Simulations à haute résolution de champs aléatoires et implications sur la modélisation stochastique de la turbulence

R. M. Pereira[1,2] & L. Chevillard[1]

[1] Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon, CNRS/Université de Lyon, 46 allée d'Italie F-69007 Lyon, France
[2] CAPES Foundation, Ministry of Education of Brazil, Brasília – DF, 70040-020
rodrigo.pereira@ens-lyon.fr

Le développement de champs de vitesse aléatoires pour modéliser la turbulence a été un sujet de recherche très actif récemment, soit pour l'importance de ses applications pratiques, soit pour l'intérêt théorique de créer des objets mathématiques capables de reproduire les propriétés typiques de la turbulence. Dans ce cadre, Robert et Vargas [1] ont proposé une famille de champs aléatoires homogènes et isotropes basée sur le chaos multiplicatif, un processus construit à partir de l'exponentielle d'un processus Gaussien. Ces champs manifestent explicitement la loi des 4/5 de Kolmogorov et l'intermittence mais ne sont pas incompressibles. L'incompressibilité peut être forcée par une combinaison des composantes analogue à la loi de Biot-Savart, néanmoins, dans ce cas les incréments de vitesse restent symétriques et donc la loi des 4/5 est détruite. Cette question n'a été résolue qu'après une modification structurelle : la généralisation du chaos multiplicatif au cas matriciel, inspiré par la dynamique de l'étirement de la vorticité [2]. L'idée est de prendre l'exponentielle du champ matriciel homogène et isotrope

$$X^\epsilon(\mathbf{y}) = \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{z}|\leq L} \left\{ \frac{(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \otimes [(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \wedge d\mathbf{W}(\mathbf{z})]}{|\mathbf{y}-\mathbf{z}|_\epsilon^{7/2}} + \frac{[(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \wedge d\mathbf{W}(\mathbf{z})] \otimes (\mathbf{y}-\mathbf{z})}{|\mathbf{y}-\mathbf{z}|_\epsilon^{7/2}} \right\}, \quad (1)$$

dont les composantes sont corrélées logarithmiquement sur l'échelle intégrale L, pour créer le champ vectoriel suivant

$$\mathbf{u}^\epsilon(\mathbf{x}) = \int \varphi_L(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|_\epsilon^{13/6}} \wedge \mathrm{e}^{\gamma X^\epsilon(\mathbf{y})} d\mathbf{W}(\mathbf{y}). \quad (2)$$

Ici, $\otimes$ représente le produit tensoriel $(\mathbf{x}\otimes\mathbf{y})_{ij} \equiv x_i y_j$. $d\mathbf{W}$ est un bruit blanc vectoriel tridimensionnel et le même vecteur est utilisé dans (1) et (2), ce qui est décisif pour la reproduction de résultats réalistes de la turbulence. φ_L est une coupure à grande échelle et ϵ une régularisation de la fonction $1/|x|$ à petite échelle (et donc interprété comme l'échelle dissipative de Kolmogorov). Le paramètre d'intermittence γ est crucial : le champ est Gaussien s'il vaut zéro et devient intermittent quand il augmente.

Des simulations numériques montrent que (2) possède une fonction de structure d'ordre 3 effectivement non nulle et, en plus, d'autres propriétés typiques de la turbulence comme les bons alignements de vorticité et l'asymétrie du plan RQ. Pourtant, la complexité introduite par le chaos multiplicatif matriciel empêche l'obtention de résultats analytiques. On ne peut pas conclure, par exemple, s'il y a des petites corrections dépendantes de γ à la loi des 4/5. Ce travail se propose d'étudier cette question par des simulations numériques à hautes résolutions, mises-en-œuvre grâce aux outils de parallélisation. Nous mettons en évidence ces corrections en comparant les fonctions de structure d'ordre 3 non-signées avec le cas Gaussien et nous étudions numériquement leur comportements par rapport à γ, ce qui nous permettra de modifier l'exposant du noyau de (2) pour assurer la loi des 4/5. Nous étudions aussi les effets de γ sur d'autres propriétés tel que les alignements de vorticité.

Références

1. R. Robert et V. Vargas, Hydrodynamic turbulence and intermittent random fields, *Commun. Math. Phys.*, **284**,649–673 (2008).
2. L. Chevillard, R. Robert et V. Vargas, A stochastic representation of the local structure of turbulence, *EPL*, **89**,54002 (2010).