [9] et $c = \beta(F_{\text{cap}}/F_0 - 1)$. Un nombre de Froude critique est trouvé au-dessus duquel l'interface est instable : $\text{Fr}_c = \alpha^{-1/2} = 0,87$ pour $\alpha = 4/3$. La courbe iso-Froude correspondante est tracée sur la figure 4 (a) et est en accord avec les expériences. En outre, nous pouvons comparer les taux de croissance initiaux prévus aux expérimentaux. Les taux de croissance expérimentaux, en mesurant la hauteur des marches dans le régime de croissance exponentiel précoce. La figure 4 (b) montre ces taux de croissance à partir d'une l'interface plane pour deux largeurs de cellule et pour différentes billes. Les prédictions de ce modèle pour $kh_0 = 0,1$ et $\theta_i = 30^\circ$ sont en bon accord avec les données expérimentales en considérant les barres d'erreur et en notant que l'expérimentation \tilde{k} n'est pas strictement constante mais proche de 0,1 (l'encart de la figure 4 (c) montre la comparaison avec l'utilisation de la valeur expérimentale de \tilde{k}).

Enfin, il est à noter que nous avons réalisé des expériences préliminaires à partir de surfaces ondulées, avec trois longueurs d'ondes différentes. Nous avons pu mesurer l'évolution de l'amplitude de chacune de ces perturbation. Le résultat, présenté sur la figure 4 (d), montre clairement qu'un mécanisme limite le taux de croissance aux petites longueurs d'ondes. Nous travaillons à la modélisation de la dissipation supplémentaire permettant de sélectionner une longueur d'onde initiale.

6 Conclusion

En conclusion, nous avons étudié une nouvelle instabilité d'érosion se produisant avec les écoulements granulaires sur un lit granulaire cohésif. Dans le régime développé, la forme des marches est régie par les propriétés des écoulements granulaires. Nous avons montré que le critère de stabilité est un nombre

de Froude critique qui est analogue à certains phénomènes d'érosion de lits de rivière. Nous modélisons ces mécanismes dans le cadre d'une approche de type Saint-Venant. En outre, un terme supplémentaire de dissipation longitudinal d'énergie devrait permettre de prévoir une sélection de longueur d'onde finie. Nous confirmons enfin que l'inertie des grains régit les mécanismes d'érosion dans les écoulements granulaires denses, tandis que d'autres travaux devront maintenant modéliser les mécanismes d'érosion diluée dans l'état entièrement développé. Nous pensons que nos résultats pourraient mener à une meilleure compréhension des écoulements géophysiques.

Références

1. D. R. MONTGOMERY & W. E. DIETRICH, Source areas, drainage density, and channel initiation, *Water Resour. Res.*, **25**, 1907–1918 (1989).
2. A. VIANELLO & V. D'AGOSTINO, Bankfull width and morphological units in an alpine stream of the Dolomites (Northern Italy), *Geomorphology*, **83**, 266–281 (2007).
3. G. PARKER & N. IZUMI, Purely erosional cyclic and solitary steps created by flow over a cohesive bed, *J. Fluid Mech.*, **419**, 203–238 (2000).
4. B. ANDREOTTI, P. CLAUDIN, O. DEVAUCHELLE, O. DURÁN & A. FOURRIÈRE, Bedforms in a turbulent stream: ripples, chevrons and antidunes, *J. Fluid Mech.*, **690**, 94–128 (2012).
5. A. MANGENEY, O. ROCHE, O. HUNGR, N. MANGOLD, G. FACCANONI & A. LUCAS, Erosion and mobility in granular collapse over sloping beds, *J. Geophys. Res.*, **115**, F03040 (2010).
6. R. M. IVERSON, Elementary theory of bed-sediment entrainment by debris flows and avalanches, *J. Geophys. Res.*, **117**, F03006 (2012).
7. G. LEFEBVRE & P. JOP, Erosion dynamics of a wet granular medium, *Phys. Rev. E*, **88**, 032205 (2013).
8. FRANÇOIS CHARRU, BRUNO ANDREOTTI & PHILIPPE CLAUDIN, Sand Ripples and Dunes. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **45**, 469–493 (2013).
9. Y. FORTERRE & O. POULIQUEN, Long-surface-wave instability in dense granular flows, *J. Fluid Mech.*, **486**, 21–50 (2003).
10. N. TABERLET, P. RICHARD, E. HENRY & R. DELANNAY, The growth of a Super Stable Heap: An experimental and numerical study, *Europhys. Lett.*, **68**, 515–521 (2004).
11. F. MALLOGGI, J. LANUZA, B. ANDREOTTI & E. CLÉMENT, Erosion waves: Transverse instabilities and fingering, *Europhys. Lett.*, **75**, 825–831 (2006).
12. E. MARTÍNEZ, C. PÉREZ-PENICHER, O. SOTOLONGO-COSTA, O. RAMOS, K. MÅLØY, S. DOUADY & E. ALTSHULER, Uphill solitary waves in granular flows, *Phys. Rev. E*, **75**, 031303 (2007).
13. A.-F. BITBOL, N. TABERLET, S. MORRIS & J. MCELWAINE, Scaling and dynamics of washboard roads, *Phys. Rev. E*, **79**, 1–10 (2009).
14. I. J. HEWITT, N. J. BALMFORTH & J. N. MCELWAINE, Granular and fluid washboards, *J. Fluid Mech.*, **692**, 446–463 (2012).
15. L. HSU, WILLIAM E. D. & L. S. SKLAR, Experimental study of bedrock erosion by granular flows, *J. Geophys. Res.*, **113**, F02001 (2008).
16. P. JOP, Rheological properties of dense granular flows, *C. R. Phys.*, **16**, 62–72 (2015).
17. GDR MIDY, On dense granular flows, *Eur. Phys. J. E*, **14**, 341–65 (2004).
18. P. JOP, Y. FORTERRE & O. POULIQUEN, Crucial role of sidewalls in granular surface flows: consequences for the rheology, *J. Fluid Mech.*, **541**, 167–192 (2005).
19. B. YOHANNES, L. HSU, W. E. DIETRICH & K. M. HILL, Boundary stresses due to impacts from dry granular flows, *J. Geophys. Res.*, **117**, F02027 (2012).
20. Y. FORTERRE, Kapiza waves as a test for three-dimensional granular flow rheology, *J. Fluid Mech.*, **563**, 123–132 (2006).

Chaos quantique et micro-lasers

Mélanie Lebental¹, Aurélien Pascal¹, Joseph Zyss¹, Christian Ulysse², Dominique Decanini² & Stefan Bittner³

¹ LPQM, Ens Cachan, CentraleSupélec, CNRS, Université Paris-Saclay, 94235 Cachan, France

² LPN, CNRS, Université Paris-Saclay, 91460 Marcoussis, France

³ Yale University, Department of Applied Physics, 06520 New Haven, United States

`melanie.lebental@ens-cachan.fr`

Résumé. Dans le contexte du chaos quantique, appelé aussi chaos ondulatoire, nous étudions des micro-lasers en polymère, dont la fabrication est aisée, peu onéreuse et permet d’atteindre des résolutions nanométriques. La forme de la cavité résonante peut être choisie à volonté, afin de caractériser des systèmes intégrables (carré, disque), pseudo-intégrables (pentagone), mixtes (champignon) ou chaotiques (stade, cardioïde). Nous donnons un aperçu des études qui sont menées avec ces objets doublement non linéaires, non-linéarité de l’effet laser et non-linéarité liée à la forme de la cavité. En particulier, nous illustrerons l’importance des orbites périodiques, ces trajectoires classiques qui structurent les propriétés ondulatoires.

Peu de systèmes ondulatoires sont intégrables. Ce constat est apparu évident dès les premières années qui ont suivi l’émergence de la physique quantique [1]. Il faut donc trouver des moyens de caractériser et prédire les propriétés ondulatoires de systèmes dont la limite classique est chaotique (ou mixte, ou pseudo-intégrable). C’est l’objet du domaine de recherche appelé *chaos quantique* ou *chaos ondulatoire* [2,3], dont les outils développés depuis un siècle s’appliquent tout aussi bien en électromagnétisme, en acoustique [4] et même récemment en gravité quantique [5].

Dans ce contexte, nous étudions des micro-lasers en polymère, dont la fabrication est aisée, peu onéreuse et permet d’atteindre des résolutions nanométriques [6]. La forme de la cavité résonante peut être choisie à volonté, afin de caractériser des systèmes intégrables (carré, disque), pseudo-intégrables (pentagone), mixtes (champignon) ou chaotiques (stade, cardioïde).

Dans la présentation, nous donnerons d’abord un aperçu des études qui sont menées avec ces objets doublement non linéaires, non-linéarité de l’effet laser et non-linéarité liée à la forme de la cavité et nous décrirons le contexte et les enjeux de la recherche en chaos quantique. Puis, deux exemples — la cavité Fabry–Perot et le stade de Bunimovich — seront approfondis afin d’illustrer l’importance des orbites périodiques, ces trajectoires classiques qui structurent les propriétés ondulatoires. Dans cet acte, nous nous attacherons à expliciter ces deux exemples.

Les recherches en chaos quantique ont conduit au développement de différents outils. Nous allons nous concentrer sur la *formule de trace* qui permet d’exprimer le spectre — c’est-à-dire un objet purement ondulatoire — à partir de grandeurs géométriques, relevant de la physique classique. Il a en effet été montré que la densité d’état

$$d(k) = \sum_j \delta(k - k_j),$$

où les k_j sont les nombres d’onde propres du système, tend à la limite semi-classique vers une somme sur les orbites périodiques (op) de ce même système :

$$d(k) \propto \sum_{\text{op}} C_{\text{op}} \cos(kL_{\text{op}} + \phi_{\text{op}}). \quad (1)$$

Une orbite périodique est une trajectoire classique, fermée et périodique. Le coefficient C_{op} ne contient que des paramètres géométriques de l’orbite considérée tels que sa longueur L_{op} par exemple. De même ϕ_{op} est un déphasage ne faisant intervenir que des grandeurs classiques. Cette formule a été démontrée dans les cas intégrable [7] et chaotique [8] dans la limite semi-classique, c’est-à-dire $kR \rightarrow \infty$ où R est

une dimension caractéristique du système. Le principe de ces démonstrations est assez générique et peut être étendu à d'autres objets. Par exemple, nous avons montré la validité d'une formule de trace modifiée adaptée au cas des résonateurs diélectriques [9]. Elle permet d'expliquer les observations expérimentales sur les micro-lasers.

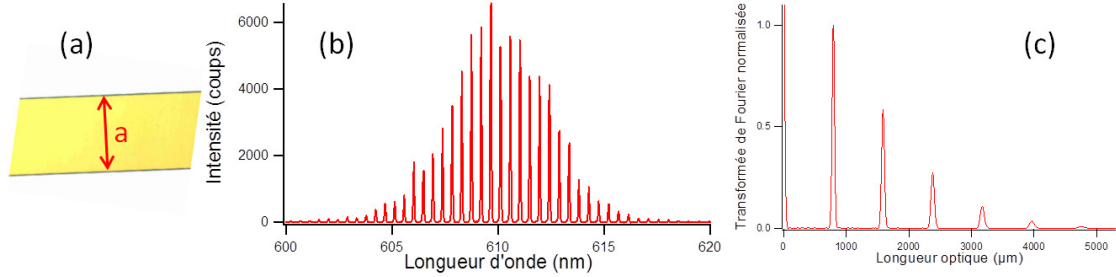


FIGURE 1. (a) Photographie au microscope optique en vraies couleurs d'un micro-laser en forme de cavité Fabry-Perot plan-plan. (b) Spectre expérimental émis par une cavité Fabry-Perot plan-plan avec $a = 250 \mu\text{m}$. (c) Transformée de Fourier du spectre en (b).

La figure 1 (a) montre un micro-laser que nous appelons *Fabry-Perot plan-plan* et qui est en fait constitué d'une longue bande de largeur a . Cette bande possède une épaisseur de 650 nm , a peut être choisi de $50 \mu\text{m}$ à $500 \mu\text{m}$ et la longueur d'onde est de l'ordre de 600 nm . Il s'agit donc d'un système bi-dimensionnel avec $kR \sim 100 - 1000$. Le spectre expérimental de la figure 1 (b) est constitué d'un peigne de fréquences, dont l'intervalle spectral libre est défini par la condition de retour en phase de la lumière après un aller-retour entre les deux bords de la cavité (double-flèche de la figure 1 (a)) :

$$e^{in k_j 2a} = 1 \implies n k_j 2a = 2\pi m \quad m \in \mathbb{N}.$$

Les nombres d'onde k_j sont donc régulièrement espacés de $2\pi/nL$ où L est la longueur de l'orbite périodique considérée. Ici il s'agit de l'aller-retour donc $L = 2a$, et n est l'indice de réfraction. Pour obtenir un accord expérimental, il faut prendre en compte la dispersion, ce qui modifie l'indice d'environ 10% [10]. La transformée de Fourier du spectre (Fig. 1 (c)) présente donc un pic à la longueur de cette orbite, ainsi qu'à ses harmoniques. Ce procédé d'analyse permet d'obtenir les longueurs géométriques des orbites périodiques sur lesquelles les modes lasers sont, semble-t-il, localisés. Ce contenu spectral dépend de la direction d'observation. Dans le cas du Fabry-Perot plan-plan, la lumière est émise perpendiculairement aux bords (cf. [10], Fig. 4). Nous avons mis au point des outils complémentaires pour caractériser l'émission laser, comme la polarisation d'émission [11], le seuil laser [12] et le diagramme d'émission tri-dimensionnel [13], mais dans cette présentation, nous privilégierons le spectre émis dans le plan de la cavité.

Le Fabry-Perot plan-plan ne possède qu'une seule orbite périodique. Elle est de stabilité neutre (ou marginale), c'est-à-dire que les valeurs propres de sa matrice de monodromie valent 1. Cette matrice est définie en section 4.2 de [14] et représente l'effet d'une perturbation sur l'orbite, à l'ordre linéaire. Une valeur propre de 1 signifie que l'orbite peut être déplacée continûment et conserve des propriétés similaires. Pour l'orbite du Fabry-Perot plan-plan, cette propriété signifie qu'elle est invariante par translation le long des bords.

Pour que cette orbite devienne stable, c'est-à-dire que les valeurs propres de la matrice de monodromie soient complexes conjuguées, il faut courber un des bords, comme pour le micro-laser de la figure 2 (a). Cette définition conduit à la condition de stabilité suivante :

$$0 < g_1 g_2 < 1, \quad \text{avec} \quad g_i = 1 - \frac{a}{R_i}, \quad (2)$$

où R_i est le rayon de courbure du miroir i . Pour la cavité plan-concave de la figure 2 (a), cette condition est équivalente à $a < R$. Dans certains livres et cours de physique des lasers, la condition (2) est obtenue

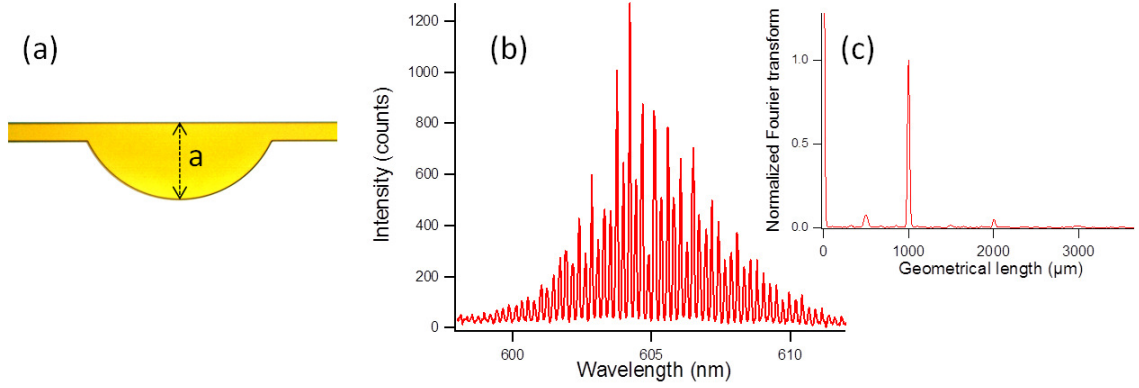


FIGURE 2. (a) Photographie au microscope optique en vraies couleurs d'un micro-laser en forme de cavité Fabry-Perot plan-concave avec $a = 125 \mu\text{m}$ et $a/R = 0,75$. (b) Spectre expérimental émis par une cavité plan-concave avec $a = 125 \mu\text{m}$ et $a/R = 0,5$. (c) Transformée de Fourier du spectre en (b). L'axe des abscisses a été renormalisé par $n = 1,63$, indice de réfraction obtenu via les cavités Fabry-Perot plan-plan.

de manière équivalente par une approche purement ondulatoire qui consiste à imposer le profil de phase des faisceaux gaussiens sur les miroirs de la cavité.

Pour une orbite stable, le coefficient C_{op} de la formule de trace (1) est de la forme

$$C_{\text{op}} \propto \frac{1}{\sin\left(\frac{m\psi}{2}\right)},$$

où $\Lambda = e^{i\psi}$ est une valeur propre de la matrice de monodromie et dépend de a/R . m est un entier naturel qui représente le nombre de fois que l'orbite est parcourue. Ceci montre que C_{op} est susceptible de diverger pour certaines valeurs de a/r et de m . Le spectre expérimental de la figure 2 (b) est émis par un micro-laser plan-concave avec $a/R = 0,5$. Pour ce rapport, on s'attend à une divergence de C_{op} pour $m = 4$. Cette cavité a une largeur $a = 125 \mu\text{m}$. La longueur de l'orbite périodique est donc de $2a = 250 \mu\text{m}$ et la longueur de sa quatrième répétitions de $4 \times 2a = 1000 \mu\text{m}$. La transformée de Fourier du spectre est tracée à la figure 2 (c) et présente effectivement un pic très important pour cette quatrième répétition.

Lorsqu'une des valeurs propres Λ de la matrice de monodromie est réelle et supérieure à 1, l'orbite est instable. Son coefficient de Lyapounov λ est défini par

$$\Lambda = e^{\lambda}.$$

Plus il est grand, plus un petit écart par rapport à l'orbite périodique est fortement amplifié. Le coefficient C_{op} de cette orbite dans la formule de trace (1) est de la forme

$$C_{\text{op}} \propto \frac{1}{\sinh \frac{\lambda}{2}}.$$

Un système chaotique ne possède que des orbites instables et éventuellement un nombre fini d'orbites de stabilité marginale. Le stade de Bunimovitch en est l'archétype. Il est constitué d'un rectangle flanqué de deux demi-disques et sa forme est paramétrée par $\rho = l/R$, cf. Fig. 3 (a). Pour des cavités diélectriques, nous avons montré que C_{op} est simplement multiplié par le produit des coefficients de réflexion lors des rebonds sur la frontière [9]. La formule de trace privilégie donc les orbites périodiques confinées par réflexion totale, avec un faible coefficient de Lyapounov.

Lorsque $\rho < 1$, les orbites confinées par réflexion totale dans un stade sont en forme de polygones inscrits, comme les orbites 1 à 4 de la figure 3 (b). Pour $\rho > 1$, il apparaît de nouvelles orbites qui présentent un croisement, cf. Fig. 3 (c), orbites 5 et 6. Ces orbites croisées possèdent des coefficients de

Lyapounov plus faibles que les polygones inscrits. En effet, on constate expérimentalement que pour $\rho < 1$ la transformée de Fourier du spectre présente un pic à une longueur inférieure au périmètre, alors qu'il apparaît un pic au-delà du périmètre pour $\rho > 1$.

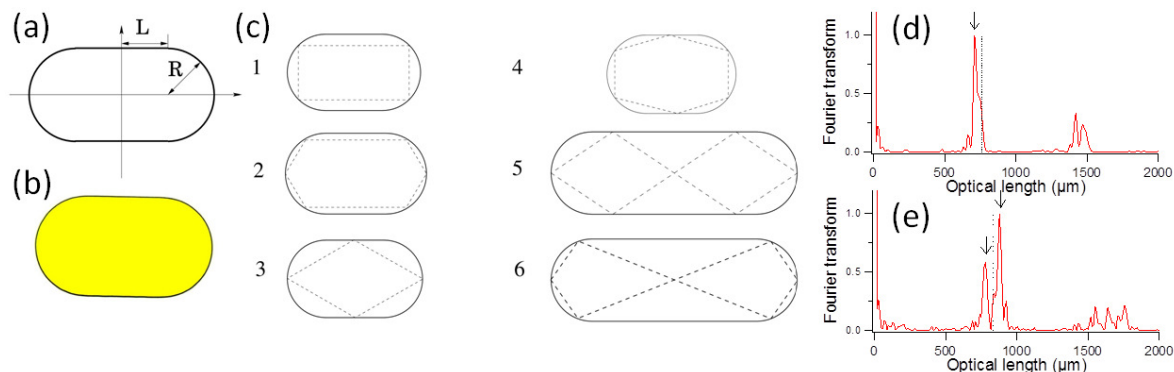


FIGURE 3. Extraits de [9]. (a) Schéma d'un stade. (b) Photographie d'un microlaser en forme de stade au microscope optique, en vraies couleurs. Le grand axe mesure environ $150 \mu\text{m}$. (c) Différents types d'orbites périodiques dans un stade. (d) et (e) Transformées de Fourier d'un spectre expérimental pour $\rho = 0,75$ (d) et $\rho = 1,25$ (e). Le périmètre est indiqué par une barre verticale en pointillés. Les flèches pointent vers les positions attendues pour l'orbite 1 dans (d) et les orbites 1 et 5 dans (e). La numérotation des orbites suit celle de la figure (c).

Par ces quelques exemples, nous avons souhaité illustrer la signification de la formule de trace, cet outil développé dans le cadre du chaos quantique, qui permet d'exprimer le spectre à partir d'une somme sur les orbites périodiques du système classique. Elle établit ainsi une transition entre la physique classique et la physique ondulatoire.

Références

1. A. D. STONE, Einstein's unknown insight and the problem of quantizing chaotic motion, *Phys. Today*, **58**, 37–43 (2005). L'article contient la référence aux traductions des articles originaux d'Einstein.
2. M. BRACK ET R. BHADURI, *Semiclassical Physics*, Oxford Westview (2003).
3. H.-J. STÖCKMANN, *Quantum chaos: An introduction*, Cambridge University press (2006).
4. F. MORTESAGNE, O. LEGRAND & D. SORNETTE, Transient chaos in room acoustics, *Chaos*, **3**, 529–541 (1993).
5. E. BIANCHI & H. M. HAGGARD, Discreteness of the Volume of Space from Bohr-Sommerfeld Quantization, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 011301 (2011).
6. C. LAFARGUE, M. LEBENTAL, A. GRIGIS, C. ULYSSE, I. GOZHYK, N. DJELLALI, J. ZYSS, & S. BITTNER, Localized lasing modes of triangular organic microlasers, *Phys. Rev. E*, **90**, 052922 (2014).
7. R. BALIAN & C. BLOCH, *Ann. Phys.*, **60**, 401 (1970); **64**, 271 (1971); **69**, 76 (1972).
8. M. GUTZWILLER, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer, Berlin (1990).
9. E. BOGOMOLNY, N. DJELLALI, R. DUBERTRAND, I. GOZHYK, M. LEBENTAL, C. SCHMIT, C. ULYSSE & J. ZYSS, Trace formula for dielectric cavities II: Regular, pseudo-integrable, and chaotic examples, *Phys. Rev. E*, **83**, 036208 (2011).
10. M. LEBENTAL, N. DJELLALI, C. ARNAUD, J.-S. LAURET, J. ZYSS, R. DUBERTRAND, C. SCHMIT & E. BOGOMOLNY, Inferring periodic orbits from spectra of simply shaped micro-lasers, *Phys. Rev. A*, **76**, 023830, (2007).
11. I. GOZHYK, G. CLAVIER, R. MÉALLET-RENAULT, M. DVORKO, R. PANSU, J.-F. AUDIBERT, A. BROSEAU, C. LAFARGUE, V. TSVIRKUN, S. LOZENKO, S. FORGET, S. CHÉNAIS, C. ULYSSE, J. ZYSS & M. LEBENTAL, Polarization properties of solid-state organic lasers, *Phys. Rev. A*, **86**, 043817 (2012).

12. I. GOZHYK, M. BOUDREAU, H. RABBANI HAGHIGHI, N. DJELLALI, S. FORGET, S. CHÉNAIS, C. ULYSSE, A. BROSSEAU, R. PANSU, J.-F. AUDIBERT, S. GAUVIN, J. ZYSS & M. LEBENTAL, Gain properties of dye-doped polymer thin films, *Phys. Rev. B*, **92**, 214202 (2015).
13. C. LAFARGUE, S. BITTNER, S. LOZENKO, J. LAUTRU, J. ZYSS, C. ULYSSE, C. CLUZEL & M. LEBENTAL, Three-dimensional emission from organic Fabry–Perot microlasers, *Appl. Phys. Lett.*, **102**, 251120 (2013).
14. E. BOGOMOLNY, Quantum and arithmetical chaos, [arxiv:nlin/0312061](https://arxiv.org/abs/nlin/0312061) (2003).

La modélisation du chaos appliquée à la classification des couverts agricoles (bassin versant de Berambadi, Inde du Sud)

Sylvain Mangiarotti¹, Amit Kumar Sharma², Muddu Sekhar³, Samuel Corgne², Laurent Ruiz³, Laurence Hubert-Moy² & Yann Kerr¹

¹ CESBIO, UPS-CNRS-CNES-IRD, 18 av. Ed. Belin, 31401 Toulouse cedex 9, France

² LETG-Rennes-COSTEL, UMR 6554 CNRS, Pl. Recteur H. Le Moal, CS 24307, 35043 Rennes cedex, France

³ Indo-French Cell for Water Sciences, Indian Institute of Science, IRD, Bangalore, India

sylvain.mangiarotti@ird.fr

Résumé. De nombreuses techniques de classification existent pour l'identification des couverts agricoles à partir de données de télédétection optique. Ces techniques sont souvent difficiles à appliquer à des parcelles ne dépassant pas quelques hectares, en particulier lorsque la distribution de ces parcelles est très hétérogène et leur rotation irrégulière. Cette difficulté est accentuée en Inde du Sud où les conditions nuageuses de deux à trois mois lors de la période des moussons gênent ou empêchent leur suivi en pleine croissance. Une nouvelle approche de classification s'appuyant sur la théorie des systèmes dynamiques non linéaires est ici introduite, visant à tirer parti de ce signal malgré ses fortes limitations. L'objet de cette étude est de montrer l'applicabilité de cette approche. Dans cette étude, dix couverts agricoles sont considérés dans le bassin versant de Berambadi (bassin de la Kabini River, Inde du Sud) : curcuma, sorgho, roses d'Inde, tournesol, ail, betterave, haricot, piment, banane et maïs. Une banque de modèles en équations aux dérivées ordinaires est d'abord établie en s'appuyant sur la technique de modélisation globale. Ces modèles sont ensuite utilisés pour localiser les variétés culturales dans le temps et dans l'espace.

Abstract. To understand the time evolution of ground water, it is important to be able to distinguish crops for which water demand is high. Numerous methods based on optical remote sensing dedicated to crop identification have been developed. However, their application remains difficult where plots do not exceed a few hectares, with a high heterogeneity in their distribution in time and space. This difficulty is emphasized in South India where the cloudy conditions during the monsoon season can disturb the detection of crops during plants growth. A novel classification approach based on nonlinear dynamical systems theory is introduced here, with the aim to take advantage of such scarce signal. Ten different crops are considered in a catchment located in the Berambadi basin (South India). A bank of model is established using the global modeling technique. These models are then used to identify the crops in time and space.

1 Introduction

Dans les régions où les ressources en eau sont peu abondantes, les eaux souterraines constituent l'un des principaux réservoirs pour l'irrigation. En conséquence, l'irrigation peut avoir dans ces régions une influence directe sur les réservoirs. Pour comprendre l'évolution du niveau des eaux souterraines, il est donc important de distinguer les couverts agricoles dont la demande en eau est plus forte.

L'identification des couverts observés par télédétection spatiale est un domaine de recherche très actif qui concerne d'innombrables cas d'application. Les approches plus récentes commencent à faire appel à des successions d'images, prises à différents moments de l'évolution des cultures [1]. Ces techniques s'appuient souvent sur des hypothèses fortes quant à la forme du signal temporel afin de pouvoir le caractériser à partir d'un très petit nombre de paramètres (valeurs min et max, pente, etc.) [2]; et nécessitent de définir (de façon ad hoc) de nombreux seuils pour parvenir à distinguer les différentes classes de cultures. D'autres part, ces approches ne permettent pas d'établir de lien théorique fort entre comportement dynamique et signal observationnel.

Dans un contexte où l'échantillonnage temporel des satellites ne cesse d'augmenter (ex : mission Sentinel-2 et mission préparatoire Spot4-Take5), on se propose d'introduire ici une nouvelle technique de classification pour répondre aux besoins suivants : (1) disposer d'une approche permettant d'établir un

lien théorique fort entre dynamique du couvert et signal observationnel, (2) disposer d'outils génériques qui seront facilement transposables à d'autres contextes, (3) disposer d'une approche globale permettant de considérer un ensemble de trajectoires plutôt que de s'appuyer sur des solutions particulières, (4) disposer d'outils parcimonieux (peu de paramètres en jeu), et (5) nécessitant peu d'ajustements manuels (supervision limitée).

Pour répondre à ces contraintes, on se propose de s'appuyer sur une technique globale de modélisation [3] dont les applications aux dynamiques environnementales sont très récentes [4] mais tout à fait adaptées à la modélisation des couverts agricoles [5] et pour laquelle nous disposons aujourd'hui d'outils puissants [6]. Cette technique n'a jamais été adaptée à la classification des couverts. L'objet de ce travail est d'introduire une nouvelle méthodologie pour appliquer cette technique de modélisation à la classification des couverts ; Puis, de la tester sur un jeu de données ad hoc.

Dans la section 2, sont présentés le site d'étude et les jeu de données terrain et satellite utilisés pour l'étude. Les éléments théoriques nécessaires pour introduire l'approche sont présentés en section 3, ainsi que la méthodologie développée pour appliquer la modélisation globale à la classification. Les résultats de l'approche appliquée au couvert agricole sont présentés et discutés en section 4, les principales conclusions en section 5.

2 Site d'étude, données et prétraitements

2.1 Bassin versant de Berambadi et données de terrain

Le site d'étude est situé sur le bassin versant de Berambadi (bassin de la Kabini River, Inde du Sud). Il fait partie de l'observatoire de recherche AMBHAS (www.ambhas.com). Le climat de la zone d'étude est de type semi-aride tropical avec des pluies moyennes annuelles de 800 mm/an (évapotranspiration potentielle de 1100 mm/an). L'usage des sols est principalement agricole et présente une très grande diversité de couverts incluant tournesol, maïs, rose d'Inde, canne à sucre, arachide, etc. Le couvert présente une très forte hétérogénéité spatiale qui résulte de cette diversité mais aussi de la taille des parcelles qui ne dépasse généralement pas quelques hectares dans la région étudiée. Les parcelles peuvent également présenter des cycles de rotation complexes avec souvent deux à trois récoltes par an. Selon les cas, les cultures sont plantées en alternance (la nouvelle culture est plantée une fois la culture précédente récoltée), en relais (la nouvelle culture est plantée avant la récolte précédente) ou encore en simultané (par exemple en rangées alternées). On s'intéressera prioritairement ici au cas des multicultures en alternance. Un ensemble de

Variété culturale	Nombre d'échantillons	Fréquence (en %)	Représentativité régionale (en %)	Variété culturale	Nombre d'échantillons	Fréquence (en %)	Représentativité régionale (en %)
Curcuma	37	30,0	16–19	Ail	7	5,6	< 0,5
Sorgho	18	14,5	17–24	Haricot	6	4,8	< 0,5
Roses d'Inde	19	15,3	4–9	Banane	6	4,8	1–2
Tournesol	14	11,3	18–35	Piment	5	4,0	< 0,5
Betterave	8	6,5	< 0,5	Maïs	4	3,2	1–4
TOTAL					124	100	70–80

Tableau 1. Échantillons des couverts agricoles étudiés : nombre et fréquence par rapport au nombre total d'échantillons considérés. La représentativité de ces cultures au sein du bassin versant est également rapporté sur la base de années 2006, 2007 et 2008 (pour la saison correspondante).

124 parcelles est considéré dans la présente étude dont la taille varie de 0,1 à 3 hectares. Un tableau récapitulatif des dix variétés considérées est présenté dans le tableau 1 où sont donnés l'effectif et la fréquence de chacune des variétés ainsi que leur représentativité au sein du bassin versant Berambadi. Les informations concernant les cultures pratiquées sur les différentes parcelles ont été collectées lors d'enquêtes de terrain successives menées auprès des cultivateurs et rassemblées au sein d'un système d'information géolocalisée.

2.2 Données satellite

Les indices de végétation tels que le Normalized Difference Vegetation Index (NDVI) offrent une source d'information très utile pour le suivi des couverts agricoles, notamment en régions semi-arides. Pour pouvoir utiliser cette observable dans le contexte étudié ici, il est nécessaire de disposer d'un produit de résolution suffisamment haute. Les capteurs issus de la plateforme Landsat-8, dont la résolution est de 30 m, se prêtent tout à fait à ce contexte. Pour chaque parcelle, une extraction précise du signal a été effectuée en excluant les pixels dont le signal pouvait présenter un mixage d'information en bordure de parcelle. Le signal résultant de l'ensemble des pixels sélectionnés a ensuite été agrégé en un signal unique par simple moyennage. La mission Landsat-8 permet une revisite des sites tous les 16 jours qui pourrait en principe suffire. La plupart des images sont toutefois inexploitable pendant la période des moussons en raison de la couverture nuageuse qui conduit à un trou dans les séries temporelles d'environ deux mois pour l'année 2014 considérée ici. Pour compenser ce défaut d'information, la période manquante a été interpolée par l'utilisation d'une interpolation par spline. Les comportements dynamiques obtenus grâce à cette interpolation sont présentés sur la figure 1. Ceux-ci permettent de mettre en évidence une bonne cohérence d'ensemble entre les différentes trajectoires reconstruites, pour la plupart des couverts. La validité de cette interpolation sera à nouveau discutée (d'un point de vue dynamique) en section 4. Suite à cette interpolation, les parcelles présentant un signal laissant supposer des situations de polycultures en relais. Ces séries temporelles n'ont pas été retenues pour la modélisation. Le calcul des dérivées dont nous aurons besoin pour mettre en place la méthode présentée au paragraphe suivant, a été effectué en utilisant un filtre de type Savitzki-Golay [7].

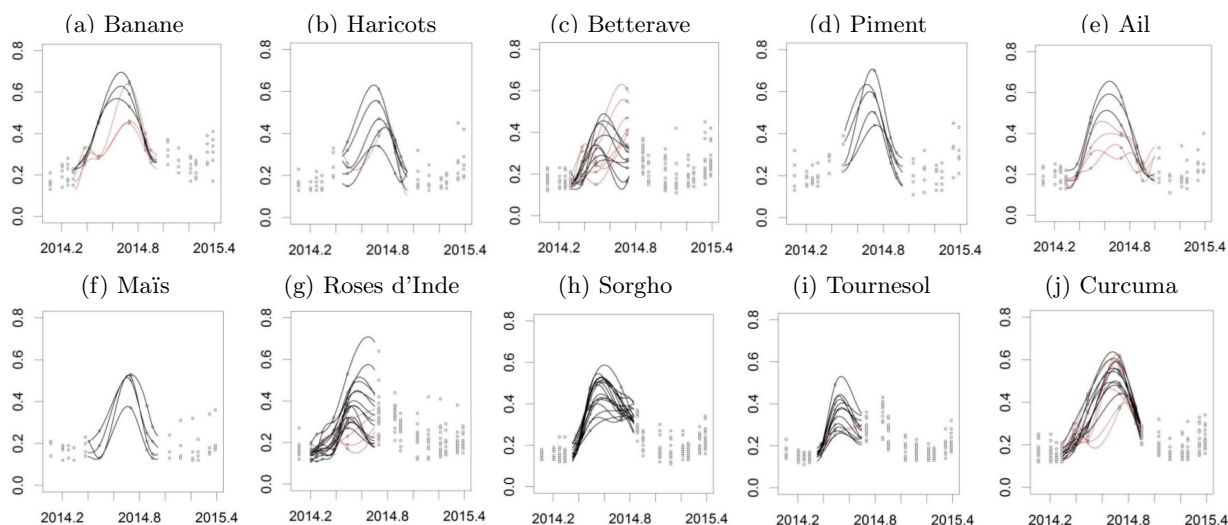


FIGURE 1. Séries de mesures brutes \circ et interpolées (trait plein) pour les dix variétés de cultures sur l'année 2014–2015. Certaines des courbes présentant des comportements suspects ont été rejetées pour la modélisation (en rouge). Les autres (en noir) ont été utilisées pour construire la banque de modèle. Pour la betterave, les profils obtenus apparaissent plus difficiles à utiliser à partir de cet échantillonnage temporel.

3 Methodologie

3.1 Modélisation globale

L'une des techniques de modélisation globale développée au cours des années 1990 vise à obtenir des équations aux dérivées ordinaires directement à partir de séries observationnelles [3]. Ce n'est qu'au cours des années 2000 que cette approche a pu être appliquée à des dynamiques environnementales : à la dynamique des populations de lynx du Canada [4] ou aux cycles de la végétation observés par télédétection spatiale [5]. La difficulté d'obtenir des modèles pour des comportements environnementaux tient d'une

part à un problème d'observabilité [8], c'est-à-dire à la possibilité, pour une variable observée, de rendre compte dans sa globalité de la dynamique du milieu étudié; d'autre part au nombre de variables en jeu et à la possibilité d'approcher la dynamique étudiée par un modèle de plus petite dimension.

Appliquée à une observable unique, la modélisation globale vise à obtenir un modèle de dimension n à partir d'une série temporelle issue d'une unique variable observée X_1 . Un tel modèle peut être formulé sous la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2, \\ \dot{X}_2 = X_3, \\ \vdots \\ \dot{X}_n = F(X_1, X_2, \dots, X_n), \end{cases} \quad (1)$$

où les X_i représentent les dérivées $(i - 1)$ -ièmes de la variable observée X_1 . D'un point de vue pratique, le problème consiste à obtenir une approximation de la la fonction F qui permette de reproduire la dynamique observée de façon satisfaisante. Un algorithme a été développé par nos soins [6] qui s'est montré particulièrement efficace comme en attestent de plus en plus nombreux exemples [5, 9, 10].

L'intérêt d'utiliser cette technique de modélisation est de permettre — en principe — de rendre compte de l'ensemble des cycles d'une dynamique donnée (solutions globales), plutôt que de cycles particuliers (prenant toutefois en compte une marge d'erreur contrôlée). Cette technique n'a jamais été appliquée à la classification des couverts agricoles. Pour cette raison, cette nouvelle approche de classification nécessite des développements spécifiques.

La plupart des cas auxquels ont été appliqués la technique de modélisation globale étaient stationnaires ou pouvaient être approchés comme tels, sur la période d'analyse [11]. Dans le cas présent, l'alternance des cultures sur une même parcelle rend le problème essentiellement non stationnaire. Le problème pouvant être traité par morceaux [11], la technique de modélisation peut être ramenée à une situation modérément non stationnaire en appliquant la modélisation globale à une association de morceaux de séries temporelles correspondant à une même variété culturale mais issues de parcelles différentes. Les outils évoqués et leurs développements les plus récents seront donc utilisés pour obtenir un modèle pour chacun des dix couverts considérés dans la présente analyse, et en tirer ainsi une banque de modèles.

3.2 Détection

La détection d'une variété culturale donnée va nécessiter de mesurer l'adéquation entre une succession d'observation et le modèle correspondant à une variété culturale donnée. Cette détection va donc nécessiter de disposer d'une métrique permettant d'estimer la distance modèle-données. Nous la définirons comme suit :

$$d(M_k, \psi^{\text{obs}}) = \dot{X}_n^{\text{obs}} - F_k(X_1^{\text{obs}}, X_2^{\text{obs}}, \dots, X_n^{\text{obs}}), \quad (2)$$

où M_k est le modèle relatif à la variété culturale k (les équations obtenues par technique globale), et ψ^{obs} le flot reconstruit à partir de la série observationnelle X_1^{obs} et ses dérivées successives X_i^{obs} .

Cette métrique vise à identifier des comportements dynamiques stationnaires. Pour être optimale, elle doit être appliquée à des séries temporelles sur des périodes pour lesquelles l'hypothèse de stationnarité est vérifiée. Cette hypothèse n'est pas ici une hypothèse contraignante puisque si elle n'est pas vérifiée, elle devrait permettre d'éviter de fausses détections. Cette propriété sera donc utilisée pour disposer d'un outil d'une plus grande généralité, par l'estimation de la distance modèle-donnée définie dans l'équation (2) sur des fenêtres glissantes dont la taille sera caractéristique de la durée des cycles cultureux. Ainsi, l'approche pourra être appliquée à toute série temporelle sans nécessiter d'hypothèse a priori quant à la période où focaliser la détection.

4 Analyses

La première partie de ce travail a consisté à reconstruire l'espace des phases des dynamiques correspondant aux dix variétés culturales observées. Leurs projections suivant les axes (X_1, X_2) sont présentées sur

les figures 2 (a–j) pour chacune des dix variétés culturelles. Les différentes trajectoires présentent, au sein de chacun des dix portraits, une très bonne cohésion d'ensemble qui indique que, pour le présent contexte, la méthode d'interpolation utilisée permet de conserver une bonne cohérence dynamique. Certaines incohérences sont toutefois notées au sein de certains portraits. Ces incohérences peuvent notamment résulter d'une situation de relais entre deux plantations. La grande disparité observée pour la betterave résulte vraisemblablement d'un échantillonnage temporel particulièrement défavorable (Fig. 2 (c)).

Les portraits de phases des différentes variétés culturelles peuvent apparaître très différents d'une variété à l'autre avec certains portraits particulièrement caractéristiques. C'est notamment le cas du portrait de phase du curcuma (Fig. 2 (j)) qui présente des croissances très lentes (valeur de $X_2 < 2$ relativement faibles et longue) et des phases de décroissances plutôt rapides ($X_2 \ll -1$). Le tournesol présente une signature inverse permettant d'expliquer le principe de distinction.

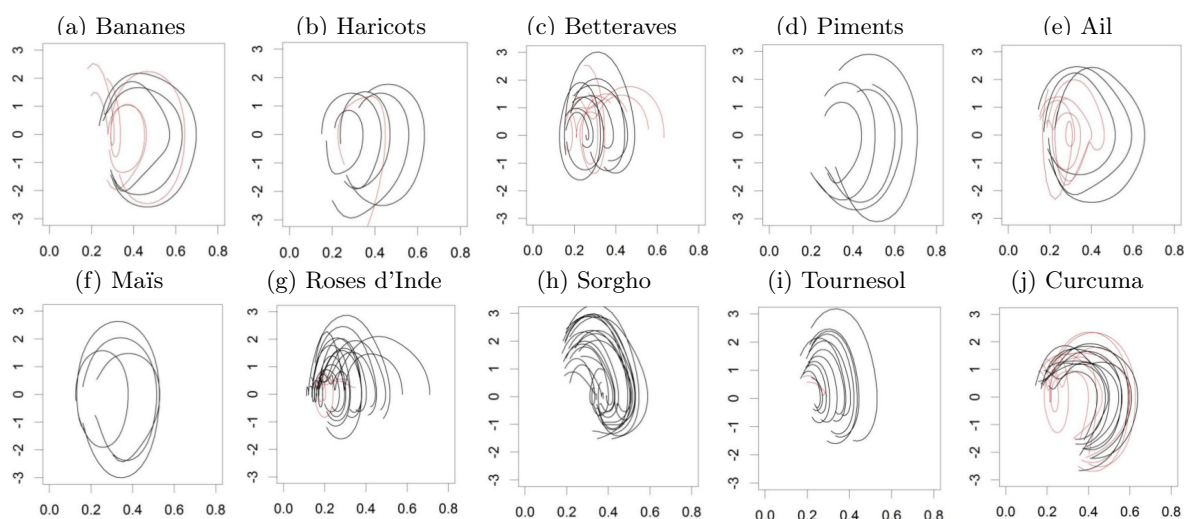


FIGURE 2. Portraits de phase originaux, projection (X_1, X_2) , des différents couverts cultureux observés.

Les portraits de phases des modèles obtenus pour les dix variétés de couverts sont présentés sur les figures 3 (a–j) (les transitoires ont été enlevés afin de s'assurer de la robustesse numérique des modèles). Une dynamique chaotique a pu être obtenue pour la plupart de ces modèles à l'exception de trois modèles : le modèle pour la banane (Fig. 3 (a)) qui converge vers un cycle limite de période 2, et ceux pour le sorgho et le tournesol qui convergent vers des foyers stables (Fig. 3 (h) et 3 (i)). Chacun de ces modèles a été testés pour identifier le couvert étudié, en les appliquant au jeu de données présenté sur la figure 1 sans exclusion : les séries mises de côté pour construire les modèles (cf. sous-section 2.2) ont été ici conservées et le signal complet a été considéré (sans focaliser l'analyse sur la saison culturelle étudiée). Deux paramètres ont été utilisés pour appliquer l'identification : un seuil max de détection d_s et une taille de fenêtre de détection. Les statistiques des résultats sont présentées dans le tableau 2.

Détection	M_{banane}	M_{haricots}	$M_{\text{betterave}}$	M_{piments}	M_{ail}	$M_{\text{maïs}}$	M_{Roses}	M_{sorgho}	$M_{\text{tournesol}}$	M_{curcuma}
Bonne	50(6)	60(6)	100(8)	100(5)	43(7)	100(4)	81(18)	64(14)	56(19)	70(17)
Mauvaise	0	4	20	4	2	17	13	18	21	3

Tableau 2. Statistique de détection des couverts

Quoique la taille des échantillons soit assez réduite (de 5 et 19 parcelles suivant les variétés), la possibilité d'utiliser les modèles globaux pour la détection des couverts permet de mettre en évidence un potentiel intéressant, ce malgré les difficultés spécifiques rencontrées. La plupart des modèles permettent un nombre de bonne détection très significatif ($\geq 60\%$) et un niveau de mauvaise détection raisonnablement faible ($\leq 20\%$) à l'exception des modèles M_{banane} , M_{ail} et $M_{\text{tournesol}}$.

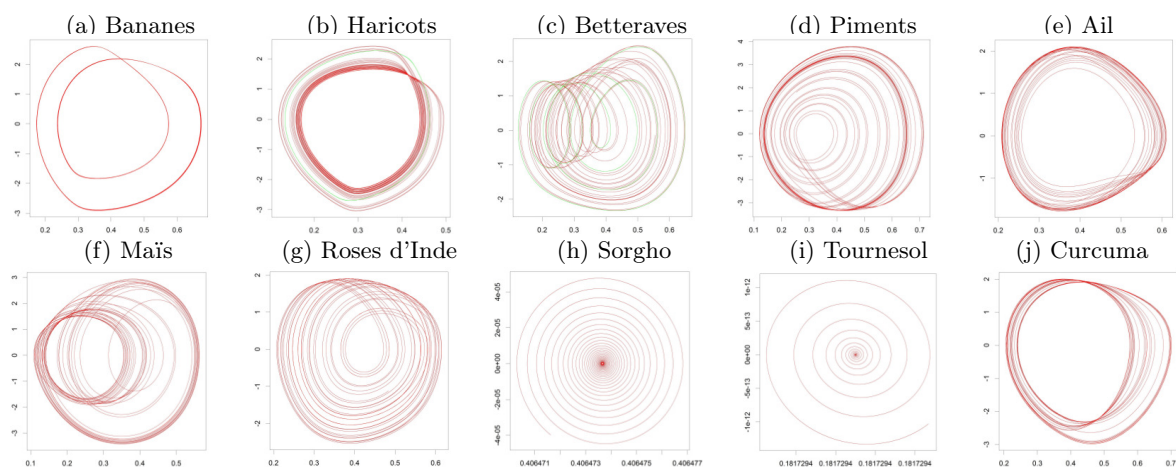


FIGURE 3. Portraits de phase des modèles globaux, projection (X_1, X_2) , obtenus pour les dix variétés culturales.

5 Conclusions

Une nouvelle approche est proposée pour la classification des couverts agricoles à partir de séries temporelles d'images optiques haute résolution. L'approche ne nécessite de définir que deux paramètres pour chaque variété (un seuil de détection et une taille de fenêtre de détection) ; elle est très générale dans sa formulation et permet dans son principe à établir un lien formel entre dynamique étudiée et signal observé. Appliquée à un jeu de données ad hoc, l'approche montre une bonne efficacité pour remonter aux dix types de couverts étudiés dans l'espace et dans le temps.

Remerciements : Cette étude a été financée par le Programme National de Télédétection Spatiale, projet PNTS-2016-09 Crops'I Chaos.

Références

1. Y. SHAO & R. S. LUNETTA, Comparison of support vector machine, neural network, and CART algorithms for the land-cover classification using limited training data points, *ISPRS J. Photogram.*, **70**, 78–87 (2012).
2. P. JÖNSSON & L. EKLUNDH, Seasonality extraction by function fitting to time-series of satellite sensor data, *IEEE T. Geosci. Remote*, **40**, 1824–1832 (2002).
3. G. GOUESBET & C. LETELLIER, Global vector field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 -approximation on nets, *Phys. Rev. E*, **49**, 4955–4972 (1994).
4. J. MAQUET, C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Global models from the Canadian lynx cycles as a direct evidence for chaos in real ecosystems, *J. Math. Biol.*, **55**, 21–39 (2007).
5. S. MANGIAROTTI, L. DRAPEAU, M. HUC & C. LETELLIER, Two chaotic global models for cereal crops cycles observed from satellite in Northern Morocco, *Chaos*, **24**, 023130 (2014).
6. S. MANGIAROTTI, R. COUDRET, L. DRAPEAU & L. JARLAN, Polynomial search and global modeling: two algorithms for modeling chaos, *Phys. Rev. E*, **86**, 046205 (2012).
7. A. SAVITZKY & M. J. GOLAY, Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures, *Anal. Chem.*, **36**, 1627–1639 (1964).
8. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & J. MAQUET, Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics, *Phys. Rev. E*, **71**, 066213 (2005).
9. S. MANGIAROTTI, Low dimensional chaotic models for the plague epidemic in Bombay (1896–1911), *Chaos Soliton. Fract.*, **81**, 184–196 (2015).
10. S. MANGIAROTTI, *Modélisation globale et caractérisation topologique de dynamiques environnementales*, Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Toulouse 3 (2014).
11. S. MANGIAROTTI, F. LE JEAN, M. HUC & C. LETELLIER, Global modeling of aggregated and associated chaotic dynamics, *Chaos Soliton. Fract.*, **83**, 82–96 (2016).

On the dynamics of laminar-turbulent patterns in plane Couette flow

Paul Manneville

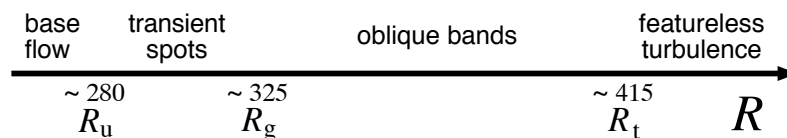
Laboratoire d'Hydrodynamique, CNRS UMR 7646, École Polytechnique 91128 Palaiseau
 paul.manneville@ladhyx.polytechnique.fr

Résumé. L'écoulement de Couette plan présente des motifs turbulent-laminaire obliques réguliers sur une large plage de nombres de Reynolds R entre l'écoulement de base laminaire globalement stable à bas $R < R_g$ et le régime uniformément turbulent pour $R > R_t$ suffisamment grand. Les simulations numériques que nous avons pratiquées sur un motif présentant une modulation de longueur d'onde montrent une relaxation de cette modulation globalement conforme à ce que l'on attend d'une approche standard en termes de structures dissipatives en domaine étendu bien que la structuration se développe sur un fond turbulent. Quelques conséquences sont discutées.

Abstract. Plane Couette flow presents a regular oblique turbulent-laminar pattern over a wide range of Reynolds numbers R between the globally stable base flow profile at low $R < R_g$ and a uniformly turbulent regime at sufficiently large $R > R_t$. The numerical simulations that we have performed on a pattern displaying a wavelength modulation show a relaxation of that modulation in agreement with what one would expect from a standard approach in terms of dissipative structures in extended geometry though the structuration develops on a turbulent background. Some consequences are discussed.

1 Introduction

The diagram below presents the different regimes displayed by plane Couette flow (PCF), the simple shear flow developing between two counter-translating plates at speed $\pm U$ (direction x) separated by a gap $2h$ (direction y), as a function of the Reynolds number $R = Uh/\nu$, where ν is the kinematic viscosity of the fluid. This flow is an archetype of wall-bounded linearly stable flow experiencing a direct transition to turbulence due to finite amplitude perturbations. In the long term, laminar flow is always recovered for $R < R_g$ but long-lived transients in the form of turbulent spots can be observed down to R_u . For $R > R_t$ an essentially uniform turbulent regime called *featureless* is obtained and in the range $R_g < R < R_t$ an oblique alternation of laminar and turbulent bands is present. Numerical values indicated in the following bifurcation diagram are those of Prigent [1]:



Up to now, why bands form as R is decreased below R_t is not fully understood despite theoretical efforts [2, 3] but they are well characterized locally at the statistical level [4] and appropriately described globally at the phenomenological level within the framework of stochastic envelope equations [1]. While noise plays a role close to R_t , its effects become negligible when the bands saturate and the separation of laminar from turbulent local state becomes sharp (see below, Fig. 2). The aim of this work is to study the relevance of the diffusion formalism to the relaxation of a band pattern presenting an initial phase modulation. Such a property would be expected from the envelope analysis of patterns in conventional

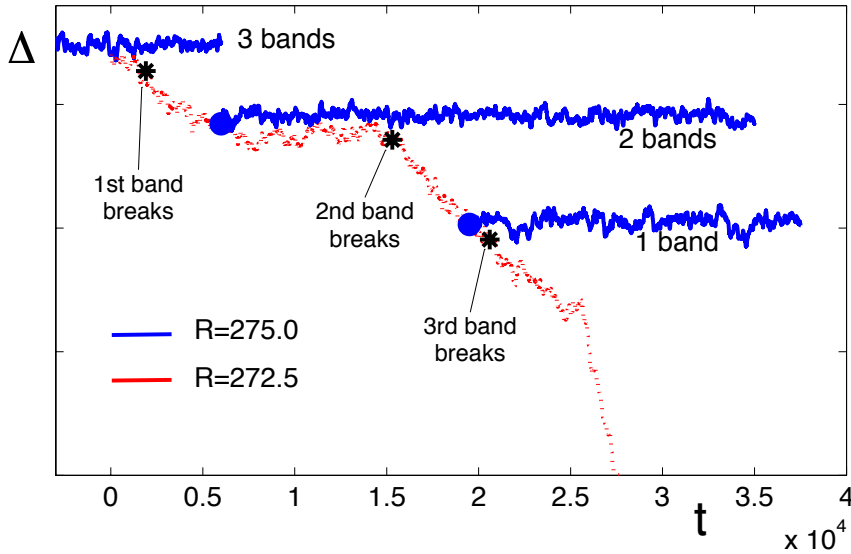


Figure 1. Distance to laminar flow Δ as a function of time during the experiment producing the initial condition. Quantity Δ is proportional to the kinetic energy content in the perturbation, i.e. the different between the flow field and the reference laminar velocity profile. Consult [7] and text for details.

dissipative structure dynamics [5] when the background over which the pattern develops is laminar and multi-scale analysis can be performed rigorously, at least in principle. We shall empirically show that it also holds when the patterning develops over a highly fluctuating, turbulent, background. The work is an extension of a previous study focussed on the decay of the band pattern as R is decreased below R_g [7]. The numerical experiment is described in Section 2 below. The results are presented in Section 3 and further discussed in Section 4.

2 The experiment

In order to study PCF's turbulent-laminar patterning in conditions relevant to actual laboratory experiments [1], one has to consider extended domains, which is computationally demanding. In order to reduce the numerical load, one can follow Barkley and Tuckerman [4] and consider a narrow but elongated domain aligned with the expected wave-vector of the pattern. As a drawback, the approach breaks the symmetry of the problem and does not allow orientation fluctuations with respect to the flow's stream-wise direction. To avoid this limitation, while limiting the computational load, we have considered both stream-wise and span-wise wide domains ($L_x \gg 2h$, $L_z \gg 2h$) with periodic boundary conditions, but at reduced wall-normal resolution. Previous work has shown that this practice, envisioned as a systematic modeling strategy, leads to a qualitatively satisfactory picture and that the price to be paid is just a downward shift of the transitional range [6]. To be specific, the experimentally observed $[R_g, R_t]$ interval $\sim [325, 415]$ is lowered to $\sim [273.5, 360]$ when $N_y = 15$ Chebyshev polynomials are used to describe the y -dependence of the fields, while it is generally considered that $N_y \geq 33$ allows one to fit the experiments back. Here, we focus on the dynamics of bands as a continuation of the work in [7] where a domain of size $(L_x \times L_z) = (432 \times 256)$ was numerically simulated using Gibson's code CHANNELFLOW with $N_y = 15$. For those dimensions and this resolution, a stable pattern of three oblique laminar-turbulent bands is obtained for $R = 275$ and, as R is further decreased to $R = 272.5$, bands break one after the other, as shown in Fig. 2, where the black asterisks mark the successive breakings. After a breaking, the remaining turbulent band fragment withdraws regularly, hence a roughly linear decrease of Δ and, after the fragment has vanished, a pattern with one band less is obtained. After the first band extinction, if $R = 272.5$ is kept, one of the remaining two bands breaks and the process repeats itself (red trace in Fig. 2). In contrast,

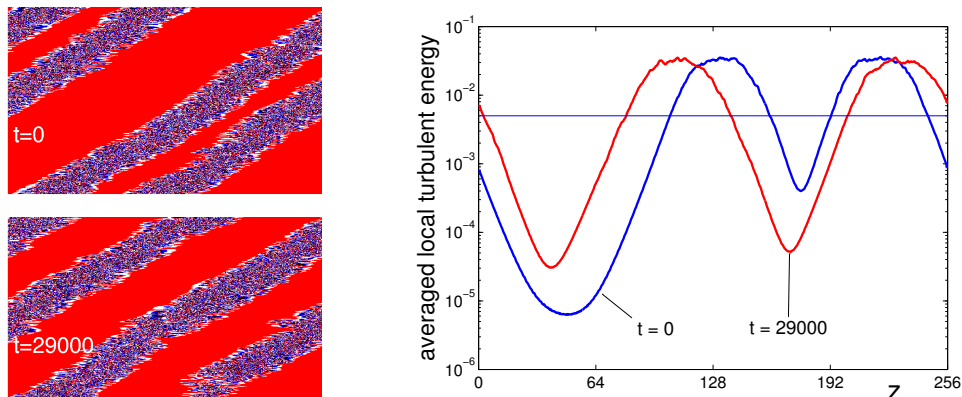


Figure 2. Snapshots of the bands where the laminar regions appears uniformly in red (left) and turbulent energy profiles averaged along the diagonal of the domain (right) at the start and the end of the experiment. The horizontal line at 0.005 indicates the cut-off used later to discriminate laminar from turbulent flow.

taking the states with two or one complete bands obtained during decay as initial conditions (the big blue dots) and increasing back R to $R = 275$ allows one to stabilize a 2-band state or a 1-band state besides the original 3-band state (blue traces). It should be noticed that these subsequent evolutions take place at constant Δ , which mainly means that the *amplitude* of the pattern is saturated so that its dynamics only involves the position of the bands, the pattern's spatial *phase*. We are particularly interested in the 2-band state that displays an irregular band arrangement once the 3rd band has completely receded. Time is set to zero at the beginning of the simulation and the initial state is illustrated in Fig. 3 (left, top). Its subsequent evolution toward state at $t = 29000$ (left, bottom) is scrutinized in the next section.

3 Results

Figure 3 (right) displays the mean local perturbation energy $\propto \int dy(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$, as a function of the span-wise coordinate z after averaging along the bands, thus suppressing dependence on the stream-wise coordinate x . It is easily seen that the mean perturbation energy in the turbulent bands is roughly constant all along the evolution and, from the logarithmic scale used, that it decreases exponentially away into the laminar bands. The band position can thus be unambiguously fixed by choosing a given energy threshold to distinguish laminar from turbulent flow. Here we place the cut-off at 0.005 but results are not sensitive to this value. Figure 4 (left) displays the positions of the laminar-turbulent interfaces as functions of time, showing that the width of the turbulent bands is roughly constant and that they drift so as to equalize the width of the laminar intervals. We have taken advantage of the periodic boundary conditions to slide the pattern in order to keep it centered, as can be understood from a comparison with Fig. 2 (right). Figure 4 (right) displays the relative departure from equalization as a function of time, as measured by quantity $D = (L_z - 2\ell)/L_z$, where ℓ is the distance between the band centers. This quantity is indeed seen to decrease to zero as time increases and an exponential behavior can be fitted at the beginning with a decay time constant $\tau \simeq 19600$ but the subsequent evolution is affected by a high level of noise.

The result cannot be improved by repeating the experiment because a single initial condition is available. However this state is precisely on the decay trajectory at $R = 272.5$ (dotted curve in red in Fig. 1). On the time interval $\approx [10000, 15000]$, after the first broken band has completely disappeared, a phase modulated state nearly identical to that illustrated in Fig. 2 (top-left) is obtained. It again evolves so as to reduce the modulation up until the second band breaks. A decay time $\tau \sim 8700$ can be measured, which is of the same order of magnitude as before at $R = 275$. The smaller value can be understood by a larger distance to threshold R_t , i.e. a more saturated situation with more rigidity and faster relaxation

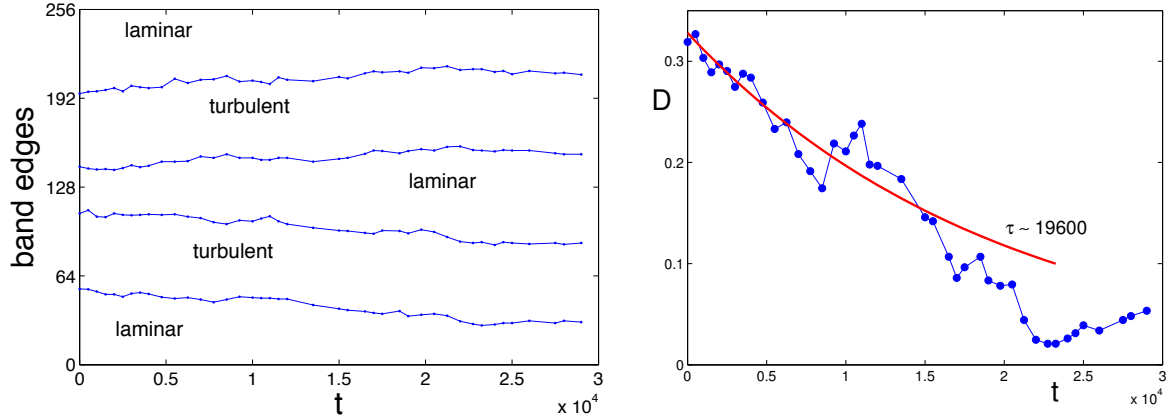


Figure 3. Left: Positions of laminar-turbulent interfaces as a function of time during the relaxation of the modulated band pattern at $R = 275$. Right: Evolution of the corresponding relative modulation of the pattern D , as defined in the text; the exponential fit is performed on interval $[0, 16500]$ yielding a decay time $\tau \sim 19600$.

of phase modulations. Band breaking is attributed to large deviations towards laminar flow at localized places along the band [7]. Provided that the occurrence of such events is sufficiently rare, band drifting should be observed, which is indeed the case.

4 Discussion/Conclusion

Pattern formation over a turbulent background is an interesting situation developing in transitional plane Couette flow when decreasing the Reynolds number. In this note we have presented results on a well-formed system of two oblique parallel laminar-turbulent bands with initial wavelength modulation seen to progressively disappear upon evolution, the early stage of which resembles a diffusion process. Having in mind standard results on patterns described within the envelope formalism, these results are not surprising because they follow from the phase formalism appropriate to deal with cellular instabilities far from threshold, e.g. Rayleigh-Bénard convection [5]. The latter is the prototype of systems producing dissipative structures on a laminar background *via* a supercritical bifurcation and noise is essentially low level (thermal fluctuations). Here, if considered at increasing R , we face a different situation since the transition to turbulence in PCF is globally subcritical, laminar flow coexisting with turbulent flow all along the transitional range. This coexistence develops in physical space in the form of an organized pattern and, when considered at decreasing R , the emergence of this pattern out of highly fluctuating featureless turbulent flow is continuous and phenomenologically well described by a stochastic envelope formalism of Langevin-Ginzburg-Landau with tunable external noise mimicking finite and large intrinsic turbulent fluctuations [1]. Our preliminary results suggest that processes akin to phase diffusion are similarly at work far below R_t , close to and above R_g where the pattern is well saturated but ready to breakdown.

We now have to formulate reservations that open the field for timely new research. First, we have a single evidence of wavelength modulation relaxation (two if we count the case at $R = 272.5$ interrupted by band breaking). Next this case cannot be put on precise quantitative footing on the whole available time interval but only at its beginning. Accordingly, the estimate of the decay constant τ is not reliable since the fit is performed over a time interval of the same order as τ itself. Nevertheless full relaxation is observed, as seen in Fig. 3 (right) where D decreases from ~ 0.3 down to ~ 0.05 for $t > 20000$, which may represent the level of residual fluctuations.

Finally, and most importantly, we must stress that it is obtained through a modeling strategy that consists in reducing the wall-normal resolution in order to be able to simulate large enough domains at reasonable computational cost. Whereas this strategy is believed to give qualitatively good results [6],

quantitatively it leads to a downward shift of $[R_g, R_t]$, and it is not obvious that it is still effective in describing properties of the long term dynamics of bands, in particular pattern stability and band breaking, at a sufficiently accurate level. As a matter of fact it was shown in Fig. 1 that, within these restrictions, stable bands — three, two, and even one — could be observed with $N_y = 15$ in a (432×256) periodic domain over time spans much larger than 10^4 time units (h/U).

Recent results for PCF in a quasi-one-dimensional geometry [8] show that the decay of turbulence at R_g is well accounted for by a continuous (second order) non-equilibrium phase transition in the directed percolation (DP) class. Knowing that spatiotemporal correlations are strongly dependent on confinement characteristics [9], it seems important to scrutinize the quasi-two-dimensional case of interest in experiments. It seems clear that under-resolved simulations need not be continued and that the indications obtained in this context have to be confirmed by fully resolved computations. The dynamics of multi-band states and the stability of one-band states while varying the domain size (and its geometrical proportions since, owing to periodic boundary conditions, this controls the angle of bands) should then be studied with two ideas in mind: (i) while decreasing R from R_t , explore the putative extremum of the potential from which an envelope equation would derive, yielding a preferred wavelength and angle at given R , if any; (ii) examine whether the transition at R_g is continuous as implied in the DP scenario, or else discontinuous with finite turbulent fraction at R_g . On the one hand, criticality at R_g in the continuous case is likely more difficult to ascertain in the quasi-2D case — ideally requiring a finite-size scaling approach — than in the quasi-1D case for which convincing results have been obtained [8]. On the other hand, a discontinuous transition at R_g is forcedly less sensitive to size effects due to the primary role played by extreme localized excursions toward laminar flow [7], with a variety of band configurations possible above R_g , hence a finite range of turbulent fraction depending on the geometry, and no turbulence at all in the long term below R_g . The main merit of our preliminary study at reduced resolution is therefore to help us better situating the problem — not of the nature of turbulence — but of the nature of the transition and how to describe it at the global level.

Acknowledgements: The author would like to thank the members of the JSPS-CNRS collaboration TRANSTURB for discussions related to the work presented here, in particular G. Kawahara and M. Shimizu (Osaka), T. Tsukahara (Tokyo) on the Japanese side, and Y. Duguet (LIMSI), R. Monchaux and M. Couliou (ENSTA-ParisTech) on the French side.

References

1. A. PRIGENT, G. GRÉGOIRE, H. CHATÉ & O. DAUCHOT, Long wavelength modulation of turbulent shear flows, *Physica D*, **174**, 100–113 (2003).
2. L. S. TUCKERMAN, D. BARKLEY & O. DAUCHOT, Instability of uniform turbulent plane Couette flow: Spectra, probability distribution functions and $K - \Omega$ closure model, *7th IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition*, Stockholm, Ph. Schlatter, D. Henningson, eds., pp. 59–66, Springer (2009).
3. P. MANNEVILLE, Turbulent patterns in wall-bounded flows: a Turing instability? *Europhys. Lett.*, **98**, 64001 (2012).
4. D. BARKLEY & L. S. TUCKERMAN Mean flow of turbulent-laminar patterns in plane Couette flow, *J. Fluid Mech.*, **576**, 109–137 (2007).
5. P. MANNEVILLE, *Dissipative structures and weak turbulence*, Academic Press (1990).
6. P. MANNEVILLE & J. ROLLAND, On modelling transitional turbulent flows using under-resolved direct numerical simulations: The case of plane Couette flow, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, **25**, 407–420 (2011).
7. P. MANNEVILLE, On the decay of turbulence in plane Couette flow, *Fluid Dyn. Res.*, **43**, 065501 (2011).
8. G. LEMOULT, L. SHI, K. AVILA, S. V. JALIKOP, M. AVILA & B. HOF, Directed percolation phase transition to sustained turbulence in Couette flow. To be published in *Nature Phys.* (2016).
9. J. PHILIP & P. MANNEVILLE, From temporal to spatiotemporal dynamics in transitional plane Couette flow, *Phys. Rev. E*, **83**, 036308 (2011).

Caractérisation acoustique de la réflexion d'une onde de surface

Guillaume Michel, François Pétrélis & Stéphan Fauve

Laboratoire de Physique Statistique, École normale supérieure, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France
 guillaume.michel@ens.fr

Résumé. Par analogie avec un dispositif optique appelé « cellule de Bragg », nous montrons comment il est possible de caractériser des ondes de surface (amplitudes, fréquences et directions) à l'aide de l'acoustique. Ceci est ensuite exploité pour mesurer l'évolution du coefficient de réflexion d'ondes gravito-capillaires sur une paroi verticale suivant l'état du ménisque, dont dépend fortement la dissipation au niveau de la ligne triple.

Abstract. We investigate the reflection of gravity-capillary surface waves by a plane vertical barrier. The size of the meniscus is found to strongly affect reflection: the energy of the reflected wave with a pinned contact line is around twice the one corresponding to a fully developed meniscus. To perform these measurements, a new experimental setup similar to an acousto-optic modulator is developed and offers a simple way to measure the amplitude, frequency and direction of propagation of surface waves.

1 Introduction

L'acoustique offre dans de nombreux cas des méthodes de mesure quantitatives simples et efficaces. Pensons par exemple à l'effet Doppler, permettant outre les mesures usuelles de vélocimétrie de suivre à une résolution bien inférieure à la longueur d'onde les oscillations d'une paroi. Les surfaces fixes déformées peuvent aussi être étudiées en tirant parti du phénomène de diffraction, ce qui fut utilisé en océanographie pour sonder la houle et les fonds marins au début du xx^e siècle (cf. les travaux d'Eckart [1] ou la revue [2]). L'étude acoustique des ondes de surface, de quelque type que ce soit, combine ces deux aspects : les déformations spatiales périodiques agissent comme un réseau et les mouvements associés induisent un décalage Doppler égal à un multiple de la fréquence de l'onde. Mis en évidence il y a plus de 50 ans [3], cet effet est resté anecdotique en acoustique et n'a jamais mené à des applications concrètes, contrairement à son équivalent optique (les « cellules de Bragg ») couramment utilisé en laboratoire et dans des instruments de mesure. Nous présentons ici son intérêt sur l'exemple des ondes gravito-capillaires à la surface de l'eau : avec uniquement deux transducteurs piézoélectriques, il est possible de mesurer indépendamment les fréquences, directions de propagation et amplitudes associées avec, pour ces dernières, une sensibilité inférieure au micron.

Ce dispositif est ensuite utilisé pour mesurer précisément l'évolution du coefficient de réflexion d'une onde de surface gravito-capillaire sur une paroi verticale suivant la condition de mouillage. Le déplacement de la ligne triple tout comme l'oscillation de l'angle de contact d'un ménisque attaché sont en effet deux phénomènes dissipatifs [4–6] diminuant l'énergie réfléchie. Nous décrivons leurs effets respectifs sur le coefficient de réflexion d'une onde gravito-capillaire, pouvant être remarquables : l'énergie de l'onde réfléchie varie ainsi jusqu'à un facteur deux suivant la condition de mouillage retenue.

2 Un modulateur acousto-mécanique

2.1 Principe du modulateur acousto-optique

Le dispositif expérimental faisant l'objet de cette communication étant en tout point analogue à un modulateur acousto-optique, encore appelé « cellule de Bragg », nous commençons ici par en rappeler le principe (le lecteur connaissant déjà son fonctionnement pourra passer cette partie).

Le principe du modulateur acousto-optique a été proposé en 1922 par Léon Brillouin pour étudier la manière dont la lumière est affectée par une onde acoustique de longueur d'onde similaire [7]. Réalisée

peu de temps après par P. Debye et F. W. Sears d'une part [8], ainsi que R. Lucas et P. Biquard d'autre part [9], ce montage expérimental est représenté sur la figure 1 (a). La lumière issue d'une source S suffisamment fine est transformée en onde plane par une lentille L_1 , traverse une cuve contenant un liquide parcouru par une onde acoustique engendrée grâce à un transducteur piézoélectrique Q , puis est finalement observée sur un écran à l'aide d'une seconde lentille L_2 .

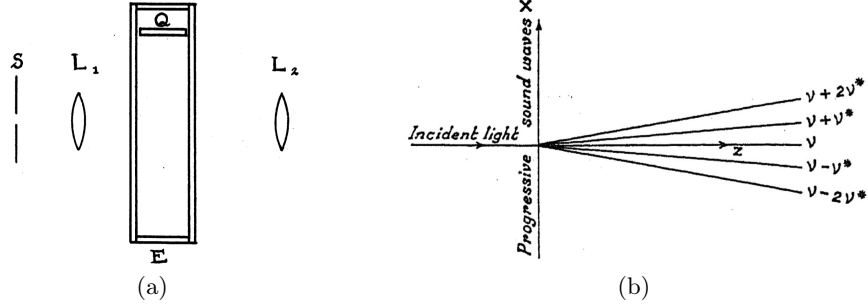


FIGURE 1. (a) Montage expérimental pour l'étude de l'effet acousto-optique (extrait de [8]). (b) Effet attendu pour onde acoustique progressive (extrait de [11]).

Les observations sont claires : la cuve agit comme un réseau de pas égal à la longueur d'onde acoustique et modifie de plus les fréquences des ondes diffusées d'un multiple de la fréquence acoustique [10]. L'interprétation quantitative de cette expérience fut donnée quelques années plus tard par Raman et Nath au cours d'une série de cinq articles (Réf. [11] et associées) précisant notamment les différents décalages Doppler ainsi que les amplitudes et orientations des pics de diffraction. Dans le cas d'une onde acoustique sinusoïdale progressive, ces calculs se basent sur la théorie de diffraction de Fraunhofer et reposent sur l'évaluation de l'intégrale portant sur la surface Σ éclairée

$$\int_{\Sigma} e^{ik\ell\delta n \sin(\omega^*t - k^*x)} \times e^{ikx \sin \theta_x} dx, \quad (1)$$

dont le module au carré quantifie l'intensité mesurée dans la direction θ_x à la sortie de la cuve ($\theta_x = 0$ en l'absence de déviation). Dans cette expression, l'onde acoustique de pulsation $\omega^* = 2\pi\nu^*$ et nombre d'onde k^* engendre une modulation d'indice optique d'amplitude δn sur la largeur ℓ de la cuve, affectant l'onde électromagnétique de nombre d'onde k et pulsation $\omega = 2\pi\nu$. Les décalages Doppler des premiers ordres de diffraction sont reportés sur la figure 1 (b).

Reportons ici l'un des résultats majeurs de cette étude : dans la limite d'une faible modulation de phase ($k\ell\delta n \ll 1$), l'effet de l'onde progressive acoustique se résume à la génération de deux ondes diffractées

- de même amplitude, proportionnelle à celle de l'onde acoustique ;
- l'une de pulsation $\omega + \omega^*$ émise selon un angle θ_x tel que $\sin \theta_x = \frac{k^*}{k}$;
- l'autre de pulsation $\omega - \omega^*$ émise selon un angle θ_x tel que $\sin \theta_x = -\frac{k^*}{k}$.

2.2 Modification du dispositif pour l'étude d'ondes de surface

Le dispositif précédent peut être directement transposé pour l'étude d'ondes de surface en modifiant la nature des ondes utilisées comme suit :

	Modulateur acousto-optique	Modulateur acousto-mécanique
Onde permettant de sonder le milieu :	Onde électromagnétique	Onde acoustique
Onde perturbant le milieu étudié :	Onde acoustique	Onde de surface

Le montage expérimental remplaçant la figure 1 est schématisé sur la figure 2 (a). L'intégrale de Fraunhofer à évaluer étant ici

$$\int_{\Sigma} e^{ik\xi(x,t)(1+\cos \theta_x)} \times e^{ikx \sin \theta_x} dx. \quad (2)$$

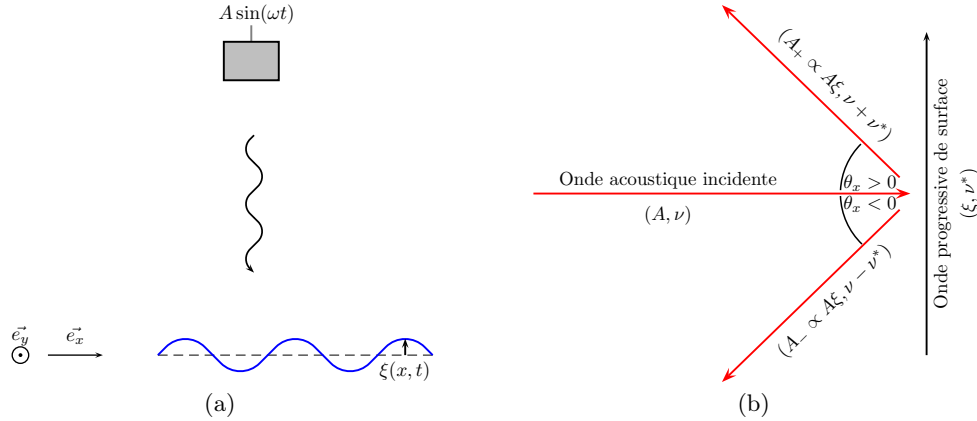


FIGURE 2. Principe d'un modulateur acousto-mécanique. (a) Une onde acoustique voit sa réflexion affectée par la présence d'une onde de surface. (b) Caractéristiques des composantes diffusées.

Dans cette expression la pulsation et le nombre d'onde de l'onde acoustique sont respectivement notés $\omega = 2\pi\nu$ et k , l'élévation de la surface $\xi(x, t)$ et l'angle par rapport à la normale θ_x . Le facteur $(1 + \cos \theta_x)$ est géométrique et ne modifie pas le résultat précédent que nous reportons ici par simple analogie. Dans la limite d'une faible modulation de phase ($k\xi \ll 1$), c'est-à-dire tant que l'élévation est petite devant la longueur d'onde acoustique, l'effet d'une onde de surface progressive suivant \mathbf{e}_x de pulsation ω^* se résume ainsi à la génération de deux ondes acoustiques diffractées schématisées sur la figure 2 (b)

- de même amplitude, proportionnelle à celle de l'onde acoustique ;
- l'une de pulsation $\omega + \omega^*$ émise selon un angle θ_x tel que $\sin \theta_x = \frac{k^*}{k}$;
- l'autre de pulsation $\omega - \omega^*$ émise selon un angle θ_x tel que $\sin \theta_x = -\frac{k^*}{k}$.

En mesurant la fréquence et l'amplitude des ondes diffractées, nous pouvons ainsi en déduire la fréquence, l'amplitude et la direction de propagation des ondes de surface.

2.3 Application expérimentale

Nous commençons par vérifier qu'un tel système est bien adapté à la mesure d'onde gravito-capillaire en réalisant le montage de la figure 3 (a). Pour cela, une cuve de dimensions $648 \times 846 \times 160$ mm est remplie d'eau et délimitée à une extrémité par une plaque inclinée destinée à limiter la réflexion d'ondes de surface, à l'autre par un vibreur Brüel & Kjær 4810. Deux transducteurs piézoélectriques résonant à $\nu = 41\,500$ Hz ($\omega = 2\pi\nu$) émettent et reçoivent à $\theta_x = 45,2^\circ$ le signal acoustique, ensuite traité par un analyseur de spectre HP 35670A. Enfin, un capteur de position suit le déplacement d'un faisceau laser après réflexion sur la surface : cette partie du dispositif, non représentée en figure 3, sert à mesurer l'amplitude des ondes progressives en l'absence de réflexion.

Des ondes gravito-capillaires de fréquence $\nu^* = 15$ Hz sont engendrées, correspondant à un nombre d'onde $k^* \simeq 400 \text{ m}^{-1}$, aucune onde réfléchie n'étant décelable. En notant k le nombre d'onde acoustique et ξ l'amplitude de l'élévation de surface, cette étude est menée dans la limite $k\xi \ll 1$ et $k^*\xi \ll 1$, pour rester dans le domaine de validité de la théorie présentée ci-dessus, ainsi que dans le domaine linéaire de propagation d'ondes de surface. Le spectre acoustique diffusé est représentée sur la figure 4 (a) et consiste en une composante à ν due aux réflexions spéculaires ainsi qu'une seconde à $\nu - \nu^*$ dont l'amplitude évolue linéairement vis-à-vis de ξ (cf. figure 4 (b)). Nous vérifions aussi (figures non reportées ici) qu'inverser le sens de propagation de l'onde de surface modifie le signe du décalage Doppler, ainsi que la linéarité de cette méthode de mesure (la coexistence de deux ondes de surface mène simplement à l'apparition de deux pics dans le spectre acoustique).

Ces résultats vérifient les propriétés présentées précédemment. Ici, un signal acoustique est capté bien que $\arcsin(k^*/k) \simeq 32^\circ \neq \theta_x$, mettant en évidence que la fenêtre de diffraction est angulairement étendue,

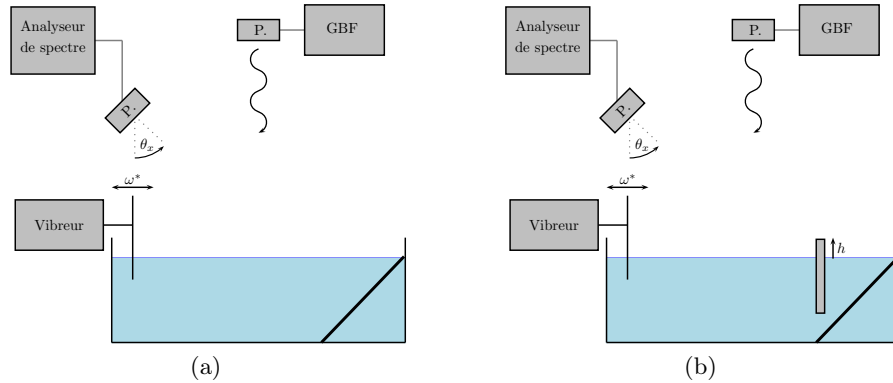


FIGURE 3. Dispositifs servant à (a) tester le système de mesure et (b) mesurer un coefficient de réflexion.

c'est-à-dire qu'un spectre étendu d'ondes de surface peut être mesuré sans déplacer le récepteur. Tout comme dans le cas d'un réseau optique, cette fenêtre doit devenir de plus en plus réduite à mesure que la taille de zone insonifiée augmente. Remarquons de plus que le décalage Doppler joue un rôle crucial dans l'expérience, permettant de distinguer le phénomène d'intérêt des nombreuses réflexions spéculaires. D'un point de vue pratique, le coefficient de proportionnalité $\alpha(\theta_x, k^*)$ liant l'amplitude acoustique reçue à $\nu - \nu^*$ et celle de l'onde de surface ξ , dépendant uniquement de l'inclinaison du capteur θ_x ainsi que du nombre d'onde k^* , doit être calibré grâce à une autre méthode pour une mesure absolue de l'amplitude. Par la suite, nous considérerons des mesures relatives et cela ne sera pas nécessaire.

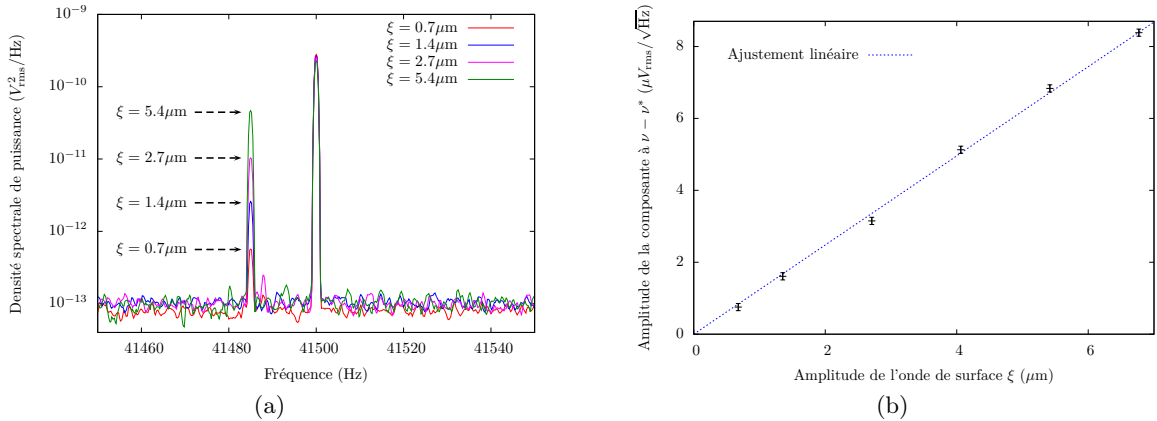


FIGURE 4. (a) Spectres acoustiques du signal diffusé et (b) amplitude de la composante décalée en fréquence pour différentes amplitudes d'ondes de surface ξ .

3 Réflexion d'une onde de surface

Le dispositif expérimental précédent est modifié pour mesurer des coefficients de réflexion : une paroi verticale en Dural d'épaisseur 2,9 mm et de hauteur 8 cm est fixée à 30 cm du vibreur. Sa hauteur h peut être fixée et mesurée avec une précision de 0,1 mm, le bord supérieur coïncidant avec le niveau de l'eau non perturbé si $h = 0$, cf. figure 3 (b). En régime permanent, deux ondes de surface contra-propagatives de fréquence ν^* traversent la zone insonifiée :

- une d'amplitude ξ se dirigeant vers la paroi verticale, induisant au niveau du récepteur piézoélectrique un signal de fréquence $\nu - \nu^*$ et d'amplitude $\alpha(\theta_x, k^*)\xi$;

- une autre d'amplitude $R_{\text{tot}}\xi$ s'éloignant de la paroi, R_{tot} étant le coefficient de réflexion global en amplitude. Le signal acoustique reçu est de fréquence $\nu + \nu^*$ et d'amplitude $\alpha(\theta_x, k^*)R_{\text{tot}}\xi$.

Le coefficient R_{tot}^2 peut ainsi être mesuré à l'aide d'un analyseur de spectre en divisant les densités spectrales de puissance reçue à $\nu + \nu^*$ par celle à $\nu - \nu^*$. Quelques spectres typiques sont reportés sur la figure 5 (a), montrant une forte dépendance de R_{tot} vis-à-vis de h . Étant donné que la longueur d'onde de l'onde de surface incidente ($2\pi/k^* \simeq 1,6$ cm) est petite par rapport à la taille de la paroi et de la hauteur d'eau, ce dispositif reflète la réflexion d'une onde gravito-capillaire sur une paroi infinie en régime d'eau profonde. Dans toutes ces expériences, ξ reste faible par rapport à la longueur d'onde acoustique ($k\xi \ll 1$) ainsi qu'à celle de l'onde de surface ($k^*\xi \ll 1$) : dans le domaine de cambrure exploré ($k^*\xi$ jusqu'à 0,05), R_{tot} est trouvé indépendant de la cambrure. Dans ce régime de propagation linéaire, le coefficient de réflexion global R_{tot} peut être divisé en deux termes :

$$R_{\text{tot}}(h)^2 = D^2 \times R(h)^2, \quad (3)$$

où D englobe l'amortissement linéaire durant la propagation et $R(h)^2$ représente le coefficient de réflexion en énergie sur la paroi. La valeur de D étant difficilement accessible théoriquement à cause de la probable contamination de l'interface par des tensioactifs, nous considérons la grandeur suivante,

$$\left(\frac{R_{\text{tot}}(h)}{R_{\text{tot}}(\infty)} \right)^2 = \left(\frac{R(h)}{R(\infty)} \right)^2, \quad (4)$$

comparant l'énergie réfléchie lorsque la paroi est émergée d'une hauteur h à celle d'un mur infini (ménisque pleinement développé). Son évolution est représentée sur la figure 5 (b), comportant les différents régimes suivant :

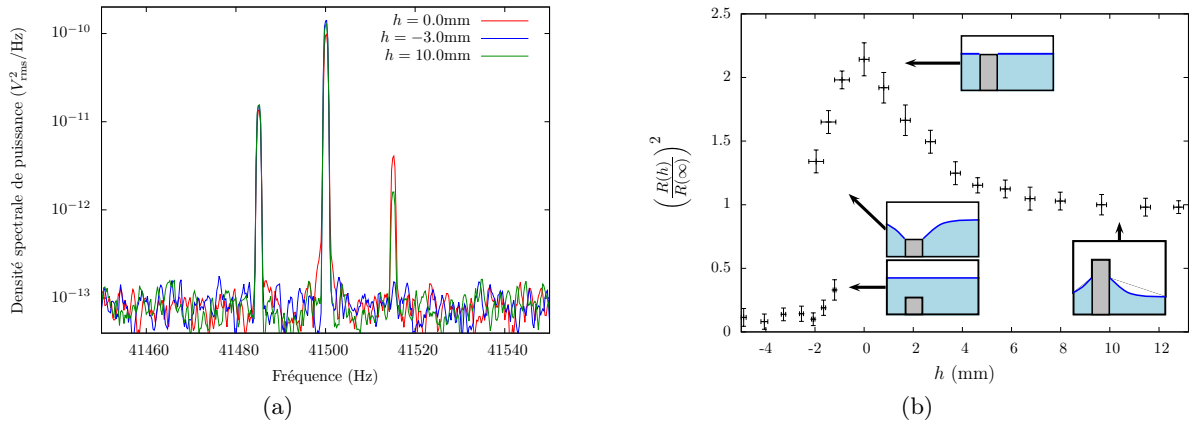


FIGURE 5. (a) Spectres acoustiques observés et (b) coefficient de réflexion en énergie pour différentes hauteurs h .

- Une paroi totalement immergée est obtenue pour des valeurs de h inférieures à -1 mm, au-dessus de laquelle une transition de démouillage est toujours observée. Même si cette distance reste petite par rapport à la longueur d'onde de l'onde de surface ($2\pi/k^* \simeq 1,6$ cm), le coefficient de réflexion reste quasi-nul. Ce résultat surprenant a été prédit par Dean en 1945 pour des ondes de gravité [12] puis généralisé au cas des ondes gravito-capillaires par Evans [13]. Il résulte de la forte localisation de l'énergie des ondes de surface au niveau de l'interface. Les valeurs théoriques de R^2 obtenues à l'aide de [13] pour $h = -2$ mm et $h = -1$ mm valent respectivement 0,05 et 0,21.
- Pour des hauteurs $h > 5$ mm, le coefficient de réflexion est constant. Le ménisque est alors pleinement développé et la ligne de contact n'est plus accrochée au niveau du coin supérieur, son mouvement occasionnant une dissipation supplémentaire. L'étude théorique de ce régime est complexe car la condition

aux limites (CL) usuelle de non-glissement fait apparaître des divergences. D'autres CL doivent être considérées, apportant une nouvelle échelle de longueur telles qu'une longueur de glissement ou un *cut-off* microscopique [4]. Même si les premières observations remontent à près d'un siècle [14], la compréhension fine des phénomènes dissipatifs au niveau de la ligne de contact n'est aboutie que dans certaines limites [5, 6]. À l'aide d'une CL phénoménologique, le coefficient de réflexion dans la limite de faible amplitude et d'un fluide inviscide peut être calculé [15].

- Entre ces deux cas limites, la ligne de contact est accrochée au bord supérieur de la paroi, la hauteur du ménisque étant ainsi égale à h . La valeur de l'angle de contact en l'absence de perturbation n'est plus un paramètre libre mais peut être déduit de h . Le coefficient de réflexion maximal est obtenu lorsque le ménisque disparaît, c'est-à-dire lorsque $h = 0$.

Aucune discontinuité n'est observée lorsque la ligne de contact quitte le coin supérieur ($h \simeq 5$ mm), signe que la CL au bord évolue continûment de « accrochée » à « libre », ce qui peut être décrit à l'aide de la loi phénoménologique reportée dans [15] et couramment utilisée dans la littérature.

4 Conclusion

Nous avons ici montré que l'acoustique permet de caractériser des ondes de surface, donnant en particulier accès aux amplitudes individuelles dans le cas d'ondes contra-propagatives. Bien qu'utilisé uniquement pour des ondes gravito-capillaires, ce dispositif peut être adapté à tout autre type d'onde de surface. Pensons par exemple aux ondes de Rayleigh, de déformation de plaques métalliques, de films ou de membranes, pour lesquelles le champ de déformation entier peut souvent être acquis *via* l'optique mais au prix d'un dispositif plus cher et complexe.

Cette méthode a été mise en œuvre pour mesurer le coefficient de réflexion d'ondes gravito-capillaires suivant la taille du ménisque. Nous observons une forte influence de ce paramètre : entre une ligne de contact accrochée en l'absence de ménisque et un ménisque pleinement développé, l'énergie de l'onde réfléchie peut varier jusqu'à un facteur deux. Cette étude sur le mouillage pourrait être étendue à de nombreux autres aspects : l'étude des non-linéarités dans le cas d'ondes de surface de cambrures notables, de la dépendance vis-à-vis de la fréquence de ces mêmes ondes ou encore des propriétés de la paroi (inclinaison, caractère hydrophobe / hydrophile, porosité, inhomogénéité...).

Remerciements : Ce travail a été mené grâce au CNES et à l'ANR-12-BS04-0005-02.

Références

1. C. ECKART, *J. Acoust. Soc. Am.*, **25**, 566–570 (1953).
2. L. FORTUIN, *J. Acoust. Soc. Am.*, **47**, 1209–1228 (1970).
3. L. N. LIEBERMANN, *J. Acoust. Soc. Am.*, **35**, 923 (1963).
4. P. G. DE GENNES, *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 827–863 (1985).
5. C.-L. TING & M. PERLIN, *J. Fluid. Mech.*, **295**, 263–300 (1995).
6. S. GUO, H. LEE, P. SHENG & P. TONG, *Phys. Rev. E*, **91**, 012404 (2015).
7. L. BRILLOUIN, *Ann. Phys.*, **17**, 88–122 (1922).
8. P. DEBYE & F. W. SEARS, *Proc. Nat. Acad. Sc.* **6**, 409–414 (1932).
9. R. LUCAS & P. BIQUARD, *C. R. Acad. Sci. Paris* **194**, 2132 (1932).
10. P. DEBYE, H. SACK & F. COULON, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **198**, 922 (1934).
11. C. V. RAMAN & N. S. NAGENDRA NATH, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, **3**, 75–84 (1936).
12. W. R. DEAN, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **41**, 231–236 (1945).
13. D. V. EVANS, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **64**, 795–810 (1968).
14. R. ABLETT, *Philos. Mag.*, **46**, 244–256 (1923).
15. P. F. RHODES-ROBINSON, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **92**, 369–373 (1982).

Relation de dispersion d'ondes de surface paramétriquement excitées

Jean Rajchenbach¹ & Didier Clamond²

¹ Laboratoire de Physique de la Matière Condensée (CNRS-UMR 7336), Université de Nice – Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2

² Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné (CNRS-UMR MR 7351), Université de Nice – Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2

jean.rajchenbach@unice.fr

Résumé. Nous revenons sur le problème des vagues de Faraday. Nous montrons que la relation de dispersion se distingue de celle des vagues libres (non forcées) en ce que l'amplitude du forçage ainsi que la viscosité interviennent dans celle-ci. Nous déterminons ensuite les seuils d'instabilité et les nombre d'onde sélectionnés dans les deux situations d'ondes courtes et d'ondes longues. Nous montrons que l'instabilité de Faraday peut être soit sur-critique, soit sous-critique, suivant la profondeur. Ceci fournit un cadre théorique à de récentes observations.

Abstract. We revisit the theoretical description of Faraday waves. We show that the relation of dispersion is not that of free unforced waves; the forcing amplitude and the viscosity play a significant role in the dispersion relation. We then determine the instability thresholds and the wavenumber selection in cases of both short and long waves. We also show that, depending on the depth, the instability leading to the formation of waves can be either supercritical or subcritical, in agreement with recent experimental findings.

1 Introduction

Malgré de récentes avancées théoriques [1–8], un certain nombre de propriétés propres aux vagues de Faraday reste encore dans l'obscurité [9]. Par exemple, leur relation de dispersion (qui relie la fréquence $\omega/2\pi$ et le nombre d'onde $|\mathbf{k}|$) n'a pas été établie explicitement jusqu'à maintenant. Étonnamment (et ceci à la suite d'un préjugé déjà présent dans l'article pionnier de Benjamin et Ursell [1]), celle-ci est le plus souvent identifiée à la relation de dispersion des vagues libres, non forcées. De plus, il est admis dans nombre d'articles que ce sont les dimensions et la géométrie du récipient qui gouvernent la sélection du nombre d'onde des vagues au seuil d'instabilité. Ces deux hypothèses s'avèrent incorrectes. Sur la photo présentée ci-dessous (Fig. 1 (a)) et sur le film attaché à la référence [10], on assiste à l'émergence de deux ondes contra-propagatives, oscillant à la fréquence moitié de la fréquence de forçage et non à l'excitation d'un mode propre du récipient. Les modes de Faraday ne sont donc pas quantifiés par les dimensions du récipient et ils possèdent un spectre continu de nombres d'onde et de fréquences. Il faut aussi noter que les mesures expérimentales de la relation de dispersion des vagues de Faraday révèlent un écart significatif par rapport à celle des vagues libres (voir par exemple [11]). À ce propos, il ne sera pas inutile de remarquer que la relation de dispersion des vagues libres en eau peu profonde est incompatible avec la formation de motifs en surface. En effet, la formation et la symétrie des motifs en surface sont déterminées par un mécanisme d'interaction résonante à plusieurs ondes. Ce mécanisme requiert la satisfaction simultanée des deux égalités $\mathbf{k}_1 \pm \dots \pm \mathbf{k}_N = \mathbf{0}$ et $\omega_1 \pm \dots \pm \omega_N = 0$ (\mathbf{k}_i et ω_i étant les nombres d'onde et les pulsations des vagues). De telles relations exigent une relation de dispersion convexe, ce qui n'est pas le cas pour les vagues libres en eau peu profonde, dont la relation de dispersion est linéaire.

De plus, les modèles théoriques élaborés jusqu'à présent prévoient une instabilité de Faraday toujours de type sur-critique (c'est-à-dire continue). Si cela rend compte correctement des observations expérimentales faites en situation d'eau profonde, cela va à l'encontre des résultats obtenus en eau peu profonde, où l'on rencontre une hystérèse [10]. Enfin, on note dans tous les cas des écarts importants entre les seuils d'instabilité mesurés et ceux prédits d'après les modèles en cours [9]. Il est donc temps de réviser la modélisation des ondes de Faraday.

Dans cette étude, notre premier but sera d'établir *explicitement* la relation de dispersion des vagues de Faraday, en forçage et dissipation non nuls. Comme nous allons le montrer ci-dessous, la relation de dispersion des vagues libres est significativement modifiée en présence d'un forçage paramétrique ; deux fréquences différentes correspondent à la même longueur d'onde. Nous discuterons ensuite du nombre de solutions stables en fonction de l'amplitude de forçage F . Enfin, nous déterminerons les seuils d'instabilité, ainsi que les longueurs d'ondes sélectionnées dans les deux cas des ondes longues ($kd \ll 1$, d étant la profondeur et $k = |\mathbf{k}|$) ou des ondes courtes ($kd \gg 1$). Nous montrerons que la transition peut être soit sur-critique, soit sous-critique, suivant la profondeur.

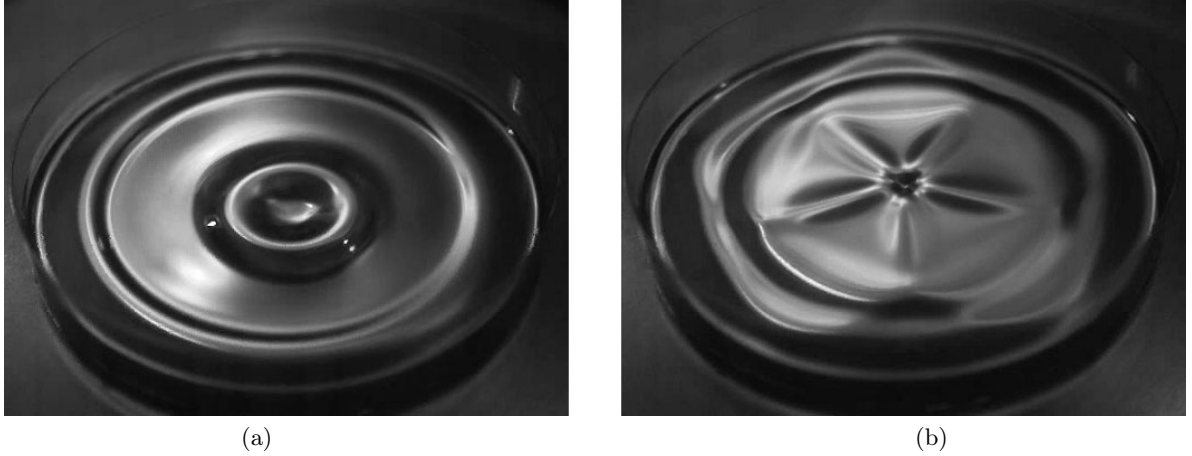


FIGURE 1. (a) Vagues de symétrie circulaire observées dans un récipient cylindrique (diamètre 9 cm, hauteur de fluide 7 mm). Ces vagues sont créées par des oscillations sinusoidales et verticales du récipient (amplitude de vibration = 1,70 mm) et oscillent à la fréquence moitié de celle du forçage (ici $\Omega/2\pi = 8$ Hz). Les modes de Faraday créés à cette fréquence et à cette amplitude ne correspondent pas à un mode propre du récipient, mais correspondent à la superposition de deux ondes, l'une centripète et l'autre centrifuge. Contrairement au cas du pendule paramétrique, le spectre des excitations est ici continu. (b) Après avoir augmenté l'amplitude du forçage jusqu'à 1,95 mm, on observe la formation d'une vague en forme d'étoile.

2 L'équation de Mathieu

Considérons une couche de fluide newtonien de viscosité cinématique ν et de profondeur d , disposée dans un récipient animé d'un mouvement sinusoïdal et vertical de fréquence $\Omega/2\pi$ et d'amplitude \mathcal{A} . Dans le système de coordonnées attaché au récipient, le fluide est soumis à une gravité apparente $G(t) \equiv g - \Omega^2 \mathcal{A} \cos(\Omega t)$, g étant l'accélération de la pesanteur dans le référentiel du laboratoire et t étant le temps.

Soient respectivement $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et y les coordonnées horizontale et verticale attachées au récipient. Les ordonnées verticale $y = -d$, $y = 0$ et $y = \eta(\mathbf{x}, t)$ correspondent respectivement au fond horizontal imperméable, au niveau de la surface du fluide au repos et à la hauteur locale de la surface libre. La transformée de Fourier $\zeta(\mathbf{k}, t)$ du profil de la surface libre s'écrit $\zeta(\mathbf{k}, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\mathbf{x}, t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^2\mathbf{x}$, où $i^2 = -1$.

Pour des ondes de surface paramétriquement forcées et d'amplitude infinitésimale, ζ obéit à une équation de Mathieu amortie [1, 12]

$$\zeta_{tt} + 2\sigma \zeta_t + \omega_0^2 [1 - F \cos(\Omega t)] \zeta = 0, \quad (1)$$

où $\sigma = \sigma(k)$ correspond à l'amortissement visqueux, $\omega_0 = \omega_0(k)$ est la pulsation dans l'approximation linéaire de la vague libre (c'est-à-dire sans forçage et sans dissipation) et $F = \Omega^2 \mathcal{A}/g$ est le forçage

adimensionné. Pour des vagues gravitaires non forcées, on a

$$\omega_0^2 = gk \tanh(kd). \quad (2)$$

en profondeur finie. Dans le cas des grandes profondeurs, le coefficient d'amortissement σ de l'équation (1) correspond à la dissipation dans l'épaisseur de la nappe, alors qu'il correspond essentiellement au frottement avec le fond dans le cas de l'eau peu profonde. Dans les limites des faibles viscosités et pour des vagues libres, non forcées, on a [14, 15]

$$\sigma = \nu k^2 \left[2 + \frac{\coth(2kd)}{\sinh(2kd)} \right] + \frac{k\sqrt{k\nu c_0/2}}{\sinh(2kd)} \quad (3)$$

où $c_0 = \sqrt{gd}$. Le premier terme à droite correspond à la dissipation dans l'épaisseur de la nappe, tandis que le second terme décrit le frottement avec le fond.

Il est bien connu que les systèmes obéissant à une équation de Mathieu avec un forçage de fréquence $\Omega/2\pi$ présentent une série de résonances pour $\omega = n\Omega/2$ n étant un entier [13]. Les solutions de l'équation (1) s'expriment l'aide des fonctions de Mathieu, et la relation de dispersion associée se déduit du théorème de Floquet. Les fonctions de Mathieu étant transcendantes, elles ne peuvent être décomposées en fonctions élémentaires. On peut néanmoins appréhender qualitativement le comportement de ces solutions dans la limite de faibles forçages et des faibles dissipations.

Dans la limite $F \ll 1$ et $\sigma \sim O(F)$, une relation de dispersion approchée peut être calculée pour la réponse subharmonique ($n = 1$, $\omega = \Omega/2$). On a

$$\omega_0/\omega \approx 1 \pm \sqrt{(F/4)^2 - (\sigma/\omega)^2}, \quad (4)$$

où ω_0 est relié à k via la relation de dispersion des vagues libres (2) de la théorie linéaire. Une condition pour obtenir un régime périodique est que ω_0 soit réel, ce qui définit un seuil $F_\downarrow = 4\sigma/\omega$ pour le forçage. On remarque aussi que *deux* nombres d'onde k correspondent à la même fréquence $\omega/2\pi$ (pour Ω , F et σ donnés) et que *l'amplitude* du forçage et la *dissipation* interviennent dans la relation de dispersion (4). Rappelons que l'équation (4) a été dérivée dans le cadre d'une approximation linéaire; elle n'est donc valide que dans le cas limite des vagues infinitésimales. Les non linéarités jouant un rôle crucial dans le cas des vagues d'amplitude finie, il convient d'analyser ces effets à l'aide, par exemple, d'une équation aux amplitudes.

3 Effets non linéaires et seuils

Recherchons une approximation de la forme $\eta(x, t) = \text{Re}\{A(t)\} \cos(kx) + O(A^2)$. Dans le cadre des hypothèses de petite amplitude $|kA| \ll 1$, de faible forçage $F \sim O(|A|^2)$ et de faible dissipation $\sigma \sim O(|A|^2)$, une équation peut être dérivée pour l'amplitude A modulée sinusoïdalement dans le temps [2, 17] :

$$\frac{dA}{dt} + (\sigma - i\omega_0) A + \frac{iF\Omega}{8} e^{i\Omega t} A^* + \frac{iK\Omega k^2}{2} |A|^2 A = 0, \quad (5)$$

où l'étoile désigne le complexe conjugué. Bien sûr, le signe du terme non linéaire de l'équation (5) joue un rôle crucial quant à la stabilité des solutions.

Pour des vagues purement gravitaires, on a, d'après [16]

$$K = \frac{2 - 6s - 9s^2 - 5s^3}{16(1+s)(1-s)^2}, \quad (6)$$

avec $s = \text{sech}(2kd)$. On remarque que K change de signe avec la profondeur : $K > 0$ pour les ondes courtes et $K < 0$ pour les ondes longues. Afin d'éliminer le temps dans le second membre de (5), il est utile d'effectuer le changement de variable $B = A \exp(i\frac{\pi}{4} - i\frac{\Omega}{2}t)$. L'équation (5) se réécrit alors

$$\frac{dB}{dt} = \left(i\omega_0 + \frac{\Omega}{2i} - \sigma \right) B + \frac{F\Omega}{8} B^* + \frac{K\Omega k^2}{2i} |B|^2 B. \quad (7)$$

Deux solutions de l'équation (7) présentent un intérêt particulier : la solution de repos $B = 0$ et la solution permanente d'amplitude non nulle. La stabilité de l'état de repos sera étudiée plus bas. Pour les états d'amplitude non nulle, on recherche une solution de la forme $B = a \exp(i\frac{\pi}{4} - i\delta)$, avec a et δ constantes. De l'équation (7), on tire

$$\frac{\omega_0}{\omega} = 1 + K(ka)^2 \pm \sqrt{\frac{F^2}{16} - \frac{\sigma^2}{\omega^2}}, \quad \sin(2\delta) = \frac{4\sigma}{\omega F}, \quad (8)$$

avec $\omega = \Omega/2$. Ceci correspond à la relation de dispersion avec prise en compte la première non linéarité. En forçage et dissipation nuls, on retrouve la relation de dispersion des ondes stationnaires libres, non forcées, en profondeur finie. Le fait marquant est qu'il existe un décalage en pulsation $\Delta\omega = \pm\sqrt{(F\omega/4)^2 - \sigma^2}$, entre des vagues paramétriquement forcées et des vagues libres de longueur d'onde identique. Notons que ce décalage est indépendant de l'amplitude de la vague.

Dans la discussion qui va suivre, nous nous limiterons au cas $K > 0$. La même analyse s'applique pour $K < 0$, à condition de remplacer $\omega_0 - \omega$ par $\omega - \omega_0$.

De l'équation (8), on déduit

$$K(ka)^2 = \frac{\omega_0}{\omega} - 1 \mp \sqrt{\left(\frac{F}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2}, \quad (9)$$

avec la condition $K(ka)^2$ réel et positif. Le dernier terme à droite de (9) devant être réel, il apparaît un seuil $F_\downarrow = 4\sigma/\omega$ pour l'apparition d'au moins un état d'amplitude non nulle. La condition $F > F_\downarrow$ étant satisfaite, si l'on a de plus $F < F_\uparrow$ tel que

$$F_\uparrow \equiv 4\omega^{-1} \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \sigma^2}, \quad (10)$$

l'équation aux amplitudes admet alors deux solutions d'amplitude non nulle (outre les solutions de phase opposée).

Si $F > F_\uparrow$, la condition de positivité du terme de droite de (9) conduit seulement à une solution non nulle de l'équation (5) (outre la solution de repos et la solution de phase opposée). Pour résumer (et en oubliant les phases), il n'y a qu'une solution de repos si $F < F_\downarrow$; il y a trois solutions (une étant le repos) dans la région $F_\downarrow < F < F_\uparrow$, et deux solutions (une étant le repos) lorsque $F > F_\uparrow$. Il convient maintenant d'analyser le caractère stable ou instable de ces solutions.

4 Analyse de stabilité

Pour analyser la stabilité des solutions permanentes de l'équation aux amplitudes (7), on ajoute une petite perturbation et l'on étudie le signe des valeurs propres du système d'équations linéarisées qui gouvernent l'évolution de cette perturbation. L'analyse de stabilité effectuée ci-dessous ressemble à celle menée pour le pendule paramétrique dans [18], à ceci près que la fréquence de résonance d'un pendule est unique, alors que les vagues à la surface de l'eau possèdent un spectre continu de fréquences. De plus, dans le cas des ondes de surfaces, le signe de la première non linéarité dépend de la profondeur [16].

Tout d'abord, étudions la stabilité de l'état de repos $B = 0$. L'équation linéarisée (7) a deux valeurs propres λ_1 and λ_2 telles que

$$\lambda_j = -\sigma + (-1)^j \sqrt{(F\omega/4)^2 - (\omega - \omega_0)^2}. \quad (11)$$

Si $(F\omega/4)^2 < (\omega - \omega_0)^2 + \sigma^2$, la partie réelle des deux valeurs propres est négative. L'état de repos est donc stable. Si $(F\omega/4)^2 > (\omega - \omega_0)^2 + \sigma^2$, la valeur propre λ_2 est réelle et positive. Par conséquent, l'état de repos n'est pas stable et

$$F_{\uparrow} = 4\sqrt{(1 - \omega_0/\omega)^2 + (\sigma/\omega)^2} \quad (12)$$

correspond au forçage minimal nécessaire pour déstabiliser le repos et pour générer des ondes de surfaces.

Maintenant, étudions la stabilité des solutions permanentes d'amplitude finie $a > 0$ de l'équation (7). Nous considérons des perturbations de la forme $B = [a + b(t)] \exp i(\pi/4 - \delta)$, a , δ et ω_0 étant définis dans l'équation (8) et b correspondant à une amplitude complexe telle que $|b| \ll a$. Dans l'approximation linéaire, les valeurs propres de l'équation d'évolution de la perturbation sont ($j = 1, 2$)

$$\lambda_j = -\sigma + (-1)^j \times \sqrt{\sigma^2 - K(2\omega ka)^2 [1 - \omega_0^{\pm}/\omega + K(ka)^2]}. \quad (13)$$

La condition d'obtention de deux valeurs propres réelles et négatives s'écrit $1 - \omega_0^{\pm}/\omega + K(ka)^2 > 0$, cette condition devant être couplée avec (9). Il apparaît donc clairement que dans le cas $K > 0$, les deux valeurs propres sont simultanément négatives si $\omega_0 = \omega_0^-$, c'est-à-dire si $\omega_0 < \omega$. La solution permanente correspondante est donc stable. L'autre solution permanente $\omega_0 = \omega_0^+$, qui existe dans la région $F_{\downarrow} < F < F_{\uparrow}$, correspond à $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$: elle est donc instable.

La valeur limite $\lambda_2 = 0$ correspond à $F = F_{\downarrow}$, ou bien $ka = 0$, ou bien $K = 0$. Les deux premiers cas correspondent à l'état de repos, tandis que le troisième cas nécessite un terme d'ordre supérieure dans l'équation (7) pour conclure.

Notons qu'on obtient des conclusions opposées pour $K < 0$: la solution stable correspond alors à $\omega_0 = \omega_0^+$ (c'est-à-dire $\omega_0 > \omega$).

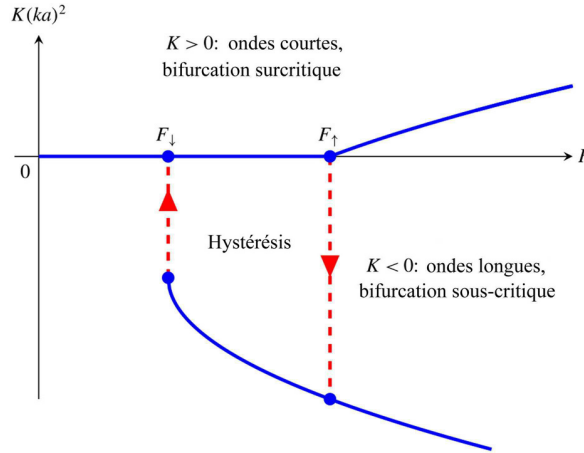


FIGURE 2. Diagramme de bifurcation depuis le repos. En eau profonde ($kd \gg 1$), la bifurcation est sur-critique et le seuil d'instabilité est F_{\uparrow} . En eau peu profonde ($kd \ll 1$), la bifurcation est sous-critique et présente une hystérèse dans l'intervalle $F_{\downarrow} < F < F_{\uparrow}$.

5 Sélection du nombre d'onde

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer le nombre d'onde du premier mode qui apparaît au seuil d'instabilité $F_{\uparrow} = 4\omega^{-1}\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \sigma^2}$. Dans cette équation, la dépendance en k de la dissipation nous est fournie par l'équation (3). La valeur de k qui minimise F_{\uparrow} est donnée par $\partial F_{\uparrow}/\partial k = 0$, c'est-à-dire par

$$\frac{\partial F_{\uparrow}}{\partial k} = \frac{16(\omega_0 - \omega)}{\omega^2 F_{\uparrow}} \frac{\partial \omega_0}{\partial k} + \frac{16\sigma}{\omega^2 F_{\uparrow}} \frac{\partial \sigma}{\partial k} = 0, \quad (14)$$

avec $\omega = \Omega/2$.

Dans la limite des profondeurs infinies, ($d = \infty$, $\omega_0 = \sqrt{gk}$, $\sigma = 2\nu k^2$), le premier mode instable vérifiant l'équation (14) correspond à

$$2\omega_0 = \omega + \sqrt{\omega^2 - 16\sigma^2}.$$

Dans le cas opposé des ondes longues ($kd \ll 1$, $\omega_0 = k\sqrt{gd}$, $\sigma = (gd)^{1/4}\sqrt{k\nu/8d^2}$), le premier mode instable correspond à

$$\omega_0 = \omega - 16\nu/d^2.$$

Dans les deux cas, le premier mode sélectionné possède une fréquence $\omega/2\pi$ supérieure à la fréquence $\omega_o/2\pi$ du mode libre, non forcé, de même longueur d'onde. Ce résultat perdure en présence de tension superficielle et pour toute profondeur. Vu que le signe de la non linéarité de l'équation aux amplitudes est positif en eau profonde et négatif en eau peu profonde, on peut en conclure que l'instabilité est sur-critique en eau profonde et sous-critique (avec hystérèse) en eau peu profonde.

6 Conclusion

Nous avons démontré que la relation de dispersion des vagues de Faraday ne s'identifiait pas à celle des vagues libres, non forcées ; le forçage et la dissipation interviennent dans la relation de dispersion. Nous avons aussi déterminé le seuil d'instabilité, qui est non pas $F_\downarrow = 4\sigma\omega^{-1}$ mais $F_\uparrow = 4\omega^{-1}\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \sigma^2}$. Nous avons aussi étudié la nature de la bifurcation au seuil d'instabilité et nous avons montré qu'elle était sur-critique dans le cas des ondes courtes et sous-critique (avec hystérésis) dans le cas des ondes longues. Enfin, nous avons déterminé les longueurs d'ondes sélectionnées au seuil d'instabilité dans les deux cas des petites et grandes profondeurs.

Références

1. T. B. BENJAMIN & F. URSELL, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **225**, 505–515 (1954).
2. S. T. MILNER, *J. Fluid Mech.*, **225**, 81–100 (1992).
3. K. KUMAR & L. S. TUCKERMAN, *J. Fluid Mech.*, **279**, 49–68 (1994).
4. K. KUMAR, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **452**, 1113–1126 (1996).
5. J. W. MILES & D. HENDERSON, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **22**, 143–165 (1990).
6. W. ZHANG & J. VIÑALS, *J. Fluid Mech.*, **336**, 301–330 (1997).
7. F. J. MANCEBO & J. M. VEGA, *Physica D*, **197**, 346–363 (2004).
8. J. RAJCHENBACH & D. CLAMOND, *J. Fluid. Mech.*, **777**, R2 (2015).
9. A. C. SKELDON & A. M. RUCKLIDGE, Preprint [arXiv:1504.01553](https://arxiv.org/abs/1504.01553) (2015).
10. J. RAJCHENBACH, D. CLAMOND & A. LEROUX, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 094502 (2013).
Films visibles sur <http://journals.aps.org/prl/supplemental/10.1103/PhysRevLett.110.094502>
11. W. S. EDWARDS & S. FAUVE, *J. Fluid Mech.*, **278**, 123–148 (1994).
12. L. D. LANDAU & E. M. LIFSHITZ, *Course of Theoretical Physics, Vol. 1: Mechanics*, 3^e édition, Butterworth–Heinemann (1976).
13. M. ABRAMOWITZ & I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover (1965).
14. S. S. HOUGH, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **28**, 264–288 (1896).
15. J. N. HUNT, *Houille Blanche*, **6**, 685–691 (1964).
16. I. TADJBAKHSI & J. B. KELLER, *J. Fluid Mech.*, **3**, 442–451 (1960).
17. E. MERON, *Phys. Rev. A*, **35**, 4892–4895 (1987).
18. S. FAUVE, dans *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*, édité par C. Godrèche & P. Manneville, Cambridge University Press, 387–491 (1998).

Instabilités thermiques et hydrodynamiques des écoulements parallèles de fluides newtoniens ou viscoélastiques

Yoann Requile, Mohamed Najib Ouarzazi & Silvia Hirata

Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR CNRS 8107, USTL, Bd. Paul Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
 yjl.requile@ed.univ-lille1.fr

Résumé. On étudie l'effet de la dissipation visqueuse sur la stabilité linéaire d'un fluide newtonien ou viscoélastique soumis à un gradient de température dans une configuration d'écoulement parallèle. Les résultats montrent un effet déstabilisant de la dissipation visqueuse se traduisant par l'apparition de structures convectives sous la forme de rouleaux longitudinaux. Pour une valeur assez grande, la déstabilisation peut se produire en l'absence de gradient de température déstabilisant et même en présence d'un gradient stabilisant. Les lignes isothermes et l'analyse énergétique nous donnent plus d'information sur le processus physique de la déstabilisation.

Abstract. We study the effect of viscous dissipation on the linear stability of a Newtonian or a viscoelastic fluid in the presence of a temperature gradient in a parallel flow configuration. The results show the destabilizing effect of viscous dissipation, resulting in the apparition of convective structures in the form of longitudinal rolls. For a high value of the viscous dissipation, the destabilization can occur without a destabilizing temperature gradient, and even with a stabilizing gradient. The isotherms and the energy budget analysis give more insight on the physical mechanism of the observed destabilization.

1 Introduction

Les fluides viscoélastiques ont de nombreuses applications tant industrielles que dans le domaine de l'environnement. La question des instabilités susceptibles de s'y développer a fait l'objet de nombreuses études; cette présente étude réalisée dans le cadre d'une thèse a pour but de déterminer l'influence de la dissipation visqueuse sur la stabilité des écoulements parallèles. Deux types d'écoulements parallèles sont considérés. La première configuration concerne l'écoulement de Poiseuille induit par la présence d'un gradient horizontal de pression, alors que la deuxième configuration consiste en un écoulement de Couette plan, obtenu par la mise en mouvement des plaques horizontales délimitant le milieu fluide. Ces deux configurations sont souvent reconnues dans la littérature comme le problème de Rayleigh-Bénard-Poiseuille (RBP) et celui de Rayleigh-Bénard-Couette respectivement [1].

Pour un fluide newtonien et en l'absence d'un gradient de température vertical induit par des conditions de température isotherme imposées sur les parois, les effets de la dissipation visqueuse sur les caractéristiques linéaires de l'instabilité ont été largement discutées dans [2] pour un écoulement de Poiseuille et dans [3] pour un écoulement de Couette. L'objectif de ce travail est l'extension de [2] et [3] avec prise en compte du gradient vertical de température dans l'état de base, aussi bien pour un fluide newtonien que pour un fluide viscoélastique.

2 Présentation du problème et formulation mathématique

2.1 Configuration physique

On se place dans une configuration d'écoulement entre deux plaques semi-infinies suivant les directions horizontales et séparées par une hauteur h , comme montré sur la figure 1. L'écoulement considéré peut être de Poiseuille ou de Couette. On applique une différence de température $\Delta t = T_1 - T_0$ entre les parois, avec a priori $T_1 > T_0$. Les parois sont considérées isothermes.

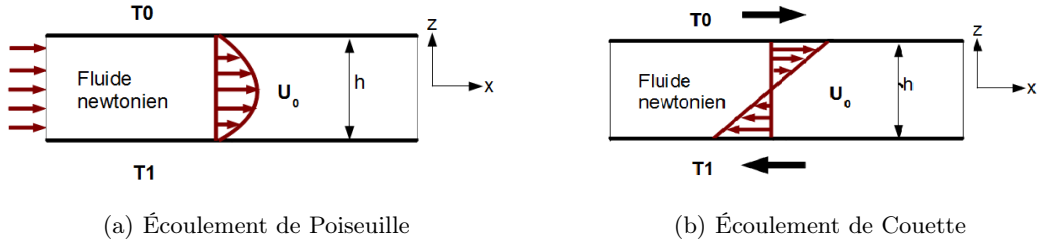


FIGURE 1. Configuration de Rayleigh-Bénard avec écoulement parallèle

2.2 Équations du problème et état de base

Les équations qui régissent ce problème sont l'équation de conservation de la masse, l'équation de conservation de la quantité de mouvement, l'équation de la chaleur et la loi de comportement pour un fluide viscoélastique modèle Oldroyd-B :

$$\operatorname{div}^* \mathbf{u}^* = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right) = -\nabla^* p^* - \rho g \mathbf{e}_z + \mu \nabla^* : \tau^* \quad (2)$$

$$\rho C_v \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* T^* \right) = \lambda \nabla^{*2} T^* + \Phi^* \quad (3)$$

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta t} = \mu \left(\gamma_{ij} + \lambda_2 \frac{\gamma_{ij}}{\delta t} \right) \quad (4)$$

où $\frac{\delta}{\delta t}$ est la dérivée d'Oldroyd par rapport au temps alors que λ_1 et λ_2 sont respectivement le temps de relaxation et le temps de retardation du fluide viscoélastique. Dans l'équation (3) apparaît le terme de dissipation visqueuse $\Phi = \tau_{ij} u_{i,j}$, où τ est le tenseur des contraintes de cisaillement du fluide considéré et \mathbf{u} sa vitesse.

Pour l'état de base, on prend une solution stationnaire et qui ne dépend que de la variable verticale z , avec une vitesse $\mathbf{u} = (u, v, w) = (u_b, 0, 0)$ de seule composante u_b non nulle. C'est la solution qui correspond au régime de conduction thermique avec écoulement parallèle. On note u_b et T_b cette solution de base, qui a pour expression adimensionnée :

$$u_b(z) = \operatorname{Pe} f(z) \quad (5)$$

$$T_b(z) = \left(\frac{1}{2} - z \right) \operatorname{Ra} + \operatorname{Pe}^2 \operatorname{Ge} \frac{2}{3} (1 - 16z^4) \quad (6)$$

$$\tau_{11b} = 128 \lambda_1 \operatorname{Pe} (1 - \Gamma) z^2 \quad (7)$$

$$\tau_{13b} = \tau_{31b} = -4z \quad (8)$$

où apparaissent les nombres sans dimension : le nombre de Rayleigh Ra , le nombre de Reynolds Re , le nombre de Prandtl Pr et le nombre de Gebhart Ge qui mesure l'intensité de la dissipation visqueuse, défini par :

$$\operatorname{Ge} = \frac{\beta g h}{C_v} \quad (9)$$

Les coefficients τ_{ij} dépendent des paramètres viscoélastiques λ_1 et λ_2 ; on utilisera ici les paramètres λ_1 et $\Gamma = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1}$. Les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ dépendent de l'écoulement considéré : dans le cas de Poiseuille $f(z) = 1 - 4z^2$ et $g(z) = \frac{2}{3}(1 - 16z^4)$, dans le cas de Couette $f(z) = 2z$ et $g(z) = (1 - 4z^2)$.

2.3 Équations linéarisées

Sous forme linéarisée et adimensionnée ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w_p + \text{Re}(f(z)) \nabla^2 - f''(z) \frac{\partial w_p}{\partial x} - \text{Ra} \nabla_H^2 \theta_p + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \tau_p^{(1,1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_p^{(2,2)}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_p^{(1,2)}}{\partial x \partial y} \right) \\ + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \tau_p^{(1,3)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_p^{(2,3)}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \nabla_H^2 \tau_p^{(3,3)} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{Pe} f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{dT_b}{dz} = \nabla^2 \theta + \text{GePe} \left[f'(z) \tau_{13} + \tau_b^{(1,1)} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_b^{(1,3)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (12)$$

$$\tau_{13} = \frac{1}{1 + \lambda_1 \sigma} \left[\lambda_1 \frac{\partial u_b}{\partial z} \tau_{33} + \lambda_1 \left(-w \frac{\partial^2 u_b}{\partial z^2} + \frac{u_b}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \lambda_1 \Gamma \left(w \frac{\partial^2 u_b}{\partial z^2} - 3 \frac{u_b}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + (1 + \lambda_1 \Gamma \sigma) \frac{\partial u}{\partial z} \right]. \quad (13)$$

Le nombre de Gebhart apparaît dans l'équation de l'énergie sous la forme GePe^2 et GePe . Or pour des conditions expérimentales raisonnables, Ge est au plus de 10^{-4} et $\text{Pe} = \text{PrRe}$ est suffisamment grand pour que l'on considère que $\text{Pe}^2 \gg \text{Pe}$. On négligera donc le terme en GePe dans l'équation de l'énergie de sorte que $\Lambda = \text{Pe}^2 \text{Ge}$ soit le seul paramètre pilotant la dissipation visqueuse. Dans le cas des rouleaux longitudinaux le coefficient τ_{13} a pour expression (13), or $u_b = \text{Pe} f(z)$. L'équation de l'énergie s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{Pe} f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{dT_b}{dz} = \nabla^2 \theta + \Lambda \lambda_1 \\ \times \left[\frac{f'(z)}{1 + \lambda_1 \sigma} \left[f'(z) \tau_{33} - w f''(z) + f'(z) \frac{\partial w}{\partial z} + \Gamma \left(w f''(z) - 3 f'(z) \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + 128(1 - \Gamma) z^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

On cherche une solution en modes de Fourier : $w = w_0(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{\sigma t}$ et $\theta = \theta_0(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{\sigma t}$ où $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$ est le vecteur d'onde et σ le taux de croissance temporel de la perturbation.

Le problème est résolu numériquement avec la méthode de Galerkin, il devient alors un problème aux valeurs propres. La résolution est effectuée à l'aide du logiciel *Mathematica 7.0* (Wolfram Research, Inc). Les résultats montrent que les rouleaux longitudinaux dont l'axe est parallèle à l'écoulement principal sont les plus amplifiés. L'influence combinée de la dissipation visqueuse et de l'écoulement principal sur l'émergence des rouleaux longitudinaux est discutée par la suite.

3 Résultats pour un fluide newtonien

3.1 Influence du paramètre $\Lambda = \text{Pe}^2 \text{Ge}$

On se place ici dans le cas d'un fluide newtonien : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Sauf mention contraire, les paramètres choisis sont $\text{Pr} = 450$, $\text{Ge} = 10^{-4}$. On étudie maintenant l'influence du paramètre $\Lambda = \text{Pe}^2 \text{Ge}$ sur la stabilité des rouleaux longitudinaux.

L'influence de Λ sur le nombre de Rayleigh critique pour un écoulement de Poiseuille et celui de Couette est montrée sur la figure 2. Lorsque Λ augmente, la figure 2 montre que le seuil Ra_c d'apparition de l'instabilité diminue, attestant du caractère déstabilisant de la dissipation visqueuse. Il est à noter que pour des valeurs de Λ suffisamment élevées, les rouleaux longitudinaux peuvent apparaître, y compris

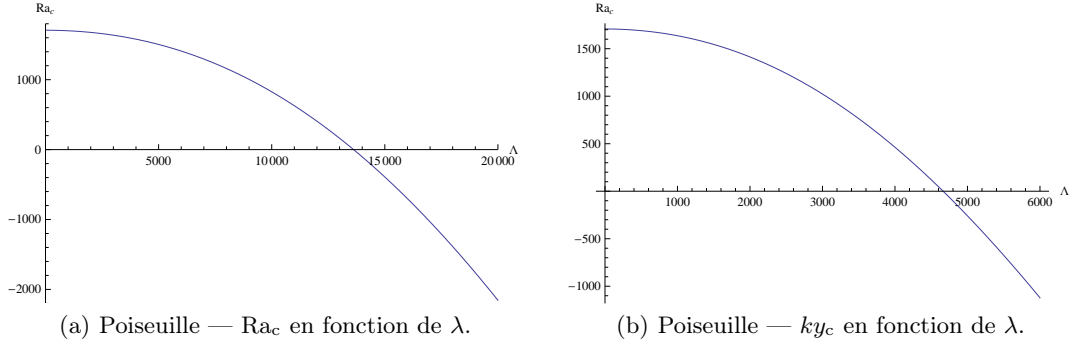


FIGURE 2. Influence de Λ sur le nombre de Rayleigh critique pour des écoulement de Poiseuille et de Couette.

pour des parois maintenues à la même température (c'est-à-dire $Ra_c = 0$) ou, résultat moins attendu, lorsque l'échauffement se fait par la paroi supérieure (c'est-à-dire $Ra_c < 0$).

On s'intéresse maintenant à l'instabilité purement hydrodynamique, c'est-à-dire sans gradient de température imposé. La figure 3 montre que pour un nombre de Prandtl supérieur à 10, la déstabilisation induite par la dissipation visqueuse précède l'instabilité hydrodynamique classique de Tollmien–Schlichting.

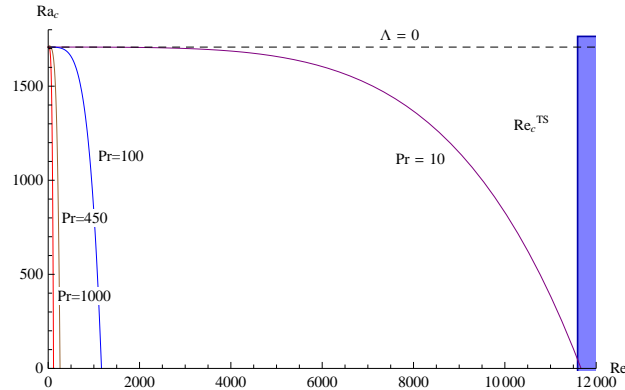


FIGURE 3. Comparaison entre le nombre de Reynolds Re_c induisant la déstabilisation pour un nombre de Rayleigh critique nul et l'instabilité hydrodynamique de Tollmien–Schlichting.

3.2 Lignes de courant et isothermes

Afin de mieux comprendre le comportement du système lors de la déstabilisation, on trace les lignes de courant et isothermes au seuil.

On remarque un décalage des isothermes vers le haut. Ce phénomène était prévisible. En effet, le profil de la température de base $T_b(z)$ présente un extremum qui correspond à $\frac{dT_b}{dz} = -Ra - \frac{128}{3}\Lambda z^3 = 0$. On note z_s cette valeur.

Pour que cette stratification ait lieu il faut que l'extremum apparaisse sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ qui correspond aux limites des parois inférieures et supérieures. Deux cas se présentent alors : $Ra \geq 0$ et $Ra \leq 0$.

$$Ra \geq 0 \Rightarrow z_s \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \Rightarrow -\frac{1}{8} \leq z_s^3 \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{8} \leq -\frac{3Ra}{128\Lambda} \leq 0 \Rightarrow Ra \leq \frac{16}{3}\Lambda;$$

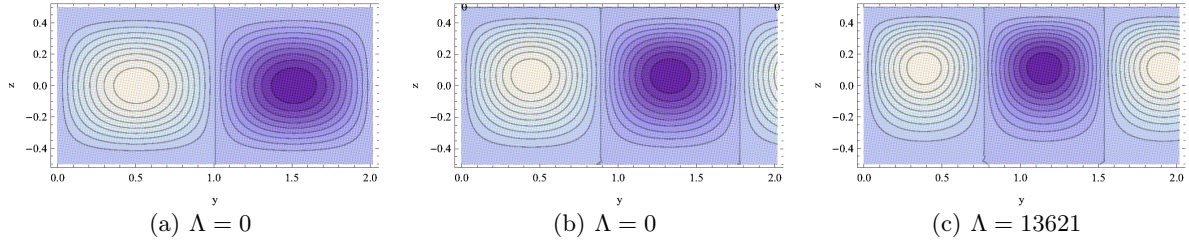


FIGURE 4. Lignes de courant.

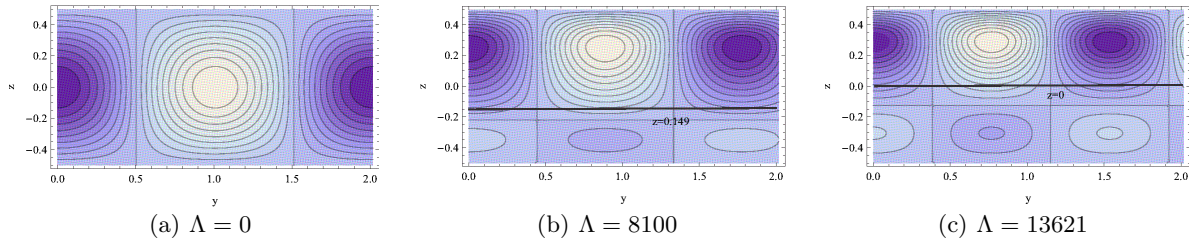


FIGURE 5. Isothermes.

$$Ra \leq 0 \Rightarrow z_s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq z_s^3 \leq \frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{1}{8} \leq -\frac{3Ra}{128\Lambda} \leq 0 \Rightarrow Ra \geq -\frac{16}{3}\Lambda.$$

Le tracé de $z_s = 0$ correspondant à la stratification est montré sur la figure 5. On remarque que la limite théorique est supérieure celle observée par le tracé des isothermes : c'est le phénomène de convection pénétrative.

3.3 Analyse énergétique

On procède à une analyse énergétique afin de déterminer l'importance des contributions respectives de l'énergie d'origine thermique (liée au gradient de température imposé) et d'origine hydrodynamique (liée à la dissipation visqueuse).

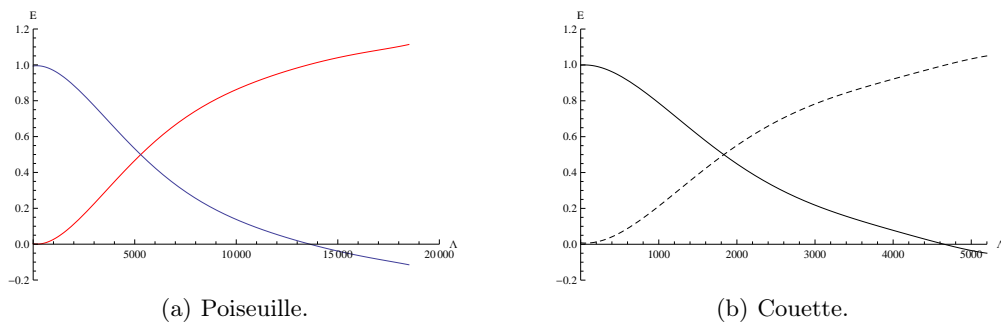


FIGURE 6. Analyse énergétique.

La figure 6 montre qu'au fur et à mesure que l'écoulement s'intensifie, l'énergie d'origine thermique diminue tandis que l'énergie due à la dissipation visqueuse augmente. Le croisement de courbes indique

la transition d'une instabilité d'origine principalement thermique à une origine principalement hydrodynamique.

4 Résultats pour un fluide viscoélastique

On distingue deux ici deux cas : le cas faiblement viscoélastique et le cas fortement viscoélastique, qui se distinguent par une partie imaginaire non nulle du taux de croissance temporel σ . Dans cette partie on ne considérera que le cas des rouleaux longitudinaux de l'écoulement Poiseuille. La figure 7 montre l'influence de la dissipation visqueuse tant pour le cas faiblement que fortement viscoélastique.

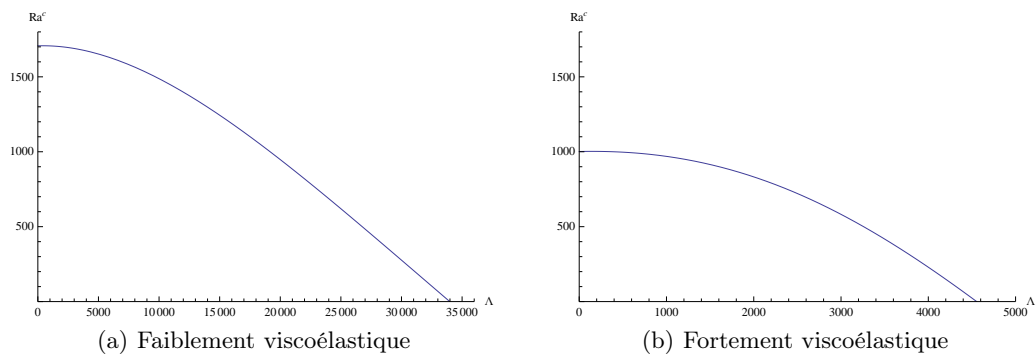


FIGURE 7. Influence de Λ sur le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde critique pour un écoulement de Poiseuille dans les cas faiblement viscoélastique ($\lambda_1 = 0,025$ et $\Gamma = 0,15$) et fortement viscoélastique ($\lambda_1 = 0,1$ et $\Gamma = 0,15$)

Conclusion

Au cours de ce travail, on a mis en évidence le rôle déstabilisant de la dissipation visqueuse pour des fluides newtonien et viscoélastique, aussi bien pour l'écoulement de Poiseuille que pour l'écoulement de Couette. Le tracé des lignes de courant et des isothermes a permis de mieux comprendre le moteur de l'instabilité et de son déclenchement.

Les perspectives d'études sont l'extension du problème au régime non linéaire par une analyse de stabilité faiblement non linéaire et par le biais de la simulation numérique directe.

Références

1. X. NICOLAS, Revue bibliographique sur les écoulements de Poiseuille–Rayleigh–Bénard : écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées par le bas, *Int. J. Therm. Sci.*, **41** 961–1016, (2002)
2. A. BARLETTA, M. CELLI & D. A. NIELD, On the onset of dissipation thermal instability for the poiseuille flow of a highly viscous fluid in a horizontal channel, *J. Fluid Mech.*, **681** 499–514 (2011).
3. A. BARLETTA & D. A. NIELD, Convection-dissipation instability in the horizontal plane couette flow of a highly viscous fluid, *J. Fluid Mech.*, **662** 475–492 (2010) .

Un gabarit pour tous les attracteurs d'un diagramme de bifurcation du système de Rössler

Martin Rosalie

Univ. Bordeaux, LaBRI, UMR-5800, 33400, Talence, France
 martin.rosalie@labri.fr

Résumé. Nous proposons d'établir les huit gabarits de huit attracteurs chaotiques issus d'un même diagramme de bifurcation. Nous montrons ensuite que ces huit gabarits sont tous sous-gabarits d'un même et unique gabarit à trois bandes. Nous obtenons ainsi une partition linéaire du diagramme de bifurcation décrite par une dynamique symbolique à trois symboles. Nous montrons enfin qu'un seul gabarit permet de décrire la structure topologique de tous les attracteurs du diagramme de bifurcation.

Abstract. We establish height templates of height attractors of a bifurcation diagram. These templates are subtemplate of a unique template with three strips. This allows us to establish a linear partition of the bifurcation diagram with a symbolic dynamic described by three symbols. Consequently, a unique template can describe the structure of bifurcation diagram's attractors

1 Introduction

Étudié à de nombreuses reprises depuis sa parution en 1976, le système de Rössler [1] présente les atouts d'un système chaotique simple tout en proposant des dynamiques riches qu'il reste à étudier. Les récents travaux sont des études des solutions de ce système lorsque les paramètres sont variés. Ils donnent ainsi une représentation plus globale de ce système. Par exemple, Castro et coll. [2] réalisent des diagrammes détaillant les valeurs du plus grand exposant de Lyapunov en fonction des paramètres. Les travaux de Barrio et coll. [3] caractérisent les bifurcations lorsque les trois paramètres du système sont variés. Les auteurs mettent ainsi en évidence le fait qu'il existe deux attracteurs coexistants pour un même jeu de paramètres dans le système de Rössler. Récemment, Sprott et Li [4] ont trouvé un autre moyen d'obtenir ces attracteurs en reparamétrisant le système de Rössler.

La caractérisation topologique d'un attracteur chaotique est une méthode qui permet d'obtenir la structure détaillée d'un seul attracteur. Lorsqu'un paramètre change, la méthode doit à nouveau être appliquée pour obtenir la structure d'un autre attracteur. Dans cet article, nous proposons d'étudier la structure de huit attracteurs choisis dans le diagramme de bifurcation de Sprott et Li [4]. Nous étudions dans un premier temps les propriétés de ces attracteurs avant de les comparer. Nous montrons qu'ils sont tous sous-gabarits d'un unique gabarit. Enfin, nous proposerons une partition linéaire du diagramme de bifurcation.

2 Diagramme de bifurcation

Barrio et coll. [3] ont déjà montré que le système de Rössler [1] peut avoir comme solution deux attracteurs qui coexistent. Sprott et Li [4] construisent une paramétrisation des paramètres de telle sorte que lorsque $\alpha = 1$, les solutions du système de Rössler sont deux attracteurs qui coexistent ; cela donne le système de Rössler sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = 0,2 + 0,09\alpha \\ b = 0,2 - 0,06\alpha \\ c = 5,7 - 1,18\alpha \end{cases} . \quad (1)$$

Nous réalisons une étude des solutions du système de Rössler pour plusieurs valeurs de paramètres. Pour cela nous utilisons une section de Poincaré construite à partir des points singuliers du système et donc des paramètres. La construction d'une telle section est détaillée dans [9]. Cette section de Poincaré

$$\mathcal{P} \equiv \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -x_-\} \quad (2)$$

dépend de la coordonnée x du point singulier au centre de l'attracteur notée x_- . En utilisant cette section de Poincaré, nous avons reproduit le diagramme de bifurcation obtenu par Sprott et Li (Fig. 1). À partir de cette figure, nous avons choisi sept valeurs du paramètre traduisant un changement dans la structure du diagramme. Nous notons ainsi les huit attracteurs obtenus (Fig. 2) :

$$\begin{array}{l} \mathcal{A} : \alpha = -0,25 \quad \mathcal{C} : \alpha = 0,78 \quad \mathcal{E}_1 : \alpha = 1 \quad \mathcal{F} : \alpha = 1,135 \\ \mathcal{B} : \alpha = 0,5 \quad \mathcal{D} : \alpha = 0,86 \quad \mathcal{E}_2 : \alpha = 1 \quad \mathcal{G} : \alpha = 1,22 . \end{array} \quad (3)$$

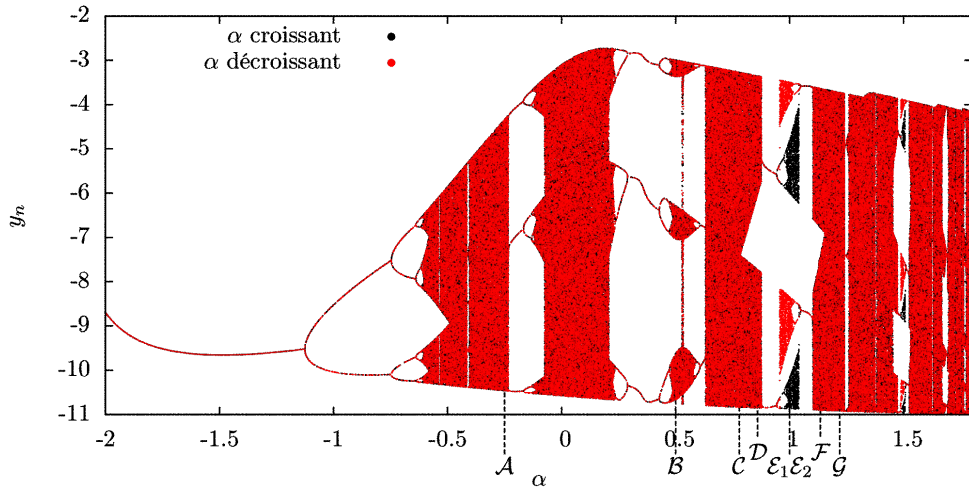


FIGURE 1. Diagramme de bifurcation avec α croissant en rouge et α décroissant en noir (reproduction de la figure 4 de [4]). \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , \mathcal{F} et \mathcal{G} désignent les huit attracteurs étudiés.

3 Huit gabarits

La caractérisation topologique est une méthode qui permet d'étudier la structure des attracteurs. Elle permet ainsi d'associer à un attracteur son gabarit qui décrit ses propriétés topologiques. Définie principalement par Gilmore et coll. [5, 6], cette méthode consiste dans un premier temps à extraire les orbites de l'attracteur à partir d'une section de Poincaré. Ensuite, un invariant topologique (le nombre d'enlacement) est calculé entre chaque paire d'orbites. Il s'agit d'un entier qui indique comment deux nœuds (représentant ici les orbites) sont enroulés l'un autour de l'autre. Enfin, nous construisons un gabarit, c'est-à-dire une surface branchée décrivant la structure de l'attracteur. Ce dernier doit permettre de retrouver les mêmes nombres d'enlacement entre les orbites qu'il contient que ceux obtenus précédemment. Nous allons maintenant appliquer cette méthode aux huit attracteurs.

Voici les sections de Poincaré utilisées pour étudier les attracteurs : (4) pour \mathcal{A} , \mathcal{C} et \mathcal{G}

$$\mathcal{P} \equiv \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -x_-\}, \quad (4)$$

(5) pour \mathcal{D} , \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 et \mathcal{F} :

$$\mathcal{P} \equiv \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -x_-, -\dot{x}_n < 0, y < -7\}, \quad (5)$$

et enfin (6) pour \mathcal{B} :

$$\mathcal{P} \equiv \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -x_-, -\dot{x}_n < 0, y < -9\}. \quad (6)$$

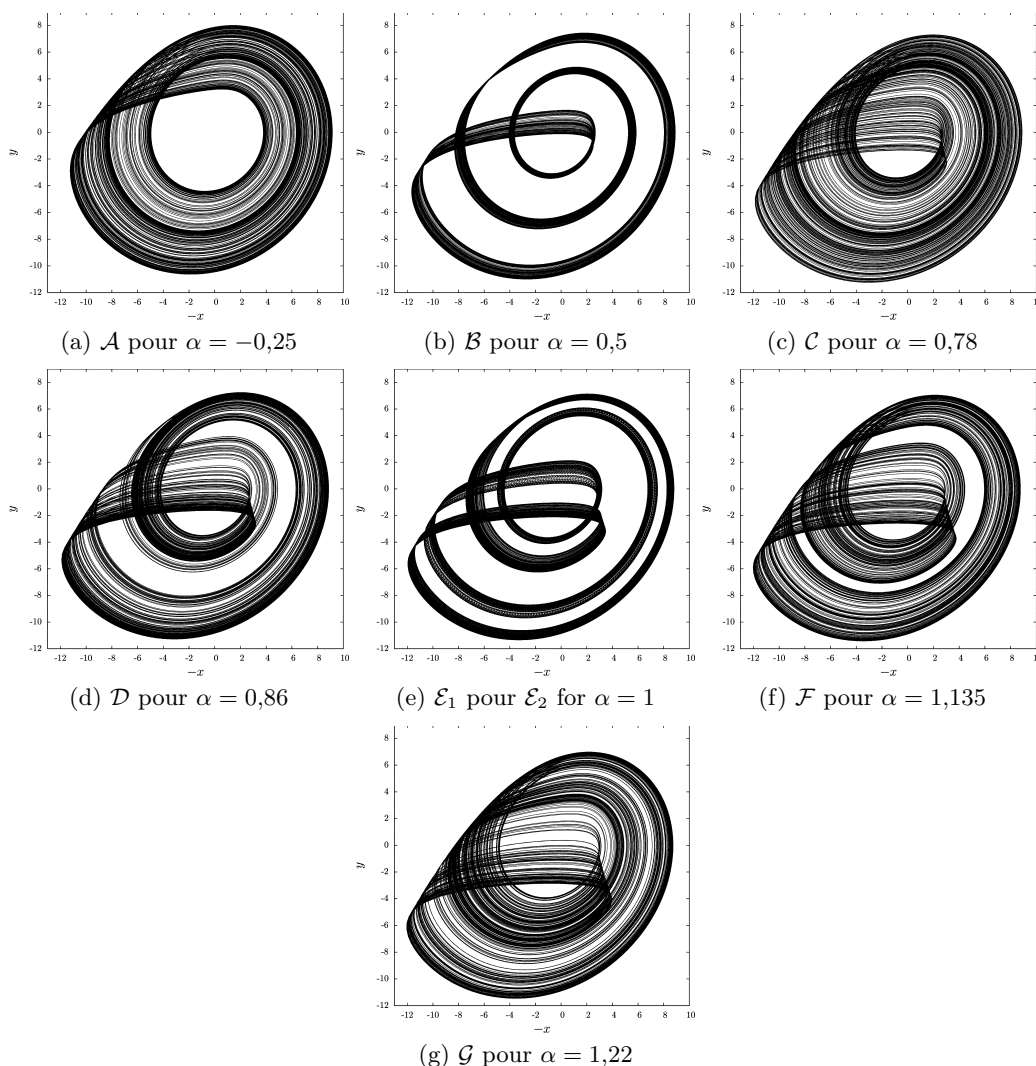


FIGURE 2. Huit attracteurs solutions du système de Rössler (1) ; le paramètre α est indiqué pour chacun.

Les tableaux 1 et 2 détaillent les éléments nécessaires à la caractérisation topologique. L'application de premier retour est établie à partir de la section de Poincaré. Tous les gabarits décrits par les matrices d'enlacement permettent de retrouver les nombres d'enlacement indiqués.

	Application de premier retour	Nombres d'enlacement	Matrice d'enlacement du gabarit																									
\mathcal{A}		<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>(1)</th> <th>(10)</th> <th>(1011)</th> <th>(10110)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>(10)</th> <td>-1</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>(1011)</th> <td>-2</td> <td>-3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>(10110)</th> <td>-2</td> <td>-4</td> <td>-8</td> <td></td> </tr> <tr> <th>(10111)</th> <td>-2</td> <td>-4</td> <td>-8</td> <td>-10</td> </tr> </tbody> </table>		(1)	(10)	(1011)	(10110)	(10)	-1				(1011)	-2	-3			(10110)	-2	-4	-8		(10111)	-2	-4	-8	-10	$T(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
			(1)	(10)	(1011)	(10110)																						
(10)	-1																											
(1011)	-2	-3																										
(10110)	-2	-4	-8																									
(10111)	-2	-4	-8	-10																								

Tableau 1. Éléments de la caractérisation topologique de l'attracteur \mathcal{A} : l'application de premier retour est une signature de la dynamique, les nombres d'enlacement sont calculés numériquement et la matrice d'enlacement décrit la structure du gabarit.

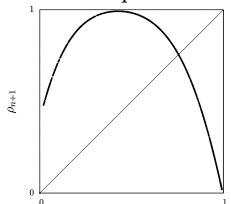
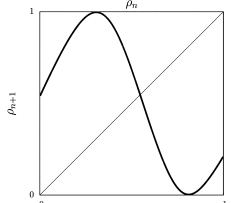
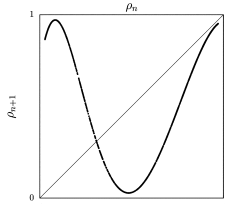
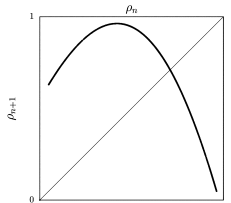
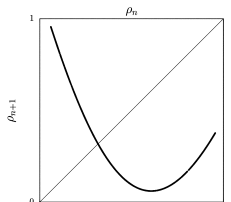
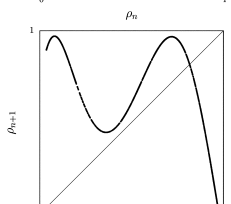
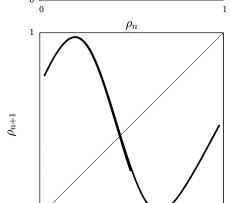
	Application de premier retour	Nombres d'enlacement	Matrice d'enlacement du gabarit																																																								
\mathcal{B}		<table border="1"> <thead> <tr> <th>(1)</th> <th>(10)</th> <th>(1011)</th> <th>(10110)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(10)</td> <td>-5</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(1011)</td> <td>-10</td> <td>-21</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(10110)</td> <td>-13</td> <td>-26</td> <td>-52</td> </tr> <tr> <td>(10111)</td> <td>-13</td> <td>-26</td> <td>-52</td> <td>-65</td> </tr> </tbody> </table>	(1)	(10)	(1011)	(10110)	(10)	-5			(1011)	-10	-21		(10110)	-13	-26	-52	(10111)	-13	-26	-52	-65	$T(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$																																			
(1)	(10)	(1011)	(10110)																																																								
(10)	-5																																																										
(1011)	-10	-21																																																									
(10110)	-13	-26	-52																																																								
(10111)	-13	-26	-52	-65																																																							
\mathcal{C}		<table border="1"> <thead> <tr> <th>(1)</th> <th>(10)</th> <th>(2010)</th> <th>(2011)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(10)</td> <td>-1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2010)</td> <td>-2</td> <td>-3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2011)</td> <td>-2</td> <td>-3</td> <td>-6</td> </tr> <tr> <td>(1011)</td> <td>-2</td> <td>-3</td> <td>-6</td> <td>-6</td> </tr> </tbody> </table>	(1)	(10)	(2010)	(2011)	(10)	-1			(2010)	-2	-3		(2011)	-2	-3	-6	(1011)	-2	-3	-6	-6	$T(\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$																																			
(1)	(10)	(2010)	(2011)																																																								
(10)	-1																																																										
(2010)	-2	-3																																																									
(2011)	-2	-3	-6																																																								
(1011)	-2	-3	-6	-6																																																							
\mathcal{D}		<table border="1"> <thead> <tr> <th>(1)</th> <th>(221)</th> <th>(211)</th> <th>(2221)</th> <th>(2211)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(221)</td> <td>-4</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(211)</td> <td>-4</td> <td>-12</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2221)</td> <td>-5</td> <td>-15</td> <td>-15</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2211)</td> <td>-5</td> <td>-15</td> <td>-15</td> <td>-20</td> </tr> <tr> <td>(22110)</td> <td>-6</td> <td>-18</td> <td>-18</td> <td>-24</td> <td>-24</td> </tr> </tbody> </table>	(1)	(221)	(211)	(2221)	(2211)	(221)	-4				(211)	-4	-12			(2221)	-5	-15	-15		(2211)	-5	-15	-15	-20	(22110)	-6	-18	-18	-24	-24	$T(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -3 & -3 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$																									
(1)	(221)	(211)	(2221)	(2211)																																																							
(221)	-4																																																										
(211)	-4	-12																																																									
(2221)	-5	-15	-15																																																								
(2211)	-5	-15	-15	-20																																																							
(22110)	-6	-18	-18	-24	-24																																																						
\mathcal{E}_1		<table border="1"> <thead> <tr> <th>(1)</th> <th>(10)</th> <th>(1011)</th> <th>(101111)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(10)</td> <td>-3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(1011)</td> <td>-6</td> <td>-11</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(101111)</td> <td>-9</td> <td>-17</td> <td>-34</td> </tr> <tr> <td>(101110)</td> <td>-9</td> <td>-17</td> <td>-34</td> <td>-51</td> </tr> </tbody> </table>	(1)	(10)	(1011)	(101111)	(10)	-3			(1011)	-6	-11		(101111)	-9	-17	-34	(101110)	-9	-17	-34	-51	$T(\mathcal{E}_1) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$																																			
(1)	(10)	(1011)	(101111)																																																								
(10)	-3																																																										
(1011)	-6	-11																																																									
(101111)	-9	-17	-34																																																								
(101110)	-9	-17	-34	-51																																																							
\mathcal{E}_2		<table border="1"> <thead> <tr> <th>(1)</th> <th>(21)</th> <th>(2111)</th> <th>(211111)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(21)</td> <td>-3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2111)</td> <td>-6</td> <td>-11</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(211111)</td> <td>-9</td> <td>-17</td> <td>-34</td> </tr> <tr> <td>(212111)</td> <td>-9</td> <td>-17</td> <td>-34</td> <td>-51</td> </tr> </tbody> </table>	(1)	(21)	(2111)	(211111)	(21)	-3			(2111)	-6	-11		(211111)	-9	-17	-34	(212111)	-9	-17	-34	-51	$T(\mathcal{E}_2) = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$																																			
(1)	(21)	(2111)	(211111)																																																								
(21)	-3																																																										
(2111)	-6	-11																																																									
(211111)	-9	-17	-34																																																								
(212111)	-9	-17	-34	-51																																																							
\mathcal{F}		<table border="1"> <thead> <tr> <th>(3)</th> <th>(30)</th> <th>(31)</th> <th>(32)</th> <th>(313)</th> <th>(312)</th> <th>(322)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(30)</td> <td>-3</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(31)</td> <td>-3</td> <td>-6</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(32)</td> <td>-3</td> <td>-6</td> <td>-6</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(313)</td> <td>-4</td> <td>-9</td> <td>-9</td> <td>-8</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(312)</td> <td>-4</td> <td>-9</td> <td>-9</td> <td>-8</td> <td>-12</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(322)</td> <td>-4</td> <td>-9</td> <td>-9</td> <td>-8</td> <td>-12</td> <td>-12</td> </tr> <tr> <td>(332)</td> <td>-4</td> <td>-9</td> <td>-9</td> <td>-8</td> <td>-12</td> <td>-12</td> </tr> </tbody> </table>	(3)	(30)	(31)	(32)	(313)	(312)	(322)	(30)	-3						(31)	-3	-6					(32)	-3	-6	-6				(313)	-4	-9	-9	-8			(312)	-4	-9	-9	-8	-12		(322)	-4	-9	-9	-8	-12	-12	(332)	-4	-9	-9	-8	-12	-12	$T(\mathcal{F}) = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -3 & -3 & -3 \\ -4 & -3 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$
(3)	(30)	(31)	(32)	(313)	(312)	(322)																																																					
(30)	-3																																																										
(31)	-3	-6																																																									
(32)	-3	-6	-6																																																								
(313)	-4	-9	-9	-8																																																							
(312)	-4	-9	-9	-8	-12																																																						
(322)	-4	-9	-9	-8	-12	-12																																																					
(332)	-4	-9	-9	-8	-12	-12																																																					
\mathcal{G}		<table border="1"> <thead> <tr> <th>(1)</th> <th>(21)</th> <th>(2111)</th> <th>(2021)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(21)</td> <td>-1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2111)</td> <td>-2</td> <td>-3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2021)</td> <td>-2</td> <td>-3</td> <td>-6</td> </tr> <tr> <td>(2110)</td> <td>-2</td> <td>-3</td> <td>-6</td> <td>-6</td> </tr> </tbody> </table>	(1)	(21)	(2111)	(2021)	(21)	-1			(2111)	-2	-3		(2021)	-2	-3	-6	(2110)	-2	-3	-6	-6	$T(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$																																			
(1)	(21)	(2111)	(2021)																																																								
(21)	-1																																																										
(2111)	-2	-3																																																									
(2021)	-2	-3	-6																																																								
(2110)	-2	-3	-6	-6																																																							

Tableau 2. Éléments de la caractérisation topologique des attracteurs \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , \mathcal{F} et \mathcal{G} (cf. tableau 1).

4 Huit sous-gabarits

Les gabarits \mathcal{C} et \mathcal{G} sont identiques ($T_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{G}}$). En utilisant les relations algébriques définies lors de précédents travaux [7, 8] nous allons montrer que les six autres gabarits sont des sous-gabarits du gabarit de \mathcal{C} . Un sous-gabait \mathcal{S} d'un gabait \mathcal{T} , écrit $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, est un sous-ensemble topologique de \mathcal{T} qui, équipé de la restriction d'un semi-flot de \mathcal{T} vers \mathcal{S} , satisfait la définition d'un gabait [10]. Trivialement nous avons $T_{\mathcal{A}} \subset T_{\mathcal{C}}$ car la matrice d'enlacement de \mathcal{A} est un sous-ensemble de celle de \mathcal{C} (Fig. 3 (a)).

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \subset \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

De la même manière $T_{\mathcal{D}} \subset T_{\mathcal{F}}$. Pour montrer que les autres gabarits sont des sous-gabarits, nous utilisons le fait qu'une boucle dans le gabait se traduit par deux torsions (cf. Fig. 3 et 4 de [11]). Dans le cas présent, cela se traduit par l'ajout de deux torsions négatives pour le gabait $T_{\mathcal{B}}$ ainsi qu'une torsion négative en passant dans l'une des bandes (Fig. 3 (b)). Le détail du calcul est donné dans l'équation (8). Il s'agit du même principe pour les attracteurs \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 (Fig. 3 (c)). Enfin, pour l'attracteur \mathcal{F} , il s'agit de deux passages successifs dans deux mixeurs étant des sous-ensemble de l'attracteur \mathcal{C} (Fig. 3 (d)). La concaténation des deux mixeurs (définie dans [8]) permet de retrouver la matrice d'enlacement de $T_{\mathcal{F}}$ (8).

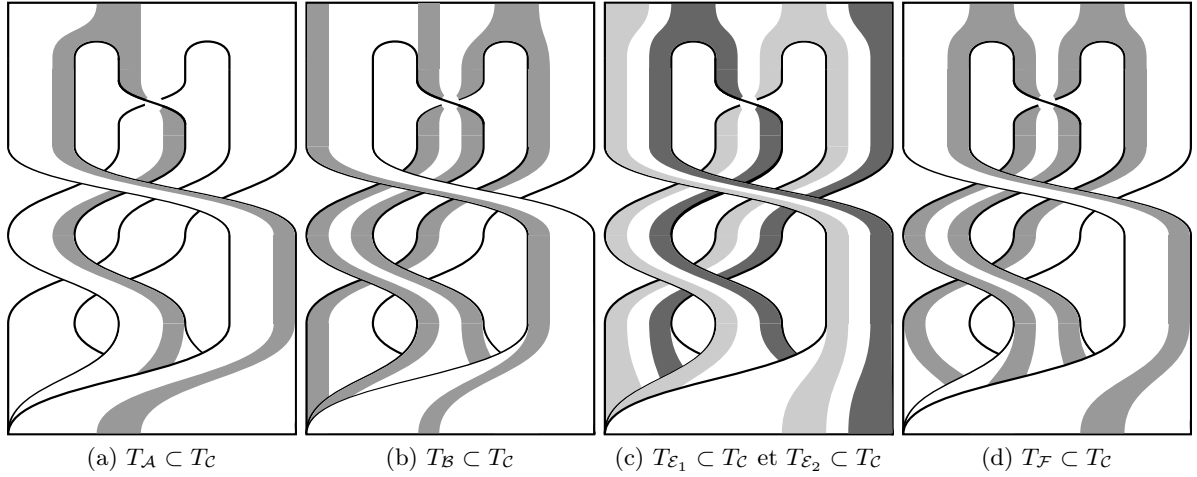


FIGURE 3. Sous-gabarits du gabait de l'attracteur \mathcal{C} .

$$\begin{array}{c|c} T_{\mathcal{B}} \subset T_{\mathcal{C}} & T_{\mathcal{F}} \subset T_{\mathcal{C}} \\ \hline \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + [-1] + [-2] + [-2] = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + [-2] = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -3 & -3 & -3 \\ -4 & -3 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \end{array} \quad (8)$$

5 Partition et dynamique symbolique du diagramme

Nous avons montré que les huit gabarits sont tous sous-gabarits du gabait de \mathcal{C} muni de trois bandes. Nous avons réalisé une partition du diagramme de bifurcation en utilisant la section de Poincaré (2) en utilisant le découpage en trois bandes (Fig. 4). Il en résulte une partition linéaire du diagramme :

$$\begin{aligned} y_{0|1}(\alpha) &= 1,43638\alpha - 6,76016 \\ y_{1|2}(\alpha) &= 2,18237\alpha - 11,1289 \end{aligned} \quad (9)$$

qui permet d'obtenir le symbole « 0 », « 1 » ou « 2 » associé au passage dans la section de Poincaré. Cette dynamique symbolique peut s'appliquer à tous les attracteurs de ce diagramme.

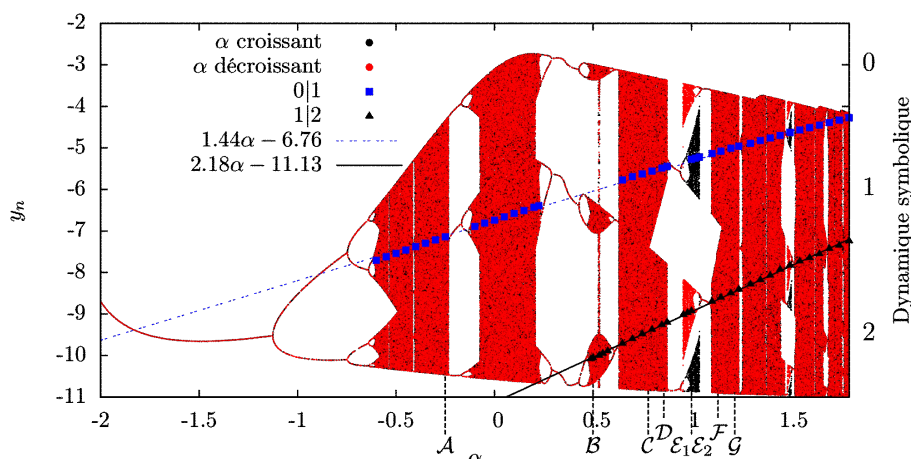


FIGURE 4. Partition du diagramme de bifurcation à partir la section de Poincaré (2). La dynamique symbolique à trois symboles (« 0 », « 1 » ou « 2 ») permet de décrire la dynamique associée à tous les attracteurs du diagramme. La partition dépend linéairement de la valeur de α (les valeurs sont obtenues par régression linéaire).

6 Conclusion

Étudier un système dynamique dans sa globalité permet de mieux comprendre les relations entre les différents régimes chaotiques qu'il peut produire. Dans le cas du système de Rössler et pour un diagramme de bifurcation donné, nous avons montré que la dynamique des attracteurs peut être décrite avec un unique gabarit. Tous les gabarits sont des sous-gabarits de ce gabarit. En fonction du paramètre de bifurcation, nous avons réalisé une partition du diagramme indiquant directement l'un des trois symboles de la dynamique. Cette démarche d'étude globale permet de proposer un seul gabarit pour un ensemble d'attracteurs. Elle simplifie alors la compréhension de la structure générale du système en proposant une unique représentation : *un gabarit pour un diagramme de bifurcation* décrit par la matrice d'enlacement

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Références

1. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Phys. Lett. A*, **57**, 397–398 (1976).
2. V. CASTRO, M. MONTI, W. B. PARDO, J. A. WALKENSTEIN & E. ROSA, Characterization of the Rössler system in parameter space, *Int. J. Bifurcat. Chaos*, **17**, 965–973 (2007).
3. R. BARRIO, F. Blesa & S. SERRANO, Qualitative analysis of the Rössler equations: Bifurcations of limit cycles and chaotic attractors, *Physica D*, **238**, 1087–1100 (2009).
4. J. C. SPROTT & C. LI, Asymmetric bistability in the Rössler system, *Int. J. Bifurcat. Chaos*, soumis.
5. R. GILMORE, Topological analysis of chaotic dynamical systems, *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 1455, 1998.
6. R. GILMORE & M. LEFRANC, *The Topology of chaos*, Wiley (2002).
7. M. ROSALIE & C. LETELLIER, Systematic template extraction from chaotic attractors: I. Genus-one attractors with an inversion symmetry, *J. Phys. A : Math. Theor.*, **46**, 375101 (2013).
8. M. ROSALIE & C. LETELLIER, Systematic template extraction from chaotic attractors : II. Genus-one attractors with multiple unimodal folding mechanisms, *J. Phys. A : Math. Theor.*, **48**, 235101 (2015).
9. M. ROSALIE & C. LETELLIER, Toward a general procedure for extracting templates from chaotic attractors bounded by high genus torus, *Int. J. Bifurcat. Chaos*, **24**, 1450045 (2014).
10. R. W. GHRIST, P. J. HOLMES & M. C. SULLIVAN, Knots and links in three-dimensional flows, *Books, Monographs and Lecture Notes*, **1654** (1997).
11. C. LETELLIER, S. MEUNIER-GUTTIN-CLUZEL & G. GOUESBET, Topological invariants in period-doubling cascades, *J. Phys. A*, **33**, 1809–1825 (1999).

Effet du milieu poreux sur la désorganisation d'un écoulement de Taylor dans un canal millifluidique

Marion Serres^{1,2}, Régis Philippe² & Valérie Vidal¹

¹ Laboratoire de Physique, UMR 5672, CNRS – École normale supérieure de Lyon, Université de Lyon, 46 Allée d'Italie, 69007 Lyon, France

² Laboratoire de Génie des Procédés Catalytiques, UMR 5285 CNRS – CPE Lyon, Université de Lyon, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69100 Villeurbanne, France

valerie.vidal@ens-lyon.fr

Résumé. Nous étudions la désorganisation d'un écoulement gaz-liquide dit « de Taylor » à l'intérieur de deux milieux poreux sensiblement différents : un milieu granulaire polydisperse (diamètre des grains 75–150 μm , porosité 42 %) ou une mousse solide (porosité 96 %). L'écoulement de Taylor (alternance de bulles de gaz et de *slugs* de liquide) est généré à l'aide d'une jonction en T, via l'injection à débit constant de liquide (éthanol, Q_L) et de gaz (azote, Q_G). La variation de rétention liquide apparente, ϵ_L , est mesurée au cours du temps dans différentes zones du canal par visualisation directe (technique de fluorescence). Le contenu fréquentiel de $\epsilon_L(t)$ est analysé en amont et à l'intérieur du milieu poreux. Une analyse qualitative de la valeur moyenne, l'écart-type et la *skewness* du signal montre que l'impact du milieu poreux sur l'écoulement dépend du rapport Q_G/Q_L . Nous mettons en évidence un effet de couplage entre l'écoulement dans le milieu poreux et l'écoulement de Taylor en amont.

Abstract. We investigate the disorganization of a Taylor flow through two different porous media : a granular medium (particle diameter 75–150 μm , porosity 42%) and a solid foam (porosity 96%). The Taylor flow consists of periodic gas bubbles separated by liquid slugs. It is generated by a T-junction on which we inject, at constant flow-rate, liquid (ethanol, Q_L) and gas (nitrogen, Q_G). The apparent liquid holdup variation $\epsilon_L(t)$ is monitored by means of a fluorescence technique in different zones of the channel. The frequency content of the multiphase flow is then analyzed upstream and inside the porous medium. A qualitative analysis of the mean, standard deviation and skewness of $\epsilon_L(t)$ reveals that the impact of the porous medium on the flow depends on the ratio Q_G/Q_L . We evidence a coupling between the flow inside the porous medium and the Taylor flow upstream.

1 Introduction

Les écoulements multiphasiques dans des milieux poreux sont présents dans de nombreux domaines. En géosciences, le développement de nouvelles sources d'énergie (récupération assistée du pétrole, exploitation des hydrates de gaz [1]) ou la compréhension de phénomènes naturels comme la remontée de gaz dans les sédiments marins [2] nécessitent une compréhension fine des écoulements gaz-liquide (G-L) dans différents types de milieux poreux. Cela permettrait, par exemple, d'estimer la quantité de gaz libérée en fonction de la structure des sédiments ou bien la zone d'invasion du gaz entre la source et la surface [3, 4]. D'autres domaines tels que l'industrie chimique sont confrontés à des écoulements similaires. C'est le cas des réactions catalytiques qui font souvent intervenir trois phases, gaz, liquide, solide (G-L-S) avec une phase solide libre (grains dont le mouvement est couplé avec l'écoulement G-L) ou contrainte (milieu poreux rigide) [5]. L'optimisation des transferts et de la réaction elle-même nécessite une compréhension de l'hydrodynamique de l'écoulement G-L-S [6]. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'hydrodynamique d'un écoulement G-L, confiné dans un canal millifluidique, à travers un milieu poreux.

2 Dispositif expérimental

2.1 Description

Le dispositif expérimental est constitué d'un canal millimétrique horizontal à section carrée de largeur $h = 2 \text{ mm}$ (section $h \times h = 4 \text{ mm}^2$) et de longueur 24 cm (Fig. 1), creusé dans un bloc de PEEK (polyether

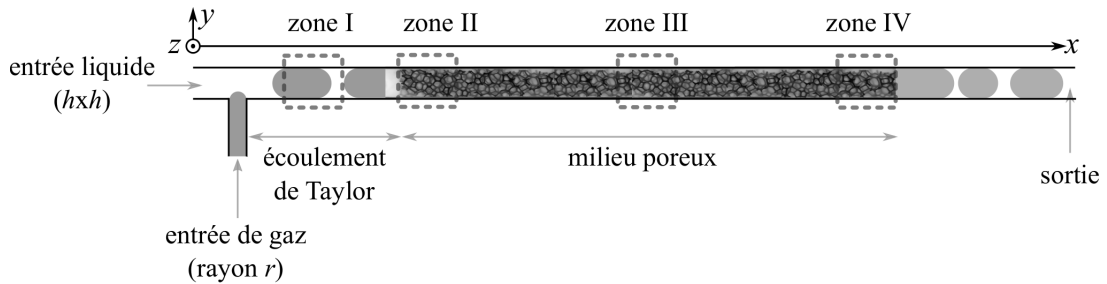


FIGURE 1. Schéma du canal millimétrique. L'écoulement est visualisé à la paroi dans différentes zones, en amont (zone I), à l'entrée (zone II), à l'intérieur (zone III) et en sortie du milieu poreux (zone IV).

ether ketone). L'une des parois est remplacée par une plaque de verre afin de visualiser l'écoulement. Pour garantir les mêmes conditions de mouillabilité, une fine couche (10 nm) de carbone est déposée à l'intérieur du canal. Le liquide (éthanol) est directement injecté dans le canal de section $h \times h$ à débit constant Q_L et le gaz (azote) est injecté à l'aide d'une jonction en T par un capillaire de rayon $r = 0,5$ mm à débit constant Q_G . Les débits de liquide et de gaz varient dans la gamme $Q_L = [0,5-8]$ cm^3/min et $Q_G = [2-35]$ cm^3/min et nous avons exploré une gamme de rapport de débits $Q_G/Q_L = [0,25-35]$. Dans ces conditions, l'écoulement segmenté (auss appelé écoulement de Taylor) généré après la jonction est régulier et les bulles occupent la quasi-totalité de la section du canal [7].

2.2 Milieux poreux

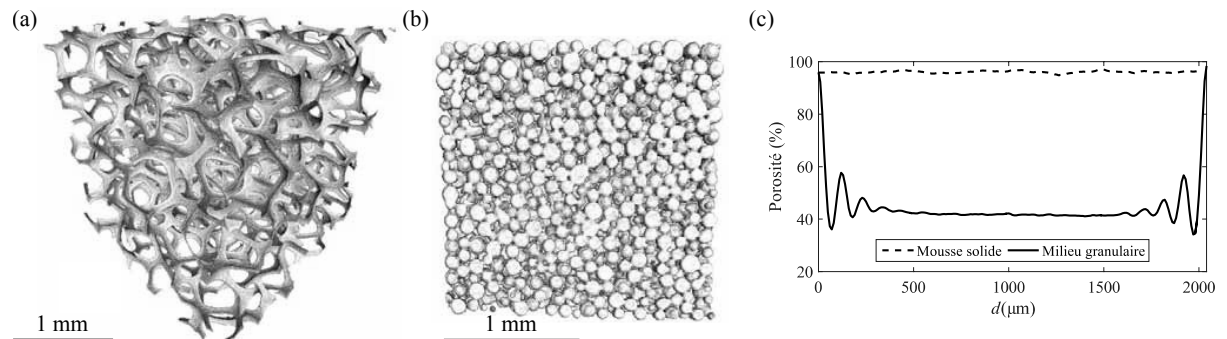


FIGURE 2. Différents milieux poreux utilisés. (a) Mousse solide (carbone 80 PPI, ERG Aerospace) et (b) milieu granulaire (billes de verre) visualisés par tomographie. (c) Porosité de la mousse solide (a) et du lit de billes (b) mesurée par tomographie.

Deux milieux poreux ont été étudiés : une mousse solide à cellules ouvertes (Fig. 2 (a)) et un milieu granulaire polydispersé (Fig. 2 (b)) dont les longueurs à l'intérieur du canal sont respectivement 16 cm et 15 cm. La mousse utilisée est une mousse carbone 80 PPI (Pore Per Inch), ERG Aerospace, et le milieu granulaire est constitué de billes de verre compactées (diamètre moyen des grains 75–150 μm). Afin d'obtenir plus de détails sur leur structure, les deux milieux poreux ont été analysés par tomographie à rayons X (GE Phoenix v|tome|x s, RX tube de 160 kV et point focal pouvant descendre à 1 μm) de précision spatiale 5 μm pour la mousse et 10 μm pour les billes. L'analyse des données est ensuite effectuée grâce au logiciel iMorph® [8] qui fournit des images 3D (Fig. 2 (a) pour la mousse et Fig. 2 (b) pour le milieu granulaire) dont on peut extraire la porosité moyenne et la distribution de diamètre des pores.

Pour la mousse solide, la porosité est constante $\phi = 96 \pm 0,3\%$, sans effet de bord observé (Fig. 2 (c)) et le diamètre moyen des pores est $d_p = 257 \pm 85 \mu\text{m}$. La porosité moyenne du milieu granulaire est $\phi = 44 \pm 2\%$ mais d'importants effets de bord (Fig. 2 (c)), bien connus pour les lits de billes [9], impliquent de considérer une porosité de $\sim 60\%$ pour cette étude basée sur une visualisation à la paroi.

2.3 Analyse d'images

L'écoulement multiphasique est visualisé en temps réel dans quatre zones de l'écoulement (voir Section 2.1 et Fig. 1) : en amont (zone I), à l'entrée (zone II), au centre (zone III) et en sortie (zone IV) du milieu poreux. Un film d'une durée de 15 à 20 s est réalisé dans chaque zone à l'aide d'une caméra (Solinocam H2D2, 113 img/s) montée sur un microscope à fluorescence (Olympus BX51M). Un traceur fluorescent (Rhodamine 6B) est dissous dans le liquide avant son injection, permettant ainsi de distinguer clairement la phase solide (structure fixe), la phase liquide (gris clair) et le gaz (gris foncé) (Figs. 3 (a–d)).

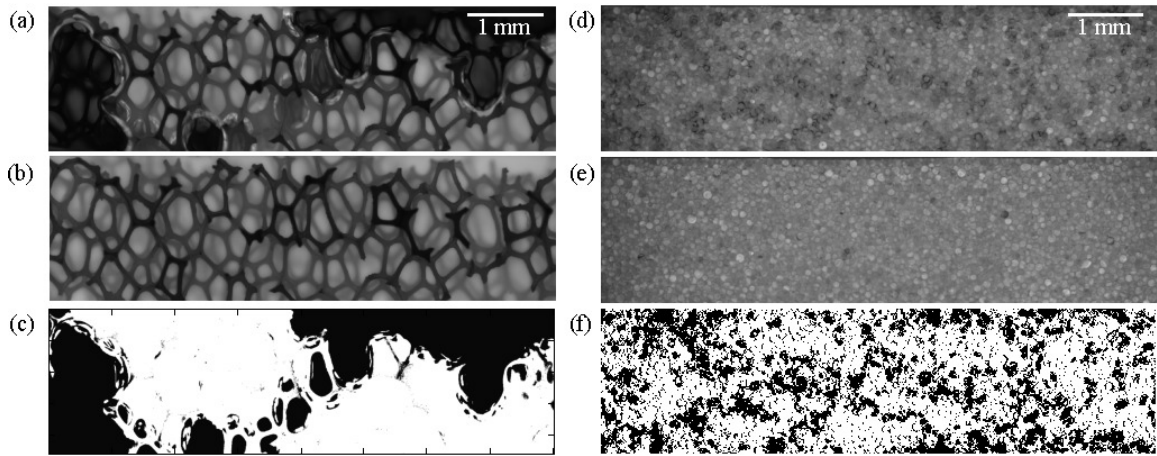


FIGURE 3. Étapes du traitement d'images pour la mousse solide (a–c) et le milieu granulaire (d–f). (a, d) Images brutes. Le traceur fluorescent permet de distinguer la phase liquide (gris clair) de la phase gazeuse (gris foncé). (b, e) Images de référence issues du film de l'écoulement du liquide avec traceur (sans gaz) dans le milieu poreux. (c, f) Images binarisées obtenues après division de l'image brute (a, d) par l'image de référence (b, e) (voir texte).

L'analyse d'images est réalisée avec le logiciel Matlab (Mathworks[®]) afin de quantifier la proportion de liquide dans le milieu, qualifiée ici de *réétention liquide apparente*, ϵ_L . Dans un premier temps les séquences d'images de chaque film (Figs. 3 (a, d)) sont divisées par l'image de référence obtenue avec un écoulement monophasique liquide dans la même zone (Figs. 3 (b, e)). Un seuil fixé à 0,9 permet ensuite de binariser chaque image (Figs. 3 (c, f)). Une valeur de 1 correspond ainsi aux pixels contenant du liquide ou du solide (billes ou brins de mousse) et une valeur de 0 aux pixels où du gaz a été détecté. La fraction de gaz présente dans le milieu, ϵ_G , est alors estimée en divisant le nombre de pixels à 0 (gaz) par la totalité des pixels de l'image. La réétention liquide apparente est déduite de cette dernière et de la porosité, $\epsilon_L = \phi - \epsilon_G$. Nous parlons de réétention liquide *apparente* car elle est estimée à partir d'une visualisation 2D d'un milieu 3D. Selon le milieu poreux utilisé, plusieurs paramètres peuvent être source d'erreur. Pour la mousse solide, la forte porosité (96%) permet une visibilité suffisante pour détecter une bulle de gaz au fond de la cellule ; en revanche, la phase solide est surestimée par la projection, entraînant une sous-estimation de la fraction liquide présente dans le milieu. Dans le cas du milieu granulaire, d'une part il n'y a aucune visibilité sur la profondeur, on ne peut donc pas commenter l'écoulement au coeur de la cellule ; d'autre part, la porosité à la paroi ($\sim 60\%$) étant plus élevée que dans le lit (44%), les phénomènes observés ne sont pas extrapolables sur la globalité de l'écoulement. De fait, l'aspect quantitatif de cette réétention

liquide apparente n'est pas discuté ni analysé dans cette étude qui se concentre sur l'aspect qualitatif du contenu fréquentiel des *pulses* de liquide induits par l'écoulement de Taylor.

3 Résultats

3.1 Contenu fréquentiel

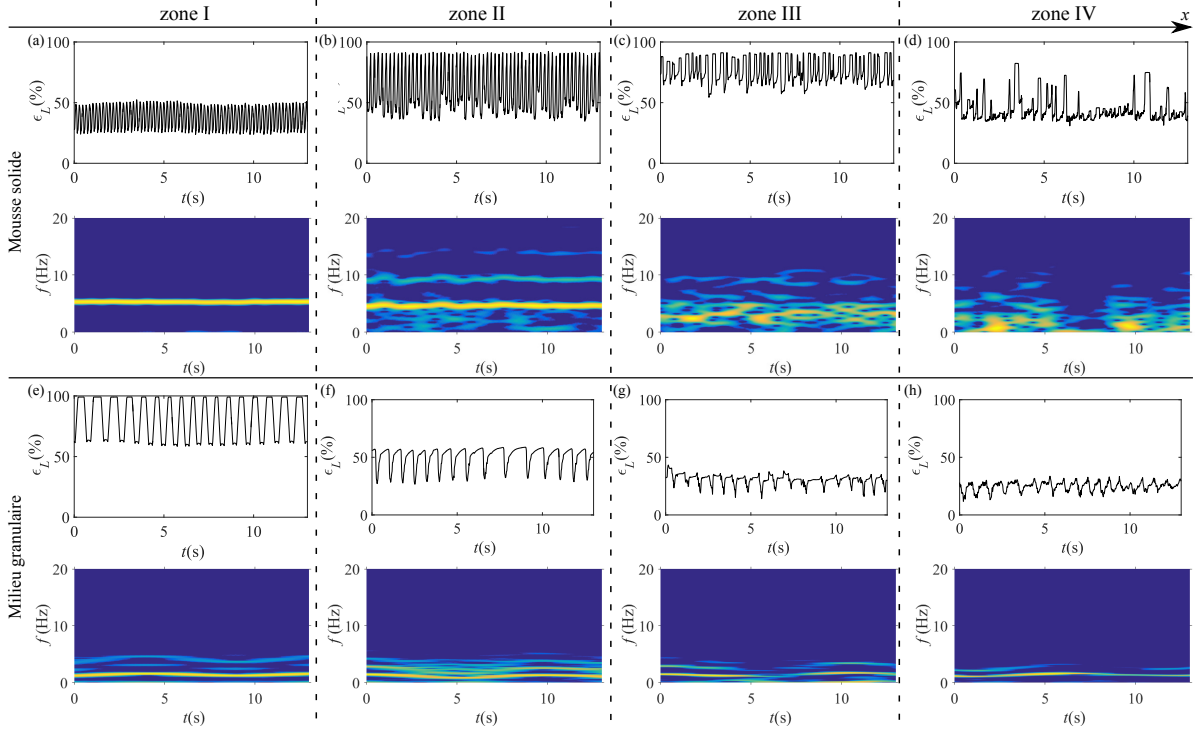


FIGURE 4. Évolution spatio-temporelle de la rétention liquide en amont (zone I) et dans le milieu poreux (zones II à IV) pour la mousse solide (a–d) et le milieu granulaire (e–h). (Haut) Rétention liquide apparente ϵ_L en fonction du temps. (Bas) Diagrammes spatio-temporels du contenu fréquentiel du signal $\epsilon_L(t)$ représenté dans les panneaux supérieurs (fonction densité de probabilité, échelle de couleur [0, 1] du bleu foncé au jaune).

L'évolution temporelle de la rétention liquide apparente ϵ_L est représentée sur la figure 4 pour les deux milieux poreux : la mousse solide (Figs. 4(a–d), haut) et le milieu granulaire (Figs. 4(e–h), haut) à mêmes débits de gaz ($Q_G = 4 \text{ cm}^3/\text{min}$) et de liquide ($Q_L = 4 \text{ cm}^3/\text{min}$) et pour chacune des zones de visualisation (zones I à IV). La périodicité de $\epsilon_L(t)$ dans la zone I reflète le passage des *pulses* de liquide induits par l'écoulement de Taylor en amont du milieu poreux. Pour chacun de ces signaux, un diagramme temps-fréquence est réalisé (spectre normalisé, Figs. 4(a–d) et 4(e–h), bas), permettant de suivre l'évolution spatio-temporelle du contenu fréquentiel du signal.

En amont du milieu poreux (zone I), la fréquence principale de l'écoulement segmenté dans le cas de la mousse solide (Fig. 4(a)) est supérieure à celle dans le milieu granulaire (Fig. 4(e)) malgré des débits de gaz et de liquide identiques. Ce résultat peut sembler surprenant, l'écoulement de Taylor en amont étant a priori fixé par les seuls débits d'injection de gaz et de liquide. Pour l'exemple présenté Fig. 4, la fréquence de Taylor dans un canal identique en l'absence de milieu poreux est proche de 6 Hz. Cela traduit, dans le cas du milieu granulaire, une forte influence de la présence du milieu poreux sur l'écoulement amont. Ce couplage est responsable de la baisse de fréquence observée. Dans le cas de la

mousse solide (Figs. 4 (a–d)), on observe une désorganisation progressive du signal lors de la propagation dans le milieu poreux, jusqu'à retrouver la basse fréquence (~ 1 Hz) présente dès l'amont dans le cas du milieu granulaire. Cette basse fréquence apparaît d'autant plus proche de l'entrée (voire en amont du milieu) que le rapport Q_G/Q_L est grand.

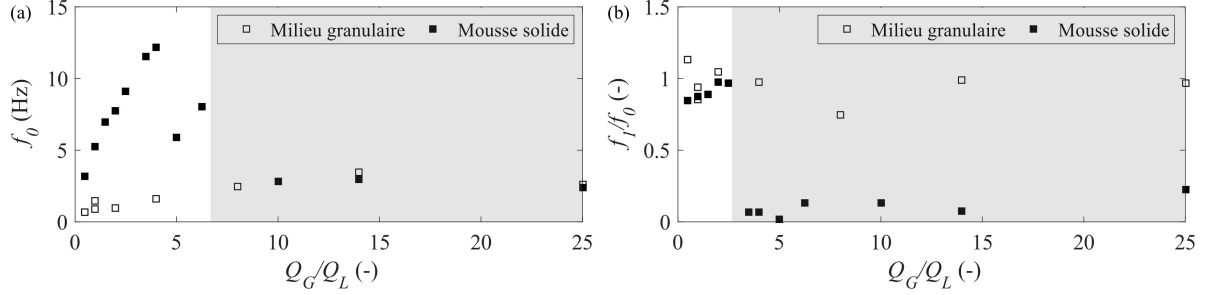


FIGURE 5. (a) Évolution de la fréquence principale f_0 de l'écoulement en amont du milieu poreux (zone I) en fonction du rapport Q_G/Q_L . (b) Fréquence principale f_1 du signal à l'entrée du milieu poreux (zone II), normalisée par la fréquence en amont (\square milieu granulaire ; \blacksquare mousse solide).

La figure 5 (a) montre la fréquence principale f_0 en amont du milieu poreux (zone I) en fonction du rapport Q_G/Q_L . Comme décrit précédemment, les deux milieux poreux se comportent très différemment pour de faibles rapports Q_G/Q_L , le fort couplage entre le milieu granulaire et l'écoulement amont ayant pour conséquence de perturber l'écoulement de Taylor et d'abaisser la fréquence principale. Pour $Q_G/Q_L \gtrsim 6$, on observe un changement de régime hydrodynamique pour la mousse solide, dont la fréquence principale est alors similaire à celle du milieu granulaire. La figure 5 (b) représente l'évolution du rapport de la fréquence à l'entrée du milieu poreux, f_1 (zone II) normalisée par la fréquence de l'écoulement segmenté en amont f_0 . Cette représentation permet de visualiser la désorganisation de l'écoulement lors de sa propagation dans le milieu poreux. Pour la mousse solide, on note un changement de régime clair pour $Q_G/Q_L \simeq 2,5$. Pour de plus grands rapports de débits, l'écoulement segmenté est désorganisé dès l'entrée de l'écoulement. Dans le cas du milieu granulaire, le couplage omniprésent entre les grains et l'écoulement amont fixe une basse fréquence de l'écoulement segmenté, qui est conservée tout au long de la propagation. On n'observe pas, dans ce dernier cas, de désorganisation de l'écoulement au fur et à mesure de sa propagation, bien que l'amplitude et la forme de $\epsilon_L(t)$ changent (voir Figs. 4 (e–h)).

3.2 Valeur moyenne, écart-type et skewness de la rétention liquide

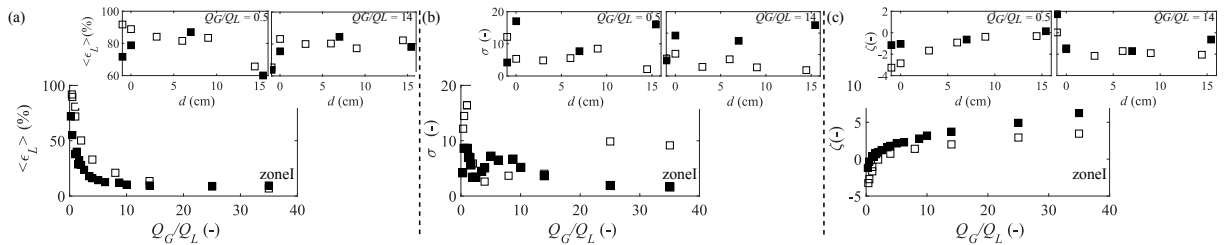


FIGURE 6. Évolution de la valeur moyenne $\langle \epsilon_L \rangle$, l'écart-type σ et *skewness* ζ des signaux de rétention liquide apparente ϵ_L en fonction de Q_G/Q_L (zone I), ou de la distance d dans le milieu poreux (\square milieu granulaire ; \blacksquare mousse solide).

Sur la figure 6 sont rapportées les variations de la valeur moyenne $\langle \epsilon_L \rangle$, l'écart-type σ et la *skewness* ζ des signaux de rétention liquide en fonction du rapport Q_G/Q_L dans la zone I (Figs. 6 (a–c)),

figures principales). L'augmentation de Q_G/Q_L entraîne une diminution continue de la rétention liquide moyenne (Fig. 6(a)) et une augmentation continue de la skewness ζ (Fig. 6(c)). Ces deux tendances peuvent être prédites par simple conservation de la masse dans un écoulement de Taylor classique. L'écart-type σ de la rétention liquide, en revanche, a une forme non triviale avec un maximum à $Q_G/Q_L \simeq 1$ pour les deux milieux poreux, suivi d'un minimum apparent à $Q_G/Q_L \simeq 2,5$ pour la mousse et à $Q_G/Q_L \simeq 4$ pour le milieu granulaire (Fig. 6(b)). Ces variations, qui restent à interpréter, pourraient être liées au couplage entre l'écoulement dans le milieu poreux et l'écoulement segmenté en amont.

Les figures secondaires (panneaux supérieurs) de la figure 6 montrent les variations de $\langle \epsilon_L \rangle$, σ et ζ en fonction de la distance le long du milieu poreux pour deux rapports de débits fixés, $Q_G/Q_L = 0,5$ et $Q_G/Q_L = 14$. Pour $Q_G/Q_L = 0,5$, $\langle \epsilon_L \rangle$ décroît lors de la propagation dans le milieu granulaire et passe par un maximum à $d \simeq 6$ cm pour la mousse, alors qu'elle semble constante dans les deux milieux poreux pour $Q_G/Q_L = 14$ (Fig. 6(a)). La skewness ζ augmente à la fois le long de la mousse et, de manière plus marquée, dans le milieu granulaire pour $Q_G/Q_L = 0,5$, alors qu'elle décroît puis reste environ constante de manière identique dans les deux milieux pour $Q_G/Q_L = 14$ (Fig. 6(c)). Une fois de plus, il est difficile de commenter l'évolution non triviale de σ le long des milieux poreux (Fig. 6(b)).

4 Conclusion

L'hydrodynamique d'un écoulement de Taylor (multiphasique gaz-liquide) traversant un milieu poreux dans un canal millifluidique a été étudiée dans le cas de deux milieux très différents : une mousse solide (porosité 96 %) et un milieu granulaire (porosité $\sim 60\%$ près de la paroi). En l'absence de milieu poreux, ce type d'écoulement est caractérisé par une fréquence bien déterminée, dépendant du rapport de débit gaz-liquide, Q_G/Q_L . Nous avons mis en évidence l'apparition d'un couplage entre le milieu poreux et l'amont, modifiant la fréquence caractéristique de l'écoulement segmenté, qui est abaissée de manière significative dans le cas du milieu granulaire, ou pour des Q_G/Q_L importants dans le cas de la mousse solide. Pour $Q_G/Q_L \lesssim 6$, lorsque ce couplage n'est pas important dans le cas de la mousse solide, on observe une désorganisation progressive de l'écoulement lors de la propagation dans la mousse. La fréquence caractéristique de la rétention liquide apparente s'abaisse ainsi progressivement, jusqu'à rejoindre celle obtenue dans le cas du milieu granulaire. Une étude des propriétés du signal de rétention liquide apparente en fonction de la distance de propagation dans le milieu poreux a montré que l'écart-type était un bon candidat pour espérer quantifier l'effet de ce couplage.

Références

1. C. BOURRY *et al.*, Free gas and gas hydrates from the Sea of Marmara, Turkey: Chemical and structural characterization, *Chem. Geol.*, **264**, 197–206 (2009).
2. K. R. NEWMAN *et al.*, Active methane venting observed at giant pockmarks along the U.S. mid-Atlantic shelf break, *Earth Planet. Sc. Lett.*, **267**, 341–352 (2008).
3. A. GAY, M. LOPEZ, C. BERNDT & M. SÉRANNE, Geological controls on focused fluid flow associated with seafloor seeps in the Lower Congo Basin, *Mar. Geol.*, **244**, 68–92 (2007).
4. A. MAZZINI *et al.*, Complex plumbing systems in the near subsurface: Geometries of authigenic carbonates from Dolgovskoy Mound (Black Sea) constrained by analogue experiments, *Mar. Petrol. Geol.*, **25**, 457–472 (2008).
5. V. HESSEL, P. ANGELI, A. GAVRILIDIS & H. LOWE, Gas-liquid and gas-liquid-solid microstructured reactors: Contacting principles and applications, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **44**, 9750–9769 (2005).
6. M. T. KREUTZER, F. KAPTEIJN, J. A. MOULIJN & J. J. HEISZWOLF, Multiphase monolith reactors: Chemical reaction engineering of segmented flow in microchannels, *Chem. Eng. Sci.*, **60**, 5895–5916 (2005).
7. P. GARSTECKI *et al.*, Formation of droplets and bubbles in a microfluidic T-junction — scaling and mechanism of break-up, *Lab Chip*, **6**, 437–446 (2006).
8. E. BRUN *et al.*, iMorph: A 3D morphological tool to fully analyze all kind of cellular materials, *Cellmet'08*, Dresden, Allemagne (2008).
9. D. SCHWEICH, *Génie de la réaction chimique*, Collection « Traité de Génie des Procédés » (TGP), Tec & Doc Lavoisier (2001).

L'efficacité évaporative du sol modélisée par approche globale

Vivien Stefan¹, Sylvain Mangiarotti¹, Olivier Merlin^{1,2} & Aandré Chanzy³

¹ CESBIO, UPS-CNRS-CNES-IRD, 18 av. Ed. Belin, 31401 Toulouse cedex 9, France

² Faculté des Sciences Semlalia Marrakech (FSSM), Marrakech, Maroc

³ Institut National de la Recherche Agronomique (INRA), Avignon, France

sylvain.mangiarotti@ird.fr

Résumé. La modélisation des transferts sol-atmosphère s'appuie généralement sur des formulations considérant la dynamique climatique comme un forçage. Dans cette étude, la modélisation par technique globale est appliquée aux cycles journaliers d'efficacité évaporative du sol (SEE) pour obtenir un modèle autonome, sans faire d'hypothèse sur la structure algébrique du modèle. Un modèle en équations aux dérivées ordinaires de dimension 4 est ainsi obtenu. Bien que le modèle converge vers un cycle limite, il présente néanmoins une dynamique transitoire chaotique longue et en bonne cohérence avec les données originales.

Abstract. In Soil-Atmosphere transfer models, the climatic component is generally considered as an external forcing. In the present study, the global modeling technique is applied to daily cycles of Soil Evaporative Efficiency in order to obtain an autonomous model for this variable. A four-dimensional model of Ordinary Differential Equations is obtained. Although converging to a limit cycle, the model exhibits a long chaotic transient which is consistent with the original data.

1 Introduction

La compréhension de la dynamique du contenu en eau des sols est très importante. L'eau évaporée par le sol joue en effet un rôle important dans le cycle de l'eau mais cette dynamique est difficile à quantifier de manière spatialisée. D'un point de vue appliqué, la quantité d'eau évaporée dans les régions semi-arides peut représenter $\sim 80\%$ des ressources disponibles. Pour modéliser la dynamique de l'eau du sol, on fait généralement appel à des modèles nécessitant de disposer d'un forçage climatique. Si l'on ne dispose pas d'un tel forçage, ce qui est souvent le cas lorsque l'on s'intéresse à des dynamiques spatialement distribuées, il peut alors être utile de disposer de modèles alternatifs ne nécessitant pas un tel forçage.

La technique de modélisation globale s'appuie sur la théorie des systèmes dynamiques non linéaires. Plutôt que de chercher à résoudre les équations analytiquement, cette théorie privilégie le recours à l'espace des phases pour étudier les comportements dynamiques. L'une des raisons de recourir à cette théorie vient du fait qu'il est — en principe — possible de reconstruire un tel espace pour un comportement dynamique donné à partir d'une série temporelle unique [1]. En pratique, ce résultat n'est toutefois pas toujours garanti et cette possibilité tient en particulier à un problème d'observabilité [2] : en raison des relations de non-linéarités qui existent entre les variables d'un système étudié, les observables n'offrent pas la même observabilité. La possibilité de reconstruire un comportement dynamique à partir d'une série de mesures observationnelles plutôt qu'une autre va donc dépendre de l'observable choisie.

La technique de modélisation globale a été développée au cours des années 1990 [3–5]. Son application à des dynamiques environnementales est beaucoup plus récente [6]. Au cours des dernières années, des développements méthodologiques ont permis de multiplier le nombre des modèles chaotiques pouvant être obtenus directement à partir de séries observationnelles. Ces travaux ont notamment permis d'obtenir le premier modèle faiblement dissipatif directement issu de mesures observationnelles [7] ; d'autres modèles ont été obtenus pour les cycles de surfaces enneigées [8] ou pour la dynamique des épidémies de peste [9].

L'objectif de cette étude est de mettre en évidence la possibilité de recourir à la technique globale pour modéliser la dynamique de l'eau dans le sol. Dans cette étude nous nous intéresserons plus spécifiquement à l'efficacité évaporative du sol (SEE) car cette variable présente une dynamique plus directement liée aux propriétés du sol [10]. Dans la section suivante sont présentées les données synthétiques utilisées

dans cette étude ; le modèle TEC utilisé pour générer ces données y sera donc présenté auparavant. La méthodologie sera présentée dans la section 3. Les résultats seront ensuite présentés dans la section 4.

2 Données

2.1 Modèle TEC

Le modèle Transfert Eau Chaleur (TEC) [11] a été utilisé pour générer la série temporelle de SEE utilisée dans cette étude. Le modèle TEC est un modèle mécaniste s'appuyant sur un paramétrage physique et hydrologique pour décrire les processus impliqués dans l'évaporation du sol. Le sol est modélisé par un système multi-couche dans lequel les flux de chaleur et de masse sont gouvernés par des équations différentielles et d'où sont calculées l'évaporation potentielle du sol E_0 (correspondant à une situation où il serait suffisamment alimenté en eau) et l'évaporation effective E , et d'où la SEE peut directement être déduite : $SEE = E/E_0$.

2.2 Prétraitements

La variable SEE a été formulée pour tenter de s'affranchir de la composante météorologique (c'est l'objet de la division par E_0). Cette normalisation pose toutefois une double difficulté. D'un point de vue algébrique, cette formulation est intéressante à première vue. Elle revient toutefois à considérer le quotient de deux comportements dynamiques complexes qui peut réduire, voire compromettre l'observabilité du système. D'un point de vue pratique, les variables E et E_0 tendent vers zéro pendant la nuit. Pour cette raison, seules les valeurs diurnes sont généralement prises en compte.

Pour la présente étude, nous nous sommes donc concentrés sur des séries temporelles pour lesquelles les valeurs d'évaporation potentielles sont telles que $E_0 \gg 0$. Ce critère nous a conduits à sélectionner une série temporelle de SEE d'une longueur de neuf jours (Fig. 1) issue d'une simulation caractéristique d'un sol argileux par le modèle TEC. Une spline cubique a d'abord été appliquée au signal pour le ré-échantillonner à un pas de temps horaire. Les dérivées nécessaires à la technique de modélisation globale ont été calculées en utilisant un filtre de type Savitzky–Golay [12].

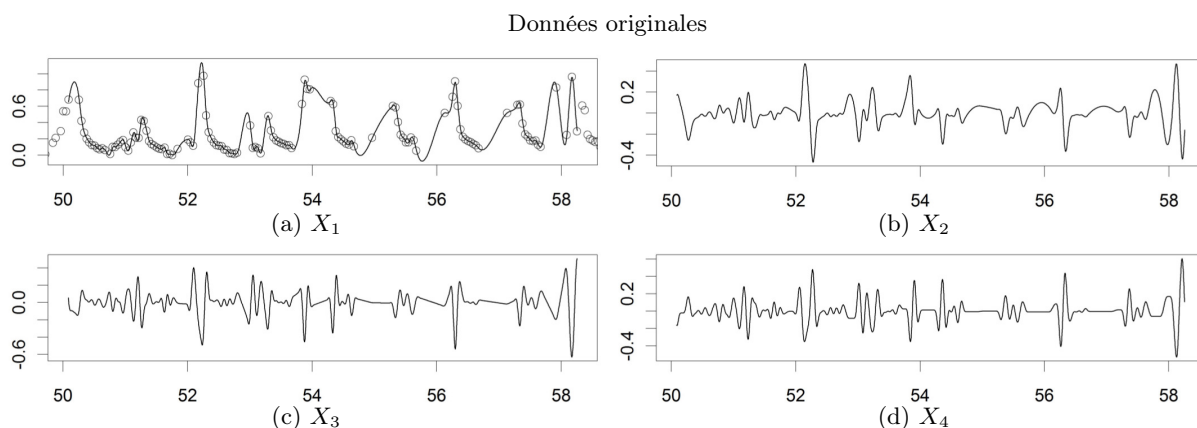


FIGURE 1. Séries temporelles originales d'Efficacité Évaporative du sol (a) $X_1 = SEE$ issue du modèle TEC (cercles) [11] ou filtrées (traits pleins) et ses dérivées (b) première X_2 , (c) seconde X_3 et (d) troisième X_4 .

3 Méthodologie

La modélisation globale s'appuie sur l'espace des phases pour obtenir des équations de comportements dynamiques directement à partir de séries temporelles de mesures [5]. Dans sa forme différentielle et partant d'une variable observationnelle unique X_1 , cette technique vise à obtenir des modèles de forme canonique

$$\begin{cases} \dot{X}_i = X_{i+1}, & \text{pour } i = 1, \dots, (n-1), \\ \dot{X}_n = F(X_1, X_2, \dots, X_n), \end{cases} \quad (1)$$

où n est la dimension du modèle et les X_i les dérivées successives de la variable observée X_1 . En pratique, modéliser un comportement dynamique par approche globale revient à obtenir une approximation de la fonction F qui permette de reproduire la dynamique observée de façon satisfaisante.

Identifier cette fonction sans disposer de structure a priori est très difficile et nécessite de disposer d'outils puissants. Les outils PoMoS et GloMo et la suite de leurs développements ont pu être testés avec succès, notamment à la modélisation du système de Rössler à partir de sa variable z présentant un très faible degré d'observabilité (voir [13] pour discussion). L'approche a également été appliquée à plusieurs variables environnementales et les cas d'application apparaissent de plus en plus nombreux (voir par exemple dans le présent ouvrage [14, 15]).

4 Analyses

Les portraits de phases différentiels reconstruits à partir des séries temporelles tirées du modèle TEC (voir section 2.1) sont présentées sur la figure 2 suivant différentes projections. Visuellement, ces projections exhibent des formes très distinctes les unes des autres.

La technique de modélisation globale a d'abord été appliquée en dimension 3 puis en dimension 4. Aucun modèle de dimension $n = 3$ n'a pu être obtenu et un seul modèle de dimension $n = 4$ a été obtenu. La fonction F de ce modèle prend la forme

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2, X_3, X_4) = & a_1 X_4^2 + \alpha a_2 X_4^3 + a_3 X_3 + a_4 X_3 X_4 + a_5 X_3 X_4^2 + a_6 X_3^2 + a_7 X_3^3 + a_8 X_2 \\ & + a_9 X_2 X_4 + a_{10} X_2 X_4^2 + a_{11} X_2 X_3 + a_{12} X_2 X_3 X_4 + a_{13} X_2^2 + a_{14} X_2^2 X_4 + a_{15} X_2^2 X_3 \\ & + a_{16} X_2^3 + a_{17} X_1 + a_{18} X_1 X_4^2 + a_{19} X_1 X_3 + a_{20} X_1 X_3 X_4 + a_{21} X_1 X_3^2 + a_{22} X_1 X_2 \\ & + a_{23} X_1 X_2 X_4 + a_{24} X_1 X_2 X_3 + a_{25} X_1 X_2^2 + a_{26} X_1^2 + a_{27} X_1^2 X_3 + a_{28} X_1^2 X_2 + a_{29} X_1^3, \end{aligned} \quad (2)$$

où les paramètres a_i sont donnés dans le tableau 1, et où le paramètre d'ajustement α (associé au coefficient a_2) est pris égal à un. Le modèle ainsi obtenu présente une dynamique transitoire chaotique. Néanmoins, pour des temps longs, le modèle converge vers une solution périodique. Une légère modification du paramètre d'ajustement tel que $\alpha = 0,99258$ permet de préserver une dynamique chaotique sur des temps beaucoup plus long. Il s'agit toutefois d'un chaos peu développé.

La dynamique du modèle global montre une bonne cohérence avec les données comme le montrent la comparaison des portraits de phases originaux et modélisés (Fig. 2). La modélisation de la variable X_4 présente toutefois des amplitudes beaucoup plus fortes que les observations, ce qui semble indiquer que cette variable est moins bien contrainte que les autres variables.

Paramètres											
a_1	9,3283630	a_6	2,3951097	a_{11}	4,7741240	a_{16}	-11,8738967	a_{21}	-3,6953403	a_{26}	0,2203366
a_2	-5,5659542	a_7	-2,3068889	a_{12}	-52,0660917	a_{17}	-0,1187456	a_{22}	2,0236262	a_{27}	-1,6147321
a_3	-2,2207074	a_8	-0,4506487	a_{13}	14,8157017	a_{18}	-16,7687883	a_{23}	-37,5016044	a_{28}	-2,2573969
a_4	3,9735013	a_9	23,2924234	a_{14}	-33,1414233	a_{19}	2,1924822	a_{24}	-7,7941180	a_{29}	-0,2418988
a_5	-24,0569615	a_{10}	-26,4741226	a_{15}	-31,6852736	a_{20}	-6,0891262	a_{25}	-23,1251478		

Tableau 1. Paramètres a_i du modèle global présenté dans l'équation (1).

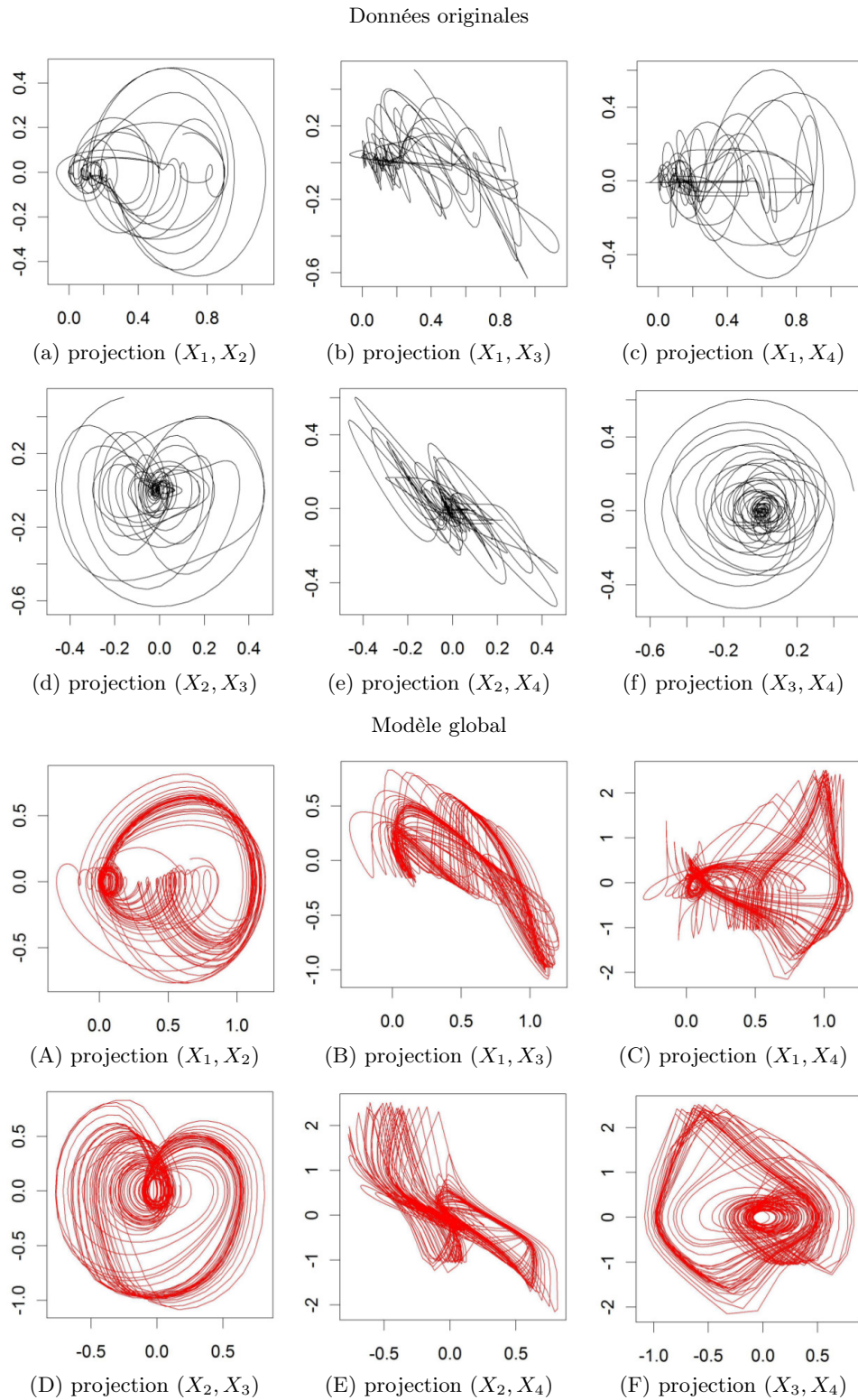


FIGURE 2. Portraits de phase du jeu de données original (a–f) et du modèle (A–F) suivant les projections correspondant aux différentes combinaisons des axes (X_1, X_2, X_3, X_4) .

4.1 Validation

Dans les contextes de prévisibilité limitée comme c'est le cas pour un très grand nombre de dynamiques environnementales, valider un modèle est toujours une tâche difficile. Pour valider le modèle obtenu ici, on se propose de se baser sur les capacités prédictives du modèle en s'appuyant sur une statistique de la croissance de l'erreur de prévision du modèle [16].

Pour cela, un grand nombre de prévisions est lancé, pour des horizons τ compris entre 0 et 9 heures, à partir d'un ensemble de conditions initiales offrant une bonne couverture du jeu de données disponibles. L'erreur de prévision $e(t, \tau)$ dépend donc à la fois de l'état initial du système au temps t et de l'horizon de prévision au temps $t + \tau$. Cette erreur peut être représentée par le diagramme à deux dimensions présenté sur la figure 3. Plusieurs éléments peuvent y être observés à commencer par la croissance progressive de l'erreur avec la croissance de l'horizon de prévision τ (présenté en ordonnée). On peut y noter deux types de structures au sein de ce diagramme : (1) les structures verticales qui résultent de la difficulté d'effectuer une prévision à partir d'une condition initiale donnée ; (2) les structures diagonales qui proviennent de la difficulté de prévoir un événement particulier. (Attention, suivant la convention de représentation choisie, les structures verticales et diagonales peuvent être inversées, voir [16] pour une interprétation détaillée de ce type de figure). La croissance d'erreur peut être obtenue en faisant la statistique des erreurs en

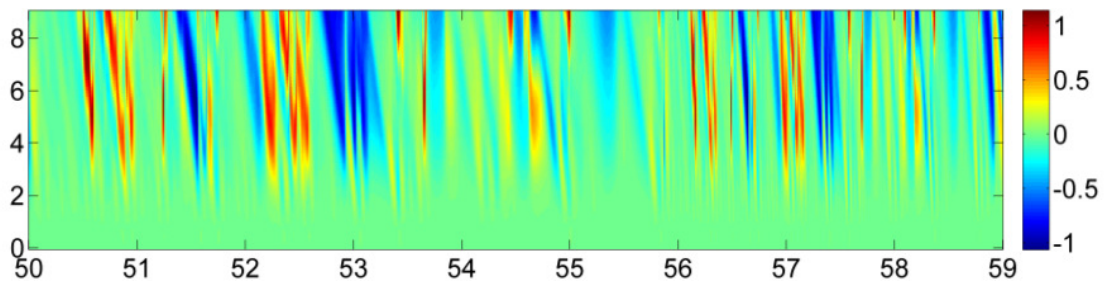


FIGURE 3. Erreur de prévision $e(t, \tau)$ (en couleur) en fonction de la date t (tracée en ordonnée, exprimée en jour) et de l'horizon de prédiction τ (tracé en abscisse, exprimé en heure).

fonction de l'horizon τ . La croissance d'erreur ainsi obtenue est présentée sur la figure 4 en pourcentage de la variance du signal. Ce graphe montre que la croissance d'erreur est très rapide puisqu'au bout de 3 heures, l'erreur atteinte est proche de 40% de la variance du signal. Si cette analyse de prévisibilité permet d'apporter un premier élément de validation, d'un point de vue prévisionnel, le modèle ainsi obtenu apparaît néanmoins d'un intérêt très relatif.

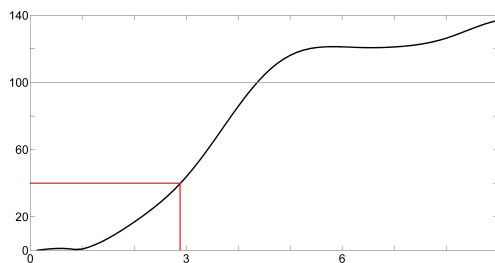


FIGURE 4. Erreur de prédiction (rmse) exprimée en pourcentage de la variance du signal, en fonction de l'horizon de prédiction τ (en heure). Pour un niveau d'erreur de 40% rmse, l'horizon de prévisibilité est d'environ 3 heures.

5 Conclusions

Un modèle autonome est obtenu pour les cycles journaliers de l'efficacité évaporative du sol. Il s'agit d'un modèle chaotique de dimension 4. Ce modèle permet de reproduire la dynamique observée de façon très cohérente. Ses capacités prédictives restent toutefois limitées à un horizon de prévisibilité de 3 heures (pour un seuil d'erreur de 40 % de la variance du signal).

Les difficultés rencontrées pour obtenir ce modèle provient très vraisemblablement du choix de la variable utilisée qui, construite comme le quotient de deux variables dynamiques, peut conduire à l'existence de singularités. L'utilisation de cette variable se traduit vraisemblablement par une diminution du degré d'observabilité du système modélisé qui peut gêner la reconstruction du modèle.

Le fait de pouvoir obtenir un modèle autonome pour les transferts sol-atmosphère reste toutefois encourageant puisqu'il montre la possibilité de modéliser cette dynamique à partir d'un nombre restreint de variables observées et laisse entrevoir la possibilité de modéliser cette dynamique de manière spatialement distribuée, en s'appuyant par exemple sur des séries observationnelles issues de la télédétection spatiale.

Références

1. F. TAKENS, Detecting strange attractors in turbulence, *Lect. Notes Math.*, **898**, 366–381 (1981).
2. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE, J. MAQUET, Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics, *Phys. Rev. E*, **71**, 066213 (2005).
3. G. GOUESBET & C. LETELLIER, Global vector field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 -approximation on nets, *Phys. Rev. E*, **49**, 4955–4972 (1994).
4. C. LETELLIER, L. LE SCELLER, P. DUTERTRE, G. GOUESBET, Z. FEI & J. HUDSON, Topological characterization and global vector field reconstruction of an experimental electrochemical system, *J. Phys. Chem.*, **99**, 7016–7027 (1995).
5. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & U. S. FREITAS, Frequently asked questions about global modeling, *Chaos*, **19**, 023103 (2009).
6. J. MAQUET, C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Global models from the Canadian lynx cycles as a direct evidence for chaos in real ecosystems, *J. Math. Biol.*, **55**, 21–39 (2007).
7. S. MANGIAROTTI, L. DRAPEAU, M. HUC & C. LETELLIER, Two chaotic global models for cereal crops cycles observed from satellite in Northern Morocco, *Chaos*, **24**, 023130 (2014).
8. S. MANGIAROTTI, *Modélisation globale et caractérisation topologique de dynamiques environnementales : de l'analyse des enveloppes fluides et du couvert de surface de la Terre à la caractérisation topodynamique du chaos*, Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Toulouse 3 (2014).
9. S. MANGIAROTTI, Low dimensional chaotic models for the plague epidemic in Bombay (1896–1911), *Chaos Soliton. Fract.*, **81**, 184–196 (2015).
10. O. MERLIN, V. G. STEFAN, A. AMAZIRH, A. CHANZY, E. CESCHIA, S. ER-RAKI, P. GENTINE, T. TALLEC, J. EZZAHAR, S. BIRCHER, J. BERINGER & S. KHABBA, Modeling soil evaporation efficiency in a range of soil and atmospheric conditions using a meta-analysis approach, *Water Resour. Res.*, soumis (2016).
11. A. CHANZY, M. MUMEN & G. RICHARD, Accuracy of the top soil moisture simulation using a mechanistic model with limited soil characterization, *Water Resour. Res.*, **44**, W03432 (2008).
12. A. SAVITZKY & M. J. GOLAY, Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures, *Anal. Chem.*, **36**, 1627–1639 (1964).
13. S. MANGIAROTTI, R. COUDRET, L. DRAPEAU & L. JARLAN, Polynomial search and global modeling : two algorithms for modeling chaos, *Phys. Rev. E*, **86**, 046205 (2012).
14. S. MANGIAROTTI, A. K. SHARMA, S. MUDDU, S. CORGNES & L. RUIZ, La modélisation du chaos appliquée à la classification des couverts agricoles (bassin versant de Berambadi, Inde du Sud), *Comptes-Rendus de la 19^e Rencontre du Non Linéaire*, 73–78 (2016).
15. M. HUC & S. MANGIAROTTI, Un modèle chaotique quadridimensionnel pour l'épidémie de fièvre hémorragique à virus Ebola en Afrique de l'Ouest, *Comptes-Rendus de la 19^e Rencontre du Non Linéaire*, 49–54 (2016).
16. S. MANGIAROTTI, P. MAZZEGA, P. HIERNAUX & E. MOUGIN, Predictability of vegetation cycles over the semi-arid region of Gourma (Mali) from forecasts of AVHRR-NDVI signals, *Remote Sens. Environ.*, **123**, 246–257 (2012).

Diffusionless hydromagnetic modes in rotating ellipsoids: a road to weakly nonlinear models?

Jérémie Vidal, David Cébron & Nathanaël Schaeffer

Université Grenoble Alpes, CNRS, ISTERre, Grenoble, France.
jeremie.vidal@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé. On étudie les modes hydromagnétiques d'un fluide incompressible contenu dans un ellipsoïde triaxial quelconque en rotation. Le vecteur rotation est incliné par rapport aux axes principaux de l'ellipsoïde. L'état de base est constitué d'une densité de courant uniforme dans les coordonnées d'espace et inclinée par rapport aux axes d'inertie. On projette les perturbations tridimensionnelles sur un espace vectoriel de dimension finie. En combinant calcul symbolique et numérique, nous pouvons calculer les modes propres avec des complexités spatiales élevées. Les résultats précédemment obtenus dans la sphère sont généralisés à la géométrie triaxiale et comparés à une analyse locale en ondes planes. En l'absence de champ magnétique, les modes se réduisent aux modes inertiels de l'ellipsoïde triaxial, qui forment une base complète. Nous utiliserons ces modes pour étudier la saturation faiblement non linéaire des instabilités inertiels, dont l'instabilité elliptique.

Abstract. We investigate free hydromagnetic eigenmodes of an incompressible, inviscid and ideal electrically conducting fluid in rotating triaxial ellipsoids. The container rotates with an angular velocity tilted from its figure. The magnetic base state is a uniform current density also tilted. Three-dimensional perturbations upon the base state are expanded onto a finite-dimensional polynomial basis. By combining symbolic and numerical computations, we are able to get the eigenmodes of high spatial complexity. Hydromagnetic modes of the sphere still exist in triaxial geometry. A plane-wave analysis is also carried on, explaining the dispersion relation observed in our model. Without magnetic field, the modes reduce to the inertial modes of the ellipsoids, which form a complete basis. We propose to use these modes to study the weakly nonlinear saturation of inertial instabilities, especially the elliptical one.

1 Introduction

Hydromagnetic modes are thought to play an important role in the dynamics of magnetized liquid metal planetary cores [1–3]. These waves are influenced by both the fast rotation of the core and the magnetic field that permeates the fluid. Some theoretical studies have focused on hydromagnetic modes growing upon a toroidal magnetic field in spherical geometry, motivated by the existence of a strong toroidal magnetic field in the Earth's core. [3] shows that, for a well chosen axisymmetric and azimuthal toroidal field (the Malkus field), the hydromagnetic oscillations in spherical containers are governed by a modified version of the Poincaré equation (the governing equation of inertial modes whose restoring force is the Coriolis force). This observation enables Malkus to use the properties of the Poincaré equation to determine dispersion relation of the associated hydromagnetic modes. Based on the pioneering work of Malkus, [4] give the explicit eigenvalues, thanks to the solutions of the original Poincaré equation [5]. With another approach [2], Labbé *et al.* consider non axisymmetric background fields, improving our understanding of waves in spherical geometry. Kerswell [6, 7] considers a spheroidal container, modelling the tidal deformation of the Earth's core due to the gravitational torques exerted by the Sun and the Moon. He also find the dispersion relation of the hydromagnetic modes by modifying the modal frequencies of pure inertial modes. However this approach cannot be used in triaxial geometry, because pure inertial modes are not known analytically. Instead, Vantieghem proposes a numerical algorithm to compute them in triaxial ellipsoids, but the study is restricted to modes with linear and quadratic dependence on space coordinates [8].

We extend the theory of free hydromagnetic modes to triaxial geometries, applying the method of Vantieghem [8] to the hydromagnetic case. Our study is restricted to background magnetic fields which

are toroidal and depend linearly on space coordinates. This choice enables to take into account non-axisymmetric fields in ellipsoidal geometry. Despite the strong assumptions, this model is a reasonable starting point to study free hydromagnetic eigenmodes in planetary cores. Finally, we briefly discuss the usefulness of these modes to build weakly nonlinear models of any inertial instability in rotating ellipsoids, in particular the elliptical instability.

2 Tilted hydromagnetic eigenmodes

2.1 Governing equations

We consider a homogeneous, incompressible, inviscid and ideal electrically conducting fluid enclosed in a rigid triaxial ellipsoid, rotating at the constant angular velocity $\boldsymbol{\Omega}$. The triaxial shape results from gravitational forces exerted by an orbital partner (moon, star. . .). We work in the reference frame attached with the principal axis of length a, b, c . The angular velocity $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ is tilted from the figure axis, as illustrated in Figure 1 (a). The fluid is permeated by an imposed magnetic field \mathbf{B}_0 . Finally, we do not consider any background velocity field ($\mathbf{U}_0 = \mathbf{0}$). Let us take $|\boldsymbol{\Omega}|^{-1}$ as time scale, a typical length L as length scale, $|\boldsymbol{\Omega}|L$ as velocity scale and the strength of the background magnetic field B_0 as magnetic scale. The linearized dimensionless equations are

$$\lambda \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla\pi + \text{Le}^2 [(\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{b} + (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}_0], \quad (1)$$

$$\lambda \mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0), \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (3)$$

where (\mathbf{u}, \mathbf{b}) are the velocity and magnetic perturbations, $\lambda = \sigma + i\omega$ the eigenvalue with σ the damping (or growth) rate and ω the frequency, π the reduced pressure and the Lehnert number

$$\text{Le} = \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0 \mu_0} |\boldsymbol{\Omega}| L}, \quad (4)$$

with ρ_0 the fluid density and μ_0 magnetic permeability of free space. The dimensionless number Le measures the magnetic field compared to rotation effects.

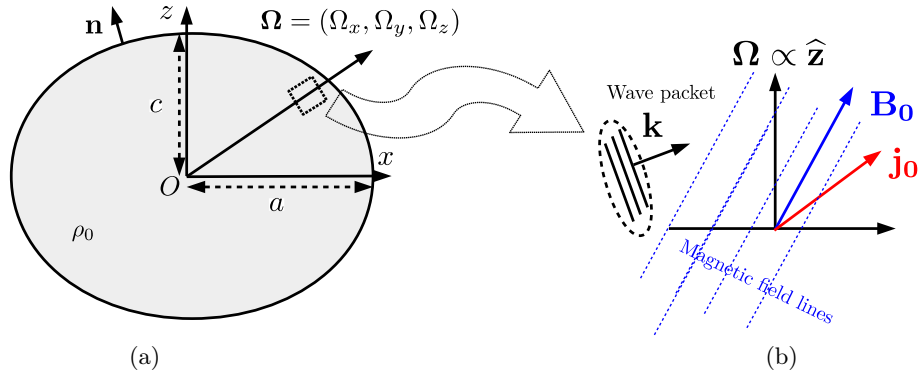


Figure 1. (a) Ellipsoidal geometry in the plane (Ox, Oz) . \mathbf{n} is the unitary vector normal to the ellipsoidal boundary. (b) Infinite plane layer setup for hydromagnetic waves. The imposed magnetic field \mathbf{B}_0 and current density \mathbf{j}_0 are uniform in the local analysis. \mathbf{k} is the local wave number.

The velocity field satisfies the impermeability boundary condition $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ at the ellipsoidal boundary, where \mathbf{n} is the outward unitary vector normal to the boundary. The boundary condition on \mathbf{b} is constrained by the one on \mathbf{u} through the equation (2). Let us denote $\nabla_S = \nabla - \mathbf{n} \partial_n$, (B_n, b_n, u_n) the normal

components of $(\mathbf{B}, \mathbf{b}, \mathbf{u})$ and \mathbf{u}_S the tangential velocity at the boundary. Following [9], the scalar product of (2) with \mathbf{n} leads to the boundary condition satisfied by the normal component b_n

$$\lambda b_n = -\nabla_S(B_n \mathbf{u}_S). \quad (5)$$

2.2 Background magnetic field \mathbf{B}_0

We consider only background fields such that the associated density currents $\mathbf{j}_0 = \nabla \times \mathbf{B}_0$ are uniform in space. The background field \mathbf{B}_0 is thus a linear combination of the following elements

$$\mathbf{B}_{01} = \left(0, -\frac{z}{c^2}, \frac{y}{b^2}\right), \quad \mathbf{B}_{02} = \left(\frac{z}{c^2}, 0, -\frac{x}{a^2}\right), \quad \mathbf{B}_{03} = \left(-\frac{y}{b^2}, \frac{x}{a^2}, 0\right). \quad (6)$$

In spherical geometry, \mathbf{B}_{03} is the Malkus field [3], an axisymmetric toroidal field which is simply given by the cylindrical radius. Here our general background field is not axisymmetric, allowing the coupling of modes of different azimuthal wave numbers, even in spherical or spheroidal geometry. Fields (6) are purely toroidal, i.e. $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ everywhere. Thus the boundary condition (5) for the magnetic perturbation reduces to $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0$ at the outer boundary.

2.3 Global polynomial basis

We consider the finite-dimensional vector space \mathcal{V}_n of polynomial flows of maximum degree n which are solenoidal and satisfy the impermeability boundary condition in triaxial ellipsoids. As in the spherical case [10], the dimension of \mathcal{V}_n is $\mathcal{D}_n = n(n+1)(2n+7)/6$. \mathcal{V}_n is an invariant of equations (1)–(2). Following [11], we build an explicit polynomial basis of \mathcal{V}_n for any degree n , on which both \mathbf{u} and \mathbf{b} are expanded. This leads to a generalised eigenvalue problem of size $4\mathcal{D}_n^2$, where the eigenvectors are the $2\mathcal{D}_n$ projection coefficients of the linear combination of the basis elements for a given degree n .

3 Results

3.1 Local analysis of hydromagnetic waves

We can infer some properties of the waves propagating in the system with a simple plane-wave analysis in Cartesian coordinates, extending the one of [12]. As shown in Figure 1 (b), we consider a dimensionless rotation vector $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, 1)$ aligned with the $\hat{\mathbf{z}}$ -axis. We assume that both the background magnetic field \mathbf{B}_0 and current density \mathbf{j}_0 are uniform and may be inclined from the spin axis. Without loss of generality, we study two simple configurations such that analytic expressions of the dispersion relation are available.

We first consider $\mathbf{j}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{B}_0 = (B_x, 0, B_z)$ and the wave number $\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$. The dispersion relation

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\pm 2 \sqrt{16 + 16B_z^2 \text{Le}^2 k_z^2 - 8B_x^2 \text{Le}^2 k_z^2 + B_x^4 \text{Le}^4 k_z^4 - 8 - 4B_z^2 \text{Le}^2 k_z^2 - 2B_x^2 \text{Le}^2 k_z^2}}, \quad (7)$$

illustrated in Figure 2 (a), allows to recover the usual waves frequencies. Indeed, for $\text{Le} \gg 1$ it gives $\lambda \simeq \pm i k_z B_z \text{Le}$ and $\lambda \simeq \pm i k_z \text{Le} \sqrt{B_x^2 + B_z^2}$, i.e. the ‘‘fast’’ Alfvén waves (AW) weakly affected by the rotation. For $\text{Le} \ll 1$, equation (7) gives $\lambda \simeq \pm 2i$, which are the ‘‘fast’’ inertial waves (IW) weakly affected by \mathbf{B}_0 , but also

$$\lambda \simeq \pm i k_z \text{Le} \sqrt{B_x^2 + B_z^4 k_z^2 \text{Le}^2 / 4}. \quad (8)$$

When $B_x^2 \ll B_z^4 k_z^2 \text{Le}^2 / 4$, equation (8) gives $\lambda \simeq \pm i k_z^2 B_z^2 \text{Le}^2 / 2$, which corresponds to the ‘‘slow’’ magneto-Coriolis waves (MCW) branch. These waves are affected by both rotation and magnetic effects. When $B_x^2 \gg B_z^4 k_z^2 \text{Le}^2 / 4$, equation (8) gives $\lambda \simeq \pm i k_z B_x \text{Le}$, which corresponds to the torsional waves (TW) branch. The TW, appearing at $\text{Le} \lesssim 2B_x / (k_z B_z^2)$, are ‘‘slow’’ Alfvén waves emerging from the MCW branch, because the spin axis $\boldsymbol{\Omega}$ is not aligned with the background field \mathbf{B}_0 .

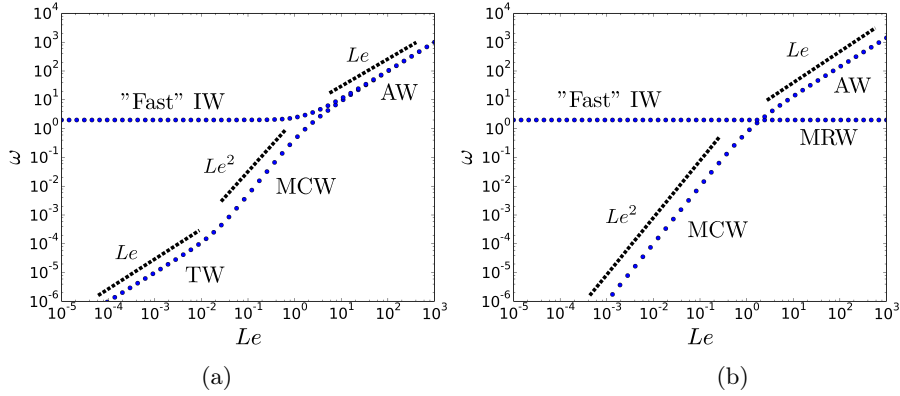


Figure 2. Dispersion curves obtained with the local plane wave analysis. AW: Alfvén Waves, IW: Inertial Waves, MCW: Magneto-Coriolis Waves, MRW: “Magneto-Rotational” Waves, TW: Torsional Waves. (a) Case 1: $\mathbf{j}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{B}_0 = (0.01, 0, 1)$ and $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. TW and MCW branches cross for $Le \lesssim 2B_x/(k_z B_z^2)$, whereas IW and AW branches cross at $Le \simeq 1$. (b) Case 2: $\mathbf{j}_0 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{B}_0 = (0, 0, 1)$ and $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

We now introduce a background current density and remove the horizontal magnetic field, assuming $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{j}_0 = (0, 0, j_z)$, $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_z)$ and $\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$. Even though this choice is not consistent for the basic state, the model contains all the ingredients to explain the physics of the various hydromagnetic waves, including the effect of an electric current. The dispersion relation, illustrated in Figure 2 (b), is now

$$\lambda = \pm i \pm i \sqrt{1 + Le^2 B_z k_z (B_z k_z \pm j_z)}. \quad (9)$$

As explained above, the TW branch disappears because \mathbf{B}_0 is here aligned with the spin axis $\boldsymbol{\Omega}$. However IW, MCW and AW branches still exist, with respectively $\lambda \simeq \pm 2i$ and $\lambda \simeq ik_z^2 B_z^2 Le^2 [j_z/(k_z B_z) \pm 1]/2$ for $Le \ll 1$, whereas $\lambda \simeq \pm i \pm ik_z B_z Le \sqrt{1 \pm j_z/(k_z B_z)}$ for $Le \gg 1$ (in agreement with previously obtained results). This latter expression shows that another kind of wave appears because of the current density, when $j_z \simeq k_z B_z$, leading to $\lambda \simeq \pm i$. We call them “magneto-rotational” waves (MRW), as they disappear without rotation. Their frequencies are mainly independent of Le , as for the IW branch.

3.2 Global modes

We have benchmarked our numerical results against the explicit modal solutions in spherical geometry for the imposed Malkus field [3, 4], showing no significant discrepancies between the two approaches. We sum up the results in triaxial geometry with the Figure 3. For the sake of clarity, only modes of polynomial degrees up to $n = 3$ are represented. The background density current is not aligned with the rotation vector, by adding to the Malkus field \mathbf{B}_{03} the non-axisymmetric component \mathbf{B}_{01} with a small amplitude. In the triaxial geometry, all the branches predicted by the local dispersion relations (7)–(9) are present: the inertial modes (IM), the “slow” magneto-Coriolis modes (MCM), the “fast” Alfvén modes (AM), the “slow” torsional modes (TM) and the “magneto-rotational” modes (MRM). It is worth noting that the TM branch does not exist for the pure Malkus field [2]. We find that the IW, MCM, AM and TW are stable, whereas the MRM branch at $Le > 1$ may be stable or unstable, as predicted by [3] in spherical geometry. This instability is not relevant for geophysical systems (where $Le \ll 1$). Finally, the IM branch splits into the “fast” inertial modes and the “slow” quasi-geostrophic inertial modes (QGM). The latter have velocity fields more or less aligned with the spin axis $\boldsymbol{\Omega}$ of the container, reminiscent of the Taylor–Proudman constraint.

4 Weakly nonlinear models using inertial modes?

The case of pure inertial modes is also interesting in its own, since they are essential to understand the dynamics of rapidly rotating fluids in geo- and astrophysics. Using the mathematical apparatus developed

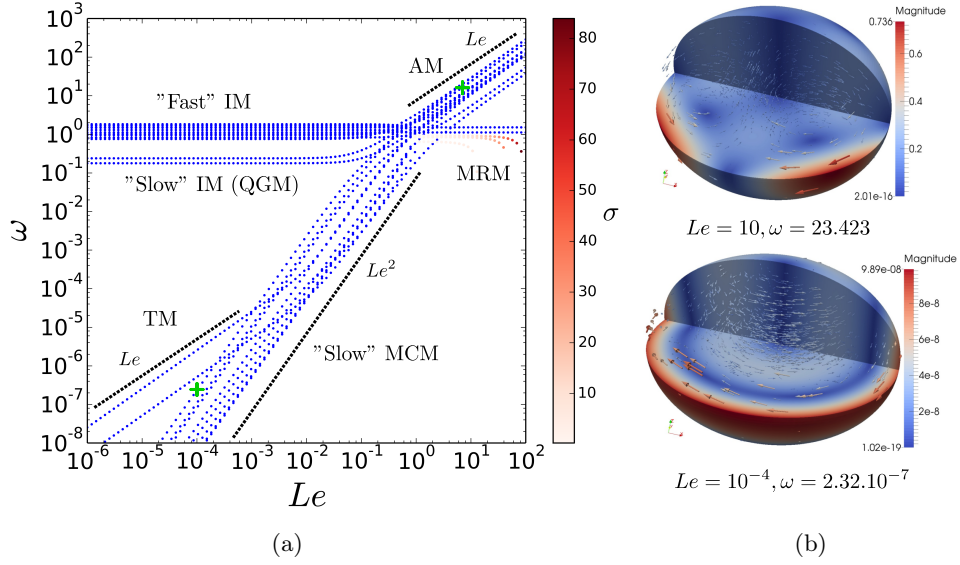


Figure 3. Effect of Le on the dimensionless frequency ω of hydromagnetic modes in an ellipsoid ($a = 1$, $b = 0.9$ and $c = 0.7$). The background magnetic field is $0.01 \mathbf{B}_{01} + \mathbf{B}_{03}$. The rotation vector is aligned with the c axis and has a magnitude $|\boldsymbol{\Omega}| = 1$. For the sake of clarity, only modes up to $n = 3$ are shown. (a) Dispersion curve. Each point is a mode. The blue ones are stable ($\sigma \leq 10^{-8}$). The red modes are unstable ($\sigma \geq 10^{-8}$) and their growth rate σ is given with the colorbar. TM: Torsional modes, IM: Inertial modes, QGM: Quasi-geostrophic modes, MCM: Magneto-Coriolis modes, AM: Alfvén modes, MRM: “Magneto-rotational” modes. (b) Isocontours of the velocity magnitude $||\mathbf{u}||$ and velocity vector arrows in two orthogonal planes for two particular modes, represented with green stars in the left figure.

by [10], it can be proved that inertial modes form a complete basis. The completeness opens exciting perspectives to analyse many geophysical and astrophysical fluid problems, because the rotational effect does not couple the inertial modes. Therefore they may offer an efficient basis to understand bounded rotating fluids in ellipsoids, such as any inertial instability driven by mechanical forcings (tides, precession, libration...)

In particular, the elliptical instability growing upon the laminar libration-driven base flow is observed both in the numerical [13] and laboratory experiments [14]. Its underlying mechanism is the triadic resonance between two inertial modes and the base flow [15]. Some viscous inertial modes have been directly observed in the simulations, showing a very good agreement with inviscid modes of the present study except in the viscous boundary layer (Figure 4 (a)).

However, the saturation of the instability is not understood. Thanks to our tool, building a weakly nonlinear model of the elliptical instability is at reach. By projecting numerical simulations on a large subset of modes (Figure 4 (b)), we could identify the physical modes which are essential for the dynamics. Then we hope to give a quantitative explanation of the saturation with a low-dimensional weakly nonlinear model of the instability, valid for both laboratory and numerical experiments.

5 Conclusion and perspectives

We have revisited the theory of free diffusionless hydromagnetic modes, by considering for the first time triaxial ellipsoidal containers and background magnetic fields of uniform current densities. The velocity and magnetic perturbations are projected onto a finite-dimensional vector space, made of Cartesian polynomial basis elements satisfying the appropriate boundary conditions. A code has been developed to solve numerically the symbolic eigenvalue problem. As a benchmark, it has been applied to the toroidal Malkus field [3], for which the mode frequencies are known analytically [4], showing a very good agreement. The results in triaxial geometry extend the ones of [2] in spherical geometry.

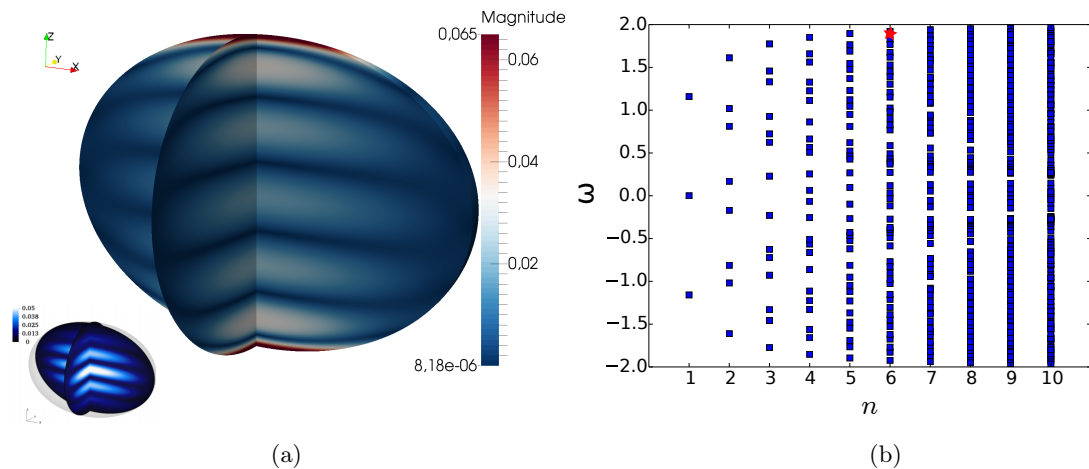


Figure 4. Inertial modes of the ellipsoidal container used by [13, 14] ($a = 1, b = 0.7, c = 0.7$). (a) Velocity amplitude of an inviscid inertial mode ($n = 6, \omega = 1.9219$) in two perpendicular planes. It corresponds to the red star in the right figure. The viscous mode, observed in [13] and filtered at $\omega = 1.95$, is shown in the bottom left corner. (b) Dimensionless frequencies ω in function of the degree n .

Note that the chosen base state may not be consistent, as there is no background velocity field sustaining the imposed magnetic field. Following the approach of Kerswell [6, 7], we have found a consistent and steady magnetostrophic regime in triaxial geometry, assuming a background velocity field of uniform vorticity. This magnetostrophic regime is a magnetohydrodynamic analogue of hydrodynamic laminar flows of uniform vorticity, studied previously [11, 16, 17]. The global stability analysis in the magnetostrophic regime will be performed later.

Finally, the inertial modes can be used to build weakly nonlinear models of any inertial instability in rotating ellipsoids. We shall first use them to understand the saturation of the elliptical instability, well observed in numerical and laboratory experiments. This work is theoretically possible thanks to the completeness of inertial modes in triaxial geometry and will be carried on soon.

References

1. N. GILLET, D. JAULT, E. CANET & A. FOURNIER, *Nature*, **465**, 74–77 (2010).
2. F. LABBÉ, D. JAULT & N. GILLET, *Geophys. Astro. Fluid*, **109**, 587–610 (2015).
3. W. V. MALKUS, (1967). *J. Fluid Mech.*, **28**, 793–802 (1967).
4. K. ZHANG, X. LIAO & G. SCHUBERT, *Astrophys. J.*, **585**, 1124–1137 (2003).
5. K. ZHANG, P. EARNSHAW, X. LIAO & F. BUSSE, *J. Fluid Mech.*, **437**, 103–119 (2001).
6. R. KERSWELL, *Geophys. Astro. Fluid*, **71**, 105–143 (1993).
7. R. KERSWELL, *J. Fluid Mech.*, **274**, 219–241 (1994).
8. S. VANTIEGHEM, *Proc. Roy. Soc. A*, **470**, 20140093 (2014).
9. G. BACKUS, R. L. PARKER & C. CONSTABLE, *Foundations of Geomagnetism*, Cambridge University Press (1996).
10. D. IVERS, A. JACKSON & D. WINCH, *J. Fluid Mech.*, **766**, 468–498 (2015).
11. C.-C. WU & P. H. ROBERTS. *Geophys. Astro. Fluid*, **105**, 287–303 (2011).
12. S. GALTIER, *J. Fluid Mech.*, **757**, 114–154 (2014).
13. B. FAVIER, A. GRANNAN, M. LE BARS & J. AURNOU, *Phys. Fluids*, **27**, 066601 (2015).
14. A. GRANNAN, M. LE BARS, D. CÉBRON & J. AURNOU, *Phys. Fluids*, **26**, 126601 (2014).
15. S. VANTIEGHEM, D. CÉBRON & J. NOIR. *J. Fluid Mech.*, **771**, 193–228 (2015).
16. R. KERSWELL, *Geophys. Astro. Fluid*, **72**, 107–144 (1993).
17. H. POINCARÉ, *B. Astron.*, **27**, 321–356 (1910).

Modélisation par technique globale du débit de trois sources karstiques (le Doubs, la Touvre et le Lez)

Yan Zhang¹, Sylvain Mangiarotti¹ & Marc Leblanc²

¹ CESBIO, UPS-CNRS-CNES-IRD, 18 av. Ed. Belin, 31401 Toulouse cedex 9, France

² Équipe Hydrogéologie, UMR EmmaH, Université d'Avignon, Agroparc, 84000 Avignon, France
sylvain.mangiarotti@ird.fr

Résumé. La dynamique hydrologique des sources karstiques présente des comportements non linéaires reconnus difficiles à modéliser. La plupart des modèles sont des modèles pluie-débit qui s'appuient sur des approches conceptuelles pour simuler la dynamique du débit des sources. Une approche alternative basée sur la technique de modélisation globale est utilisée ici pour simuler le débit de trois sources karstiques sans disposer de données de précipitation. Les modèles obtenus sont présentés et leurs capacités sont testées par l'estimation du degré de déterminisme expliqué.

Abstract. The hydrological dynamics of karstic springs is nonlinear and its modeling is known to be difficult. Most of the models used for this purpose are rain-flow models based on a conceptual background. An alternative approach based on the global modeling technique is used here to simulate the discharge of three karstic springs, without rainfall forcing. Obtained models are presented and their quality is tested by estimating the degree of explained determinism.

1 Introduction

Les terrains karstiques sont des zones géologiques dont la géomorphologie résulte de l'érosion de roches solubles, principalement de calcaires. Ils représentent environ 12 % de la surface émergée du globe et 25 % des eaux souterraines consommées dans le monde proviennent d'aquifères karstiques. Les terrains karstiques présentent des dynamiques hydrologiques qui se distinguent nettement des autres aquifères. Cette différence de comportement résulte directement de la structure souterraine du karst, par nature très inaccessible et donc difficile à modéliser. Creusée par l'érosion, cette structure constitue un réseau complexe de canaux et de failles où l'eau peut circuler. Un tel réseau peut présenter des résurgences (des sources) dont la dynamique hydrologique se caractérise souvent par des débits irréguliers ou intermittents difficiles à appréhender. La dynamique hydrologiques au niveau des résurgences dépend de l'apport en eau par les précipitations, et de la zone d'infiltration (la zone non saturée) qui joue un rôle très important. La géomorphologie des structures karstiques peuvent être très différentes d'un karst à l'autre [1] selon l'avancement du niveau d'érosion, et suivant le contexte climatique. Cette géomorphologie étant difficile à renseigner de manière directe et systématique, les approches de modélisation les plus physiques sont difficiles à utiliser. On leur préfère généralement des modèles pluie-débit plus conceptuels ou d'autres approches basées sur une fonction de transfert (voir par exemple [2, 3]). Les difficultés de modélisation rencontrées tiennent du fait que les dynamiques à modéliser sont très non linéaires car la réponse au forçage de pluie dépend fortement de l'état du système au moment des pluies. Or la distribution de l'eau au sein d'un karst est difficile à estimer, l'état d'un système karstique est donc généralement difficile connaître en temps réel et à prendre en compte.

Plutôt que d'examiner le lien pluie-débit, la présente étude se focalise sur le problème des non-linéarités en cherchant à modéliser le débit de trois sources karstiques sans recourir à un forçage de précipitation.

2 Sites d'étude et données

2.1 Sites d'étude et contexte

(a) La source du Doubs est située au sud de Besançon, dans l'est de la France (lat. $46^{\circ} 42' 4,3960''$ N ; lon. $6^{\circ} 11' 26,6165''$ E ; alt. 938 m). La région est caractérisée par un climat semi-continentale, froid et humide ($> 1\,200$ mm/an).

(b) La source de la Touvre [4] est située dans l'ouest de la France (lat. $45^{\circ} 40' 22,0159''$ N ; lon. $0^{\circ} 10' 3,5803''$ E ; alt. 33 m), à 7 km de la ville d'Angoulême qu'elle alimente en eau potable depuis 1889. La zone de drainage est alimentée par infiltration d'une part et par la perte des rivières (de la Tardoire et de Bandiat) qui continuent à alimenter la source pendant l'étiage. D'importantes disparités de la zone saturée apparaissent avec notamment une karstification plus marquée vers l'aval. La région est caractérisée par un climat océanique (~ 860 mm/an).

(c) La source du Lez est située au Nord de Montpellier (Hérault), dans le sud de la France (lat. $43^{\circ} 40' 58,4749''$ N ; lon. $3^{\circ} 51' 41,3564''$ E ; alt. 52 m). La région est caractérisée par un climat méditerranéen tempéré et sec (~ 700 mm/an). Les ressources en eau de cette source sont exploitées depuis le XIX^e siècle pour l'approvisionnement de la ville de Montpellier. Elles sont exploitées de façon active depuis 1968 : Le pompage pendant la période de basses eaux a un débit supérieur au débit à l'étiage qui est compensé par l'apport des premières pluies de la saison automne-hiver. Le pompage maximum autorisé est actuellement de $1\,700$ L·s⁻¹. Le suivi du pompage montre que le débit varie de 900 – $1\,000$ L·s⁻¹ en hiver à $1\,200$ – $1\,600$ L·s⁻¹ en période estivale [5].

2.2 Données

Les séries temporelles de débits journaliers des trois sources présentées sur la figure 1 proviennent de la banque de données HYDRO (<http://www.hydro.eaufrance.fr/>). Chaque série a été rééchantillonnée à 3 heures par l'utilisation d'une spline cubique, permettant de stabiliser le calcul des dérivées mais pouvant conduire localement à exagérer certaines courbures dans l'espace des phases. Un filtre de type Savitzki-Golay [6] (fenêtre de $\pm 1,6$ jours) a été utilisé pour le calcul des dérivées.

La source du Doubs présente des oscillations très nombreuses qui résultent du grand nombre d'événements pluvieux annuels. Ces oscillations sont également très rapides, un événement pluvieux portant rapidement le débit à un haut niveau (entre $5\,000$ L·s⁻¹ et $10\,000$ L·s⁻¹), pour revenir rapidement à des valeurs minimales proches de $1\,000$ L·s⁻¹. Les maxima de débits rencontrés à chaque oscillation présentent de fortes irrégularités. Très ponctuellement, ceux-ci peuvent largement dépasser les $10\,000$ L·s⁻¹. Par moment, des comportements d'accumulation sont observés qui résultent vraisemblablement d'une succession rapide d'événements pluvieux qui remplissent le système karstique et que le réseau hydraulique ne permet pas d'évacuer suffisamment vite (voir hiver 2000–2001).

La source de la Touvre présente un comportement très différent de celui du Doubs puisque l'effet d'accumulation y est quasiment permanent. Les oscillations qui en résultent sont de ce fait beaucoup plus lentes, faisant ressortir un cycle annuel marqué. Malgré cette régularité relative, des oscillations très rapides sont également observées (fin 2000 mais aussi début 2007, donnant lieu à des valeurs maximales de débits très ponctuels proches de $30\,000$ L·s⁻¹ et $40\,000$ L·s⁻¹, respectivement). Ces oscillations rapides résultent vraisemblablement de périodes de mise en charge par saturation temporaire du réseau conduisant à une augmentation du débit sous l'effet de la pression. La présence d'oscillations lentes et rapides peuvent également résulter d'une importante hétérogénéité du karst.

La source du Lez présente un comportement différencié comparé aux deux précédents qui résulte, d'une part de la pluviométrie annuelle, plus faible mais concentrée sur la période automne-hiver ; et d'autre part au pompage des ressources en eau de l'aquifère supérieur au débit d'étiage pendant l'été dont une partie est relâchée pour maintenir un débit minimal de 160 L·s⁻¹. Lors de successions d'événements pluvieux, le débit observé devient très supérieur au niveau de pompage, le signal résultant de la dynamique du karst devient alors clairement prédominant. Deux types de comportements peuvent être notés à l'analyse de la série temporelle se caractérisant par des oscillations rapides (hivers 1989–1990, 1993–1994 et 1998–1999 par exemple) et par des événements d'accumulation (hivers 1995–1996, 1996–1997 et 1997–1998).

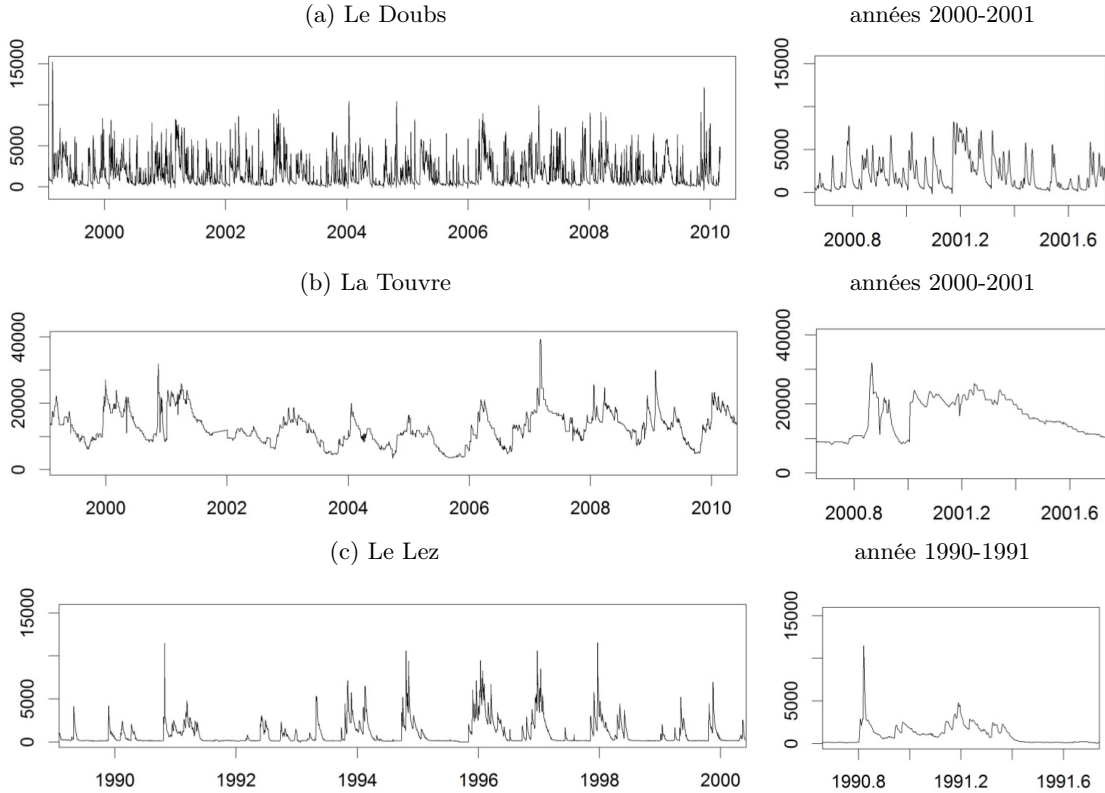


FIGURE 1. Séries temporelles de débits $Q(t)$ (en l/s) des trois sources karstiques.

3 Méthodologie

3.1 Modélisation globale

La modélisation par technique globale permet d'obtenir des modèles dynamiques, directement à partir de séries observationnelles et sans dépendre des conditions initiales du système étudié [7]. Dans sa formulation différentielle, et partant d'une observable unique, cette technique vise à obtenir des modèles multidimensionnels sous la forme d'un jeu d'équations aux dérivées ordinaires [8,9] tel que

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 + \epsilon_1 \\ \dot{X}_2 = X_3 + \epsilon_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_n = F(X_1, X_2, \dots, X_n) + \epsilon_n, \end{cases} \quad (1)$$

où X_1 est la variable modélisée et les X_i étant les i -ièmes dérivées successives de X_1 , n la dimension du modèle, F une fonction à déterminer, et les ϵ_i les résidus multiplicatifs non modélisés de chacune des n équations. Pour cette application, $X_1 = Q$ correspond au débit de la source, exprimé ici en litre par seconde. Au cours des dernières années, l'approche a commencé à être appliquée à des systèmes environnementaux réels très diversifiés : en écologie, aux cycles des couverts agricoles, aux cycles de surface enneigées, ou encore en épidémiologie [10–13]. On supposera dans cette étude (A) que les variables observées présentent un bruit additif tel que : $y^{\text{obs}} = y + \delta_i$, y correspondant à l'une des variables X_i du système d'équations (1); (B) que les perturbations ϵ_i se comportent comme un bruit blanc gaussien centré de variance σ_i^2 ; et (C) que le signal déterministe modélisé par le modèle (les X_i et la fonction F) est indépendant de ce bruit et de variance μ_i^2 .

3.2 Degré de déterminisme

Disposant d'un modèle prédictif et d'un jeu de données, il est possible d'estimer les niveaux de bruits additif et multiplicatif en étudiant la dérive de l'erreur $d_i(\tau)$ (relative à la variable X_i), dont le carré varie linéairement en fonction de l'horizon de prédiction τ , soit tel que $d_i^2(\tau) = \alpha(\sigma_i) \times \tau + \delta_i$ [14]. Une méthode d'estimation empirique s'appuyant sur ce résultat est proposée ici. Disposant d'un modèle global directement obtenu de mesures observationnelles, un jeu de données synthétique est généré pour différents niveaux de bruits multiplicatifs (en fixant $\delta_i = 0$). Les coefficients α_i sont alors estimés pour différentes valeurs de σ_i , permettant d'obtenir une relation linéaire $\alpha_i = \beta\sigma_i$ pour chaque variable X_i . Une fois cette relation reconstruite à partir des données synthétiques, l'approche est appliquée à la série observationnelle, permettant d'obtenir une estimation $\hat{\sigma}_i$ pour chaque variable X_i . On dispose alors de tous les éléments pour estimer le quotient γ_i de déterminisme expliqué par chaque variable X_i que l'on définit comme $\gamma_i = \mu_i^2 / (\mu_i^2 + \hat{\sigma}_i^2)$ ainsi que le degré de déterminisme expliqué : $\Gamma = \frac{1}{n} \sum_i^n \gamma_i$.

4 Analyses

4.1 Portraits de phase

L'espace des phases offre une représentation géométrique du comportement dynamique. Cet espace peut — en principe — être reconstruit à partir d'une unique variable [15]. En pratique, des problèmes d'observabilité peuvent entraver cette reconstruction [16] et rendre la technique de modélisation très difficile à appliquer. Pour observer cet espace multidimensionnel, on a généralement recours à des projections de cet espace que l'on nomme portrait de phase.

Les portraits de phases projetés suivant les axes (X_1, X_2) des dynamiques des sources du Doubs de la Touvre et du Lez sont présentées sur la figure 2 (en haut). Pour la source du Doubs, la plupart des trajectoires partent d'une même région centrée aux alentours de $1000 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$ et reviennent dans cette même région de l'espace en une oscillation unique (un seul cycle) avant de repartir pour un nouveau cycle. D'une oscillation à l'autre, l'amplitude et la forme des cycles peuvent beaucoup varier. Les trajectoires présentent toutefois une très bonne cohérence de proximité les unes aux autres.

Le portrait de phase de la Touvre apparaît beaucoup plus complexe avec d'une part de très nombreuses oscillations de petite amplitude qui ne présentent pas de centre de commun ; et d'autre part des oscillations de plus grande amplitude et beaucoup plus rapides, mais beaucoup moins nombreuses. C'est notamment le cas pour l'oscillation qui conduit au plus haut débit ($\sim 40000 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$) sur la fenêtre considérée, dont les vitesses de crue puis de décrue de débit (suivant l'axe vertical) sont aussi les plus fortes en amplitudes. Ces comportements résultent vraisemblablement de situations de remplissage-vidage par mise en charge temporaire de la zone d'écoulement sous un effet de saturation.

Le portrait de phase du Lez fait ressortir des périodes de hausse du débit partant souvent de valeurs de débits très faibles (autour de $1000 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$). Il montre aussi que les décrues sont généralement beaucoup plus lentes que les crues. La zone non saturée semble donc rester en grande partie non saturée lors de tels événements. Lors de crues plus fortes ($X_1 > 5000 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$), la zone non saturée pourrait se remplir jusqu'à saturation, mettant le réseau karstique en pression et conduisant à une augmentation rapide suivie d'une diminution tout aussi rapide du débit, mettant fin à l'épisode de mise en pression. Notons qu'une fois proche de cet état de saturation, tout nouvel apport d'eau, même modéré, devrait pouvoir contribuer à une remise en pression et donc à une reprise immédiate de crue. L'une des trois oscillations les plus fortes résulte d'une telle situation, avec une période de hausse du débit en deux étapes, la deuxième étape repartant d'un niveau de débit déjà très élevé d'environ $5000 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$.

4.2 Modèles

Plusieurs modèles de dimension $n = 3$ ont été obtenus pour la source du Doubs. Le plus concis d'entre eux (26 paramètres) est présenté Figure 2 (a) (en bas). Le portrait de phase de ce modèle fait ressortir certaines des propriétés précédemment notées dans le portrait original, en particulier le fait

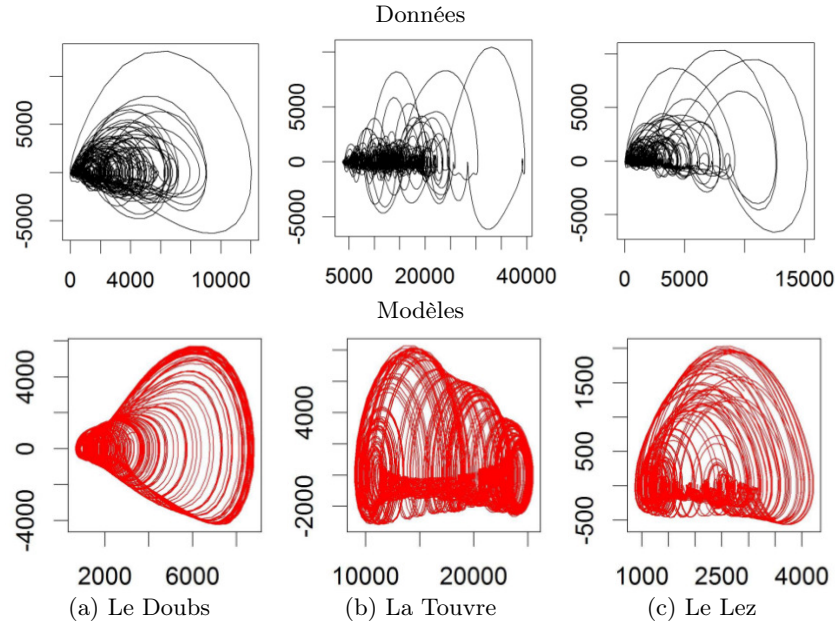


FIGURE 2. Portraits de phase pour les cycles de débits des trois sources, projection (X_1, X_2) , issues des données originales (en haut), et des modèles globaux (en bas).

que les oscillations partent toutes d'une même zone (centrée sur $2000 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$) et y reviennent après des oscillations uniques. Le modèle saturé à des valeurs de débits proches de $9000 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$ alors que, ponctuellement, des trajectoires d'amplitudes proches de $12000 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$ peuvent parfois se produire.

Un seul modèle a pu être obtenu pour la source de la Touvre (Fig. 2 (b)). Il s'agit d'un modèle de dimension $n = 4$. Le portrait de phase permet de distinguer des phases de hausses rapides par successions d'oscillations consécutives et des phases de décrues plus lentes. Le comportement présente également des comportements oscillatoires complexes lors des minima et des maxima, lesquels étaient également observés dans les données originales. Le modèle ne permet pas de couvrir toute la plage de débits observée dans les données. Les débits de basse saison (tels que $5000 < X_1 < 9000 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$) ne sont pas couverts par le modèle. Les très hauts débits ($26000 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1} < X_1$), dont les oscillations très rapides évoquent des événements de saturation, ne le sont pas non plus.

Plusieurs modèles ont pu être obtenus pour la source du Lez, présentant tous des comportements très similaires. Le plus concis d'entre eux est présenté sur la figure 2 (c). Ce modèle fait ressortir plusieurs des caractéristiques observées dans le portrait de phase original. Notamment, la présence de crues relativement rapides et de décrues lente apparaît nettement. Des redémarrages de crues à partir de hauts niveaux de débits sont également observés dans le portrait. Malheureusement, ce premier modèle ne permet pas de modéliser des comportements de crues d'amplitudes supérieures à $4000 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$, limitant donc son intérêt.

4.3 Validation

La méthode d'estimation du degré de déterminisme présentée en section 3.2 n'a pu être appliquée qu'au modèle de la source du Doubs, l'impossibilité de simuler les comportements de très grandes amplitudes compromettant son utilisation pour les deux autres modèles. Le degré de déterminisme Γ expliqué par le modèle de débit de la source du Doubs est estimé à 72 %, avec toutefois une forte disparité entre les variables $\gamma_{\text{Doubs}} = (94,86; 93,56; 33,55) \pm (0,05; 2,21; 5,04)$ (exprimés en pourcentage).

5 Conclusions

La technique de modélisation globale est appliquée dans cette étude aux séries temporelles de débits des sources karstiques du Doubs, de la Touvre et du Lez, dont les comportements dynamiques sont très différents. L'approche a permis d'obtenir des modèles autonomes pour chacune des trois sources. Les portraits de phase des trois modèles sont en relativement bonne cohérence avec les portraits originaux mais ne permettent pas encore à ce stade, de rendre compte des comportements de mise en charge des systèmes karstique par saturation des zones non saturées. Le degré de déterminisme expliqué [12] n'a pu être estimé que pour le modèle de la source du Doubs. Ce degré de déterminisme a été estimé à 72 % mais avec d'importantes disparités entre les différentes variables (de 33 à 95 %). La possibilité d'obtenir des modèles autonomes et la forte complexité des modèles obtenus, montre que la compréhension de la dynamique globale et de ses non linéarités sont, dans ce contexte, particulièrement importantes à prendre en compte. Une approche qui prendrait pleinement en compte le rôle des non linéarités dans la dynamique, dans sa relation au forçage climatique, permettrait probablement une amélioration significative des modèles.

Ce travail a été effectué dans le cadre des projets *Musc & SlowFast* et *MoMu* financés par le défi *InPhyNiTi* (Mission interdisciplinaire du CNRS) et par le programme *LEFE-INSU*.

Références

1. M. MUDARRA & B. ANDREO, Relative importance of the saturated and the unsaturated zones in the hydrogeological functioning of karst aquifers: The case of Alta Cadena, *J. Hydrol.*, **397**, 263–280 (2011).
2. P. FLEURY, V. PLAGNES & M. BAKALOWICZ, Modelling of the functioning of karst aquifers with a reservoir model: Application to Fontaine de Vaucluse (South of France), *J. Hydrol.*, **345**, 38–49 (2007).
3. D. LABAT, R. ABABOU & A. MANGIN, Rainfall–runoff relations for karstic springs. Part I: Convolution and spectral analyses, *J. Hydrol.*, **238**, 123–148 (2000).
4. F. BICHOT, G. KARNAY & J. LAVIE, *Les sources de la Touvre – Synthèse des connaissances*, Rapport BRGM/RP-52738-FR (2003).
5. H. JOURDE, N. DÖRFLIGER, C. BATIOU-GUILHE, C. BOUVIER, J.-F. DESPRATS, B. LADOUCHE, V. LEONARDI, P.-O. MALATERRE, J.-C. MARÉCHAL & V. PRIÉ, *L'hydrosystème du Lez — Synthèse des connaissances récentes et passées*, Rapport BRGM/RP-60041-FR (2011).
6. A. SAVITZKY & M. J. GOLAY, Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures, *Anal. Chem.*, **36**, 1627–1639 (1964).
7. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & U. S. FREITAS, Frequently asked questions about global modeling, *Chaos*, **19**, 023103 (2009).
8. G. GOUESBET & C. LETELLIER, Global vector field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 -approximation on nets, *Phys. Rev. E*, **49**, 4955–4972 (1994).
9. S. MANGIAROTTI, R. COUDRET, L. DRAPEAU & L. JARLAN, Polynomial search and global modeling: two algorithms for modeling chaos, *Phys. Rev. E*, **86**, 046205 (2012).
10. J. MAQUET, C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Global models from the Canadian lynx cycles as a direct evidence for chaos in real ecosystems, *J. Math. Biol.*, **55**, 21–39 (2007).
11. S. MANGIAROTTI, L. DRAPEAU & C. LETELLIER, Two chaotic global models for cereal crops cycles observed from satellite in Northern Morocco, *Chaos*, **24**, 023130 (2014).
12. S. MANGIAROTTI, *Modélisation globale et caractérisation topologique de dynamiques environnementales : de l'analyse des enveloppes fluides et du couvert de surface de la Terre à la caractérisation topodynamique du chaos*, Thèse d'Habilitation à diriger des recherches, Université de Toulouse 3 (2014).
13. M. HUC & S. MANGIAROTTI, Un modèle chaotique pour l'épidémie de maladie à virus Ebola d'Afrique de l'Ouest en 2014, *Comptes-Rendus de la 19^e Rencontre du Non Linéaire*, 49–54 (2016).
14. O. ORRELL, Filtering chaos: A technique to estimate dynamical and observational noise in nonlinear systems, *Int. J. Bifurcat. Chaos*, **15**(01), 99–107 (2005).
15. F. TAKENS, Detecting strange attractors in turbulence, *Lect. Notes Math.*, **898**, 366–381 (1981).
16. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & J. MAQUET, Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics, *Phys. Rev. E*, **71**, 066213 (2005).

Index des auteurs

Alima Roland, 1
Argentina Médéric, 19, 37

Bittner Stefan, 67
Bodo Bertrand, 1
Bouret Yann, 19

Cébron David, 121
Caps Hervé, 13
Carpy Sabrina, 7
Chanzy André, 115
Clamond Didier, 91
Corgne Samuel, 73

Decanini Dominique, 67
Dubois Charles, 13
Duchesne Alexis, 13

El Amri Ali, 19
Essimbi Bernard Zobo, 1

Fauve Stéphane, 85

Gondran Alexandre, 25, 31
Gondran Michel, 25, 31
Gross David, 37

Hirata Silvia, 97
Horne Ernesto, 43
Hubert-Moy Laurence, 73
Huc Mireille, 49

James François, 55
Jop Pierre, 61
Joubaud Sylvain, 43

Kerr Yann, 73

Lebental Mélanie, 67
Leblanc Marc, 127
Lefebvre Gautier, 61

Mangiarotti Sylvain, 49, 73, 115, 127
Manneville Paul, 79
Marquié Patrick, 1
Mathis Hélène, 55
Mathis Hélène, 7
Merceron Aymeric, 61
Merlin Olivier, 115
Metz Pascal, 43
Micard Diane, 43
Michel Guillaume, 85
Morfu Savério, 1
Moulin Marc, 43

Noblin Xavier, 19

Odier Philippe, 43
Ouarzazi Mohamed Najib, 97

Pétrélis François, 85
Pascal Aurélien, 67
Philippe Régis, 109

Rajchenbach Jean, 91
Requilé Yoann, 97
Rosalie Martin, 103
Roux Yann, 37
Ruiz Laurent, 73

Schaeffer Nathanaël, 121
Sekhar Muddu, 73
Serres Marion, 109
Sharma Amit Kumar, 73
Stefan Vivien, 115

Ulysse Christian, 67

Vidal Jérémie, 121
Vidal Valérie, 109

Zhang Yan, 127
Zyss Joseph, 67

Annexes :

Programme du mini-colloque

Programme de la 19^e rencontre

Programme mini-colloque RNL 2016

« Dualité onde-corpuscule à l'échelle macroscopique »

Université Paris Diderot, 15 mars 2016

Amphithéâtre Buffon, 15 rue Hélène Brion, Paris 13^e

Si la dualité onde-corpuscule est une des bases de l'interprétation de la mécanique quantique, elle peut aussi se manifester à l'échelle macroscopique. Durant ce mini-colloque seront présentées les propriétés observées dans des systèmes macroscopiques, ainsi que quelques-unes de leurs pendants aux échelles microscopiques. Un des objectifs est d'identifier les analogies et les différences entre ces deux types de systèmes.

9h15 : Yves Couder (MSC, Université Paris Diderot)

[Titre à venir](#)

9h35 : Emmanuel Fort (Institut Langevin, ESPCI)

[Titre à venir](#)

10h15 : Pause café

10h45 : Frédéric Chevy (LKB, Ecole Normale Supérieure)

[Hydrodynamique à l'échelle quantique](#)

11h25 : Paul Milewski (DMS, University of Bath, UK)

[Predictive fluid dynamics models of wave-droplet interactions](#)

12h05 : Pause déjeuner

14h00 : Benjamin Huard (LPA, Ecole Normale Supérieure)

[Introduction on non-classical effects in physics and new axioms for quantum theory](#)

14h40 : Matthieu Labousse (MPQ, Université Paris Diderot)

[Une double quantification non-quantique en potentiel harmonique ?](#)

15h10 : Tristan Gilet (Université de Liège, Belgique)

[Quantum-like statistics of deterministic wave-particle interactions in a circular cavity](#)

15h50 : Rémy Dubertrand (Université de Liège, Belgique)

[Gouttes marcheuses en présence d'obstacles](#)

16h10 : Pause Café

16h40 : Fabrice Lemoult (Institut Langevin, ESPCI)

[Titre à venir](#)

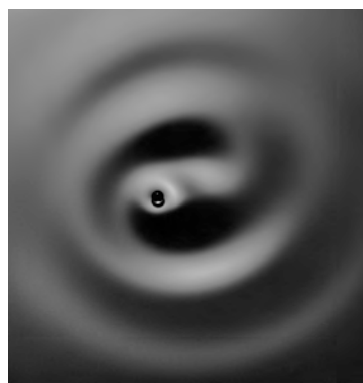
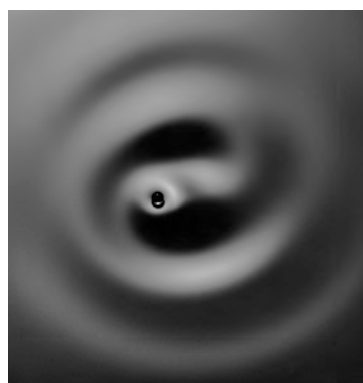
17h20 : Boris Filoux (Université de Liège, Belgique)

[Walking droplets in confined geometry](#)

17h40 : Christiano Ciuti (MPQ, Université Paris Diderot)

[Titre à venir](#)

18h20 : Clôture



19^e Rencontre du Non-Linéaire

Université Paris Diderot, 16 – 17 mars 2016

Bienvenue à la 19^e Rencontre du Non-Linéaire 2016 qui aura lieu, pour la quatrième année consécutive, à l'Université Paris Diderot, amphithéâtre Buffon, 15 rue Hélène Brion, Paris 13^e.

Nous aurons 107 contributions se répartissant en 4 conférences invitées, 12 communications longues et 91 communications courtes.

Mercredi 16 mars 2016

09h15 - 10h00 : **Conférence invitée 1 (40 + 5 minutes)**
10h00 - 10h30 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 12 communications courtes
10h30 - 11h15 : **Pause café Posters (45 minutes)**
11h15 - 11h45 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 12 communications courtes
11h45 - 12h30 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues

12h30 - 14h00 : Pause déjeuner (ou Posters)

14h00 - 14h45 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues
14h45 - 15h50 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 25 communications courtes
15h50 - 16h50 : **Pause café Posters (60 minutes)**
16h50 - 17h35 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues
17h35 - 18h20 : **Conférence invitée 2 (40 + 5 minutes)**

Jeudi 17 mars 2016

09h15 - 10h00 : **Conférence invitée 3 (40 + 5 minutes)**
10h00 - 10h45 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 18 communications courtes
10h45 - 11h45 : **Pause café Posters (60 minutes)**
11h45 - 12h30 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues

12h30 - 14h00 : Pause déjeuner (ou Posters)

14h00 - 14h45 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues
14h45 - 15h45 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 24 communications courtes
15h45 - 16h50 : **Pause café Posters (65 minutes)**
16h50 - 17h35 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues
17h35 - 18h20 : **Conférence invitée 4 (40 + 5 minutes)**

Nous remercions l'Université Paris Diderot de mettre à notre disposition les locaux de la Rencontre. Nous remercions également le CNRS, l'Institut des Systèmes Complexes – Paris Ile-de-France, le laboratoire Matière et Systèmes Complexes, le laboratoire PMMH et le GDR Phenix, de subvenir aux frais de la Rencontre et des éditions des actes, ce qui la rend entièrement gratuite pour tous les participants. Cette année, nous sommes 150 inscrits au 26 février 2016.

Le Comité d'Organisation des RNL 2016 :

E. Falcon (CNRS / Univ. Paris Diderot), M. Lefranc (Univ. Lille 1), F. Pétrélis (CNRS / ENS Paris) & C.T. Pham (Univ. Paris Sud)

Mercredi 16 mars 2016

09h15 - 10h00 : Conférence invitée par David LANNES (40 + 5 minutes)

Vagues à l'approche du littoral : raidissement, déferlement et génération de vorticité

10h00 - 10h30 : Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) - 12 communications courtes

Front d'écoulement granulaire : expériences et prédictions

G. Saingier, S. Deboeuf, P.-Y. Lagr e, présenté par S. Deboeuf

Mise en suspension de particules immergées par injection d'air

C. Picard, V. Vidal, S. Joubaud, présenté par C. Picard

Pénétration d'une tige flexible dans un milieu granulaire dense

N. Algarra, E. Kolb, D. Vandembroucq, A. Lazarus, présenté par N. Algarra

Erosion d'un lit granulaire par une plaque oscillante : comment les poissons plats s'enfouissent dans le sable?

C. Morize, A. Sauret, G. Quibeuf, P. Gondret, présenté par C. Morize

Ondes de choc et implosion d'un faisceau optique Gaussien se propageant dans un cristal liquide à non-linéarité focal

H. Louis, V. Odent, M. Conforti, E. Louvergneaux, présenté par H. Louis

Ponts de bifurcation dans un laser en anneau soumis à un feedback optique

G. Friart, M. Khoder, G. Van der Sande, G. Verschaffelt et T. Erneux, présenté par G. Friart

Ev nements extrêmes spatio-temporels dans un laser spatialement étendu

C. Rimoldi, S. Barland, F. Prati et G. Tissoni, présenté par C. Rimoldi

Ev nements extrêmes soutenus par chaos spatio-temporel dans un laser à micro-cavity

S. Coulibaly, F. Selmi, Z. Loghmari, M. Clerc, S. Barbay, présenté par S. Coulibaly

Faraday wave lattice as an elastic metamaterial

L. Domino, M. Tarpin, S. Patinet, A. Eddi, présenté par L. Domino

Transport de particules par ondes internes

S. Joubaud E. Horne D. Micard P. Odier, présenté par S. Joubaud

Propagation d'une onde de cavitation

A. El Amri, M. Argentina, Y. Bouret, X. Noblin, présenté par A. El Amri

Relation de dispersion des vagues paramétriquement forcées

J. Rajchenbach, D. Clamond, présenté par J. Rajchenbach

10h30 - 11h15 : Pause café Posters (45 minutes)

11h15 - 11h45 : Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) - 12 communications courtes

L'hierarchie des modèles de Maxwell-Vlasov non-linéaires pour la vérification des codes gyrocin tiques

N. Tronko, A. Bottino, T. Goerler, E. Sonnendruecker, présenté par N. Tronko

Réduction fluide des équations cinétiques en physique des plasmas : approche hamiltonienne

M. Perin, C. Chandre, P. J. Morrison, E. Tassi, présenté par M. Perin

Logarithmic discretization and systematic derivation of shell models for turbulence

 . D. G rcan, présenté par  . D. G rcan

Turbulence in 2D Spinodal Decompositions

P. H. Diamond and X. Fan, présenté par P. H. Diamond

On the dynamics of laminar-turbulent patterns in plane Couette flow

P. Manneville, présenté par P. Manneville

Global stability analysis of microcombustion

M. A. Bucci, J.-C. Robinet, S. Chibbaro, présenté par M. A. Bucci

Dissipation d'énergie globale et locale dans un écoulement de von K rm n turbulent

D. Kuzzay, D. Faranda, B. Dubrulle, présenté par D. Kuzzay

[Turbulence en rotation dans une cavité stator/rotor à haut nombre de Reynolds](#)

C. Lachize, G. Verhille, P. Le Gal, présenté par P. Le Gal

[Un gabarit pour tous les attracteurs d'un diagramme de bifurcation du système de Rössler](#)

M. Rosalie, présenté par M. Rosalie

[Effets du couplage non linéaire dans un système de sine-Gordon modifié](#)

R. Alima, S. Morfu, B. Bodo, P. Marquie, B. Essimbi, présenté par R. Alima

[Toward new general-purpose processor with nonlinear transient computing](#)

B. Penkovsky, L. Larger, présenté par B. Penkovsky

[L'efficacité évaporative du sol modélisée par approche globale](#)

V. Stefan, S. Mangiarotti, O. Merlin, A. Chanzy, présenté par V. Stefan

11h45 - 12h30 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

[Une expérience modèle de l'oscillation quasi-biennale](#)

B. Semin, G. Facchini, F. Pétrélis, S. Fauve, présenté par B. Semin

[Instabilité interfaciale sous érosion granulaire](#)

P. Jop, G. Lefebvre, A. Merceron, présenté par P. Jop

12h30 - 14h00 : Pause déjeuner (ou Posters)

14h00 - 14h45 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

[Génération et renversement d'un écoulement moyen dans un verre de bière en translation circulaire](#)

F. Moisy, W. Herreman, présenté par F. Moisy

[Subcritical instabilities destabilized by kinetic nonlinearities in hot plasmas](#)

M. Lesur, présenté par M. Lesur

14h45 - 15h50 : Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) – 25 communications courtes

[Effet du milieu poreux sur la désorganisation d'un écoulement de Taylor dans un canal millifluidique](#)

M. Serres, R. Philippe, V. Vidal, présenté par M. Serres

[Boxing Leidenfrost drops](#)

L. Maquet, S. Dorbolo, présenté par L. Maquet

[Une interprétation dynamique de l'hystérésis de l'angle de contact](#)

H. Perrin, R. Lhermerout, K. Davitt, E. Rolley, B. Andreotti, présenté par H. Perrin

[Chaos modeling applied to crops classification \(Berambadi basin, South of India\)](#)

S. Mangiarotti, A. K. Sharma, M. Sekhar, S. Corgne, L. Ruiz, L. Hubert-Moy, Y. Kerr, présenté par S. Mangiarotti

[Un modèle chaotique pour l'épidémie de maladie à Virus Ebola d'Afrique de l'Ouest en 2014](#)

M. Huc, S. Mangiarotti, présenté par M. Huc

[Détection de dynamiques de basse dimension par analyse entropie-complexité](#)

A. Chrisment, M.-C. Firpo, présenté par M.-C. Firpo

[Instabilité viscoélastique dans le régime Képlérien comme analogue de l'instabilité magnéto-rotationnelle](#)

I. Mutabazi, Y. Bai, O. Crumeyrolle, présenté par I. Mutabazi

[Instabilités thermiques et hydrodynamiques des écoulements parallèles](#)

Y. Requilé, M. N. Ouarzazi, S. Hirata, présenté par Y. Requilé

[Modal stability analysis of mechanically-driven flows in rigid rotating ellipsoids](#)

J. Vidal, D. Cébron, N. Schaeffer, présenté par J. Vidal

[Approximation d'interface liquide-solide dans l'hydrosphère de Ganymède](#)

S. Carpy, H. Mathis, présenté par S. Carpy

[A mathematical model for nonlinear viscoelastic materials](#)

R. De Pascalis, I. D. Abrahams, W. J. Parnell, présenté par R. De Pascalis

[Observation du couplage entre ondes de surface et d'interface en turbulence d'ondes gravito-capillaires](#)

B. Issenmann, E. Falcon, présenté par B. Issenmann

[Observation de la reformation d'une onde solitaire hydrodynamique après destruction par une marche immergée](#)

F. Haudin, M. Berhanu et E. Falcon, présenté par F. Haudin

[Étude statistique de l'interaction entre un marcheur et une barrière de potentiel](#)

M. Hubert, S. Perrard, M. Labousse, présenté par M. Hubert

[Instabilité d'un anneau de vorticité au voisinage d'une surface libre](#)

M. Labousse, B. El Hadj Maïga, I. Cantat, A. Saint-Jalmes et M. Roché, présenté par M. Roché

[Relations de fluctuation en Turbulence](#)

S. Chibbaro, F. Zonta, présenté par S. Chibbaro

[Structures non linéaires dans un système périodique de particules, effets thermiques et interaction entre structures](#)

T. Dessup, C. Coste, M. Saint Jean, présenté par T. Dessup

[Empilements compacts \(jammed\) de sphères dures et équilibre de Nash : indépendantes mais solidaires](#)

N. Rivier, présenté par N. Rivier

[Influence de vibrations mécaniques sur la friction granulaire](#)

V. Vidal, H. Lastakowski, J.-C. Géminard, présenté par V. Vidal

[Experimental measurements of granular friction](#)

C. Oliver, G. Varas, V. Vidal, J.-C. Géminard, présenté par C. Oliver

[Réorganisation d'un milieu granulaire autour d'une transformation localisée](#)

A. Merceron, A. Sauret, P. Jop, présenté par A. Merceron

[Contrôle du temps de relaxation d'un levier AFM](#)

A. Le Cunuder, I. A. Martinez, A. Petrosyan, S. Ciliberto, D. Guéry-Odelin, E. Trizac, présenté par A. Le Cunuder

[Collision d'une sphère sur une surface texturée dans un fluide](#)

T. Chastel, A. Mongruel, P. Gondret, présenté par T. Chastel

[Génération d'harmonique et conjugaison de phase d'une onde acoustique avec un plan de bulles](#)

O. Lombard, C. Barrière, V. Leroy, présenté par O. Lombard

[Acoustic time reversal in granular media](#)

M. Harazi, Y. Yang, M. Fink, A. Tourin, X. Jia, présenté par M. Harazi

15h50 - 16h50 : Pause café Posters (60 minutes)

16h50 - 17h35 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

[La danse des Funam-Bulles](#)

A. Duchesne, C. Dubois, H. Caps, présenté par A. Duchesne

[Chaos quantique et micro-lasers](#)

M. Lebental, J. Zyss, E. Bogomolny, C. Ulysse, D. Decanini, S. Bittner, présenté par M. Lebental

17h35 - 18h20 : Conférence invitée par Elise LORENCEAU (40 + 5 minutes)

Dynamique d'imbibition d'une mousse aqueuse spongieuse par de l'huile et de l'eau

Jeudi 17 mars 2016

09h15 - 10h00 : Conférence invitée par Paul JOHNSON (40 + 5 minutes)
Nonlinear elasticity and dynamic triggering of earthquake slip

10h00 - 10h45 : Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) – 18 communications courtes

[Instabilité de stick-slip lors du pelage d'un ruban adhésif](#)

V. De Zotti, L. Vanel, P.-P. Cortet, S. Santucci, présenté par V. De Zotti

[Intermittence, synchronisation et ondes de déformation plastique lors de l'effet Portevin-Le Chatelier](#)

M. Lebyodkin, T. Lebedkina, présenté par M. Lebyodkin

[Enroulement élasto-capillaire pour la création de fibres ultra-extensibles](#)

P. Grandgeorge, A. Antkowiak, S. Neukirch, présenté par P. Grandgeorge

[Un nouveau mécanisme d'érosion d'une interface stratifiée](#)

J. Herault, G. Facchini, M. Le Bars, présenté par J. Herault

[New experiment in transition to turbulence in plane couette-poiseuille flow](#)

L. Klotz, I. Frontczak, G. Lemoult, M. Chantry, J. E. Wesfreid, présenté par L. Klotz

[Croissance de poches turbulentes dans l'écoulement de Couette plan](#)

M. Couliou, R. Monchaux, présenté par M. Couliou

[Critical Transitions in Turbulence: "2D, or not 2D..."](#)

Santiago Benavides Et Alexandros Alexakis, présenté par Santiago Benavides

[Numerical investigation into the choice of gait parameters in 2D anguilliform swimmers](#)

D. Gross, M. Argentina, Y. Roux, présenté par D. Gross

[Phase locking and pattern formation in tandem fish swimming](#)

I. Ashraf, R. Godoy-Diana, J. Halloy, B. Thiria, présenté par I. Ashraf

[Coques nageuses](#)

A. Djellouli, C. Quilliet, G. Coupier, P. Marmottant, présenté par C. Quilliet

[Oscillations prédateur proie dans les plasmas magnétisés](#)

P. Morel, S. Kobayashi, P. Donnel, C. Honoré, V. Pisarev, P. Hennequin Ö. Gürcan, présenté par P. Morel

[Analyse expérimentale de l'évolution non-linéaire de la dérive collisionnelle électrique des ions dans une colonne de plasma magnétisée](#)

T. Pierre, présenté par T. Pierre

[Instabilité magnéto-rotationnelle et origine des vents de disques astrophysiques](#)

H. Meheut, S. Fromang, présenté par H. Meheut

[The theory of chaos applied to study and model the discharge of three karstic springs](#)

Y. Zhang, S. Mangiarotti, M. Leblanc, présenté par Y. Zhang

[Détection d'arythmie cardiaque à partir de la reconstruction dans l'espace de phase](#)

H. A. Mahamat, S. Jacquir, S. Binczak, présenté par H. A. Mahamat

[Comment l'horloge biologique du foie se synchronise-t-elle à l'alternance des repas et des jeûnes?](#)

A. Woller, H. Duez, B. Staels, M. Lefranc, présenté par M. Lefranc

[Internal gravity wave, from absolute and convective instability to beam stability and transient growth](#)

G. Lerisson J.-M. Chomaz, S. Ortiz, présenté par G. Lerisson

[Solitons capillaires à la surface d'un liquide en lévitation](#)

C. Duchêne, S. Perrard, L. Deike, C.-T. Pham, présenté par C. Duchêne

10h45 - 11h45 : Pause café Posters (60 minutes)

11h45 - 12h30 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

Distorsion d'un tourbillon par des vagues : le régime non-linéaire de l'interaction ondes-vorticité

T. Humbert, B. Gallet, S. Aumaître, présenté par T. Humbert

Observation de Superregular Breathers en optique et en hydrodynamique

B. Kibler, A. Chabchoub, A. Gelash, N. Akhmediev, V. Zakharov, présenté par B. Kibler

12h30 - 14h00 : Pause déjeuner (ou Posters)

14h00 - 14h45 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

Séismes en laboratoire : la longueur est déterminée par la mécanique de la fracture

E. Bayart, I. Svetlizky, J. Fineberg, présenté par E. Bayart

Étude de la réflexion d'une onde de surface grâce à l'acoustique

G. Michel, F. Pétrélis, S. Fauve, présenté par G. Michel

14h45 - 15h45 : Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) – 24 communications courtes

Régime chaotique verrouillé en fréquence d'un oscillateur opto-hyper

A. Thorette, M. Romanelli, M. Brunel, M. Vallet, présenté par A. Thorette

Identification en turbulence intégrable de structures cohérentes de type onde scélérate par une méthode de diffusion inverse

S. Randoux, P. Suret, G. El, présenté par S. Randoux

Expériences de propagation d'ondes partiellement cohérentes : comparaison entre optique et hydrodynamique

R. El Koussaifi, M. Onorato, S. Randoux, A. Tikan, P. Suret, présenté par R. El Koussaifi

Coherent structures generated from random initial conditions in the one-dimensional Nonlinear Schrödinger Equation

A. Tikan, S. Bielawski, R. El Koussaifi, C. Evain, M. Le Parquier, S. Randoux, C. Szwaj, P. Suret, présenté par A. Tikan

Comparaison des approches en EEM et LES/DNS pour une flamme mince plissée bidimensionnelle plane-en-moyenne

Y. D'Angelo, L. Boulet, présenté par Y. D'Angelo

Turbulence-induced self-focusing and filamentation

D. Eeltink, N. Berti, N. Marchiando, S. Hermelin, M. Brunetti, J.-P. Wolf, J. Kasparian, présenté par D. Eeltink

Kraichnan-Kazansteve dynamos in 2.5D flows

K. Seshasayanan, A. Alexakis, présenté par K. Seshasayanan

Un outil mathématique pour la physique: l'analyse non linéaire Minplus et l'intégrale de chemin Minplus

M. Gondran, A. Gondran, présenté par M. Gondran

Un modèle heuristique de particule étendue compatible avec la mécanique quantique

A. Gondran, M. Gondran, présenté par A. Gondran

Tumbling in an extensional flow

E. Plan, D. Vincenzi, présenté par E. Plan

Déformation de goutte posée excitée par des ondes acoustiques de surface

N. Chastrette, L. Royon, M. Baudoin, P. Brunet, R. Wunenburger, présenté par N. Chastrette

Streaming de micro-bulles sous excitation acoustique : comment mélanger avec des bulles ?

T. Combriat, P. Thibault, P. Marmottant, présenté par T. Combriat

Écoulement et stabilité d'un rideau liquide viscoélastique

A. Gaillard, L. Limat, L. Lebon, J. Beaumont, H. Lhuissier, présenté par A. Gaillard

Etude magnétohydrodynamique des écoulements soumis à un forçage électromagnétique

M. Pereira, C. Gissinger, S. Fauve, présenté par M. Pereira

[Une dynamo équatoriale en écoulement de Taylor-Couette sphérique](#)

F. Marcotte, C. Gissinger, présenté par F. Marcotte

[Instabilités in electrically conducting fluids driven by rotating magnetic fields](#)

K. S. Reddy, C. Gissinger, S Fauve, présenté par K. S. Reddy

[Instabilité d'une suspension de particules non browniennes oscillant horizontalement](#)

Y. L. Roht, J.-P. Hulin, G. Gauthier, D. Salin, R. Chertcoff, H. Auradou, I. Ippolito, présenté par Y. L. Roht

[Déstabilisation et cratérisation d'un lit granulaire immergé par force de bouée](#)

E. Herbert, C. Morize, A. Louis-Napoleon, A. Sauret, C. Goupil, Y. D'Angelo, présenté par E. Herbert

[Incorporation de fluide dans un matériau granulaire sec en écoulement](#)

G. Saingier, A. Sauret, P. Jop, présenté par G. Saingier

[Instabilités grande échelle d'écoulements hélicitaires](#)

A. Cameron, A. Alexakis, M.-É. Brachet, présenté par A. Cameron

[Instabilités secondaires dans la convection de Rayleigh Bénard pour un fluide non newtonien](#)

C. Nouar, T. Varé, présenté par T. Varé

[The influence of fluid viscoelasticity on steady streaming generated by an oscillating cylinder](#)

S.-A. Bahrani, M. Costalonga, L. Royon, P. Brunet, présenté par S.-A. Bahrani

[Contrôle de la force musculaire par une commande non-linéaire](#)

A. Maillard, T. Bakir, S. Binczak, présenté par A. Maillard

[Propagation non linéaire d'une bulle d'embolie dans le réseau hydraulique des feuilles](#)

D. Bienaimé, P. Marmottant, présenté par D. Bienaimé

15h45 - 16h50 : Pause café Posters (65 minutes)

16h50 - 17h35 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

[Acoustique et vibration des mousses liquides](#)

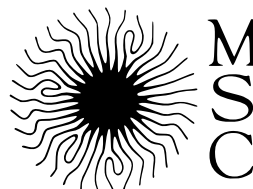
F. Elias, J. Pierre, C. Derec, R.-M. Guillermic, S. A. Kosgodagan, A. Saint-Jalmes, W. Drenckhan, C. Gay, B. Dollet, V. Leroy, présenté par F. Elias

[Un modèle mathématique d'interaction liquide-vapeur](#)

F. James, H. Mathis, présenté par F. James

17h35 - 18h20 : Conférence invitée par Yoël FORTERRE (40 + 5 minutes)

**Signalisation hydraulique et gravitropisme chez les plantes :
de la poroélasticité aux suspensions actives**



GDR CNRS PHENIX

19^e Rencontre du Non-Linéaire
Université Paris Diderot
Paris 2016

ISBN 978-2-9538596-5-2
EAN 9782953859652

Non-Linéaire Publications (NL Pub.)
Site universitaire du Madrillet — BP 12
78801 St-Étienne du Rouvray Cedex



19^e Rencontre du Non Linéaire
Université Paris Diderot
Paris 2016

ISBN 978-2-9538596-5-2
EAN 9782953859652

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/>