Statistiques de formes de triangles advectés par un écoulement turbulent

R. Guichardaz & A. Pumir

Laboratoire de Physique, École Normale Supérieure de Lyon, CNRS, Université de Lyon, F-69007, Lyon, France
robin.guichardaz@ens-lyon.fr

Les travaux de Taylor ou Kolmogorov ont posé les bases de la description de l'évolution de traceurs [1], et de la séparation de paires [2] dans un écoulement turbulent. La description d'objets plus compliqués, surfaces ou volumes finis, est importante pour la compréhension de processus tels que le mélange ou la combustion turbulente [3]. Le sujet de cette étude concerne l'évolution de triangles dans un écoulement à deux dimensions. L'objectif est de caractériser la forme de ce triangle, une fois "factorisés" les effets de rotation, de dilatation et de position dans l'espace.

La dynamique induite par l'écoulement est modélisée par l'action d'une matrice stochastique de cisaillement $\mathbf{A}$ (symétrique et de trace nulle) à l'échelle des trois sommets du triangle, repérés par les vecteurs $\boldsymbol{x}_i$:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = \mathbf{A}\boldsymbol{x}_i \, . \tag{1}$$

La forme d'un triangle peut être décrite par deux paramètres : son rayon de gyration R_{g} et le rapport entre son aire et R_{g}^2, qu'on note z. La dynamique de ce paramètre z est notamment caractérisée par l'existence d'un coefficient de Lyapunov $\lambda = \langle \dot{z}/z \rangle$ négatif, ce qui implique qu'en présence du seul terme de cisaillement, tous les triangles tendent à devenir plats ($z \to 0$). En pratique, cet effet est contrebalancé par une diffusion homogène dans l'espace des trois sommets du triangle.

Dans le cas où les coefficients stochastiques de la matrice de cisaillement présentent un temps de corrélation nul, les expressions exactes de la densité de probabilité $P(z)$ ainsi que du coefficient de Lyapunov ont été trouvées [4]. Dans le cas d'une corrélation temporelle finie et pour des triangles à faibles z, l'obtention d'une équation d'évolution simple pour $y = \ln z$ nous a permis d'en déduire le développement perturbatif du coefficient de Lyapunov.

La description de la distribution de probabilité $p(y)$ donne lieu à une équation de Fokker-Planck. Nous montrons que l'analyse des solutions de cette équation ne se réduit pas à la simple détermination des coefficients de diffusion et de dérive, mais fait apparaître une structure plus subtile, commune à d'autres problèmes stochastiques [5].

Références

1. G. I. Taylor, *Diffusion by Continuous Movements*, Proceedings of the London Mathematical Society, s2-20.1 (1922), pp. 196-212
2. L. F. Richardson, *Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph*, Proceedings of the Royal Society of London (1926) : 709-737.
3. B. I. Shraiman and E. D. Siggia, *Scalar turbulence*, Nature, 405(6787) :639-646, 06 2000
4. A. Pumir and M. Wilkinson, *A model for the shapes of advected triangles*, Journal of Statistical Physics, 152(5), 934-953, 2013
5. M. Wilkinson, R. Guichardaz, M. Pradas and A. Pumir, 2015 (in preparation)