

Éric FALCON
Marc LEFRANC
François PÉTRÉLIS
Chi-Tuong PHAM

.....

Comptes-rendus de la 18^e

Rencontre du Non Linéaire

Paris 2015

.....

É. Falcon, M. Lefranc
F. Pétrélis, C.-T. Pham
Éditeurs

**Comptes-Rendus de la 18^e
Rencontre du Non-Linéaire
Paris 2015**

Université Paris Diderot
Non-Linéaire Publications

18^e RENCONTRE DU NON-LINÉAIRE
 Université Paris Diderot, PARIS
 17–19 Mars 2015

Nous remercions vivement l'Institut des Systèmes Complexes-Paris Île-de-France (ISC-PIF), l'Université Paris Diderot, le laboratoire Matière et Systèmes Complexes, le Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), pour leur soutien matériel et financier.

Le comité scientifique est composé de :

Médéric ARGENTINA INLN — Nice
 José BICO PMMH — ESPCI
 Laurent CHEVILLARD Lab. de Physique — ENSL
 Éric FALCON MSC — Paris Diderot
 Özgür GÜRCAN LPP — École Polytechnique
 Jérôme HOEPFFNER IJLRdA — UPMC
 Kirone MALLICK IPhT — CEA Saclay
 François PÉTRÉLIS LPS — ENS
 Chi-Tuong PHAM LIMSI — Paris-Sud
 Stéphane RANDOUX PhLAM — Lille

Les Rencontres annuelles du Non-Linéaire sont organisées par :

Éric FALCON MSC — Paris Diderot
 Marc LEFRANC PhLAM — Lille
 François PÉTRÉLIS LPS — ENS
 Chi-Tuong PHAM LIMSI — Paris-Sud

Le colloque *Morphogenesis following the footsteps of Martine Ben Amar* est organisé par :

Arezki BOUDAUD RDP — ENSL
 Mokhtar ADDA-BEDIA LPS — ENS

Ces Comptes-Rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

Non-Linéaire Publications, Avenue de l'université, BP 12
 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Toutes les informations concernant les Rencontres sont publiées sur le serveur :

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/>

Renseignements :

rnl@univ-lille1.fr

Table des matières

Structures localisées dans des VCSELs : expérience et contrôle par retour retardé <i>Étienne Averlant, Mustapha Tlidi, Krassimir Panayotov</i>	1
Instabilité viscoélastique : analogie avec l'instabilité magnéto-rotationnelle <i>Yang Bai, Olivier Crumeyrolle, Innocent Mutabazi</i>	7
Reservoir Computing ultra-rapide basé sur une dynamique non linéaire électro-optique en phase <i>A. Baylón-Fuentes, R. Martinenghi, I. Zaldívar-Huerta, B. A. Márquez, V. S. Udaltsov, M. Jacquot, Y. K. Chembo, L. Larger</i>	13
Étude expérimentale des interactions à trois ondes des vagues capillaires <i>Michaël Berhanu, Annette Cazaubiel, Luc Deike, Timothée Jamin, Éric Falcon</i>	19
Effets du bruit dans le système de sine-Gordon <i>Bertrand Bodo, Savério Morfu, Patrick Marquié, Bernard Essimbi, Roland Alima</i>	25
Effet d'une perturbation haute fréquence sur la réponse du système de FitzHugh-Nagumo soumis à une excitation basse fréquence subliminale : simulation et expérimentation <i>Maxime Bordet, Savério Morfu, Patrick Marquié</i>	31
Effect of mechanical boundary conditions on the flow reversal in square Rayleigh-Bénard cells. <i>Andrés Castillo-Castellanos, Anne Sergent, Maurice Rossi</i>	37
Imagerie ultrasonore médicale au contrôle non destructif industriel : les imageurs du non-linéaire <i>Serge Dos Santos, Zuzana Dvorakova, Jennifer Chaline, Martin Lints, Djamel Remache</i>	43
Effet du mouillage sur l'écoulement d'un fluide à travers un trou <i>Jérémy Ferrand, Valérie Vidal, Éric Freyssingeas</i>	49
A new theory to describe the magnetoelastic instability <i>Fabien Gerbal, Wang Yuan, Jean-Claude Bacri, Florian Lyonnet, Thierry Hocquet, Martin Devaud</i>	55
Collision d'un tourbillon fluide annulaire sur une surface conique <i>Sergio Hernandez Zapata, Erick Javier Lopez Sanchez, Veronica Raspa, Gerardo Ruiz Chavarria</i> ..	61
Dualité onde-corpuscule macroscopique : perte de déterminisme et émergence d'un comportement statistique par effet mémoire <i>Maxime Hubert, Stéphane Perrard, Matthieu Labousse, Nicolas Vandewalle, Yves Couder</i>	67
Analyse Topologique appliquée à deux cas de chaos faiblement dissipatif : le système de Lorenz-84 et le modèle <i>cereal crops</i> <i>Sylvain Mangiarotti</i>	73

Un modèle chaotique pour l'épidémie de peste bubonique ayant sévi à Bombay à partir de 1896 <i>Sylvain Mangiarotti</i>	79
Vers un modèle de dynamique des grandes échelles dans les écoulements de paroi transitionnels <i>Paul Manneville</i>	85
Génération expérimentale de solitons de <i>cut-off</i> dans une ligne électrique non linéaire <i>Patrick Marquié, Kevin Tse Ve Koon, Patrice Tchofo-Dinda, Savério Morfu</i>	91
La résonance cohérente : amélioration de la régularité de la réponse d'un système non linéaire par le bruit <i>Savério Morfu, Patrick Marquié, Gaétan Lassere</i>	97
Comment naissent les vagues sous l'effet du vent ? <i>Anna Paquier, Frédéric Moisy, Marc Rabaud</i>	103
Synchronisation dans des réseaux complexes d'équations de réaction-diffusion de type FitzHugh-Nagumo <i>Van Long Em Phan, Benjamin Ambrosio, M. A. Aziz-Alaoui</i>	107
Oscillations et fragmentation spontanées de bulles d'air remontant dans une solution de polymère confinée <i>Raphaël Poryles, Valérie Vidal</i>	113
Intermittency in integrable turbulence <i>Stéphane Randoux, Pierre Walczak, Miguel Onorato, Pierre Suret</i>	119
Dynamos stellaires : symétries et modulations <i>Raphaël Raynaud</i>	125
Analyse taille finie d'une crise de fluctuations dans l'écoulement de Couette plan transitionnel <i>Joran Rolland</i>	131
Influence d'une mousse liquide sur le ballotement d'un liquide <i>Alban Sauret, François Boulogne, Jean Cappello, Émilie Dressaire, Howard A. Stone</i>	137
Index	145
Annexes	147

Structures localisées dans des VCSELs : expérience et contrôle par retour retardé

Étienne Averlant^{1,2}, Mustapha Tlidi¹ & Krassimir Panayotov²

¹ Faculté des sciences, Université libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgique

² IR-TONA, Vrije Universiteit Brussel, Bruxelles, Belgique

eaverlan@ulb.ac.be

Résumé. Dans la partie expérimentale de ce travail, nous rapportons la création spontanée (sans utiliser de faisceau d'écriture) de structures localisées dans un laser à cavité verticale émettant par la surface (VCSEL) dont la surface d'émission est un disque de 80 μm de diamètre. Les expériences ont été réalisées avec un courant excédant le seuil d'émission laser, et lorsque le VCSEL était soumis à une injection optique. Les structures localisées ainsi réalisées sont bistables en la puissance d'injection optique, ainsi qu'en le courant traversant le VCSEL. Plusieurs expériences ont été réalisées, avec différentes longueurs d'onde du faisceau d'injection. Dans la partie théorique de ce travail, nous étudions un VCSEL soumis à une injection optique et à un retour retardé. Ce retour retardé induit un mouvement spontané des structures localisées. Pour analyser ce mouvement, nous nous plaçons d'abord dans le cadre d'une bistabilité naissante, dans lequel la dynamique du système est décrite par une unique équation. Dans ce cas restrictif, le mouvement induit par le retour retardé ne dépend que des paramètres du retour retardé. Dans le cadre plus général des équations de champ moyen couramment utilisées, cette vitesse dépend aussi du taux de recombinaison des porteurs de charge.

Abstract. In the experimental part of this work, we report evidence of spontaneous formation (without using a writing beam) of localized structures in a 80 μm diameter vertical-cavity surface-emitting laser (VCSEL). VCSEL is biased above lasing threshold, and submitted to optical injection. Localized structures are bistable with injection power and VCSEL current. Different detunings between VCSEL cavity and injection beam have been investigated. In the theoretical part of this work, we analyze localized structures in a VCSEL submitted to optical injection and delayed feedback. This delayed feedback induces a spontaneous motion of the localized structures. We first place ourselves in the framework of nascent bistability, where behavior of this system is governed by a single equation. In this restrictive framework, speed of localized structures depends only on feedback parameters. In the more general framework of the commonly used mean field equations, this speed also depends on the carrier recombination rate.

1 Introduction

Les structures localisées sont des éléments de motif coexistant avec un état stationnaire homogène dans des systèmes spatialement étendus. Ces structures ont été observées dans de nombreux systèmes de la science non linéaire, tels que la chimie, la biologie, l'écologie, la mécanique des fluides... (pour une revue récente sur le sujet, voir la référence [1]). En optique, il s'agit en général d'un confinement spatial du champ électrique dans le plan transverse à la propagation d'un faisceau lumineux [2,3]. On peut alors voir ces structures localisées comme un ensemble de solitons se propageant à l'intérieur d'une cavité. C'est pourquoi on appelle parfois les structures localisées optiques à un seul pic « solitons de cavité ». Elles proviennent d'une interaction entre un faisceau laser et un matériau non linéaire, qui peut être une valve à cristaux liquides, une cellule de gaz, un milieu photoréfractif, un milieu Kerr [4]...

Pour créer des structures localisées dans des VCSELs, il faut d'abord que ce dernier supporte une bistabilité entre un état homogène et un état structuré. La première méthode utilisée a été un pompage tout optique [5]. Peu de temps après, le pompage optique a été associé à un pompage électrique [6], afin de réduire les effets thermiques et leur influence sur les structures localisées [7]. D'autres méthodes ont depuis lors prouvé leur efficacité : la pose d'un absorbant saturable à la surface du VCSEL, le couplage face à face de deux VCSELs, le retour retardé avec sélection spectrale (pour plus de détails, cf. Ref. [8])...

Une fois le VCSEL bistable, les solitons de cavité peuvent être créés via l'utilisation d'un faisceau externe dit « d'écriture ». Alternativement, il est possible de faire varier un paramètre tel que la puissance du faisceau d'injection si le laser est soumis à une injection optique pour créer ces structures. C'est la démarche adoptée dans la partie expérimentale du travail que nous présentons ici et qui a été publiée [9].

Les structures localisées présentées ici sont des objets stables. Cependant, les premières structures localisées créées dans des VCSELs [5] exhibaient déjà un mouvement, alors attribué au gradient d'intensité lumineuse de l'injection optique. Il a été ensuite suggéré [6] que le gradient de longueur de cavité laser est responsable de ce mouvement. Depuis lors, d'autres mécanismes responsables du mouvement des structures localisées ont été proposés, tels que la présence d'imperfections à la surface du VCSEL [10], ou une bifurcation de type Andronov-Hopf [11].

Un mécanisme alternatif peut en théorie mettre les structures localisées en mouvement : l'idée est de soumettre le VCSEL à un retour retardé, brisant ainsi la symétrie $(t) \mapsto (-t)$. Ce mécanisme a d'abord été étudié dans le cadre de l'équation de Swift-Hohenberg [12], une de ses variantes non-variationnelle [13], ainsi que dans le cadre des équations de champ moyen couramment utilisées pour les VCSELs soumis à une injection optique et un retour retardé [14]. Dans chacun de ces travaux, le seuil de mise en mouvement ainsi que la vitesse des structures localisées sont exprimés analytiquement. La vitesse ainsi que le seuil de mise en mouvement sont des fonctions des paramètres du retour retardé : ces derniers étant aisément modifiables expérimentalement, il serait alors envisageable d'utiliser le retour retardé comme un mécanisme de contrôle du mouvement des structures localisées. Par ailleurs, l'ajout d'une boucle de retard amène une grande richesse à la dynamique du système : on a récemment prédit dans ce système un comportement chaotique de l'amplitude des structures localisées [15].

Dans la prochaine section, nous présenterons la génération spontanée de structures localisées stationnaires dans un VCSEL dont la surface d'émission est un disque de 80 μm de diamètre, soumis à un pompage électrique et une injection optique. Dans la troisième section, nous présenterons les développements analytiques permettant de déterminer le seuil de mise en mouvement ainsi que la vitesse des structures localisées dans un VCSEL soumis à une injection optique et un retour retardé. Des simulations numériques venant confirmer ces prédictions analytiques feront l'objet de la quatrième section. Enfin, nous concluons dans la cinquième section.

2 Travail expérimental

Dans cette partie, nous présentons le dispositif expérimental de génération de structures localisées, avant de faire part des résultats.

2.1 Dispositif expérimental

Un schéma du dispositif expérimental est présenté dans la figure 1. Le VCSEL utilisé ici est similaire à ceux décrits dans la référence [16]. La figure de champ proche ainsi que le spectre du VCSEL lorsque ce dernier est traversé par un courant de 1,07 fois le courant de seuil sont décrits dans la figure 2. L'essentiel de la lumière qu'il émet est alors polarisée linéairement. C'est pourquoi nous utilisons une lame demi-onde sur le trajet du faisceau d'injection, afin de faire correspondre la polarisation de ce dernier avec celle du VCSEL. La densité optique variable (VODF sur la figure 1) permet de modifier la puissance du faisceau d'injection. La photodiode PD_1 permet de quantifier la puissance du faisceau d'injection juste avant qu'il ne rencontre le VCSEL, tandis que la photodiode PD_2 permet de quantifier la puissance lumineuse émise par le VCSEL. L'analyseur de spectre optique appliqué sur le faisceau lumineux émis par le VCSEL permet de vérifier que les mesures sont toujours faites lorsque le VCSEL est asservi au laser maître. Un arrangement de lentilles sur le trajet du faisceau émis par le VCSEL permet à la fois de former une image de sa surface d'émission sur le capteur CCD et de collimater le faisceau d'injection à sa rencontre avec le VCSEL.

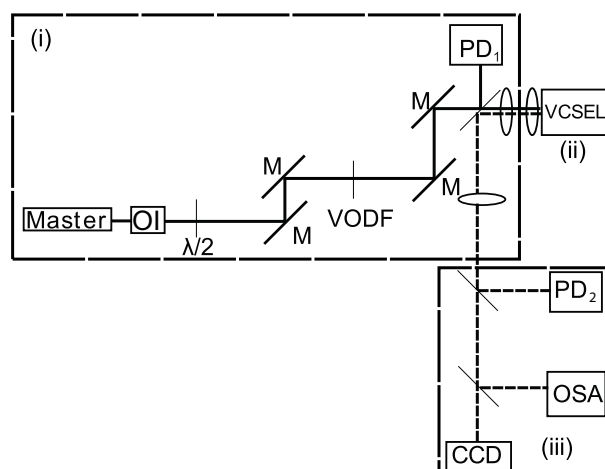


Figure 1. Schéma du dispositif expérimental. La ligne pleine est le chemin du faisceau lumineux provenant du laser maître, tandis que les pointillés représentent le chemin de la lumière émise par le VCSEL. Partie (i) : préparation et contrôle de l'injection optique. Master : laser maître. OI : isolateur optique. $\lambda/2$: lame demi-onde. M : miroir. VODF : densité optique variable. PD₁ : photodiode. (ii) : VCSEL. (iii) : branche d'analyses. PD₂ : photodiode. OSA : analyseur de spectre optique. Figure issue de la référence [9].

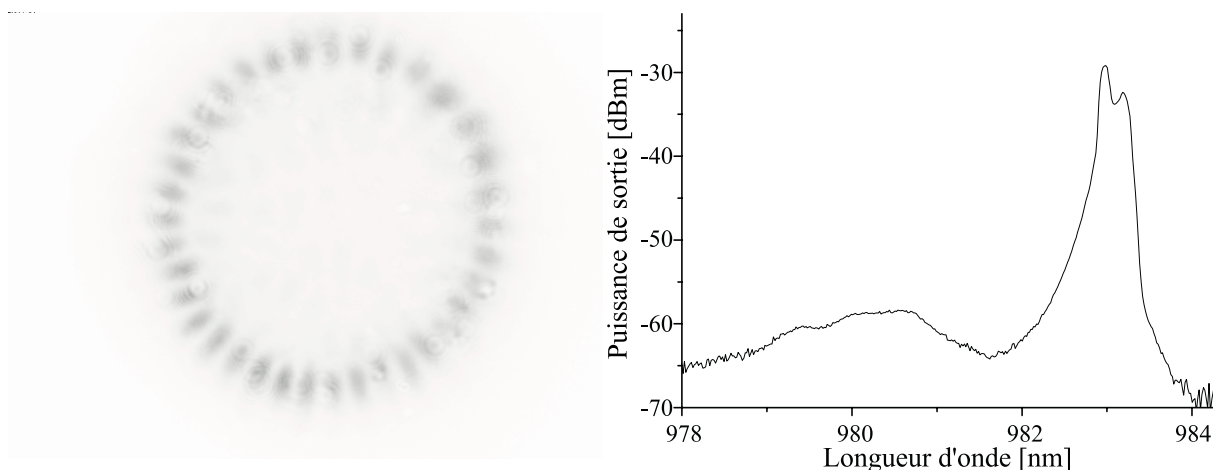


Figure 2. Gauche : Profil du champ proche émis par le VCSEL. Droite : Spectre du VCSEL. Ces deux mesures ont été prises alors que le VCSEL était maintenu à une température de 25 °C, parcouru par un courant de 45 mA. Figure issue de la référence [9].

2.2 Résultats

Dans cette section, le VCSEL est parcouru par un courant de 45 mA, et est maintenu à une température de 25 °C. Il est aussi soumis à une injection optique. En augmentant la puissance du faisceau d'injection P_{inj} petit à petit, nous observons, à une puissance donnée, une augmentation abrupte dans l'évolution de la puissance de sortie du VCSEL. Une analyse des images enregistrées par le capteur CCD nous montre que cette transition abrupte est due à l'apparition d'un pic de lumière localisé, s'étendant sur une dizaine de micromètres à la surface du VCSEL. Si l'on diminue la puissance, on remarque la présence d'un cycle de bistabilité associé à cette structure. Voir figure 3, gauche. Si l'on ajoute à cela la présence de queues oscillantes mises en évidence figure 3, droite, nous pouvons affirmer qu'on est en présence de structures localisées. Des résultats incluant plusieurs structures localisées, ainsi qu'une bistabilité en le courant d'injection sont présentés dans la référence [9].

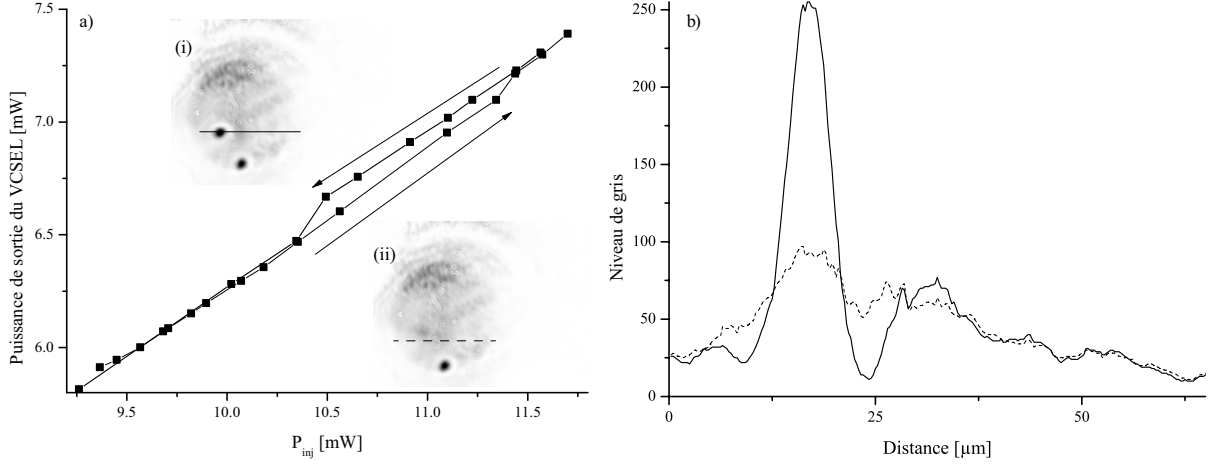


Figure 3. Gauche : Puissance de la lumière émise par le VCSEL en fonction de la puissance optique du faisceau d'injection. Les images (i) et (ii) représentent le champ proche du VCSEL sur les branches haute et basse de la bistabilité, respectivement. Droite : Profil à une dimension correspondant au champ proche de l'image (i) (ligne pleine) et (ii) (trait pointillé). Figure issue de la référence [9].

3 Analyse théorique

Nous étudions un VCSEL soumis à une injection optique et à un retour retardé. La dynamique du champ électrique E ainsi que celle de l'inversion de population N sont respectivement décrites par les équations adimensionnelles suivantes [17] :

$$\frac{dE}{dt} = -(1 + j\theta)E + 2C(1 - j\alpha)(N - 1)E + E_i + \zeta e^{j\phi} E(t - \tau) + j\nabla_{\perp}^2 E, \quad (1)$$

$$\frac{dN}{dt} = -\gamma [N - P + (N - 1)|E|^2 - D\nabla_{\perp}^2 N]. \quad (2)$$

Dans ces équations, θ la différence entre la fréquence du faisceau d'injection et celle de la cavité, C le paramètre de bistabilité et D le coefficient de diffusion des porteurs de charge. E_i est l'intensité lumineuse de l'injection optique, ζ l'intensité de la rétroaction retardée et ϕ sa phase. τ est le retard, P l'intensité électrique traversant le VCSEL, ∇_{\perp}^2 le laplacien dans le plan transverse à la propagation et γ le taux de désexcitation des porteurs de charge. Nous considérons d'abord θ nul, et l'amplitude de la rétroaction comme petite, le retard comme grand. Enfin, la phase de la rétroaction est soit de 0, soit de π . Après avoir renormalisé le temps et l'espace, on effectue un développement asymptotique autour du point critique associé à la bistabilité optique. Au voisinage de ce point, la dynamique spatio-temporelle est décrite par [13] :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = e_i - e(p + e^2) + \eta e(t - \tau) + \left(d - \frac{5e}{2} \right) \nabla_{\perp}^2 e - a\nabla_{\perp}^4 e - 2(\nabla_{\perp}^2 e)^2, \quad (3)$$

où chaque lettre minuscule représente la déviation autour du point critique de la majuscule correspondante dans les équations (1) et (2), η est la déviation autour du point critique de l'intensité du retour distribué et $a \equiv (1 - \alpha^2)/(4\alpha^2)$. Cette équation est valable dans la limite des grandes longueurs d'onde et n'est valable que lorsque $\alpha < 1$.

Une analyse de stabilité linéaire de l'équation (3) permet d'exprimer une condition de mise en mouvement des structures localisées $\eta\tau < -1$. Une fois ce seuil mis en évidence, on peut développer la vitesse autour de ce point, afin d'obtenir l'expression suivante exprimant la vitesse des structures localisées :

$$v = \frac{Q\sqrt{-(1 + \eta\tau)}}{\tau}, \quad (4)$$

où Q est un facteur de forme de la structure localisée. La vitesse de la structure ne dépend alors que de ce paramètre et de ceux de la rétroaction retardée. Cependant, le même calcul appliqué au modèle de champ moyen décrit par les équations (1) et (2) montre que le seuil associé au mouvement des structures localisées dépend non seulement des paramètres de la rétroaction ζ , τ et ϕ , mais également du taux de recombinaison des porteurs de charge γ : mise en mouvement [14]

$$\zeta_0\tau = \frac{1 + \gamma^{-1}(b/c)}{\sqrt{1 + (a/c)^2 \cos[\phi + \arctan(a/c)]}}, \quad (5)$$

où a , b et c sont des facteurs dépendant de la forme de la structure localisée. La vitesse de ces structures dépend elle aussi de la forme des structures, via un facteur f , ainsi qu'à l'écart à la valeur de seuil $\delta\zeta = \zeta - \zeta_0$:

$$v = \frac{f\sqrt{\delta\zeta}}{\tau\sqrt{\zeta}}. \quad (6)$$

4 Simulations numériques

Les équations (1), (2) et (3) ont été simulées numériquement à deux dimensions afin de mettre en évidence le mouvement des structures localisées dû à la rétroaction retardée. Les résultats sont repris dans les figures 4 et 5.

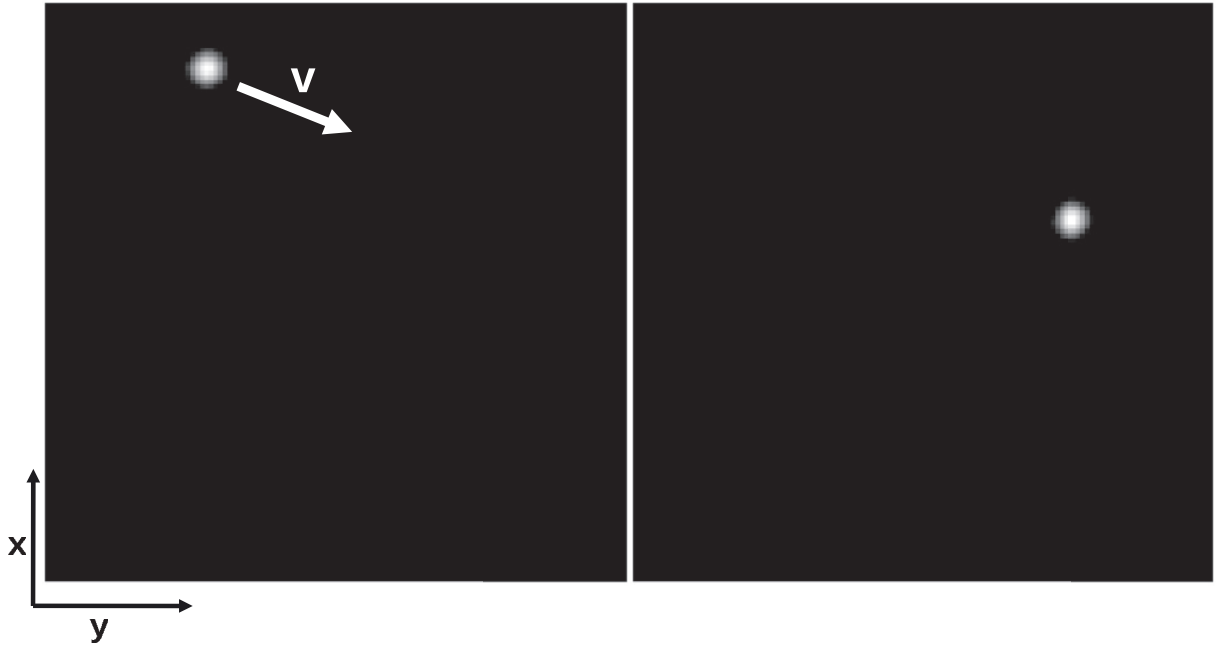


Figure 4. Gauche : Structure localisée solution de l'équation 3 à un instant t_0 . Droite : Structure localisée solution de l'équation (3) à un instant $t_1 > t_0$. Les paramètres sont $p = -0,9$, $d = -1,5$, $a = 0,75$, $y = -0,5$, $\eta = -0,15$, et $\tau = 15$. Figure issue de la référence [13].

5 Conclusion

Nous avons montré expérimentalement la formation spontanée de structures localisées dans un VCSEL soumis à un pompage électrique et à une injection optique. Nous avons ensuite étudié analytiquement un

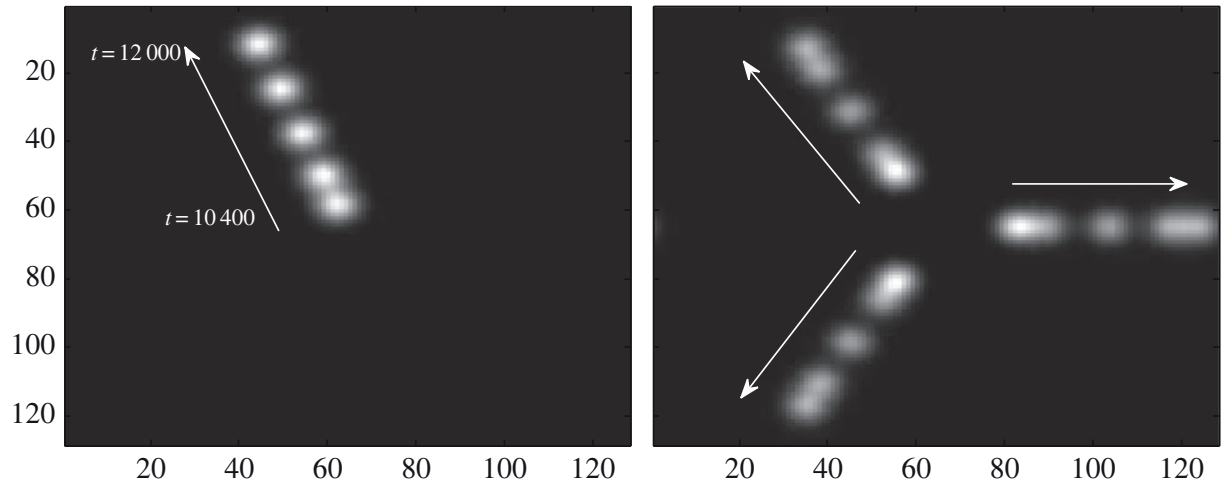


Figure 5. Gauche : Chronophotographie d’une structure localisée à un pic solution des équations (1) et (2). Droite : Chronophotographie d’une structure localisée à trois pics solution des équations (1) et (2). Les paramètres utilisés sont $C = 0,45$, $\theta = -2$, $\alpha = 5$, $\mu = 1$, $\zeta = 0,135$, $\tau = 100$ et $\phi = 0,5$. Figure issue de la référence [14].

VCSEL soumis à un pompage électrique, une injection optique et une rétroaction retardée. Nous avons montré qu’au voisinage du point critique, la dynamique du système est décrite par une unique équation, similaire à l’équation de Swift-Hohenberg. Dans ce cas, les structures localisées se mettent spontanément en mouvement si les paramètres de la rétroaction retardée le permettent. Nous avons alors déterminé analytiquement la vitesse de ces structures localisées. Le travail a ensuite été répété dans le cadre plus général des équations de champ moyen couramment utilisées pour ce système.

La poursuite du travail se fera sous deux aspects : d’un point de vue expérimental, la mise en place d’un faisceau d’écriture et d’une boucle de rétroaction retardée est prévue. D’un point de vue théorique, nous poursuivrons une étude des propriétés de polarisation des structures localisées lorsque le faisceau d’injection et le faisceau issu du VCSEL ne sont pas identiques.

Références

1. M. TLIDI *et al.*, *Phil. Trans. R. Soc. A*, **372**, 2014101 (2014).
2. L. A. LUGIATO, *Chaos Soliton. Fract.*, **4**, 1251–1258 (1994).
3. M. TLIDI & P. MANDEL, *Chaos Soliton. Fract.*, **4**, 1475–1486 (1994).
4. R. KUSZELEWICZ *et al.*, *Eur. Phys. J. D*, **59**, 1–2 (2010).
5. V. B. TARANENKO *et al.*, *Phys. Rev. A*, **61**, 063818 (2000).
6. S. BARLAND *et al.*, *Nature*, **419**, 699–702 (2002).
7. G. TISSONI *et al.*, *J. Opt. Soc. Am. B*, **16**, 2083–2105 (1999).
8. S. BARBAY *et al.*, *Adv. Opt. Tech.*, **2011**, 628761 (2011).
9. É. AVERLANT *et al.*, *Opt. Express*, **22**, 762–772 (2014).
10. X. HACHAIR *et al.*, *Phys. Rev. A*, **69**, 043817 (2004).
11. H. VAHED *et al.*, *Phil. Trans. R. Soc. A*, **372**, 20140016 (2014)
12. M. TLIDI *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 103904 (2009).
13. M. TLIDI *et al.*, *Phys. Rev. A*, **86**, 033822 (2012).
14. A. G. VLADIMIROV *et al.*, *Phil. Trans. R. Soc. A*, **372**, 2027 (2014).
15. K. PANAJOTOV & M. TLIDI, *Opt. Lett.*, **39**, 4739–4742 (2014).
16. M. GRABHERR *et al.*, *IEEE J. Sel. Top. Quantum Elect.*, **5**, 495–502 (1999).
17. K. PANAJOTOV & M. TLIDI, *Eur. Phys. J. D*, **59**, 67–72 (2010).

Instabilité viscoélastique : analogie avec l'instabilité magnéto-rotationnelle

Yang Bai, Olivier Crumeyrolle & Innocent Mutabazi

Laboratoire ondes et milieux complexes (LOMC), UMR 6294, CNRS-Université du Havre, Rue Prony, 76058 Le Havre

yang.bai@etu.univ-lehavre.fr

Résumé. Nous présentons des résultats théoriques et expérimentaux pour illustrer l'analogie entre l'instabilité viscoélastique dans le système de Couette-Taylor avec l'instabilité magnéto-rotationnelle (MRI) supposée jouer un rôle prépondérant dans le transfert de matière dans les disques d'accrétion [1]. Cette analogie s'appuie sur la prédiction théorique d'Ogilvie et Proctor qui stipule que le modèle de fluide viscoélastique d'Oldroyd-B est décrit par des équations analogues à celles de la magnétohydrodynamique dans la limite de temps de relaxation infinis et de diffusivité magnétique évanescence [2]. Le système de Couette-Taylor est en corotation différentielle quasi-keplérienne avec des solutions diluées de polymères mimant le modèle d'Oldroyd-B. Les paramètres de contrôle sont le nombre de Taylor Ta , le nombre élastique E et le rapport S des viscosités du polymère et de la solution. Quatre modes d'instabilité ont été observés selon les valeurs de Ta et du produit ES : des vortex axisymétriques, des modes non axisymétriques, des vortex solitaires et des modes élastiques.

Abstract. We present theoretical and experimental results that illustrate the analogy between the viscoelastic instability in the Couette-Taylor and the magnetorotational instability (MRI) that may play a significant role in the momentum transfer in the accretion disks [1]. This analogy relies on the recently developed theory by Ogilvie and Proctor that shows that the Oldroyd-B viscoelastic fluid is described by equations that are similar to magnetohydrodynamics equations in the limit of infinite relaxation time and vanishing magnetic diffusivity [2]. The Couette-Taylor system is in differential corotation satisfying the Keplerian condition, the working fluids are viscoelastic solutions satisfying the Oldroyd-B constitutive equations. The control parameters are the Taylor number Ta , the elasticity number E and the viscosity ratio S of polymer to solution. Depending on the values of Ta and the product ES , we have identified four critical modes: axisymmetric vortices, non-axisymmetric modes, solitary vortices and elastic modes.

1 Introduction

L'instabilité magnéto-rotationnelle (MRI) apparaît dans des liquides de grande conductivité électrique en rotation différentielle en présence d'un champ magnétique, lorsque la vitesse angulaire décroît avec la distance de l'axe de rotation. Cette instabilité semble être l'un des mécanismes de création de la turbulence et du transport de moment cinétique angulaire dans les disques d'accrétion astrophysiques [1]. L'écoulement de Couette-Taylor est constitué d'une couche de fluide comprise entre deux cylindres en rotation différentielle. Pour les faibles vitesses de rotation, l'écoulement est purement azimutal (écoulement circulaire de Couette) avec une seule composante de vitesses $V(r) = Ar + B/r$ où A et B sont déterminées par les conditions aux limites sur les parois cylindriques. D'après le critère de circulation de Rayleigh, l'écoulement circulaire de Couette est instable si le carré de la circulation de la vitesse est négatif dans une certaine région de l'écoulement [3]. Depuis 1981, cet écoulement suscite un grand intérêt en astrophysique [4]. L'étude de l'influence de la rotation différentielle sur le transport du moment angulaire lors de la formation des disques d'accrétion a suscité de nouvelles études expérimentales des écoulements newtoniens de Couette-Taylor en rotation différentielle [5–7] dans les situations stables selon le critère de Rayleigh. En effet, l'équilibre entre la gravitation, due à un objet central, et la force centrifuge, ressentie dans le disque en rotation, admet une solution képlérienne pour laquelle le profil de vitesse purement azimutal vérifie la condition $v_\theta \propto r^{-\frac{1}{2}}$. Un tel profil, corotatif mais qui présente une vitesse de rotation angulaire plus rapide pour le cylindre intérieur que pour le cylindre extérieur, est stable du point de vue

du critère de circulation de Rayleigh. Indépendamment du rôle de la viscosité et de la turbulence, l'étude des disques d'accrétion porte aussi sur les effets magnétohydrodynamiques. La réalisation d'expériences de Couette-Taylor avec des liquides métalliques pour étudier l'instabilité magnéto-rotationnelle se heurte à beaucoup de difficultés techniques [5]. Cela nécessite de trouver d'autres systèmes mieux adaptés à ce type d'étude.

2 Analogie instabilité viscoélastique avec l'instabilité magnéto-rotationnelle

Ogilvie et coll. ont proposé d'utiliser une solution de polymères comme analogue d'un fluide magnétique [2, 8]. L'étirement des polymères par l'écoulement est analogue à l'étirement des lignes de champ magnétique. Les équations de l'écoulement de liquide viscoélastique d'Oldroyd B sont :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla H + \nabla \mathbf{T}_p + \nu_s \nabla^2 \mathbf{U}, \\ \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{T}_p - (\nabla \mathbf{U})^T \cdot \mathbf{T}_p - \mathbf{T}_p \cdot \nabla \mathbf{U} = -\frac{1}{\text{Wi}} (\mathbf{T}_p - \frac{S}{\text{Wi}} \mathbf{I}), \end{cases} \quad (1)$$

où ν_s est la viscosité cinématique du solvant, $H = p/\rho + gz$ est la fonction de Bernoulli, \mathbf{I} est le tenseur identité et \mathbf{T}_p est la contribution du polymère au tenseur de contraintes. Ces équations ressemblent à celles de la magnétohydrodynamique (MHD) d'un liquide conducteur soumis à un champ magnétique [2] si l'on remplace \mathbf{T}_p par le tenseur de contraintes magnétiques de Maxwell dépourvu de la partie isotrope. L'analogie formelle devient parfaite dans la limite de temps de relaxation infinis et de diffusivité magnétique nulle. Le modèle d'Oldroyd-B décrirait donc la MRI idéale non dissipative :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\text{Oldroyd-B}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\text{MHD}) \longleftrightarrow \lim_{\text{Wi} \rightarrow \infty} (\text{Oldroyd-B}) = \lim_{R_m \rightarrow 0} (\text{MHD}), \quad (2)$$

où (τ) est le temps de relaxation du polymère, λ est la diffusivité magnétique; $\text{Wi} = \tau \dot{\gamma}$ est le nombre de Weissenberg, $R_m = \lambda \dot{\gamma}$ est le nombre de Reynolds magnétique et $\dot{\gamma}$ représente le taux de cisaillement de l'écoulement. Au-delà de cette analogie pour les grandes valeurs des paramètres de contrôles, Ogilvie et coll. [2, 8] ont aussi discuté l'analogie pour des valeurs intermédiaires et ont démontré par analyse de stabilité linéaire que la rotation différentielle en régime képlérien conduit à un nouveau mode d'instabilité viscoélastique, distinct des modes observés jusque-là, et qui peut être l'analogue de l'instabilité magnéto-rotationnelle (MRI). Les résultats ont été illustrés pour une solution de polymère avec le rapport de viscosité $\mu_p/\mu_s = 1$ dans une géométrie de Couette-Taylor avec le rapport de rayons $\eta = a/b = 0,95$. À notre connaissance, une seule étude expérimentale a été menée par Boldyrev et coll. [9] dans une solution de polymère dont les paramètres s'écartent du modèle d'Oldroyd-B. En effet, ces auteurs ont utilisé une solution aqueuse de polyoxyéthylène avec $\mu_p/\mu_s \gg 1$ et présentant un forte rhéofluidification. Ces auteurs ont observé deux modes d'instabilité : le mode axisymétrique et un mode hélicoïdal avec le nombre d'onde azimutal $n = 1$ et ont appelé ces modes d'élasto-rotationnels (ERI).

Nous avons mené une étude expérimentale avec une solution de polymères dont nous avons vérifié qu'elle satisfaisait le modèle de fluide d'Oldroyd-B. Après avoir généralisé le critère de stabilité de Rayleigh aux écoulements de liquides viscoélastiques, nous avons complété l'étude théorique menée par Ogilvie et coll. [8] en résolvant les équations de stabilité linéaire par la méthode de collocation de Tchebychev pour différentes valeurs des rapports des rayons et des rapports de viscosité.

3 Caractérisation rhéologique des solutions

L'expérience est réalisée dans une cellule de Couette-Taylor de longueur $L = 45$ cm, de rayon intérieur $a = 4$ cm et de rayon extérieur $b = 5$ cm soit un entrefer de taille $d = 1$ cm. Le rapport des rayons est donc $\eta = a/b = 0,8$ et le rapport d'aspect $\Gamma = L/d = 45$. Le liquide utilisé est une solution de polyoxyéthylène

(POE) de grande masse molaire ($M = 8 \times 10^6$ g d'après le fabricant) dans un mélange newtonien d'eau et de polyéthylène glycol (PEG) de faible masse molaire $M = 20\,000$ g. Ces solutions présentent une très faible rhéofluidification (Fig. 1) i.e. une faible diminution de la viscosité de cisaillement avec le taux de cisaillement, ce qui les rapproche du modèle d'Oldroyd-B. Les temps de relaxation des solutions sont mesurés par un rhéomètre extensionnel, le CaBER et à partir de la mesure de la première contrainte normale avec le rhéomètre ANTON PAAR. Afin de vérifier la dégradation mécanique de la solution de polymère, nous avons mesuré le temps de relaxation des solutions avant et après chaque expérience. La visualisation est réalisée à l'aide de Kalliroscope et d'une coupe laser dans le plan (r, z) . Les deux cylindres tournent à des vitesses de rotation Ω_i et Ω_o avec une commande qui permet d'assurer le rapport de Képlér c'est-à-dire que les vitesses sont choisies de façon à satisfaire la condition $\mu = \eta^{3/2}$.

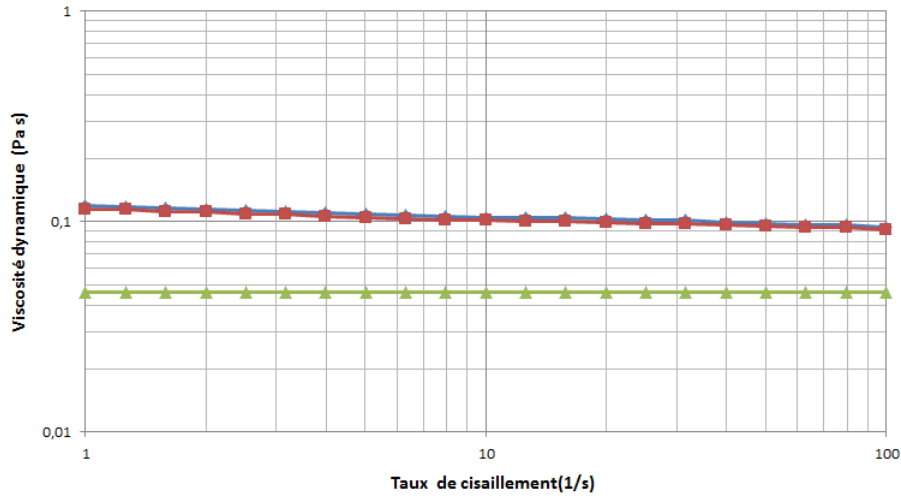


Figure 1. Variation de la viscosité dynamique de cisaillement avec le taux de cisaillement pour une solution de 1000 pmm de POE avec 17,5% de PEG dans de l'eau. Les lignes en haut présentent la solution totale et la ligne en bas présente la contribution du solvant (PEG avec de l'eau).

4 Discriminant de Rayleigh pour les écoulements viscoélastiques

Pour décrire les instabilités dans un liquide viscoélastique dans le système de Couette-Taylor, on peut généraliser le critère de Rayleigh en incluant les effets de la force radiale associée à la première différence de contraintes normales $N_1 = T_{\phi\phi} - T_{rr}$. Le discriminant de Rayleigh devient dans ce cas :

$$\Phi_e(r) = \frac{1}{r^3} \frac{d(r^2\Omega)^2}{dr} + \frac{1}{\rho r} \frac{dN_1}{dr}, \quad (3)$$

où $\Omega = V/r$ est la vitesse angulaire de rotation locale. Dans le modèle d'Oldroyd-B, la seconde différence de contraintes normales est identiquement nulle. Le discriminant de Rayleigh sans dimension $\hat{\Phi}_e(\hat{r}) = \frac{\Phi_e}{\Omega_i^2}$, prend la forme

$$\hat{\Phi}_e(\hat{r}) = \frac{4}{(1-\eta^2)^2} \left[(\eta^2 - \mu)^2 + (\eta^2 - \mu)(\mu - 1) \left(\frac{\eta}{1-\eta} \right)^2 \right] \frac{1}{\hat{r}^2} - 32ES \left(\frac{\mu - 1}{1-\eta^2} \right)^2 \left(\frac{\eta}{1-\eta} \right)^4 \frac{1}{\hat{r}^6}, \quad (4)$$

avec $\hat{r} = \frac{r}{a}$. Le premier terme représente le discriminant de Rayleigh classique, le deuxième terme représente la contribution des forces élastiques. Cette contribution diminue très rapidement avec la distance, c'est-à-dire que les forces élastiques sont plus efficaces pour la déstabilisation des particules fluides sur de

courtes distances, comparativement à la force centrifuge. Pour l'écoulement d'un fluide viscoélastique en régime quasi-képlérien, le discriminant peut être négatif si $ES > (ES)_c = 0,67$ et il y a apparition d'une instabilité élastique. L'expression (4) du discriminant de Rayleigh pour un écoulement viscoélastique est analogue à celui d'un écoulement dans un champ magnétique azimuthal B_ϕ [3] :

$$\Phi_e(r) = \frac{1}{r^3} \frac{d(r^2\Omega)^2}{dr} + \frac{1}{\mu\rho r^3} \frac{(dB_\phi)^2}{dr}. \quad (5)$$

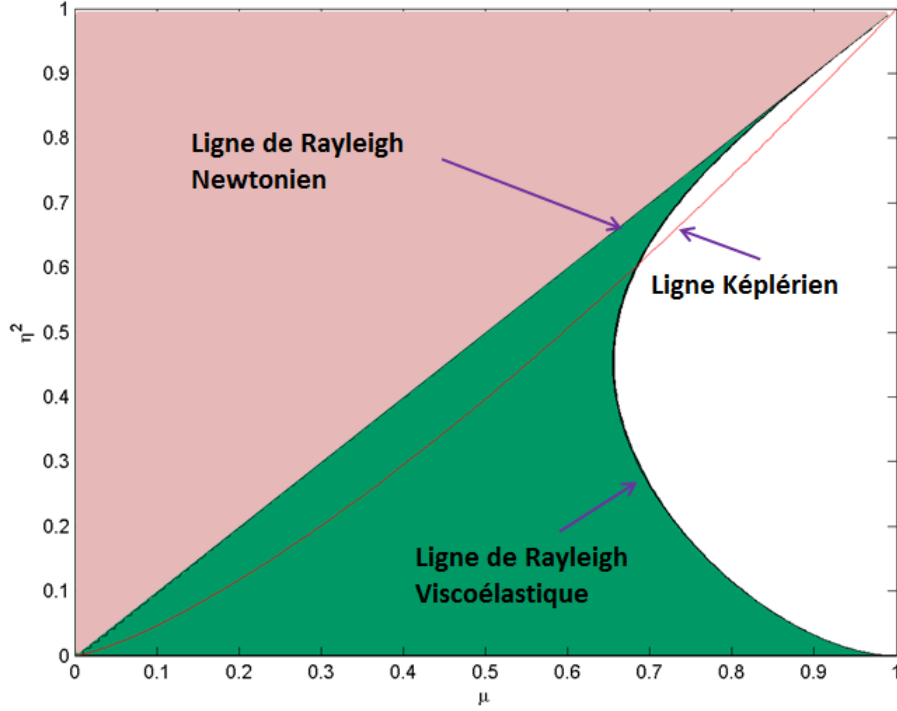


Figure 2. Domaine de stabilité d'après le critère de stabilité de Rayleigh généralisé aux écoulements viscoélastiques pour $ES = 0,5$.

5 Résultats

Les paramètres de contrôle de l'écoulement sont le nombre de Taylor Ta et le nombre de Weissenberg Wi définis comme étant le rapport entre le temps de diffusion par viscosité sur le temps associé à la force centrifuge et le rapport entre le temps de relaxation des polymères et le temps associé au cisaillement respectivement :

$$Ta = \frac{(1 - \eta^{3/2})(1 - \eta^2)}{2\eta^2} \sqrt{\frac{2(1 - \eta)}{1 + \eta}} \frac{\Omega_i a^2}{\nu}, \quad (6)$$

$$Wi = \tau \dot{\gamma} = \frac{(1 + \eta)(1 - \eta^{3/2})}{2(1 - \eta)} \Omega_i \tau.$$

On introduit aussi le nombre d'élasticité E qui est le rapport du temps de relaxation sur le temps de diffusion visqueuse : $E = \mu_0 \tau / \rho d^2$ et le rapport des viscosités $S = \mu_p / \mu_0$.

Les expériences ont été réalisées pour chaque valeur fixe de E (solution donnée) en augmentant progressivement la vitesse de rotation des deux cylindres en gardant le rapport des vitesses dans le régime képlérien jusqu'à la détection de modes d'instabilité. Avant chaque variation de la vitesse de rotation, on attend environ 20 minutes pour que l'écoulement soit dans un état établi. Les seuils d'instabilité sont représentés sur la figure 3 par des points carrés et quelques images représentatives des motifs observés sont données sur la figure 4.

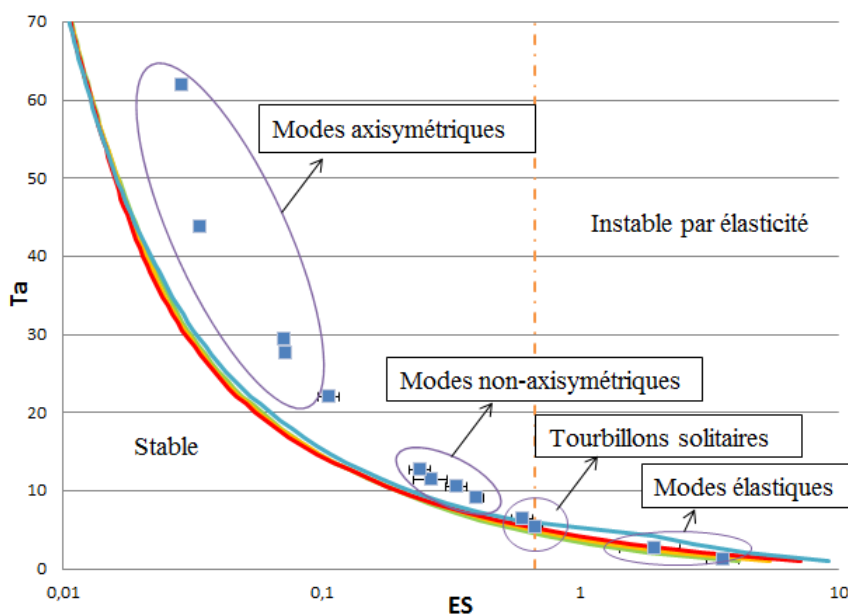


Figure 3. Courbes de stabilité marginales prédites par l'analyse linéaire pour différentes valeurs de ES (lignes continues), ligne pointillée verticale : frontière entre la zone stable et la zone instable d'après le critère de Rayleigh généralisé. Points : seuils de l'instabilité expérimentaux avec barre d'erreur.

Nous avons réalisé l'étude de stabilité linéaire à partir des équations 1 pour différentes valeurs de $S \in [0,5; 0,8]$ pour le rapport des rayons $\eta = 0,8$ utilisé dans l'expérience. Les résultats sont représentés dans le plan (ES, Ta_c) sur la figure 3 : le seuil de l'instabilité décroît avec l'augmentation du nombre élastique E . Pour de très faibles valeurs de l'élasticité, il faudrait des taux de cisaillement énormes pour déclencher l'instabilité avec des modes axisymétriques de longueur d'onde inférieure à la taille de l'entrefer. Pour des valeurs intermédiaires de l'élasticité, l'instabilité donne lieu à des modes non axisymétriques oscillants avec des longueurs d'onde comparables au double de la taille de l'entrefer. L'instabilité apparaissant pour les grandes valeurs de ES ($ES > 0,67$) est une instabilité de nature élastique alors que l'instabilité apparaissant pour de faibles valeurs ES ($ES < 0,67$) est une instabilité qui est l'analogie de l'instabilité magnéto-rotationnelle. Pour une valeur donnée de E dans la zone avec $ES < 0,67$, l'augmentation de la viscosité du polymère déstabilise plus l'écoulement, i.e. diminue le seuil de l'instabilité. On a une situation opposée dans le cas avec $ES > 0,67$.

6 Conclusion

Nous avons mené une étude expérimentale et théorique de l'instabilité d'un liquide viscoélastique de viscosité constante mimant le modèle d'Oldroyd-B dans le système de Couette-Taylor en régime képlérien. Le critère de Rayleigh généralisé permet de déterminer la zone d'intervention de l'instabilité élastique et

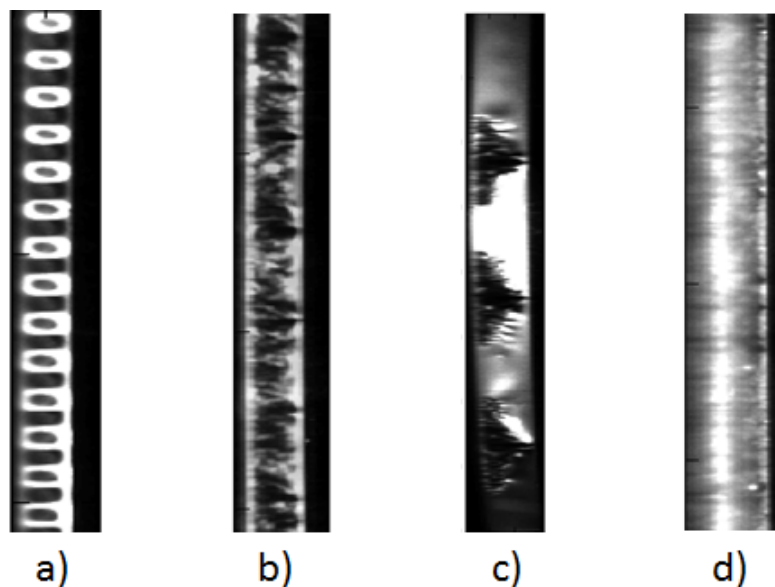


Figure 4. Coupes radiales des quatre modes observés dans un écoulement viscoélastique dans le système de Couette en régime képlérien : a) modes de vortex, b) modes non axisymétriques, c) vortex solitaires, d) modes élastiques. La paroi à gauche est le cylindre intérieur ; la paroi à droite est le cylindre extérieur.

la zone où l'instabilité est l'analogie de l'instabilité magnéto-rotationnelle. Les résultats expérimentaux obtenus suivent la tendance des résultats théoriques, les écarts observés peuvent être attribués à la précision expérimentale et à la nature sous-critique des instabilités viscoélastiques.

Références

1. S. BALBUS & J. F. HAWLEY, A powerful local shear instability in weak magnetized disks: Linear analysis, *J. Astrophys.*, 214–233 (1991).
2. G. I. OGIIVIE & M. R. E. PROCTOR, On the relation between viscoelastic magnetohydrodynamical flows and their instabilities, *J. Fluid Mech.*, **476**, 389–409 (2003).
3. S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*, Oxford University Press (1961).
4. Y. B. ZELDOVICH, On the friction of fluids between rotating cylinders, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **374**, 299–312 (1981).
5. H. JI, M. BURIN, E. SCHATMAN & J. GOODMAN, Hydrodynamic turbulence cannot transport angular momentum effectively in astrophysical disks, *Nature*, **444**, 343–346 (2006).
6. D. RICHARD & J.-P. ZAHN, Turbulence in differentially rotating flows. What can be learned from the Couette-Taylor experiment, *Astron. Astrophys.*, **347**, 734–738 (1999).
7. M. S. PAOLETTI, D. P. M. VAN GILS, B. DUBRULLE, C. SUN, D. LOHSE & D. P. LATHROP, Angular momentum transport and turbulence in laboratory models of Keplerian flows, *Astron. Astrophys.*, **547**, A64 (2012).
8. G. I. OGIIVIE & A. T. POTTER, Magnetorotational-type instability in Couette-Taylor flow of a viscoelastic polymer liquid, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 074503 (2008).
9. S. BOLDYREV, D. HUYNH & V. PARIIEV, Analog of astrophysical magnetorotational instability in a Couette-Taylor flow of polymer fluids, *Phys. Rev. E*, **80**, 066310 (2009).

Reservoir Computing ultra-rapide basé sur une dynamique non linéaire électro-optique en phase

A. Baylón-Fuentes¹, R. Martinenghi¹, I. Zaldívar-Huerta², B. A. Márquez¹, V. S. Udaltsov¹, M. Jacquot¹, Y. K. Chembo¹ & L. Larger¹

¹ FEMTO-ST / dpt. Optique, UMR CNRS 6174, Université de Franche-Comté, 25030 Besançon Cedex, France

² INAOE, Puebla, Mexique

antonio.baylon@femto-st.fr

Résumé. Le *Reservoir Computing* (RC) est un paradigme de calcul inspiré du fonctionnement du cerveau humain permettant de traiter dynamiquement un flot d'information. Il est originellement connu sous les noms *Echo State Network* ou *Liquid State Machine*. Ces principes de base sont dérivés des techniques des réseaux de neurones récurrents (RNR) et de l'apprentissage machine. Longtemps étudiés numériquement, ils ont récemment attiré l'attention de la communauté du non-linéaire grâce à des mises en œuvre expérimentales utilisant les systèmes dynamiques non linéaires à retard optique et électronique. Notre approche des RC consiste à utiliser la grande dimensionalité de ces dynamiques à retard afin d'émuler temporellement la dimension spatiale des architectures RNR traditionnelles. En suivant ces principes, nous reportons ici une réalisation expérimentale de RC s'appuyant sur une dynamique non linéaire à retard en phase optique. Le montage est construit principalement en utilisant des composants télécom standard, offrant ainsi la possibilité d'exploiter la très large bande passante typiquement associée, c'est-à-dire permettant en plus une vitesse de traitement de l'information jusqu'alors inégalée.

Abstract. Reservoir Computing (RC) is a computation paradigm inspired by the human brain operation, which allows to process dynamically a temporal flow of information. It was originally referred to as *Echo State Network* or *Liquid State Machine*. The basic RC concepts are derived from Recurrent Neural Networks (RNN) and Machine Learning. Initially studied with numerical simulation mainly, they recently attracted attention in the nonlinear dynamics community because of new experimental approaches exploiting optical and electronic delay dynamical systems. This unconventional RC approach is based on high dimensionality of nonlinear delay dynamics aiming to emulate temporally the spatial dimensions of the traditional RNN architectures. Following this, we report an experimental realization based on nonlinear delay dynamics operating with the optical phase. The setup is built with standard telecom devices, thus offering the potential for large bandwidth capability, and resulting in unprecedented high speed information processing.

1 Introduction

Les ordinateurs numériques actuels sont basés sur des architectures Turing-von Neumann. Ils sont omniprésents et profondément intégrés dans nos vies quotidiennes, fournissant une puissance de calcul très élevée et efficace pour de nombreuses tâches. Cependant, pour un nombre de problèmes scientifiques et technologiques sans cesse croissant, cette puissance de calcul apparaît insuffisante ou carrément inefficace, même pour les systèmes informatiques les plus avancés. Plusieurs solutions alternatives aux ordinateurs numériques actuels ont déjà été explorées, une inspiration assez naturelle provenant du fonctionnement du cerveau humain. La plupart de ces approches neuromorphiques sont alors réalisées via des architectures de type réseaux complexes de neurones interconnectés (voir Fig. 1 (a)) et leurs preuves fonctionnelles s'appuient généralement sur des simulations numériques de ces réseaux complexes effectuées sur des machines de Turing-von Neumann. Un enjeu actuel important dans ce domaine, outre la compréhension des principes de base du pouvoir calculatoire ainsi observé, concerne alors aussi la démonstration d'implémentation matérielle dédiée pour ces nouvelles approches de calculateurs. Sans ces démonstrations, les nouveaux concepts de calculs perdent beaucoup de leur intérêt opérationnel et de leur efficacité effective. On en arrive ainsi à promouvoir la compréhension de notre cerveau humain via la simulation numérique de son entière et gigantesque structure avec des fermes de calcul de plusieurs

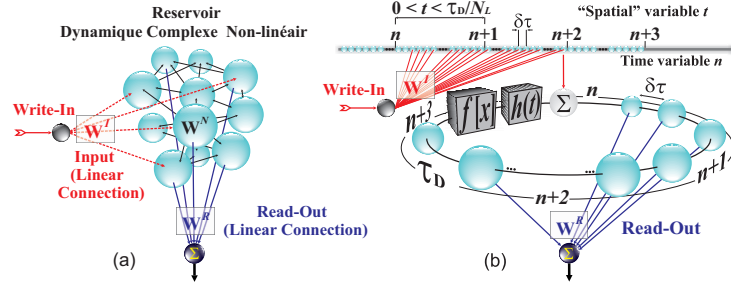


Figure 1. Principes du RC. (a) : fonctionnement d’un calculateur neuromorphique. (b) : émulation de la dimension spatiale des architectures RNR traditionnelles, par multiplexage temporel, où $f(x)$ est la transformation non-linéaire du système, et $h(t)$ représente la réponse impulsionnelle de la chaîne d’oscillation.

centaines de mégawatts de consommation, alors qu’un cerveau humain fonctionne effectivement avec une trentaine de watts.

Parmi les différentes approches de calcul inspirées par le fonctionnement d’un cerveau, le *Reservoir Computing* (RC) [1–3] a récemment attiré l’attention de la communauté du non-linéaire grâce à des mises en œuvre expérimentales totalement non conventionnelles, en utilisant des systèmes dynamiques à retard optique et électronique [4, 5]. Les systèmes à retard sont ici impliqués en tant que réservoirs de dynamiques complexes, remplaçant d’une façon surprenante et efficace les architectures traditionnelles spatio-temporelles de réseaux de neurones. De plus, ces dynamiques à retard ont aussi l’avantage de proposer des solutions technologiques de réalisation physique du RC. Plusieurs résultats expérimentaux obtenus récemment avec des réalisations photoniques [6–8] montrent ainsi la perspective de déplacer les échelles de temps intrinsèques du cerveau de la milliseconde jusqu’à la picoseconde, grâce à l’utilisation de composants de télécommunications optiques, gagnant ainsi près de 9 ordres de grandeur en vitesse de traitement de l’information. C’est dans ce contexte que se positionne notre approche. Une implémentation optoélectronique originale basée sur une dynamique non linéaire électro-optique (EO) en phase nous a permis d’obtenir l’état de l’art en vitesse de reconnaissance vocale, avec plus d’un million de mots traités par seconde.

2 Concepts du RC et dynamiques complexes à retard

Jusqu’à très récemment, le RC a été essentiellement développé par les communautés des RNR, de l’apprentissage machine et des sciences cognitives du cerveau. Cependant, depuis la récente démonstration de d’implémentation matérielle, les communautés de physique non linéaire et de dynamique non linéaire ont commencé à aborder également le sujet. Dans le but de donner une vision concise des concepts du RC, nous proposons dans ce papier une description qualitative de l’approche RC dans le contexte particulier de sa réalisation expérimentale basée sur des dynamiques non linéaires à retard. Le principe qui est proposé permet d’émuler virtuellement grâce aux dynamiques à retard, la grande dimensionalité des réseaux de neurones traditionnellement utilisés pour le RC ou les RNR. Cette émulation purement temporelle [9] d’une dynamique à retard spatio-temporelle revient à adresser les neurones virtuels d’une dynamique à retard via des techniques de multiplexage temporel comme s’illustre dans la Fig. 1 (b). L’excitation d’un tel neurone par une amplitude donnée, se fait ainsi en positionnant cette amplitude à un instant donné correspondant à la position du neurone à l’intérieur de l’intervalle de temps d’un retard. La dynamique du réseau est ensuite globalement décrite par chaque incrément de l’itération d’un retard temporel et de chaque valeur fonctionnelle de $x(t)$ définissant les amplitudes continûment distribuées sur un intervalle de temps correspondant à un retard, c’est-à-dire une itération de $t \in [(n-1)\tau_D; n\tau_D[$ vers $t \in [n\tau_D; (n+1)\tau_D[$. Formellement, cela revient à transformer une équation différentielle à retard en une itération de fonctionnelle $x(t) = x_\sigma(n)$ avec $t = \sigma + n\tau_D$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in [0, \tau_D[$ (n est le temps

discret d'itération et σ est un temps court émulant une « position » virtuelle de neurone à l'intérieur de l'intervalle de temps du retard) :

$$\tau \frac{dx}{dt}(t) = -x(t) + f[x(t - \tau_D)] \iff x_\sigma(n+1) = x_\sigma(n) + \int_{\sigma - \tau_D}^{\sigma} h(\sigma - \xi) f_{\text{NL}}[x_\xi(n)] d\xi. \quad (1)$$

L'équivalence précédente s'obtient en utilisant l'expression de la dynamique comme un produit de convolution avec $h(t)$, la réponse impulsionnelle linéaire de la chaîne d'oscillation à retard. On pourra noter que $h(t)$ apparaît alors comme une fonction de couplage du neurone à la position σ , avec les neurones des positions « distantes » de ξ autour de σ dans le réseau virtuel.

2.1 Le modèle ESN

Le RC est très proches des principes de RNR, à la différence près que la phase d'apprentissage ne consiste plus en l'optimisation, pour un problème donné, de l'ensemble de la connectivité du réseau (entrée, interne et sortie, symbolisées mathématiquement par trois matrices de connectivité \mathbf{W}^N , \mathbf{W}^I et \mathbf{W}^R , voir la figure 1 (a)), mais cet apprentissage concerne dans l'approche RC uniquement la sortie (\mathbf{W}^R ; les autres connectivité étant définies de manière aléatoire une fois pour toute). La chaîne de traitement de l'information par un RC peut alors se décrire de la manière qui suit.

Tout d'abord, le signal d'entrée est mis en forme (multiplexage temporel) par la matrice de connectivité \mathbf{W}^I , afin d'adresser l'ensemble du réseau virtuel. L'information $u_\sigma^I(n)$ ainsi distribuée sur les différents neurones du réseau virtuel en se superposant au signal de la récurrence retardé $x_\sigma(n)$ (l'argument de la fonction $f[\cdot]$ dans l'équation (1) devient ainsi $x_\sigma(n) + \rho u_\sigma^I(n)$). Ceci déclenche alors un transitoire dynamique et non linéaire, dont la loi d'évolution est définie précisément par l'équation (1). Dans l'approche traditionnelle des RC, la dynamique du réseau de neurones est décrite par un produit avec une matrice de connectivité \mathbf{W}^N , qui remplace pratiquement la convolution de l'équation (1). Enfin, une couche de sortie appelée fonction de lecture (*Read-Out*) réalise une convolution entre la réponse dynamique et les coefficients d'une matrice de lecture \mathbf{W}^R . Cette dernière est déterminée par une étape d'apprentissage dont la contrainte est d'optimiser cette opération de lecture linéaire du transitoire dans l'espace des phases de la dynamique.

La dynamique à retard peut alors se représenter symboliquement dans un espace virtuel discret, en échantillonnant la variable d'espace virtuelle σ à intervalles de temps réguliers τ_D/K sur tout un intervalle correspondant à un retard τ_D , c'est-à-dire aux instant $\sigma_k = (k-1)/\tau_D$. Ceci permet de définir sur un intervalle de temps τ_D (à n fixé), un vecteur d'état « spatial » $\mathbf{x}(n) = [x_{\sigma_1}(n), \dots, x_{\sigma_k}(n), \dots, x_{\sigma_K}(n)]^\top$. Le transitoire issu de l'injection dans la dynamique à retard de l'information à traiter, obéit alors à la loi dynamique suivante :

$$x_{\sigma_k}(n+1) = x_{\sigma_k}(n) + \int_{\sigma_k - \tau_D}^{\sigma_k} h(\sigma - \sigma_k) f_{\text{NL}} [x_\sigma(n) + \rho u_\sigma^I(n)] d\sigma, \quad (2)$$

L'opération de lecture (*Read-Out*) de la réponse transitoire afin d'obtenir un résultat de calcul $y(n)$, est calculée typiquement comme une combinaison linéaire des points successifs dans l'espace des phases de la dynamiques à retard. Les coefficients de cette opération de lecture sont précisément issus de la phase d'apprentissage (réduite à un simple problème de régression, généralement linéaire de type *ridge*). La sortie du RC à retard peut alors s'exprimer par (dans le cas d'une sortie à M dimensions) :

$$y_m(n) = \sum_{k=1}^K w_{mk}^R x_k(n) \quad \text{avec} \quad m = 1, \dots, M. \quad (3)$$

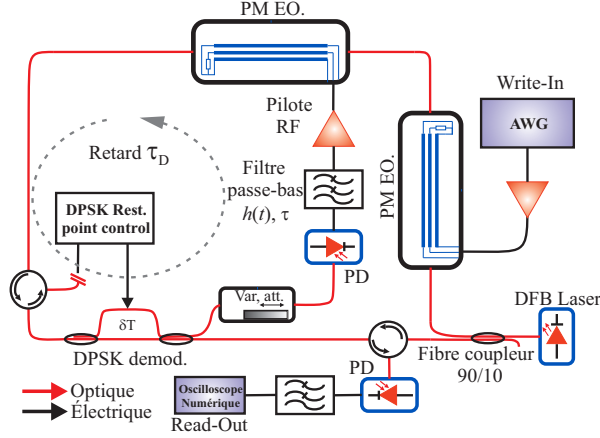


Figure 2. Montage en phase EO.

3 Principe et réalisation expérimentale

Les systèmes dynamiques non linéaires à retard en photonique ont été largement explorés au cours des deux dernières décennies. Ils ont cependant concerné soit des problématiques fondamentales de dynamiques non linéaire, soit des applications très différentes de celle développée dans cet article : la génération de micro-onde à grande pureté spectrale [10], via les solutions périodiques, ou encore le cryptage optique à l'aide de solutions chaotiques de ces mêmes dynamiques optoélectroniques à retard [11]. Parmi les différentes configurations rapportées dans la littérature, notre groupe a contribué à plusieurs versions de l'oscillateur chaotique optoélectronique [12]. La dernière version proposée avait été spécialement conçue dans le cadre des télécommunications optiques cryptées par chaos à un débit de 10 Gb/s. Elle a permis de définir l'état de l'art en communication optique par chaos, à la fois en vitesse de codage et en qualité de transmission, ceci grâce à une architecture extrêmement bien contrôlée [13]. Compte-tenu de ces performances, cette version électro-optique (EO) à modulation de phase s'est imposée comme un très bon candidat pour l'implémentation physique d'un RC ultra-rapide.

3.1 Dynamique non linéaire EO en phase

La figure 2 représente le montage du RC photonique basé sur l'oscillateur EO en phase. La boucle de contre-réaction est inspirée des architectures à retard destinées à générer du chaos optique par voie optoélectroniques [12]. Cet oscillateur utilise deux modulateurs EO de phase, le premier permet de moduler l'information $u_\sigma^I(n)$ sur la phase de la porteuse optique du faisceau laser, tandis que le second superpose à cette information à traiter, le signal $x_\sigma(n)$ issu de la boucle non linéaire à retard. L'ensemble de ce système dynamique à retard non-autonome est décrit par l'équation (2), avec pour expression particulière de la fonction non linéaire, celle réalisée par un démodulateur DPSK (*Differential Phase Shift Keying*) utilisé classiquement en télécommunication optique par modulation de phase différentielle :

$$f_{NL}[\varphi] = \beta \cdot \{ \cos^2[\varphi(t) - \varphi(t - \delta T) + \Phi_0] - \cos^2 \Phi_0 \}, \quad (4)$$

où $\delta T \simeq 402,68$ ps représente un temps de déséquilibre entre deux bras d'un interféromètre de Mach-Zehnder à fibre optique, Φ_0 un *offset* de phase statique de l'interféromètre précisément contrôlé et β est un gain normalisé de la chaîne d'oscillation à retard. Un délai considérable $\tau_D \simeq 63,33$ ns est obtenu simplement par l'accumulation de longueurs de fibre optique des divers composants optiques et optoélectroniques. Des photodiodes amplifiées sont utilisées pour convertir les fluctuations d'intensité à la sortie du démodulateur DPSK en signaux électroniques, que ce soit pour la contre-réaction optoélectronique retardée appliquée au second modulateur EO, ou pour enregistrer à l'aide d'un oscilloscope

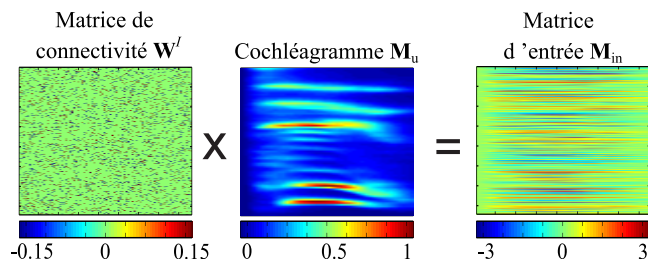


Figure 3. Représentation de l'information à injecter dans la dynamique non linéaire à retard. La matrice \mathbf{W}^I ($K \times Q$) étale l'information de l'entrée représentée par le cochléagramme ($Q \times N$). La matrice résultante \mathbf{M}_{in} ($K \times N$) définit la forme d'onde temporelle $u_\sigma^I(n)$.

temps-réel ultra-rapide, le signal $x_\sigma(n)$ issu du transitoire déclenché par l'injection de l'information $u_\sigma^I(n)$ à traiter. Ce signal enregistré est ensuite utilisé pour apprendre les coefficients de la matrice de lecture, et pour tester l'efficacité de cette lecture par convolution avec la trajectoire du transitoire $x_\sigma(n)$.

3.2 Le test de reconnaissance vocale

Afin de comparer les performances de notre calculateur RC ultra-rapide avec les études précédemment reportées [4–6, 14–16], nous avons mise en œuvre un test standard de classification. Ce test de reconnaissance vocale nous permet de quantifier et d'évaluer la puissance de calcul. Le but principal de ce test est de reconnaître un chiffre prononcé parmi les dix possibles de 0 à 9. Une base de données de 500 chiffres prononcés est utilisée expérimentalement, elle est extraite de la base de données standard TI46 de Texas Instrument. Chaque chiffre est prononcé 10 fois par 5 femmes différentes. La forme d'onde acoustique correspondant à chaque chiffre prononcé est tout d'abord échantillonnée à une fréquence de 12,5 kHz, puis ce signal est converti sous forme 2D par une représentation temps-fréquence de l'onde acoustique, selon le modèle « Lyon Ear ». Ce modèle décrit le pré-traitement identifié physiologiquement dans l'oreille interne, il correspond à une conversion en énergie acoustique répartie dans le domaine des fréquences de Fourier. Il réalise ainsi un spectrogramme ($Q = 86$ canaux de fréquence) évoluant tout au long de la prononciation du chiffre ($N =$ environ 60 à 80 échantillons en moyenne par chiffre prononcé). La représentation temps-fréquence 2D ainsi obtenue est appelée cochléagramme (matrice \mathbf{M}_u). Ce cochléagramme représente dans notre cas l'information d'entrée du RC, qui est alors distribuée aléatoirement sur chacun des neurones virtuels de notre RC photonique à retard, par l'intermédiaire d'une matrice de connectivité \mathbf{W}^I . Cette matrice est creuse (« sparsité » de 0,1) et possède des dimensions définies par le nombre de nœuds K utilisés ($K = 371$) et le nombre de canaux de fréquence de Fourier Q . Les données d'entrée à injecter dans la dynamique non linéaire se composent donc d'une matrice $\mathbf{M}_{in} = \mathbf{W}^I \times \mathbf{M}_u$ de dimension $K \times N$ (voir Fig. 3).

Le signal temporel d'entrée 1D correspondant à la matrice \mathbf{M}_{in} , s'obtient en dépliant horizontalement et séquentiellement les colonnes de cette matrice. Ce signal $\rho u_\sigma^I(n)$ est alors programmé dans un générateur de signaux arbitraires, dont la période d'échantillonnage $\delta\tau = 57,8$ ps définit la séparation entre deux neurones virtuels consécutifs (fréquence d'échantillonnage 17,6 GS/s). Ensuite, le signal de réponse transitoire de la dynamique à retard est enregistré en temps réel via un oscilloscope numérique, consécutivement à l'injection du signal d'entrée. Ce signal est reconverti sous forme d'une matrice 2D \mathbf{M}_x ($K \times N$), en effectuant l'opération inverse du dépliage de la matrice \mathbf{M}_{in} . Le traitement de tous les chiffres de la base de données conduit donc à 500 matrices de réponse transitoire \mathbf{M}_x . La phase d'apprentissage destinée à extraire une matrice de lecture \mathbf{W}^R , consiste à appliquer une méthode de régression *ridge* minimisant l'erreur de l'opération de lecture sur l'ensemble de couples connus (\mathbf{M}_x, \mathbf{B}) de réponses transitoires et matrices cibles. La matrice cible \mathbf{B} peut se définir avec une dimension $M \times N$, où $M = 10$ représente les chiffres possibles et où les éléments lignes du bon chiffre sont à 1 alors que les éléments des autres lignes sont à zéro. Cette régression de type *ridge* est effectuée sur un sous-ensemble d'apprentissage de 475 chiffres prononcés. Le sous-ensemble complémentaire de 25 chiffres est utilisé pour compter les

éventuelles erreurs de l'apprentissage. Une partition des 500 chiffres en 20 sous-ensembles de 25 permet une validation croisée en répétant l'apprentissage 20 fois. Cela permet d'obtenir une mesure moyenne de la performance de calcul dans laquelle chacun des 500 chiffres a été utilisé une fois pour le test. Ce test de classification a été réalisé avec succès (taux d'erreur de mots reconnus de 0,04 %, de l'ordre de l'état de l'art pour ce type de test), avec en plus des vitesses de calcul potentielles autour de 1 million de mots par seconde. Ces résultats ont été obtenus pour des valeurs de paramètre physique $\Phi = 2\pi/5$, $\beta = 0,7$ et $\rho = 1$, dont les valeurs optimales ont été trouvées à l'aide de simulations numériques.

4 Conclusion

Une dynamique non linéaire à retard a été utilisée et implémentée physiquement avec des composants des télécommunications optiques, afin de démontrer la capacité de traitement de l'information ultra-rapide d'une nouvelle méthode de calcul issue des mécanismes identifiés dans le fonctionnement du cerveau. Des performances au niveau de l'état de l'art ont de plus pu être obtenues sur un test de classification de reconnaissance vocale. Une étape ultérieure concerne la possibilité d'intégrer ces concepts dans une puce optique, en utilisant des composants photoniques conventionnels. Les domaines d'application sont nombreux, que ce soit dans les télécommunications modernes, dans le traitement d'image, dans le contrôle de systèmes complexes, etc. Comprendre l'origine théorique du pouvoir calculatoire ainsi révélé par des dynamiques complexes à retard fait également partie des enjeux scientifiques de ce domaine en pleine émergence.

Remerciements : Ce travail a été soutenu par le projet européen PHOCUS (FP7 grant 240763), par le programme Labex ACTION (contract ANR-11-LABX-01-01) et par CONACyT/MEXICO dans le cadre du projet 290788 et de la bourse 314603.

Références

1. H. JAEGER & H. HAAS, *Science*, **304**, 78–80 (2004).
2. W. MAASS, T. NATSCHLÄGER & H. MARKRAM, *Neural Comput.*, **14**, 2531–2560 (2002).
3. D. VERSTRAETEN, B. SCHRAUWEN, M. D'HAENE & D. STROOBANDT, *Neural Networks*, **20**, 391–403 (2007).
4. L. APPELLANT, M. C. SORIANO, G. VAN DER SANDE, J. DANCKAERT, S. MASSAR, J. DAMBRE, B. SCHRAUWEN, C. R. MIRASSO & I. FISCHER, *Nature Commun.*, **2**, 1–6 (2011).
5. L. LARGER, M. C. SORIANO, D. BRUNNER, L. APPELLANT, J. M. GUTIERREZ, L. PESQUERA, C. R. MIRASSO & I. FISCHER, *Opt. Express*, **20**, 3241–3249 (2012).
6. D. BRUNNER, M. C. SORIANO, C. R. MIRASSO & I. FISCHER, *Nat. Commun.*, **4**, 1364 (2013).
7. K. VANDOORNE, J. DAMBRE, D. VERSTRAETEN, B. SCHRAUWEN & P. BIENSTMAN, *IEEE Trans. Neur. Networks*, **22**, 1469–1481 (2011).
8. M. FIERS, T. VAN VAERENBERGH, F. WYFFELS, D. VERSTRAETEN, B. SCHRAUWEN, J. DAMBRE & P. BIENSTMAN, *IEEE J. Neur. Networks and Learning Syst.*, **25**, 344–355 (2014).
9. F. T. ARECCHI, G. GIACOMELLI, A. LAPUCCI & R. MEUCCI, *Phys. Rev. A*, **45**, R4225–R4228 (1993).
10. X. S. YAO & L. MALEKI, *Europhys. Lett.*, **30**, 1525–1526 (1994).
11. A. ARGYRIS, D. SYVRIDIS, L. LARGER, V. ANNOVAZZI-LODI, P. COLET, I. FISCHER, J. GARCIA-OJALVO, C. R. MIRASSO, L. PESQUERA & A. K. SHORE, *Nature*, **438**, 343–346 (2005).
12. L. LARGER & J. M. DUDLEY, *Nature*, **465**, 41–42 (2010).
13. R. LAVROV, M. JACQUOT & L. LARGER, *IEEE J. Quantum Electron.*, **46**, 1430–1435 (2010).
14. R. MARTINENGI, S. RYBALKO, M. JACQUOT, Y. K. CHEMBO & L. LARGER, *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 244101 (2012).
15. Y. PAQUOT, F. DUPOUR, A. SMERIERI, J. DAMBRE, B. SCHRAUWEN, M. HAELTERMAN & S. MASSAR, *Sci. Rep.*, **2**, 287 (2012).
16. R. MARTINENGI, A. BAYLON FUENTES, M. JACQUOT, Y. K. CHEMBO & L. LARGER, *Proc. of SPIE*, **8989**, 89890K–1, 2014.

Étude expérimentale des interactions à trois ondes des vagues capillaires

Michaël Berhanu¹, Annette Cazaubiel^{1,2}, Luc Deike³, Timothée Jamin¹ & Éric Falcon¹

¹ Laboratoire Matière et Systèmes Complexes (MSC), Université Paris Diderot, CNRS UMR 7057, Paris,

² École normale supérieure, Paris

³ Scripps Institution of Oceanography, University of California San Diego

michael.berhanu@univ-paris-diderot.fr

Résumé. Les interactions résonantes à trois ou quatre ondes constituent un type de mécanisme non linéaire classique d'échange d'énergie entre échelles, dans les systèmes où des ondes se propagent [1]. Nous étudions expérimentalement les interactions à trois ondes pour des ondes de surface gravito-capillaires, en considérant deux trains d'ondes monochromatiques se croisant avec un angle réglable dans une cuve fermée. Grâce à des mesures locales et aussi spatio-temporelles, nous détectons l'onde produite non linéairement, de plus faible amplitude avec la fréquence et la longueur d'onde prédites par la théorie des interactions à trois ondes faiblement non linéaires. En tenant compte de la dissipation visqueuse des ondes, il est possible d'estimer expérimentalement le taux de croissance de la troisième onde et de comparer la valeur obtenue avec la valeur théorique. Ces résultats confirment au moins qualitativement et étendent des travaux antérieurs obtenus avec un seul train d'onde se propageant unidimensionnellement [2]. Néanmoins, de manière plus surprenante nous observons expérimentalement l'interaction à trois ondes, même lorsque l'angle entre les deux trains d'ondes, ne permet pas *a priori* de vérifier la condition de résonance au vu de la relation de dispersion linéaire. Pour finir, nous discutons de la pertinence de ces mécanismes d'interactions à trois ondes pour de récentes expériences de turbulence d'ondes capillaires [3].

Abstract. Three or four waves resonant interactions constitute a classical nonlinear mechanism exchanging energy through the scales, in systems of propagating waves [1]. Here we study experimentally three wave interactions for gravity-capillary surface waves for two crossing wave-trains generated in a closed laboratory tank, with a tunable angle. Using a capacitive wave gauge and Diffusive Light Photography method, we detect a third wave of smaller amplitude whose frequency and wavenumber are in agreement with the weakly non-linear triadic resonance interaction mechanism. By performing experiments in stationary regime and taking into account the viscous dissipation, we estimate directly the growth rate of the resonant mode in comparison with theory. These results confirm at least qualitatively and extend earlier experimental results obtained only for unidirectional wave train [2]. However, we observe experimentally three wave interaction, even when the angle between the crossing wave-trains, cannot in principle verify the condition of resonance given the linear dispersion relation. Finally we discuss relevance of three-wave interaction mechanisms in recent experiment studying capillary wave turbulence [3].

1 Introduction

Lorsqu'un champ d'ondes est régi par une équation d'onde linéaire, les différentes échelles de temps (périodes) et d'espace (longueurs d'ondes), évoluent indépendamment. L'introduction d'une non-linéarité dans l'équation d'onde, induit un phénomène d'interactions entre ondes et crée un phénomène de couplage entre les échelles. Les interactions résonantes à trois ondes et quatre ondes constituent un exemple particulièrement important d'interactions, pour des ondes dispersives et faiblement non linéaires. Dans le cas du mécanisme à trois ondes, qui est le plus souvent associé à une non-linéarité quadratique de l'équation d'onde, deux ondes **1** et **2** vont pouvoir échanger de l'énergie avec une troisième **3** sur des temps longs, si les trois ondes forment une triade résonante [1]. Pour cela il faut que leurs nombres d'ondes $\mathbf{k} = 2\pi/\lambda \mathbf{e}_{\mathbf{k}}$ (λ étant la longueur d'onde et $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$ un vecteur unitaire) et leurs pulsations $\omega = 2\pi F$ (F étant la fréquence de l'onde considérée) vérifient la condition de résonance :

$$\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 = \pm \mathbf{k}_3, \quad \omega(\mathbf{k}_1) \pm \omega(\mathbf{k}_2) = \pm \omega(\mathbf{k}_3). \quad (1)$$

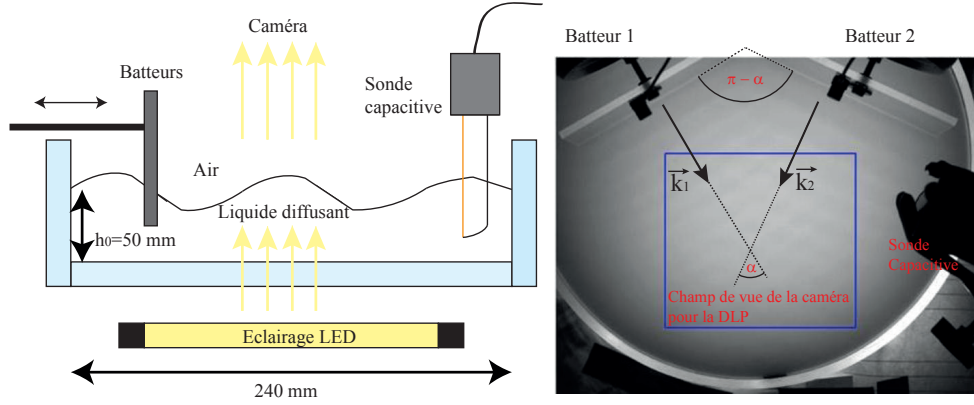


Figure 1. Gauche : Schéma du dispositif expérimental vu de côté. Une cuve circulaire transparente en Plexiglass de diamètre 240 mm est remplie sur une hauteur $h_0 = 50$ mm d'un liquide diffusant (6 mL d'Intralipid 20% pour 1 L d'eau). Les deux trains de vagues sont produits par le mouvement horizontal de deux batteur rectangulaires de largeur 130 mm et plongeant dans le liquide sur une hauteur de 10 mm. De plus, une sonde capacitive placée au centre à 100 mm des batteurs permet d'avoir une mesure au cours du temps de la hauteur du fluide en un point. Pour les mesures spatiales du champ de vagues, on utilise la méthode *Diffusing Light Photography* (DLP). La cuve est éclairée par le dessous par un système de diode électroluminescente Phlox produisant un éclairage homogène sur $200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$. Une caméra rapide, mise au point sur la surface, enregistre l'intensité lumineuse à la surface, pour reconstruire le champ de hauteur de vague, sachant que l'intensité transmise est liée à la hauteur locale de fluide. La sonde capacitive est alors placée hors du champ de la caméra. Droite : Vue de dessus du dispositif. Deux trains d'ondes de vecteurs d'onde respectivement \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 sont produits par les batteurs. L'angle entre \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 est ici fixé à $\alpha_{12} = 54^\circ$. Le rectangle bleu correspond au champ de mesure de la caméra.

Les pulsations suivent alors la relation de dispersion du système d'ondes considéré $\omega(\mathbf{k})$. Parfois, du fait de la forme de relation de dispersion, les résonances à trois ondes sont interdites et il devient nécessaire de passer à l'ordre suivant d'interactions, le mécanisme à quatre ondes à savoir $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 = \pm \mathbf{k}_3 \pm \mathbf{k}_4$ et $\omega(\mathbf{k}_1) \pm \omega(\mathbf{k}_2) = \pm \omega(\mathbf{k}_3) \pm \omega(\mathbf{k}_4)$. Cette situation se rencontre en particulier, si $\omega(k) = k^a$ avec $a < 1$, ce qui est le cas très important des vagues lorsque la force de rappel est la gravité. En effet la relation de dispersion linéaire des ondes à la surface d'un liquide s'écrit $\omega = \sqrt{gk + T/\rho} k^3$, en régime d'eau profonde, c'est-à-dire $kh_0 > 1$ avec h_0 la profondeur de liquide, g étant l'accélération de la pesanteur, T la tension de surface entre l'air et le liquide et ρ la masse volumique du fluide. À petite échelle, lorsque k est plus grand que $\sqrt{\rho g/T}$ (soit $f > 14$ Hz pour une interface eau air avec $\rho \approx 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $T \approx 60 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$), la force de rappel dominante devient la capillarité et la relation de dispersion peut s'approximer par $\omega = \sqrt{T/\rho} k^{3/2}$. Ainsi les vagues capillaires à la surface de l'eau, constituent *a priori*, un exemple simple, pour étudier au laboratoire les interactions résonantes à trois ondes. Ce cas a ainsi été étudié théoriquement dans les années 60 [4, 5]. Ensuite des expériences ont mis en évidence la présence d'interactions à trois ondes dans l'évolution spatiale d'un train d'ondes unidirectionnel, d'abord dans le cas dégénéré où $F_1 = F_2 \approx 9,8$ Hz génère une onde à $F_3 \approx 19,6$ Hz dans la même direction [2], puis dans celui où une onde à la fréquence F_1 donne naissance à deux ondes F_2 et F_3 dans des directions différentes [6, 7]. Plus récemment avec le développement des techniques spatio-temporelles, des mécanismes d'interaction à trois ondes ont été mis en évidence en hydrodynamique pour les ondes inertielles dans un fluide en rotation [8] et pour les ondes internes dans un fluide stratifié [9]. Lorsque la non-linéarité est modérément augmentée et que de nombreuses ondes interagissent, on peut s'attendre à ce qu'un continuum d'interactions à trois ondes entre échelles apparaisse donnant lieu à de la turbulence d'ondes [10], à savoir un régime statistiquement stationnaire et hors-équilibre transférant l'énergie d'une échelle de forçage vers une échelle de dissipation par un phénomène de cascade. Ainsi les interactions résonantes formeraient le mécanisme non linéaire élémentaire de la turbulence d'ondes et

une étude expérimentale des interactions à trois ondes pourrait donc permettre de mieux comprendre des observations récentes de régimes de turbulence d'ondes capillaires [3].

Dans cet article, nous étudions l'interaction entre deux trains d'ondes **1** et **2** se croisant dans une cuve fermée et donnant naissance à une onde **3**. Les deux trains sont émis par deux batteurs oscillants respectivement à la fréquence F_1 et F_2 . Pour vérifier la condition de résonance (1) (dans le cas considéré \pm devient $+$) et la relation de dispersion, il s'avère que le choix d'un couple (F_1, F_2) fixe la valeur de l'angle $\alpha_{1,2}$ entre les deux vecteurs d'ondes associés \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 . La valeur correspondante de l'angle peut se trouver graphiquement ou numériquement. Les résultats présentés dans la suite, correspondent ici au choix suivant des fréquences des ondes mères, $F_1 = 15$ Hz et $F_2 = 18$ Hz et l'on étudiera dans l'espace de Fourier la composante du champ d'ondes à la fréquence $F_3 = F_1 + F_2 = 33$ Hz. Pour caractériser le champ de vagues [3], on utilise alternativement une mesure de hauteur de vagues $h(t)$ en un point par une sonde capacitive et une mesure spatio-temporelle du champ de vagues $h(x, y, t)$ par la méthode optique *Diffusing Light Photography* (DLP) (voir Fig. 1). Dans un premier cas, on impose $\alpha_{1,2} = 54^\circ$, valeur calculée pour avoir la résonance à trois ondes pour $F_1 = 15$ Hz et $F_2 = 18$ Hz. Ensuite on passera au cas où $\alpha_{1,2} = 90^\circ$, pour lequel un phénomène de résonance est, de façon surprenante, observé. Dans cette étude, on s'intéresse en particulier à l'amplitude de l'onde fille, dont on suppose qu'elle résulte d'un équilibre entre le taux de croissance de l'interaction à trois ondes γ_3 et de sa dissipation visqueuse δ_3 . En effet, en faisant l'hypothèse d'homogénéité du champ de vagues, la dynamique de l'onde **3** d'amplitude a_3 et de phase ϕ_3 est régie par les équations suivantes [1, 5, 6] :

$$\partial_t a_3 + \delta_3 a_3 = a_1 a_2 \gamma_3 \sin \phi, \quad (2)$$

$$\partial_t \phi_3 = (a_1 a_2) / a_3 \gamma_3 \cos \phi, \quad (3)$$

$$\text{avec } \gamma_3 = -\frac{k_3}{4\omega_3} \sum_{j=1}^3 \omega_j \omega_{j+1} \left(1 + \frac{\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{k}_{j+1}}{k_j k_{j+1}} \right) \quad \text{et } \phi = \phi_1 + \phi_2 - \phi_3.$$

Ainsi en régime quasi-stationnaire, l'amplitude de l'onde fille a_3 est alors proportionnelle au produit de l'amplitude des ondes mères : $a_3 = \gamma_3 \sin \phi \delta_3^{-1} a_1 a_2$. De plus, on attend d'après l'équation (3) et le signe de γ_3 , que la triade soit verrouillée en phase avec $\phi = -\pi/2$, faisant intervenir les phases respectives des ondes **1**, **2** et **3**. Pour le domaine de fréquence considérée, la dissipation visqueuse des ondes gravito-capillaires, en présence de contaminants de surface (cas habituel lorsque le fluide est de l'eau en contact avec l'atmosphère), peut être approximée par $\delta_3 = (2\sqrt{2})^{-1} \sqrt{\nu \omega_3} k_3 s^{-1}$ [11], avec ν la viscosité cinématique (pour de l'eau $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$).

2 Interaction résonante *classique* : $F_1 = 15$ Hz et $F_2 = 18$ Hz pour $\alpha_{12} = 54^\circ$

La présence de l'onde fille à la fréquence $F_3 = F_1 + F_2 = 33$ Hz est aisément détectée en régime stationnaire en calculant le spectre de puissance de hauteur de vagues en temps (Fig. 2, gauche). On constate aussi la présence d'harmoniques comme multiples des fréquences de forçage, qui pourraient être dûs à des non-linéarités dans la génération des ondes ou leur propagation. L'amplitude de l'onde fille reste plus faible d'un ordre de grandeur par rapport à celles des ondes mères, ce qui permet de ne considérer en première approximation qu'une seule triade résonante. Néanmoins lorsque l'amplitude des ondes mères devient plus forte, le spectre montre de nombreux pics supplémentaires, pouvant être associés à des triades supplémentaires (Fig. 2, gauche). Dans le cas d'une triade simple, pour des amplitudes $a_1 a_2$ suffisamment faible, on peut donc supposer que l'amplitude résulte de l'équilibre entre le taux de croissance γ_3 et la dissipation visqueuse δ_3 .

En régime instationnaire, on peut représenter l'évolution de l'amplitude des composantes filtrées aux fréquences de la triade au cours du temps (Fig. 3). On constate aussi que $\phi = \phi_1 + \phi_2 - \phi_3$ a un comportement aléatoire en absence de forçage, puis atteint une valeur stationnaire de sorte que $\sin \phi \approx -0,9$ proche de -1 , dès que a_3 atteint une amplitude notable. La mise en évidence de ce verrouillage des phases des trois ondes, est un argument fort en faveur de la création de l'onde **3** par le mécanisme

d'interaction résonante. Un autre argument est donné par les propriétés angulaires du spectre spatio-temporel à la fréquence F_3 , $E(k_x/2\pi, k_y/2\pi, F_3)$ (Fig. 4, gauche). Le maximum du spectre permet d'en déduire \mathbf{k}_3 , qui est alors presque confondu avec $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ et ainsi de vérifier vectoriellement la condition de résonance (1). Enfin traçant $a_3/\sin\phi$ en fonction du produit $a_1 a_2$ (Fig. 4, droite), on peut estimer le taux de croissance γ_3 , en prenant l'ajustement correspondant à la droite en pointillé noir. On trouve ainsi expérimentalement $\gamma_3 = 2,4 \times 10^4 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, alors que la valeur théorique attendue est $\gamma_3 = 1,1 \times 10^5 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. L'ordre de grandeur est correct, mais une meilleure quantification de la dissipation visqueuse semble nécessaire pour mieux évaluer ce paramètre. à l'exception du cas dégénéré du train d'ondes unidimensionnel de fréquence proche de 9,8 Hz [2], ces mesures forment la seule estimation expérimentale du taux de croissance associée à l'interaction à trois ondes des ondes de surface gravito-capillaires. Une autre triade pour le couple de fréquences $F_1 = 16 \text{ Hz}$ et $F_2 = 23 \text{ Hz}$, ($\alpha_{12} = 59^\circ$) a fait aussi l'objet d'une étude approfondie, donnant des résultats similaires.

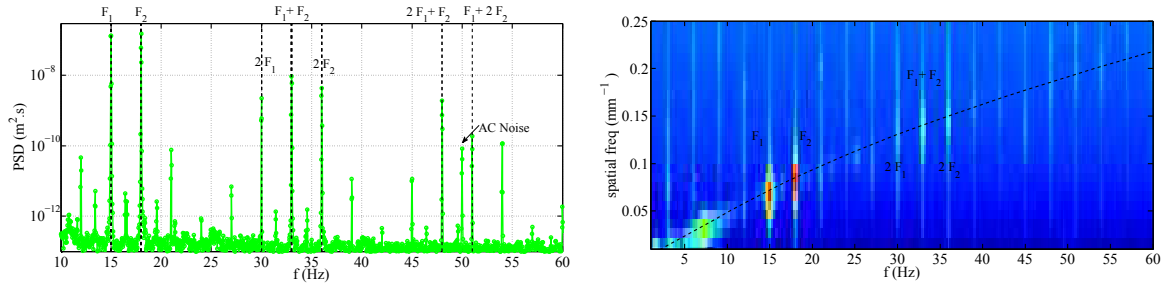


Figure 2. Gauche : Spectre de puissance temporel de hauteur de vagues $E(f)$, mesurée à la sonde capacitive, pour des amplitudes moyennes de forçage. On observe les pics correspondant aux fréquences des trains d'ondes incidents $F_1 = 15 \text{ Hz}$ et $F_2 = 18 \text{ Hz}$. Le pic correspondant à l'interaction résonante $F_1 + F_2 = 33 \text{ Hz}$ est nettement visible. Néanmoins des nombreux autres pics sont visibles correspondant aux harmoniques des modes de forçage $2 F_1$ et $2 F_2$, mais aussi des pics associés à des interactions d'ordre plus élevé ($2 F_1 + F_2$, $F_1 + 2 F_2$). Pour cet exemple, la non-linéarité du champ de vagues est suffisamment forte pour ne pas avoir une résonance simple. Droite : Spectre spatio-temporel $E(f, 1/\lambda)$ de hauteur de vagues obtenu par DLP, moyenné sur les différentes orientations dans le plan O_{xy} . Échelle de couleur logarithmique. Les maxima locaux du spectre correspondent aux pics du spectre temporel. La relation de dispersion linéaire (ligne pointillée) $\omega^2 = \tanh(kh_0) (g k + T/\rho k^3)$ avec la tension de surface ajustée à $T = 50 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ passe bien par ces maxima.

3 Interaction résonante *atypique* : $F_1 = 15 \text{ Hz}$ et $F_2 = 18 \text{ Hz}$ pour $\alpha_{12} = 90^\circ$

À première vue, le mécanisme classique d'interactions résonantes à trois ondes semble validé par l'expérience pour les ondes capillaires. Néanmoins expérimentalement, on observe la présence d'une onde à la fréquence $F_3 = F_1 + F_2 = 33 \text{ Hz}$, lorsque $\alpha_{12} = 90^\circ$ alors que la relation de dispersion linéaire impose $\alpha_{12} = 54^\circ$. L'étude menée dans ce cas, a ainsi montré des résultats assez proches du cas classique présenté précédemment. La principale différence est mise en évidence sur le spectre spatio-temporel à la fréquence F_3 , $E(k_x/2\pi, k_y/2\pi, F_3)$ (Fig. 5, gauche). Le maximum du spectre donne en effet un vecteur \mathbf{k}_3 très proche de $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, en accord avec la relation de résonance. Mais ce pic est hors de la relation de dispersion linéaire (cercle vert), qui impose k_3 pour F_3 donné. On constate de plus, que sur ce spectre, une part non-négligeable du signal se répartit sur la relation de dispersion linéaire, mais dans d'autres directions. La verrouillage de phase demeure, mais $\sin\phi$ semble fluctuer autour de $-0,6$ (Fig. 5, haut-droite), valeur plus éloignée du régime quasi-stationnaire déduit de (2) et (3). Enfin lorsque les amplitudes du produit $a_1 a_2$ sont suffisamment faibles, on observe que a_3 est effectivement proportionnelle à ce produit (Fig. 5, bas-droite), montrant que l'onde **3** est vraisemblablement produite par un mécanisme d'interaction résonante. Avec cette hypothèse, on estime γ_3 par la même méthode que précédemment en prenant $\alpha_{12} = 90^\circ$ et l'on obtient alors $\gamma_3 = 2,0 \times 10^4 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, sachant que la valeur théorique serait $\gamma_3 = 7,1 \times 10^4 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. Des résultats analogues ont été aussi observés précédemment, pour des ondes hydro-élastiques se propageant

sur une membrane flottante [12]. Qu'on puisse créer une composante par le mécanisme d'interactions résonantes, mais en dehors de la relation de dispersion, reste à ce jour, un phénomène surprenant et non compris, pour lequel des expériences complémentaires demeurent nécessaires. Une possible explication pourrait être dû au fait qu'on étudie le champ d'ondes en régime stationnaire dans une cuve fermée. La perturbation créée à la fréquence $F_3 = F_1 + F_2$ et au vecteur d'onde $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ pourrait exister de manière transitoire et relaxer continuellement vers la relation de dispersion.

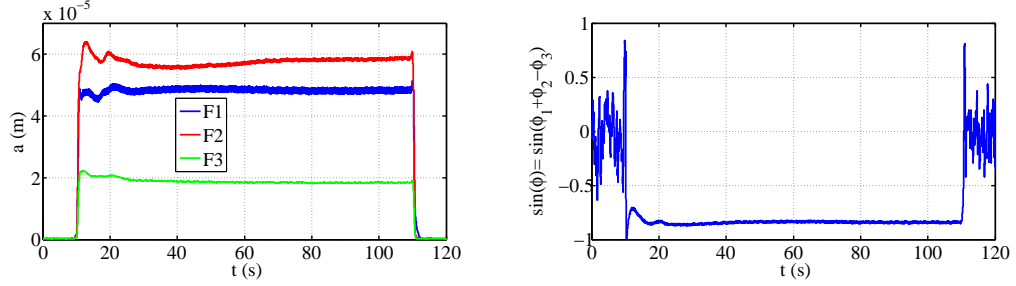


Figure 3. Gauche : Régime instationnaire, amplitude des pics aux fréquences F_1 , F_2 et F_3 en fonction du temps. Les courbes sont obtenues en filtrant passe-bande, le signal de la sonde capacitive. Les batteurs sont démarrés à $t = 10$ s et stoppés à $t = 110$ s. Après une phase de croissance, les amplitudes respectives des pics se stabilisent. Droite : En utilisant une transformée de Hilbert, la phase respective des signaux peut être extraite. On met en évidence le verrouillage de phase de l'onde fille avec les ondes mères, $\phi = \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 \approx$ constante durant la phase de génération. De plus $\sin(\phi)$ est relativement proche de -1 , ce qui est attendu théoriquement en régime quasi-stationnaire.

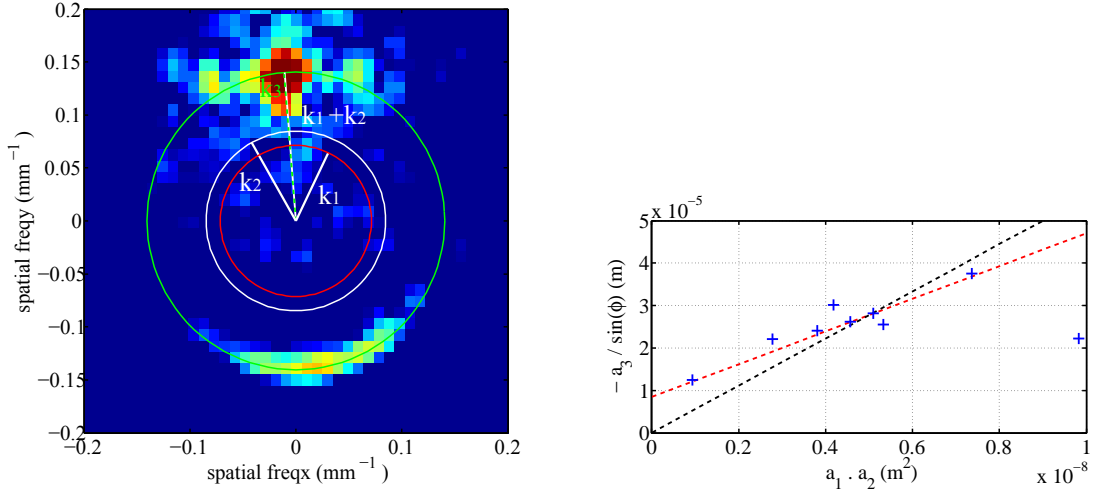


Figure 4. Gauche : Spectre spatio-temporel $E(k_x/2\pi, k_y/2\pi, F_3)$ de hauteur de vagues obtenu par DLP à la fréquence F_3 pour $\alpha_{12} = 54^\circ$. Les traits blanc partant du centre, représentent les vecteurs $\mathbf{k}_1/2\pi$, $\mathbf{k}_2/2\pi$ et $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)/2\pi$, obtenus expérimentalement avec $E(k_x/2\pi, k_y/2\pi, F_1)$ et $E(k_x/2\pi, k_y/2\pi, F_2)$. Le trait vert pointillé correspondant au maximum du spectre est identifié comme $\mathbf{k}_3/2\pi$. On constate que \mathbf{k}_3 et $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ sont quasiment confondus. Les cercles rouge, blanc et vert, donnent les valeurs de \mathbf{k} possibles, compte-tenu de la relation de dispersion linéaire, respectivement pour les fréquences F_1 , F_2 et F_3 . Le signal dans la direction opposée à \mathbf{k}_3 est vraisemblablement dû aux réflexions sur les parois de la cuve. Droite : Estimation du taux de croissance de l'onde $\mathbf{3}$, en traçant $a_3 / \sin \phi$ en fonction du produit $a_1 a_2$. a_3 est à peu près proportionnel à $a_1 a_2$, sauf pour les plus grandes et les plus faibles valeurs.

Pour finir, ce mécanisme non classique semble particulièrement pertinent dans les expériences étudiant la turbulence d’ondes de surface en cuve fermée [3]. En effet, comme l’angle entre \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 , n’est pas imposé, ces interactions paraissent bien plus probables, que celles vérifiant à la fois la relation de dispersion et la condition de résonance. Pour déterminer la part relative entre ces deux types d’interactions résonantes, une mesure des corrélations à trois ondes dans l’espace de Fourier (*bicohérence*), semble nécessaire à la fois en temps et en espace.

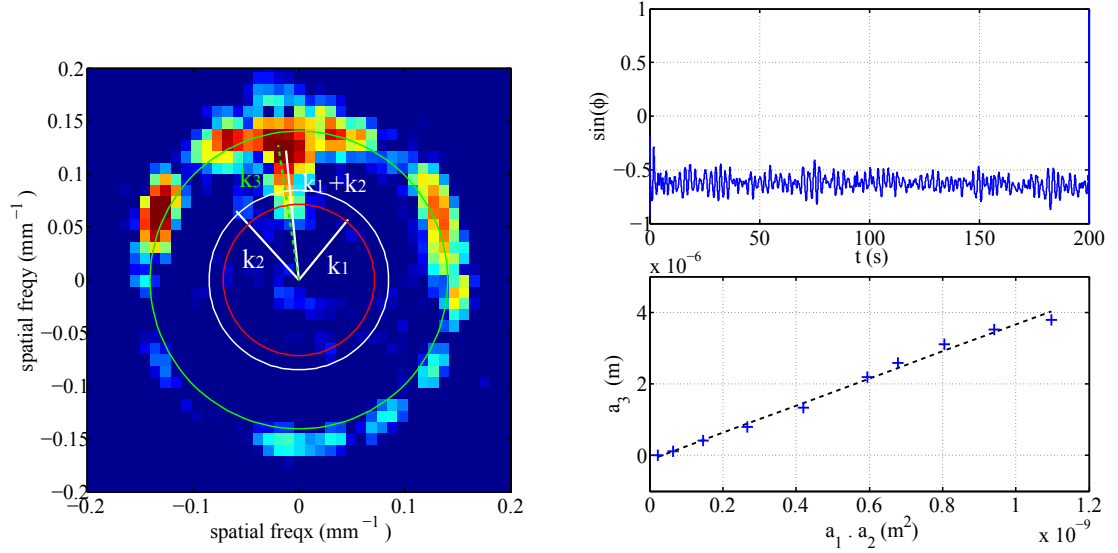


Figure 5. Gauche : Spectre spatio-temporel $E(k_x/2\pi, k_y/2\pi, F_3)$ de hauteur de vagues obtenu par DLP à la fréquence F_3 pour $\alpha_{12} = 90^\circ$. Mêmes notations qu’à la Fig. 4. Le maximum du spectre donne $\mathbf{k}_3 \approx \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Néanmoins ce maximum ne se place pas sur la relation de dispersion linéaire (cercle vert). On remarque aussi que la répartition du signal en dehors de ce pic, se trouve préférentiellement sur la relation de dispersion. Haut-Droite : Evolution de $\sin \phi = \sin(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3)$, au cours du temps en régime stationnaire. Le verrouillage de phase est à nouveau observé, mais les fluctuations semblent plus importantes autour d’une valeur moyenne d’environ $-0,6$. Bas-Droite : Estimation du taux de croissance de l’onde **3**, en traçant a_3 en fonction du produit $a_1 a_2$. L’évolution est bien décrite par une loi de proportionnalité validant le mécanisme de résonance.

Remerciements : Ce travail a été financé par l’ANR Turbulon 12-BS04-0005.

Références

1. A. D. CRAIK, *Wave Interactions and Fluid Flows*. Cambridge University Press, Cambridge (1986).
2. L. F. MCGOLDRICK, *J. Fluid Mech.*, **40**, 251–271 (1970).
3. M. BERHANU & É. FALCON, *Phys. Rev. E*, **87**, 033003 (2013).
4. L. F. MCGOLDRICK, *J. Fluid Mech.*, **21**, 305–331 (1965).
5. W. F. SIMMONS, *Proc. R. Soc. A Lond.*, **309**, 551–575 (1969).
6. D. HENDERSON & J. HAMMACK, *J. Fluid Mech.*, **184**, 15–41 (1987).
7. M. PERLIN, D. HENDERSON & J. HAMMACK, *J. Fluid Mech.*, **219**, 51–80 (1990).
8. G. BORDES, F. MOISY, T. DAUXOIS & P.-P. CORTET, *Phys. Fluids*, **24**, 014105 (2012).
9. S. JOUBAUD, J. MUNROE, P. ODIER & T. DAUXOIS, *Phys. Fluids*, **24**, 0141703 (2012).
10. S. NAZARENKO, *Wave Turbulence*, Springer, Berlin (2011).
11. L. DEIKE, M. BERHANU & É. FALCON, *Phys. Rev. E*, **85**, 066311 (2013).
12. L. DEIKE, *Études expérimentales et numériques de la turbulence d’ondes de surface*, Thèse de doctorat de l’Université Paris Diderot (2013).

Effets du bruit dans le système de sine-Gordon

Bertrand Bodo¹, Savério Morfu², Patrick Marquié², Bernard Essimbi¹ & Roland Alima^{1,2}

¹ Laboratoire d'Énergie, Systèmes électriques et électroniques, Unité de Recherche et de Formation Doctorale en Physique et Applications, Université de Yaoundé 1, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroun

² Université de Bourgogne, Laboratoire LE2I, UMR 6306, Aile des sciences de l'ingénieur, BP 47870, 21078 Dijon Cedex, France

smorfu@u-bourgogne.fr

Résumé. Cette communication porte sur une étude numérique visant à montrer que le bruit peut permettre le déclenchement de modes *breather* dans le système de sine-Gordon. Dans un premier temps, en l'absence de bruit, le phénomène de supratransmission introduit et quantifié par Geniet et Léon est vérifié : il existe une amplitude critique de l'excitation sinusoïdale au-delà de laquelle le milieu transmet de l'énergie bien qu'excité en dehors de sa bande passante. Nous montrons que sous certaines conditions, le bruit peut faciliter l'apparition de ce phénomène de supratransmission et déclencher des modes *breather*.

Abstract. The behaviour of the sine-Gordon system driven in the gap by a noisy sinusoidal excitation is analyzed in numerical experiments. In the absence of noise, we verify the well-known supratransmission effect introduced by Geniet and Leon in the sine-Gordon system: there exists a critical value of the amplitude of the sinusoidal driving beyond which nonlinear modes can be triggered instead of the classical evanescent wave predicted by linear theory. We show that under certain conditions, noise can induce breather generation with a given probability depending on the noise intensity. A bifurcation diagram is proposed to extend the supratransmission effect to a more realistic signal, namely a noisy sinusoidal excitation.

1 Introduction

Depuis maintenant près d'une vingtaine d'années, la façon de percevoir le bruit dans les milieux non linéaires a profondément changé, avec notamment la mise en évidence du phénomène de résonance stochastique [1]. En effet, sous certaines conditions, il a été montré que la réponse d'un système non linéaire à une excitation déterministe peut être améliorée par une quantité appropriée de bruit via cet effet non linéaire de résonance stochastique. Ce phénomène contre-intuitif, introduit dans le contexte de la dynamique des climats [2], a naturellement encouragé la communauté scientifique à prendre en compte la contribution du bruit. De nouvelles perspectives ont ainsi pu être ouvertes dans différents domaines, tels que la modélisation des systèmes biologiques [3–6], le traitement du signal [7, 8], le traitement d'images [9, 10] où encore la transmission non linéaire de l'information [11–13]. Dans ce dernier domaine, il a pu être montré qu'exciter une ligne électrique de transmission en dehors de sa bande passante avec une excitation sinusoïdale, pouvait permettre de déclencher des solitons dans le milieu [14]. Dans la même configuration, mais en l'absence de bruit, Geniet et Léon ont caractérisé un système non linéaire différent [15, 16]. En effet, en considérant un milieu du type sine-Gordon excité dans le gap, il a été montré que, quand l'amplitude de l'excitation excède un certain seuil, le milieu déclenche des modes non linéaires qui peuvent être du type *breather*. Ce phénomène connu sous le nom de supratransmission a été rapporté dans de nombreux guides d'ondes non linéaires [17–20], mais la plupart du temps sans prendre en compte la contribution du bruit. C'est l'objet de la présente communication. En effet, nous nous proposons d'exciter un milieu du type sine-Gordon dans le gap et d'analyser si le bruit peut permettre le déclenchement de l'effet de supratransmission dans une plage de paramètres où la supratransmission n'apparaît pas sans bruit [21]. Dans un premier temps, nous présentons le modèle de sine-Gordon ainsi que le phénomène de supratransmission dans le cas déterministe, c'est-à-dire sans bruit. Par la suite, nous rappelons les différentes lois théoriques prédisant l'apparition de ce phénomène [15]. Nous en profitons pour introduire la procédure numérique retenue pour étudier ce modèle. Dans l'avant-dernière partie, nous analysons si un bruit blanc additif gaussien peut permettre le déclenchement de la supratransmission.

2 Chaîne de sine-Gordon soumise à une excitation déterministe

Le réseau de sine-Gordon étudié consiste en une chaîne d'oscillateurs couplés. Le déplacement du n^e élément $U_n(t)$ est gouverné par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 U_n}{dt^2} - c^2(U_{n+1} + U_{n-1} - 2U_n) + \omega_0^2 \sin U_n + \gamma_n \dot{U}_n = 0. \quad (1)$$

Pour s'assurer qu'il n'y a pas de réflexion en bout de chaîne, le coefficient d'amortissement γ_n est nul pour tous les oscillateurs de la chaîne sauf pour les derniers. Pour obtenir cette distribution d'amortissement le long de la chaîne, nous avons défini le profil suivant

$$\gamma_n = 1 + \tanh\left(\frac{2n - 2N + m}{2b}\right) \quad \text{avec } m = 500 \quad b = 140 \quad \text{et } N = 4000. \quad (2)$$

Lorsque le système de sine-Gordon est forcé sinusoidalement avec une amplitude suffisamment faible pour rester en régime linéaire, le nombre d'onde k et la pulsation ω des ondes linéaires se propageant dans le réseau obéissent à la relation de dispersion :

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2c^2(1 - \cos k). \quad (3)$$

Cette relation de dispersion définit un comportement passe-bande avec une pulsation de coupure basse qui correspond au gap ω_0 et une pulsation de coupure haute $\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 + 4c^2}$. Notre étude sera exclusivement consacrée au cas de pulsations situées dans la bande interdite du gap, c'est à dire $\omega < \omega_0$. Dans ce cas de figure, pour les faibles amplitudes d'excitation, l'étude dans le cas linéaire conduit à une onde évanescente définie par le profil suivant [15] :

$$u_n(t) = A \sin(\Omega t) \exp(-\lambda n). \quad (4)$$

Le coefficient λ se déduit en considérant un nombre d'onde k imaginaire pur. Ainsi en imposant $k = i\lambda$ dans la relation de dispersion (3), nous obtenons

$$\lambda = \operatorname{argcosh}\left(1 + \frac{1 - \omega^2}{2c^2}\right). \quad (5)$$

Les simulations numériques présentées dans cette communication ont été obtenues avec les mêmes conditions aux bords que celles considérées par Geniet et Léon [15] :

- une extrémité de la chaîne est forcée avec une pulsation ω et une amplitude A ;
- la chaîne est initialement au repos ;
- le profil des vitesses des particules de la chaîne correspond à celui d'une onde évanescence.

Les conditions aux bords se limitent donc à

$$u_0(t) = A \sin(\omega t), \quad u_n(0) = 0, \quad \dot{u}_n(0) = A\omega e^{-\lambda n}. \quad (6)$$

La supratransmission apparaît quand l'amplitude A de l'excitation sinusoidale excède une valeur critique A^* qui dépend de la pulsation d'excitation. Plus précisément, une grande quantité d'énergie pénètre dans le milieu via le déclenchement de modes non linéaires. D'après les travaux de Geniet et Leon, cette amplitude critique est fonction de la pulsation d'excitation selon la relation

$$A^* = 4 \arctan \left[\frac{c}{\omega} \operatorname{argcosh} \left(1 + \frac{1 - \omega^2}{2c^2} \right) \right]. \quad (7)$$

Dans un premier temps, nous avons analysé cet effet de supratransmission dans le cas déterministe pour vérifier l'expression (7) établie par Geniet et Léon. Une fois le cas déterministe validé en simulation numérique, nous pourrions étudier en simulation les effets du bruit sur la supratransmission. Pour simuler le modèle de sine-Gordon défini par l'équation (1), nous avons utilisé une méthode de Runge-Kutta

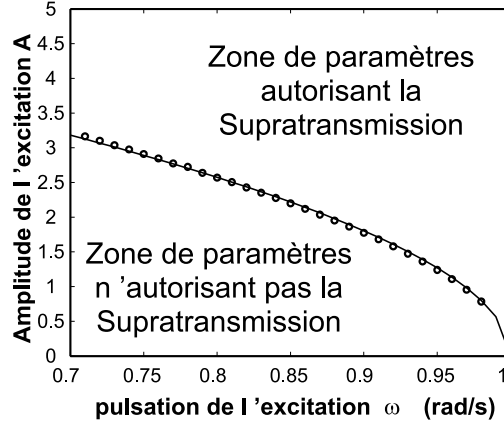


Figure 1. Amplitude critique A^* de l'excitation déclenchant le phénomène de supratransmission en fonction de la pulsation Ω d'excitation. L'expression théorique (7) tracée en trait plein est comparée aux résultats issus de simulations numériques et représentés par des symboles (o). Les paramètres du modèle sont $N = 4000$, $m = 500$, $b = 140$, $\omega_0 = 1$, $c = 10$.

d'ordre 4 avec un pas d'intégration temporel $dt = 10^{-2}$ ainsi que les conditions (6). L'amplitude critique A^* au delà de laquelle la supratransmission se manifeste est déterminée par dichotomie après intégration du modèle (1).

La figure 1 compare les résultats issus de simulations numériques à l'expression théorique (7) donnant l'amplitude critique A^* de l'excitation déclenchant la supratransmission en fonction de la pulsation ω d'excitation. Notre procédure d'intégration numérique du modèle de sine-Gordon est validée puisque la figure 1 montre un excellent accord entre simulation numérique et expression théorique. En particulier, la courbe donnant l'amplitude critique A^* en fonction de la pulsation ω définit deux zones de paramètres amplitude-pulsation pour lesquels le phénomène de supratransmission peut être ou non observé.

3 Chaîne de sine-Gordon soumise à une excitation stochastique

L'excitation sinusoïdale considérée dans le paragraphe précédent est maintenant perturbée par un bruit blanc $\eta(t)$ qui est additif gaussien et de valeur efficace σ . L'autocorrélation de ce bruit est donc

$$\langle \eta(t) | \eta(t) \rangle = \sigma^2 \delta(t). \quad (8)$$

De plus, comme notre intérêt porte sur l'étude de la génération de modes non linéaires qui seront du type *breather*, nous remplaçons pour $t > t_0$ les conditions aux bords (6) par les conditions suivantes

$$u_0(t) = A \exp\left(-\frac{t-t_0}{(20\pi/\omega)}\right) (\sin(\omega t) + \eta(t)) H(t-t_0), \quad (9)$$

où $H(t-t_0)$ est la fonction de Heaviside et t_0 correspond à l'instant où le *breather* atteint le 50^e oscillateur de la chaîne. En modifiant ainsi les conditions aux bords, la chaîne est excitée sinusoïdalement à l'une de ses extrémités jusqu'à ce qu'un *breather* soit déclenché et atteigne la 50^e cellule. L'amplitude de l'excitation sinusoïdale est alors diminuée de telle sorte qu'aucun *breather* ne soit plus généré.

3.1 Modus operandi

Les paramètres de la chaîne de sine-Gordon sont les suivants : $\omega_0 = 1$, $c = 10$, tandis que la pulsation de l'excitation sinusoïdale est fixée à $\omega = 0,95$. Les simulations seront effectuées sur une fenêtre d'observation temporelle $T = 2000$ et avec un réseau de longueur $N = 4000$. En l'absence de bruit ($\eta(t) = 0$),

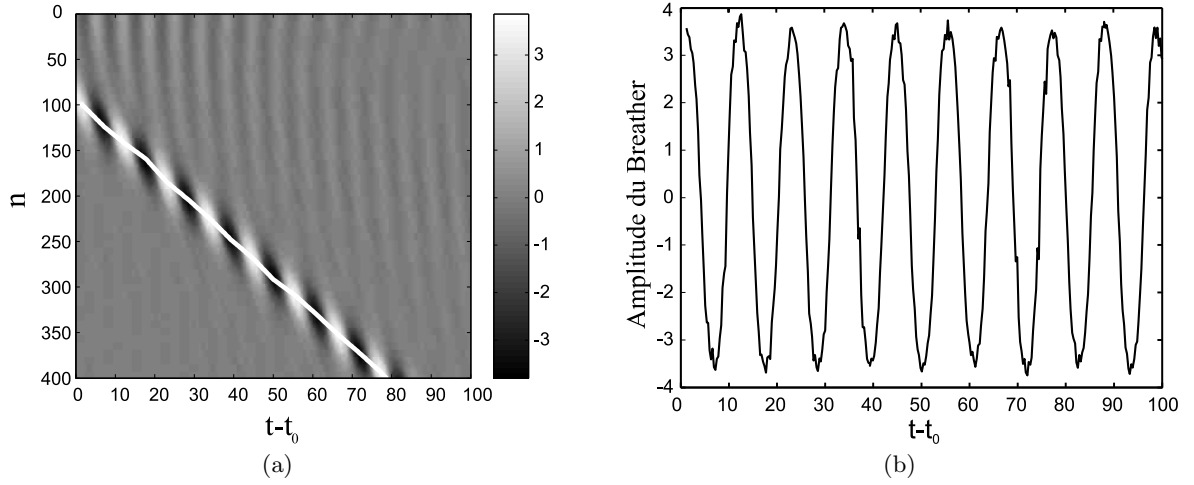


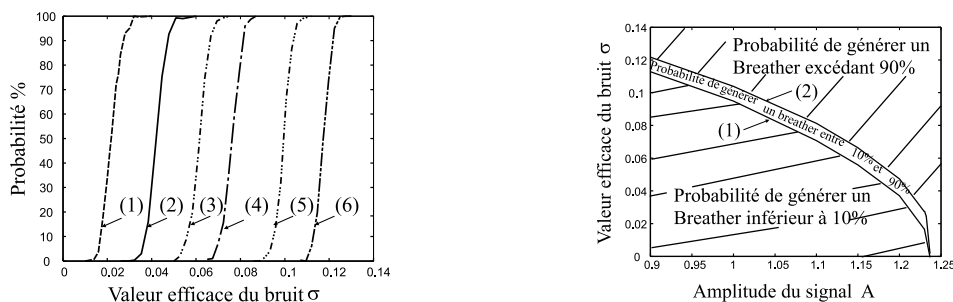
Figure 2. (a) Représentation spatiotemporelle du *breather* déclenché dans le système de sine-Gordon lorsque ce dernier est excité avec un signal sinusoïdal bruité. La ligne blanche correspond à une estimation de la direction de propagation du *breather*. (b) Évolution temporelle du maximum du *breather* dans son repère de propagation. Les paramètres sont : $N = 4000$, $m = 500$, $b = 140$, $\omega_0 = 1$, $c = 10$, $\omega = 0,95$, $A = 1,23$, $\sigma = 0,04$.

conformément aux résultats présentés à la figure 1 du paragraphe précédent, l'amplitude critique au delà de laquelle la supratransmission se déclenche est obtenue en simulation numérique pour $A^* = 1,24$. Par conséquent, nous choisissons une amplitude d'excitation A en dessous de cette valeur critique A^* de sorte que, sans bruit, le milieu ne soit pas en condition de supratransmission.

Comme la méthode de Runge-Kutta utilisée pour résoudre l'équation de sine-Gordon (1) requiert des échantillons du signal pour des instants correspondant au demi pas d'intégration $dt/2$, le bruit fut estimé aux instants $t + dt/2$ par une interpolation linéaire entre les valeurs du bruit générées aux instants t et $t + dt$ selon le principe détaillé dans la référence [22]. Par ailleurs, pour chaque valeur efficace de bruit σ considérée, un moyennage d'ensemble sur 200 simulations fut réalisé en partant des conditions définies par les relations (6) et (9). Nous avons eu ainsi accès à la probabilité de générer un mode non linéaire du type *breather* en fonction de l'intensité de bruit σ .

3.2 Résultats des simulations numériques

Nos simulations ont pu révéler qu'il est possible de produire et propager des modes du type *breather* si une quantité de bruit appropriée est ajoutée. C'est ce que montre le diagramme de la figure 2. (a) qui représente l'état spatiotemporel du réseau pour une valeur efficace de bruit $\sigma = 0,04$. Les alternances de niveaux de gris observées dans le diagramme montrent que le *breather* ainsi produit se propage dans le réseau. Nous avons également déterminé l'évolution temporelle du maximum atteint par le *breather* en le suivant dans son repère de propagation. La trajectoire du *breather* a été obtenue en suivant les extrema locaux du diagramme spatio-temporel de la figure 2. Nous avons ensuite effectué une interpolation linéaire entre deux extrema consécutifs, ce qui a permis de suivre le *breather* dans sa direction de propagation, c'est à dire sur la ligne blanche de la figure 2. (a). En relevant l'amplitude du *breather* sur cette trajectoire, on obtient la représentation temporelle de la figure 2. (b) qui correspond au *breather* dans son repère de propagation. Le signal bruité obtenu correspond bien à des oscillations caractéristiques d'un *breather* auxquelles s'ajoute du bruit provenant de l'excitation introduite à l'entrée de la chaîne. Pour caractériser ce déclenchement de modes *breather* provoqué par le bruit, nous avons estimé la probabilité de produire de tels modes en effectuant un moyennage sur 200 réalisations. Nos résultats sont présentés à la figure 3. (a)



(a) Probabilité de déclencher un mode *breather* en fonction de l'amplitude efficace σ du bruit pour différentes amplitudes A de l'excitation sinusoïdale. Les probabilités sont estimées sur 200 simulations. Amplitude de l'excitation sinusoïdale : (1) $A=1,23$, (2) $A=1,2$, (3) $A=1,15$, (4) $A=1,1$, (5) $A=1$, (6) $A=0,9$.

(b) Diagramme de bifurcation de la chaîne de sine-Gordon soumise à une excitation sinusoïdale bruitée. Les courbes (1) et (2) correspondent respectivement aux valeurs efficaces critiques $\sigma_{10\%}$ et $\sigma_{90\%}$ pour lesquelles un *breather* est produit avec une probabilité de 10% et 90%. Ces 2 valeurs critiques définissent 3 régions de paramètres permettant le déclenchement de modes *breather* avec une certaine probabilité.

Figure 3. Effet du bruit sur le déclenchement de modes *breather* dans le système de sine-Gordon. Les paramètres sont $N = 4000$, $m = 500$, $b = 140$, $\omega_0 = 1$, $c = 10$, $\omega = 0,95$.

où la probabilité de déclenchement est tracée en fonction de la valeur efficace de bruit σ pour différentes amplitudes de l'excitation A .

Les courbes obtenues sont des fronts. En effet, la probabilité de déclencher des modes *breather* est tout d'abord nulle pour les faibles valeurs d'intensité de bruit. Puis, si l'amplitude de bruit σ dépasse une valeur critique, la probabilité croît très rapidement jusqu'à 1, indiquant qu'un mode *breather* est obligatoirement généré. Afin de déterminer la quantité de bruit nécessaire pour déclencher des modes *breather*, nous avons défini deux valeurs efficaces de bruit critique $\sigma_{10\%}$ et $\sigma_{90\%}$ qui correspondent aux intensités de bruit autorisant la production de mode *breather* avec des probabilités respectives de 10% et 90%. Ces deux valeurs critiques ont été tracées sur la figure 3. (b) en fonction de l'amplitude A de l'excitation. Les courbes (1) et (2) ainsi obtenue sur la figure 3. (b) délimitent trois zones de paramètres. En dessous de la première courbe, l'amplitude A de l'excitation ainsi que la valeur efficace de bruit σ sont trop faibles pour permettre la production de modes *breather* car il y a moins 10% de chance d'observer ces modes. Au contraire, pour une amplitude et une intensité de bruit choisies au-dessus de la seconde courbe critique de la figure 3. (b), l'excitation sinusoïdale bruitée est suffisamment importante pour déclencher des *breather* avec une probabilité excédant 90%. Enfin, pour une amplitude A et une intensité de bruit σ situés entre les deux courbes critiques de la figure 3. (b), la probabilité d'observer un *breather* est dans l'intervalle [10% – 90%].

4 Conclusion

Cette communication a traité des effets du bruit sur la génération de modes *breather* dans le modèle de sine-Gordon. Nous avons montré qu'ajouter du bruit blanc gaussien à un signal sinusoïdal qui excite le réseau de sine-Gordon peut permettre la génération de modes *breather* dans une zone de paramètres où ces modes n'apparaissent pas en l'absence de bruit. À l'aide de simulations numériques, nous avons estimé la probabilité de déclenchement de ces modes en fonction de l'amplitude efficace de bruit σ et ceci pour différentes amplitudes du signal sinusoïdal. Nous avons également construit un diagramme de bifurcation qui montre que le bruit peut provoquer la supratransmission en dessous de son seuil déterministe de déclenchement. Généralement, les milieux non linéaires pour lesquels la supratransmission

existe possèdent également un comportement bistable [19,23]. Vu que les systèmes non linéaires bistables peuvent utiliser le bruit pour effectuer de la détection [24], il pourrait être intéressant d'analyser si ces milieux du type sine-Gordon peuvent être utilisés dans le même contexte d'applications.

Références

1. L. GAMMAITONI, P. HÄNGGI, P. JUNG & F. MARCHESONI, Stochastic resonance, *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 223–282 (1998).
2. R. BENZI, G. PARISI, A. SUTERA & A. VULPIANI, Stochastic resonance in climatic change, *Tellus*, **34**, 10–16 (1981).
3. F. MOSS, L. M. WARD & W. G. SANNITA, Stochastic resonance and sensory information processing: A tutorial and review of application, *Clin. Neurophysiol.*, **115**, 267–281 (2004).
4. Z.-C. LONG, F. SHAO, Y.-P. ZHANG & Y.-G. QIN, Noise-enhanced hearing sensitivity, *Phys. Lett. A*, **323**, 434–438 (2004).
5. B. LINDNER, J. GARCÍA-OJALVO, A. NEIMAN & L. SCHIMANSKY-GEIER, Effects of noise in excitable systems, *Phys. Rep.*, **392**, 321–424 (2004).
6. A. DESTEXHE, M. RUDOLPH & D. PARÉ, The high-conductance state of neocortical neurons in vivo, *Nat. Neurosci.*, **4**, 739–751 (2003).
7. S. ZOZOR & P. O. AMBLARD, Noise aided processing: Revisiting dithering in a Sigma-Delta quantizer, *IEEE T. Signal Proces.*, **53**, 3202–3210 (2005).
8. J. C. COMTE & S. MORFU, Stochastic resonance: Another way to retrieve subthreshold digital data, *Phys. Lett. A*, **309**, 39–43 (2003).
9. E. SIMONOTTO, M. RIANI, C. SEIFE, M. ROBERTS, J. TWITTY & F. MOSS, Visual perception of stochastic resonance, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1186–1189 (1997).
10. M. HONGLER, Y. DE MENESES, A. BEYELER & J. JACQUOT, The resonant retina: Exploiting vibrational noise to optimally detect edges in an image, *IEEE T. Pattern Anal.*, **25**, 1051–1062 (2003).
11. J. F. LINDNER, B. J. BREEN, M. E. WILLS, A.R. BULSARA & W. DITTO, Monostable array-enhanced stochastic resonance, *Phys. Rev. E*, **63**, 051107 (2001).
12. A. A. ZAIKIN, J. GARCIA-OJALVO, L. SCHIMANSKY-GEIER & J. KURTHS, Noise induced propagation in monostable media, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 010601 (2002).
13. S. MORFU, Propagation failure reduction in a Nagumo chain, *Phys. Lett. A* **317**, 73–79 (2003).
14. S. B. YAMGOUÉ, S. MORFU & P. MARQUIÉ, Noise effects on gap wave propagation in a nonlinear discrete LC transmission line *Phys. Rev. E*, **75**, 036211 (2007).
15. F. GENIET & J. LEON, Energy transmission in the forbidden band gap of a nonlinear chain, *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 134102 (2002).
16. J. LEON, Nonlinear supratransmission as a fundamental instability, *Phys. Lett. A*, **319**, 130–136 (2003).
17. R. KHOMERIKI, Nonlinear band gap transmission in optical waveguide arrays, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 063905 (2004).
18. J. E. MACÍAS-DÍAS & A. PURI, An application of nonlinear supratransmission to the propagation of binary signals in weakly damped, mechanical systems of coupled oscillators, *Phys. Lett. A*, **366**, 447–450, (2007).
19. K. TSE VE KOON, J. LÉON, P. MARQUIÉ & P. TCHOFO-DINDA, Cut-off solitons and bistability of the discrete LC electrical line: Theory and experiments, *Phys. Rev. E*, **75**, 066604 (2007).
20. B. BODO, S. MORFU, P. MARQUIÉ & M. ROSSÉ, A Klein-Gordon electronic network exhibiting the supratransmission effect, *Electron. Lett.*, **46**, 123–124 (2010).
21. B. BODO, S. MORFU, P. MARQUIÉ & B. ESSIMBI, Noise induced breather generation in a sine-Gordon chain, *J. Stat. Mech.*, **2009**, P01026 (2009).
22. G. P. HARMER & D. ABBOTT, Simulation of circuits demonstrating stochastic resonance, *Microelectr. J.*, **31**, 553–559 (2000).
23. R. KHOMERIKI & J. LEON, Bistability in the sine-gordon equation: The ideal switch, *Phys. Rev. E*, **71**, 056620 (2005).
24. F. DUAN & D. ABBOTT, Signal detection for frequency-shift keying via short-time stochastic resonance, *Phys. Lett. A*, **344**, 401–410 (2005).

Effet d'une perturbation haute fréquence sur la réponse du système de FitzHugh-Nagumo soumis à une excitation basse fréquence subliminale : simulation et expérimentation

Maxime Bordet, Savério Morfu & Patrick Marquié

Université de Bourgogne - Laboratoire LE2I UMR 6306 Aile des sciences de l'ingénieur BP 47870 21078 Dijon Cedex
smorfu@u-bourgogne.fr

Résumé. Dans cette communication, nous menons conjointement une étude en simulation numérique ainsi qu'une étude expérimentale de la réponse du système de FitzHugh-Nagumo soumis à une excitation bi-chromatique. Cette excitation est constituée d'un signal basse fréquence perturbé par une composante haute fréquence additive. Selon l'amplitude B de la perturbation haute fréquence, la réponse du système peut être optimisée à la basse fréquence. Un choix approprié du rapport des fréquences d'excitations peut conduire à une meilleure optimisation de la réponse du système.

Abstract. We perform a numerical and an experimental analysis of the FitzHugh-Nagumo system submitted to a bichromatic excitation, that is the sum of two sinusoidal components. The experiments are carried out with an electronic circuit whose voltages obey to the set of FitzHugh-Nagumo equations. The bichromatic excitation consists of a high frequency perturbation added to a low frequency component. Using the magnitude spectrum, we show that the amplitude of the perturbation can enhance the response of the system to the low frequency driving via the well known Vibrational Resonance effect. A better resonance can be achieved by an appropriate matching of the frequencies of the two sinusoidal components.

L'évolution des tensions de certains circuits électroniques peut être régie par des équations différentielles non linéaires. Il en découle que ces circuits peuvent constituer une solution pour étudier expérimentalement des effets non linéaires que l'on retrouve dans de nombreux domaines scientifiques, tels que la physique, la chimie ou la biologie. Ces signatures non linéaires ont inspiré de nombreuses applications en science de l'ingénieur. Par exemple, le concept de soliton est maintenant bien établi dans le domaine de la transmission d'information [1–3], tandis que celui de réseaux cellulaires non linéaires, plus connu sous l'acronyme anglo-saxon (C.N.N.), a permis de développer des applications dans le domaine du traitement d'images [4, 5]. Parmi les autres effets non linéaires, la Résonance Stochastique, qui se traduit par l'amélioration des performances d'un système non linéaire par ajout de bruit, a pu ouvrir des perspectives d'applications en traitement du signal [6–8]. En effet, il a pu être établi que le bruit pouvait améliorer des procédés de traitement d'images [9], mais pouvait également aider les systèmes neuronaux à détecter des stimuli de faible amplitude [6]. Dans ce dernier domaine des neurosciences, du fait de la surprenante efficacité des neurones à traiter l'information, la mise en évidence de nouvelles propriétés non linéaires est d'une importance capitale pour pouvoir développer de nouvelles applications de traitement bio-inspirées [10].

En particulier, il a pu être montré qu'une perturbation haute fréquence pouvait remplacer le bruit et permettre l'amélioration de la détection d'un signal basse fréquence. En effet, cet effet, connu sous le nom de Résonance Vibrationnelle (*R.V.*), apparaît quand un signal composé d'une basse fréquence f et d'une perturbation haute fréquence F excitent un système non linéaire [11, 12]. Pour une quantité appropriée de l'amplitude B de la perturbation haute fréquence, l'amplitude du spectre à la basse fréquence peut être amplifiée, améliorant ainsi la détection de la composante basse fréquence de l'excitation.

Cet effet de Résonance Vibrationnelle, dont les applications potentielles sont toujours en cours d'exploration [13], a été rapporté numériquement et expérimentalement dans des oscillateurs bistables [14]. Cependant, la dynamique de ces oscillateurs n'obéit pas à un modèle neuronal connu. Concernant les

modèles neuronaux où la $R.V.$ a pu être montrée en simulation numérique, on peut citer le modèle de FitzHugh-Nagumo. En ce qui concerne les circuits électroniques décrivant la dynamique neuronale, cet effet de $R.V.$ a pu être caractérisé dans des circuits de Chua [11].

Malheureusement, ces études expérimentales n'ont pas pu être comparées quantitativement avec des simulations numériques car les circuits de Chua utilisés ne sont pas exactement décrits par les équations du système de FitzHugh-Nagumo. Par conséquent, seules des études comparatives qualitatives entre des résultats théoriques et expérimentaux ont pu être menées dans les systèmes neuronaux [11, 12]. Par ailleurs, l'étude complète de la réponse du système en fonction de l'amplitude et la fréquence de la perturbation haute fréquence n'a jamais été conduite dans le modèle de FitzHugh-Nagumo. Dans cette communication, on se propose de conduire une analyse numérique et expérimentale de cet effet de $R.V.$ dans le modèle neuronal de FitzHugh-Nagumo [15]. L'étude expérimentale s'appuiera sur un circuit dont la tension obéit au système de FitzHugh-Nagumo dans le plan amplitude-fréquence de la perturbation [16]. Cette particularité permettra de valider expérimentalement les résultats obtenus en simulation numérique. Pour conduire notre étude sur la $R.V.$, nous présenterons tout d'abord notre circuit électronique ainsi que l'excitation bichromatique qui lui sera appliquée : c'est-à-dire une composante sinusoïdale basse fréquence perturbée additivement par une autre composante haute fréquence. Dans la troisième partie, pour montrer l'effet de $R.V.$, une analyse de la réponse du circuit sera menée en fonction de l'amplitude de la perturbation. Nous analyserons ensuite conjointement comment le système répond en fonction de l'amplitude et la fréquence de la perturbation.

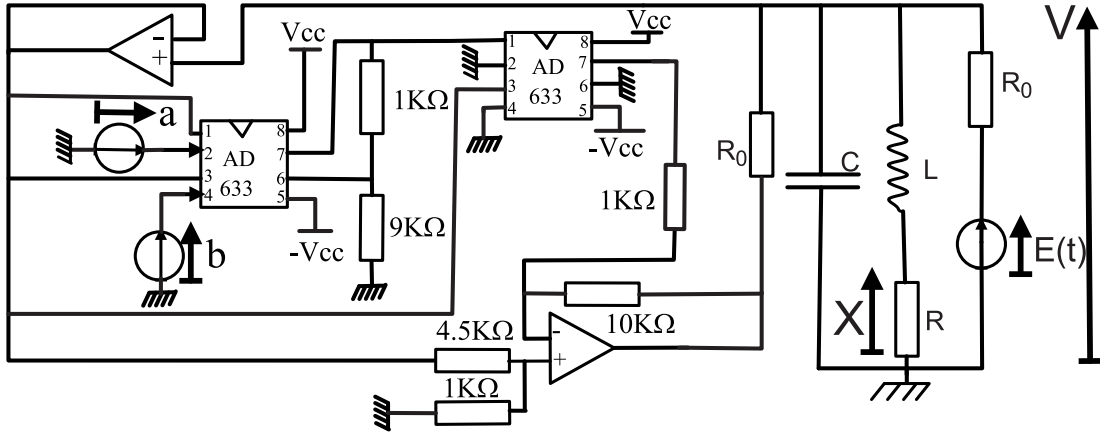
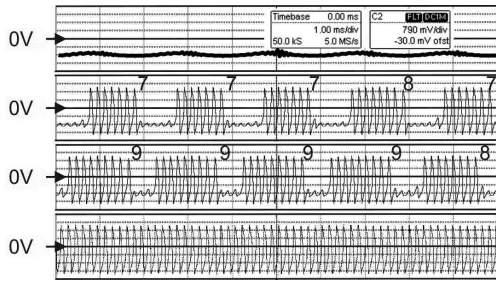


Figure 1. Circuit électronique dont les tensions X et V sont solutions du modèle de FitzHugh-Nagumo. Ce circuit, qui est soumis à l'excitation $E(t)$, comprend deux multiplieurs analogiques AD633JNZ, des amplificateurs opérationnels TL081, deux générateurs de tension continue délivrant les tensions $a = 2$ V et $b = -2,6$ V. Valeurs des composants : $L = 10$ mH, $C = 22$ nF, $R = 320$ Ω et $R_0 = 1,33$ k Ω .

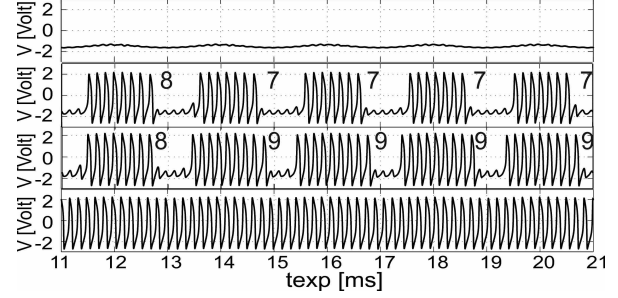
1 Présentation et paramétrage du dispositif expérimental

En appliquant les lois de Kirchhoff au circuit de la figure 1, on peut montrer que la tension V est solution du système d'équations normalisées de FitzHugh-Nagumo suivant [5] :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -V(V - a)(V - b) - W + E(t), \\ \frac{dW}{dt} &= \epsilon(V - \gamma W). \end{aligned} \quad (1)$$



(a) Chronogrammes de la tension V relevés à l'oscilloscope.



(b) Signaux V obtenus par résolution numérique du système d'équations différentielles (1).

Figure 2. Différentes réponses du circuit obtenues de haut en bas pour les 4 différentes amplitudes B de la perturbation haute fréquence, soit $B = 0,05$ V, $B = 0,42$ V, $B = 0,54$ V et $B = 1$ V. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V et $b = -2,6$ V, $f = 500$ Hz, $A = 0,53$ V, $F = 6,1$ kHz, $E_0 = -0,55$ V, $\epsilon = 3,89$, $\gamma = 0,24$.

Dans ce modèle, les paramètres ϵ et γ peuvent être ajustés avec les valeurs de composants R , R_0 , C et L via la normalisation suivante :

$$\gamma = R/R_0 \quad \text{et} \quad \epsilon = R_0^2 C/L. \quad (2)$$

De plus, les variables normalisées W et t du système (1) dépendent respectivement de la tension X et du temps expérimental t_{exp} selon le changement de variables suivant :

$$W = \frac{R_0 X}{R}, \quad t = \frac{t_{\text{exp}}}{R_0 C}. \quad (3)$$

Les valeurs des composants ont été fixées à $R_0 = 1,33$ k Ω , $C = 22$ nF, $L = 10$ mH, $R = 320$ Ω , tandis que les racines a et b de la non linéarité cubique ont été ajustées avec des sources de tensions continues à $a = 2$ V et $b = -2,6$ V.

Il peut être montré que la tension V peut prendre la forme de potentiel d'action, d'où l'intérêt du système de FitzHugh-Nagumo pour décrire les systèmes neuronaux. Enfin, l'excitation du circuit est produite par la tension E qui comprend 3 contributions : une tension constante E_0 , une composante basse fréquence f d'amplitude A et une perturbation haute fréquence F d'amplitude B . Ainsi, l'excitation du circuit s'exprime avec les unités de temps expérimentales sous la forme :

$$E(t_{\text{exp}}) = E_0 + A \cos(2\pi f t_{\text{exp}}) + B \cos(2\pi F t_{\text{exp}}). \quad (4)$$

La tension continue E_0 est choisie de telle sorte qu'en l'absence de toute autre excitation sinusoïdale ($A = B = 0$), le circuit n'oscille pas. Cette condition est remplie en simulation numérique et expérimentalement quand $E_0 = -0,55$ V.

Dans tout ce qui suit, la basse fréquence f ainsi que l'amplitude A de cette composante basse fréquence sont fixées à 500 Hz et 0,53 V pour que le circuit ne déclenche pas de potentiel d'action sans l'aide de la perturbation haute fréquence ($B = 0$). Notons que dans toute notre étude, la résolution du système de FitzHugh-Nagumo (1) a été effectuée à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4. De plus, nous avons considéré un nombre d'échantillons $N = 2^{20}$ et un pas d'intégration d'équations différentielles $dt = 100/[2^{20}(f \times R_0 \times C)]$.

En ce qui concerne les données expérimentales, elles ont été directement acquises et traitées avec un oscilloscope LeCroy waverunner. Pour analyser la réponse du circuit, c'est-à-dire la tension V , que les résultats soient issus de simulations numériques ou d'expérimentation, nous avons choisi de les présenter à l'aide d'unités de temps expérimentales.

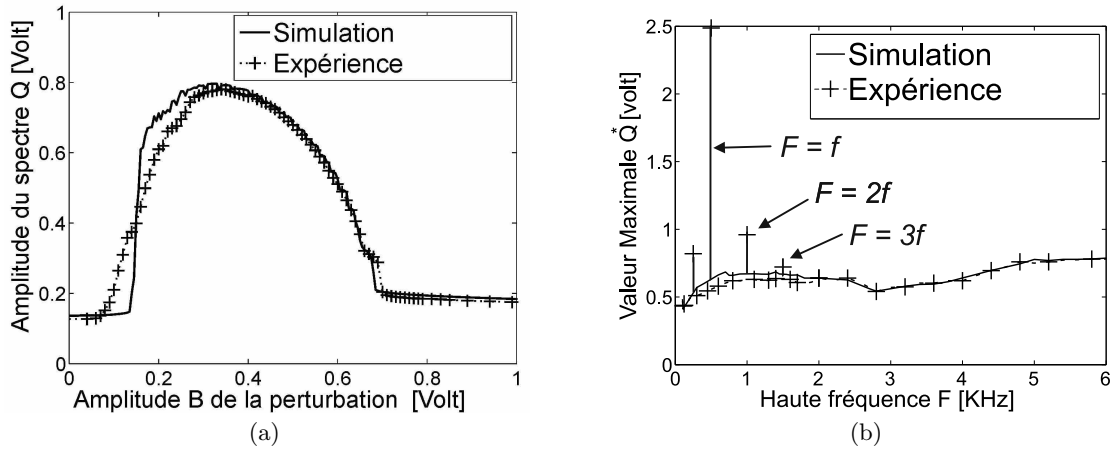


Figure 3. (a) Amplitude Q du spectre de la tension V estimée à la basse fréquence $f = 500$ Hz en fonction de l'amplitude B de la perturbation de fréquence $F = 6,1$ kHz. (b) Évolution du maximum Q^* atteint par ajustement de l'amplitude B de la perturbation haute fréquence en fonction de la fréquence F de cette perturbation. Les simulations en trait plein sont comparées aux relevés expérimentaux. Les paramètres du système sont : $a = 2$ V et $b = -2,6$ V, $f = 500$ Hz, $A = 0,53$ V, $E_0 = -0,55$ V, $\epsilon = 3,89$, $\gamma = 0,24$.

2 Résonance Vibratoire

Dans un premier temps, il s'agit d'étudier comment le système répond quand la perturbation est de haute fréquence fixée à $F = 6,1$ kHz et que son amplitude B varie. Par la suite, la valeur de la haute fréquence F sera modifiée. On se place dans le cas où la perturbation haute fréquence est $F = 6,1$ kHz et l'on étudie comment le système répond. La figure 2 résume le comportement du système en présentant (a) expérimentalement et (b) numériquement les chronogrammes des tensions $V(t_{\text{exp}})$ pour 4 valeurs différentes de la perturbation haute fréquence B . Si l'amplitude B de la perturbation est trop faible, comme c'est le cas pour $B = 0,05$ V (chronogrammes du haut des figures 2. (a) et 2. (b)), aucun potentiel d'action n'est déclenché. Quand l'amplitude B de la perturbation augmente, nous observons différentes configurations où des déclenchements de potentiels d'action se produisent entrecoupés d'intervalles de temps sans activité.

Ces séquences de potentiels d'action sont superposées à la figure 2 pour les valeurs d'amplitude haute fréquence $B = 0,42$ V et $B = 0,54$ V. Par exemple, pour $B = 0,42$ V, nous avons obtenu la séquence de potentiels d'action 7-7-7-8-7 qui est la même que celle trouvée en simulation numérique (à un décalage temporel près), soit 8-7-7-7-7. Enfin, pour de fortes amplitudes de la perturbation haute fréquence, le système déclenche des potentiels d'action avec un taux correspondant exactement à la haute fréquence $F = 6,1$ kHz. En ce qui concerne la détection de la basse fréquence f , nous avons réalisé une analyse spectrale de la tension V . En particulier, nous avons mesuré l'amplitude Q du spectre de la tension V à la basse fréquence f .

L'évolution de Q est tracée à la figure 3. (a) en fonction de l'amplitude B de la perturbation haute fréquence. Que ce soit en simulation ou expérimentalement, la courbe obtenue montre une résonance qui est caractéristique du phénomène de Résonance Vibratoire. De plus, c'est pour une amplitude de la perturbation $B = 0,38$ V que la détection de la basse fréquence est la meilleure puisque l'amplitude du spectre à la basse fréquence est maximisée et vaut sensiblement $Q = 0,78$ V.

Par la suite, nous noterons Q^* ce maximum atteint par ajustement de l'amplitude B de la perturbation haute fréquence. Nous nous sommes également intéressés à l'évolution de ce maximum Q^* en fonction de la fréquence F . Pour cela, nous avons adopté la méthodologie suivante : pour chaque fréquence F de la perturbation, nous avons déterminé l'amplitude maximum Q^* atteinte par Q lorsque l'on fait varier B . De façon très surprenante, comme le montre la figure 3. (b), l'évolution de Q^* en fonction de F est une

courbe continue d'où émergent des pics situés aux multiples et sous-multiples de la basse fréquence f , soit plus précisément $F = f/m$ et $F = nf$ avec ($m = 1, 2$ et $n = 1, 2, 3$).

Cela signifie que quand les deux fréquences f et F sont multiples ou sous-multiples, la réponse du circuit peut être encore plus importante, ce qui implique une meilleure détection de la basse fréquence f . Par exemple, pour $F = 2f$, nous obtenons $Q^* = 1$ V, ce qui est nettement plus important que la valeur $Q^* = 0,78$ V obtenue avec $F = 6,1$ kHz. Cependant, on notera que pour $F = 3f$, le gain est moins important. Enfin, pour $n > 3$ et $m > 2$, plus aucun bénéfice ne peut être attendu en prenant une fréquence multiple puisqu'il n'y a plus aucun pic qui émerge clairement de la courbe continue de la figure 3. (b).

Par ailleurs, quand les deux fréquences sont identiques, soit $F = f = 0,5$ kHz, Q est le plus important. En effet, en théorie, augmenter l'amplitude B si $F = f$ est équivalent à augmenter l'amplitude A de la composante basse fréquence. Par conséquent, l'amplitude de la composante spectrale basse fréquence augmentera inéluctablement conduisant à une valeur infinie de Q^* . En pratique, on obtient une amplitude de 2,5 V pour Q^* du fait que le circuit sature.

3 Conclusion

Pour conclure, nous avons mené conjointement une étude expérimentale et en simulation numérique du phénomène de Résonance Vibratoire dans le modèle neuronal de FitzHugh-Nagumo. Les données expérimentales et numériques confirment que dans les systèmes neuronaux, un signal basse fréquence peut être détecté en utilisant une amplitude appropriée d'une perturbation haute fréquence. De plus, cette détection est d'autant plus importante que la fréquence de la perturbation est un multiple de la composante basse fréquence à détecter. Pour finir, il faut noter que des perspectives d'applications intéressantes ont été récemment montrées numériquement soulignant l'intérêt d'étudier ces phénomènes non linéaires [13].

Références

1. M. REMOISSENET, *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments*, 3^e édition, Springer, Berlin, 1999.
2. G. AUBIN, T. MONTALANT, J. MOULU, F. PIRIO, J.-B. THOMINE & F. DEVAUX, 40 Gbit/s OTDM soliton transmission over transoceanic distances, *Electron. Lett.*, **32**, 2188–2189 (1996).
3. B. BODO, S. MORFU, P. MARQUIÉ & M. ROSSÉ, A Klein-Gordon electronic network exhibiting the supra-transmission effect, *Electron. Lett.*, **46**, 123–124 (2010).
4. L. O. CHUA, *CNN: A Paradigm for Complexity*, World Scientific, Singapore, 1988.
5. S. MORFU, P. MARQUIÉ, B. NOFIELE & D. GINHAC, Nonlinear systems for image processing, *Adv. Imag. Electr. Phys.*, **152**, 79–153 (2008).
6. L. GAMMAITONI, P. HÄNGGI, P. JUNG & F. MARCHESONI, Stochastic Resonance, *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 223–287 (1998).
7. O. OLIAEI, Stochastic resonance in sigma-delta modulators, *Electron. Lett.*, **39**, 173–174 (2003).
8. F. CHAPEAU-BLONDEAU & D. ROUSSEAU, Nonlinear SNR amplification of harmonic signal in noise, *Electron. Lett.*, **41**, 618–619 (2005).
9. A. HISTACE & D. ROUSSEAU, Constructive action of noise for impulsive noise removal in scalar images, *Electron. Lett.*, **42**, 393–395 (2006).
10. G. LASSERE, S. MORFU & P. MARQUIÉ, Coherence resonance in Bonhoeffer-Van der Pol circuit, *Electron. Lett.*, **13**, 669–670 (2009).
11. E. ULLNER, A. ZAIKIN, J. GARCÍA-OJALVO, R. BÁSCONES & J. KURTHS, Vibrational Resonance and vibrational propagation in excitable systems, *Phys. Lett. A*, **312**, 348–354 (2003).
12. P. S. LANDA & P. V. E. MCCLINTOCK, Vibrational Resonance, *J. Phys. A*, **33**, L433 (2000).
13. V. N. CHIZHEVSKY & G. GIACOMELLI, Vibrational resonance and the detection of aperiodic binary signal, *Phys. Rev. E*, **77**, 051126 (2008).

14. J. P. BALTANÁS, L. LÓPEZ, I. I. BLECHMAN, P. S. LANDA, A. ZAIKIN, J. KURTHS & M. A. F. SANJUÁN, Experimental evidence, numerics and theory of vibrational resonance in bistable systems, *Phys. Rev. E*, **67**, 066119 (2003).
15. M. BORDET & S. MORFU, Experimental and numerical study of noise effects in a FitzHugh-Nagumo system driven by a biharmonic signal, *Chaos Soliton. Fract.*, **54**, 82–89 (2013).
16. M. BORDET & S. MORFU, Experimental and numerical enhancement of Vibrational Resonance in a neural circuit, *Electron. Lett.*, **48**, 903–905 (2012).

Effect of mechanical boundary conditions on the flow reversal in square Rayleigh-Bénard cells.

Andrés Castillo-Castellanos^{1,2,3}, Anne Sergent^{2,3} & Maurice Rossi^{1,3}

¹ Institut ∂' Alembert, 4 Place Jussieu, Paris, 75252 CEDEX 05, France.

² LIMSI-CNRS, rue John von Neuman, Orsay, 91403 CEDEX, France

³ Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 4 Place Jussieu, Paris, 75252 CEDEX 05, France

andres.castillo@dalembert.upmc.fr

Résumé. On étudie l'influence des conditions mécaniques imposées aux bords sur les renversements observés dans une cellule de convection de Rayleigh-Bénard de forme carrée. On considère deux configurations avec des conditions mécaniques différentes sur la plaque supérieure : i) condition de non-glissement comme dans le cas classique (RBC), et ii) condition de glissement (RBS). Les nombres de Rayleigh et Prandtl utilisés sont tels qu'on observe des renversements dans les deux cas. Le mécanisme de renversement est le même pour les deux configurations. Toutefois les renversements sont plus courts et plus fréquents pour RBS que pour RBC. La température moyenne est significativement plus basse et le flux de chaleur plus élevé pour RBS. Au cours d'un processus de renversement, on effectue un bilan énergétique et on suit l'évolution de l'énergie potentielle disponible. Le flux de chaleur entrant dans le système est converti en énergie potentielle disponible qui s'accumule à l'intérieur des écoulements de coin contra-rotatifs ainsi que dans la couche limite thermique, conduisant ainsi à une augmentation de volume de ces écoulements de coin.

Abstract. This study explores the effects of mechanical boundary conditions on flow reversals observed inside square Rayleigh-Bénard convection cells. We consider two configurations where different conditions are imposed on the top boundary: i) a no-slip condition as in the classical case (RBC) and ii) a free-slip condition (RBS). The *Rayleigh* and *Prandtl* numbers are fixed to values where flow reversals are observed for both configurations. The reversal mechanism is the same for both cases. However reversals are shorter and more frequent for RBS than RBC. The bulk temperature is revealed to be significantly lower and the heat flux larger for RBS. During a standard reversal process, we perform a mechanical energy budget and follow the evolution of the available potential energy. Heat entering the system is transformed into available potential energy and accumulates inside counter-rotating corner flows and thermal boundary layers, prompting corner flows to grow.

1 Introduction

Forced two-dimensional turbulence in the presence of rigid boundaries is characterized by self-organization into coherent structures heavily dependent on the domain geometry. For a square domain, a spontaneous *spin-up* is observed [1] with a single central vortex and small counter-rotating corner flows. In semi-regular intervals, this structure breaks and subsequently reorganizes itself into a new central vortex. In the classical Rayleigh-Bénard (RB) convection problem, this behavior has been observed numerically [2, 3] and experimentally [3]. The flow reversal mechanism is identified in Ref. [2] using Fourier analysis. One obtains dominating modes corresponding to single roll, double rolls and four rolls flow configurations. Flow reversal is described as the transition between these different modes *via* the corner flows. More recently, proper orthogonal decomposition analysis was used [4] to extract coherent structures naturally associated with the flow. This approach which is more adequate, gave results consistent with those of Ref. [2].

The boundary conditions (BC) influence on the dynamics of two-dimensional convection cells has been recently explored [5]: it was observed that mechanical boundary conditions have a larger impact on the system than thermal conditions. In the present paper, we study the influence of mechanical boundary conditions on flow reversals inside square RB cells. We consider two RB cells where only the top BC are changed: i) a no-slip condition as in the classical case (RBC), and ii) a free-slip condition (RBS).

2 Problem setting

2.1 Model equations

Let us consider a fluid contained in a square domain $[-H/2, H/2] \times [-H/2, H/2]$ with adiabatic no-slip sidewalls and a constant temperature T_{bot} (resp. T_{top}) imposed at the bottom (resp. the top). The *Rayleigh* and *Prandtl* numbers are defined as

$$\text{Ra} \equiv \frac{g\beta H^3[\Theta]}{\kappa\nu}, \quad \text{Pr} \equiv \frac{\nu}{\kappa}, \quad (1)$$

where g is gravity, β volumetric thermal expansion coefficient, κ fluid thermal diffusivity, ν kinematic viscosity and $[\Theta] = T_{\text{bot}} - T_{\text{top}} > 0$. The characteristic length and velocity used to obtain the dimensionless system of equations are the height H and $\frac{\kappa}{H}\sqrt{\text{Ra}}$, respectively. $\mathbf{x} = (x, z)$ is the coordinate vector, where x and z stand for the horizontal and vertical directions. The dimensionless velocity $\mathbf{u} = (u, w)$ and reduced temperature θ then satisfy the dimensionless Boussinesq equations

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot [\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}] = -\nabla p + \text{Pr Ra}^{-\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{u} + \text{Pr} \theta \mathbf{e}_z, \\ \partial_t \theta + \nabla \cdot [\mathbf{u} \theta] = \text{Ra}^{-\frac{1}{2}} \Delta \theta. \end{cases} \quad (2)$$

Sidewalls are adiabatic. On top (resp. bottom) walls, a temperature $\theta = -0.5$ (resp. $\theta = 0.5$) is imposed. For velocity no-slip conditions $\mathbf{u} = 0$ are imposed on the side and bottom walls. For the top boundary either a no-slip condition $u = w = 0$ (RBC), or a free-slip condition, $\partial_z u = w = 0$ (RBS) is imposed.

The values of $\text{Ra} - \text{Pr}$ used for direct numerical simulations (DNS) correspond to a turbulent flow regime, where reversals have been reported [2,3]: $\text{Pr} = 4.3$ (value for water at 40 °C) and from $\text{Ra} = 10^7$ to 5×10^7 . In the following, for any field $A(\mathbf{x}, t)$, $\langle A \rangle$ (resp. \bar{A}) stands for spatial (resp. temporal) average.

2.2 Numerical method and spatial resolution

The model equations (2) are discretized using Bell-Colella-Glaz advection scheme [6], [7]. Solutions are obtained for more than 8,000 convective time units. Spatial resolution requirements for DNS [8] are verified using the Nusselt number $\bar{\text{Nu}} = \sqrt{\text{Ra}} \langle w\theta \rangle - \langle \partial_z \theta \rangle$. For RBC [9], as well as for RBS, exact equalities can be written for the time-averaged Nusselt number $\bar{\text{Nu}}$ and the thermal dissipation rate $\bar{\text{Nu}}_\theta \equiv \langle \nabla \theta \cdot \nabla \theta \rangle_V$ or the viscous dissipation rate $\bar{\text{Nu}}_\epsilon \equiv \langle \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \rangle_V + 1$. Lack of numerical convergence of $\bar{\text{Nu}}_\theta$ and $\bar{\text{Nu}}_\epsilon$ with the time-averaged Nusselt averaged over the top plate $\bar{\text{Nu}}_{\text{top}}$ and bottom plate $\bar{\text{Nu}}_{\text{bot}}$ could indicate that spatial resolution is insufficient. For two values of $\text{Ra} - \text{Pr}$, these Nusselt values converge within 1% when evaluated during the simulation length (see Table 1).

Top BC	Ra	$\bar{\text{Nu}}_{\text{bot}}$	$\bar{\text{Nu}}_{\text{top}}$	$\bar{\text{Nu}}_\epsilon$	$\bar{\text{Nu}}_\theta$	σ_{bot}	σ_{top}
No-slip	1×10^7	13.072	13.070	13.051	13.032	1.3	1.3
	5×10^7	20.997	20.999	20.936	20.849	1.9	1.9
Free-slip	1×10^7	16.644	16.642	16.614	16.573	1.7	3.0
	5×10^7	26.975	26.974	26.885	26.695	2.5	4.4

Table 1. Time-averaged values $\bar{\text{Nu}}_{\text{bot}}$, $\bar{\text{Nu}}_{\text{top}}$ and standard deviation for the bottom and top walls Nusselt number $\sigma_{\text{bot}} = ((\text{Nu}_{\text{bot}} - \bar{\text{Nu}}_{\text{bot}})^2)^{1/2}$ and $\sigma_{\text{top}} = ((\text{Nu}_{\text{top}} - \bar{\text{Nu}}_{\text{top}})^2)^{1/2}$. Quantities evaluated using 8,000 convective time units.

3 Global angular impulse and reversals

The vorticity $\omega_c(t)$ measured at the cell centre can be used to characterize the central vortex. We define a large eddy turnover time $\tau_E = 4\pi/|\omega_c|$. The values of τ_E are $\tau_E = 4.83$ for RBC and $\tau_E = 4.46$ for

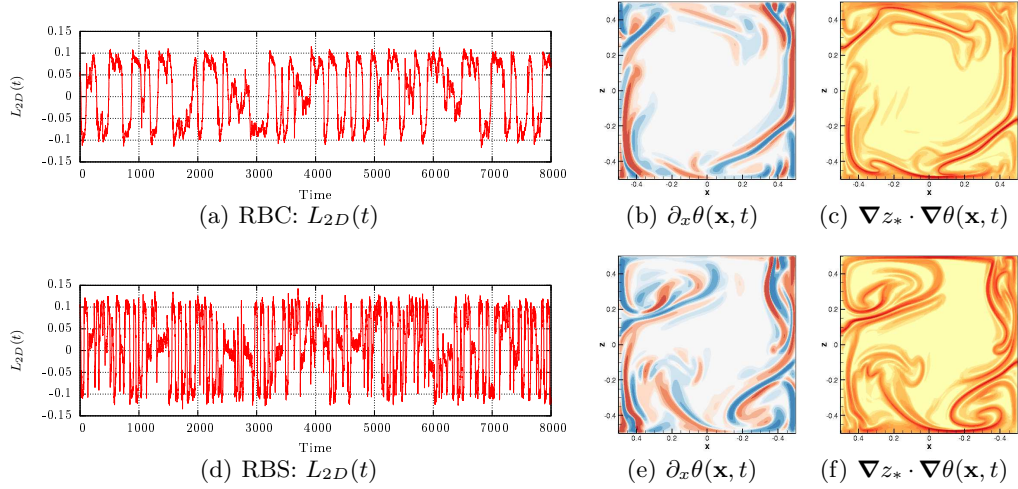


Figure 1. $Ra = 5 \times 10^7$: (a,d) Time evolution of the angular impulse with respect to the centre of the cell $L_{2D}(t) = -\frac{1}{2} \int \mathbf{x}^2 \omega(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$, ω being the vorticity. (b,e) Horizontal temperature gradient $\partial_x \theta(\mathbf{x}, t)$ and (c,f) diffusive mixing term $\nabla_{z^*} \cdot \nabla \theta(\mathbf{x}, t)$.

RBS. A better way to quantify organized rotation is to measure the global angular impulse with respect to the centre of the cell, $L_{2D} \equiv -\frac{1}{2} \int \mathbf{x}^2 \omega(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ where ω denotes the vorticity field. A flow reversal is usually defined as a rapid increase (for negative values) or decrease (for positive values) of $L_{2D}(t)$ followed by a change of sign. Figure 1 shows the evolution of $L_{2D}(t)$: flow reversals are observed in both RBC and RBS with peak values, $\max(|L_{2D}|)(t) = 0.1170$ and $\max(|L_{2D}|)(t) = 0.1068$, respectively.

In order to narrow down the definition of flow reversals, we identify points where $L_{2D}(t) = 0$, and points where a cut-off value is exceeded, $L_{2D}(t) = \pm 1/3 \max(L_{2D})$. Values of 0, +1, or -1 are assigned to these points accordingly. Looking at the sequence of these points, we are able to assign one of three possible states: *plateau* (a sequence of 1, 1, 1 or -1, -1, -1), *reversal* (a sequence of 1, 0 - 1 or -1, 0, 1), or *cessation* (every other combinations) [4]. By this procedure, we are able to provide a measure of the time spent in each state and thus to identify for each time series, the mean interval between reversals $\bar{\tau}_l$, the mean duration of a reversal $\bar{\tau}_d$.

For RBC, results are in good agreement with [3, 4] for $Ra = 5 \times 10^7$: $\bar{\tau}_l = 29.40 \tau_E = 141.3$ and $\bar{\tau}_d = 2.4 \tau_E = 15.5$. For RBS at $Ra = 5 \times 10^7$, the system spends less time in the *plateau* state ($\bar{\tau}_l = 13.3 \tau_E = 59.3$) and the reversal itself is shorter ($\bar{\tau}_d = 1.8 \tau_E = 8.1$).

Note that the global angular impulse satisfies the following equation [10]

$$\frac{dL_{2D}}{dt}(t) = \frac{\text{Pr}}{\sqrt{Ra}} \text{I} + \text{II} - \text{M}, \quad (3)$$

where the I, II, and M contributions originate from diffusive terms, advective terms and external forces,

$$\begin{cases} \text{I} \equiv \oint [\omega[\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}] - \frac{1}{2} \mathbf{x}^2 \partial_n \omega] dS - 2 \int \omega d\mathbf{x}, \\ \text{II} \equiv \frac{1}{2} \oint \mathbf{u}^2 [\mathbf{n} \times \mathbf{x}] dS, \\ \text{M} \equiv \frac{1}{2} \text{Pr} \int \mathbf{x}^2 \partial_x \theta d\mathbf{x}. \end{cases} \quad (4)$$

For both RBS and RBC, the balance occurs between I and M, and II is negligible. For I the surface term containing $\partial_n \omega$ is larger by an order of magnitude. Note that the circulation term in I is not zero for RBS, but it plays a negligible role. Figures 1 (b) and 1 (e) show $\partial_x \theta(\mathbf{x}, t)$, which acts as the vorticity production term in the bulk and is related to M. This term is shown to be concentrated along the vertical sidewalls and at the front of colliding plumes.

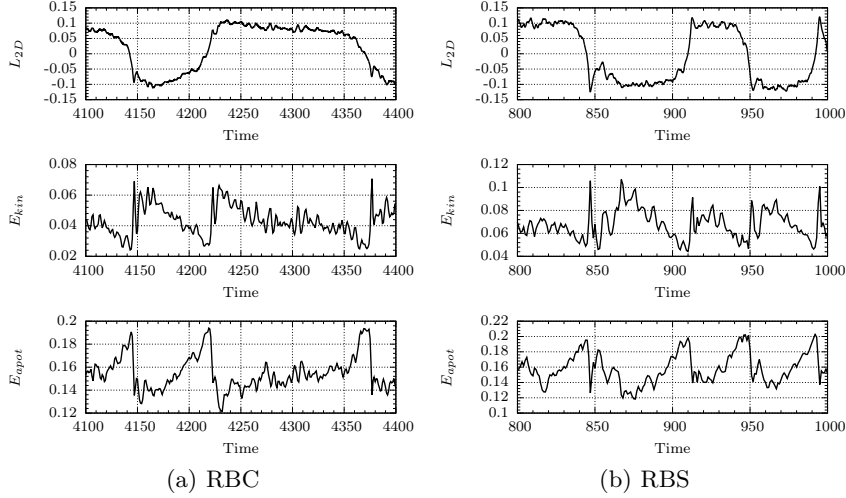


Figure 2. $Ra = 5 \times 10^7$: Time evolution for angular impulse $L_{2D}(t)$, kinetic energy $E_{kin}(t)$, and available potential energy $E_{apot}(t)$, during consecutive reversals for (a) RBC configuration and (b) RBS configuration.

4 Mean temperature and heat flux

For the RBS cell, the mean temperature is 10 % lower than $(\theta_{bot} + \theta_{top})/2$ which is the value found in RBC. A similar result was reported by [5] for free-slip side-walls and wide aspect ratio. In that case it was considered to be a flow effect heavily dependent on the initial conditions. In our case, we believe this behaviour is sustained on a long term basis because of the top/bottom BC asymmetry.

Regarding the heat flux, it increases around 40 % when going from RBC to RBS configuration (see time-averaged values in Table 1). For RBC, the heat flux behaves similarly at the top and bottom walls, while for RBS the standard deviation σ_{top} almost doubles with respect to σ_{bot} (see Table 1). Note that $\sigma_{bot}/\overline{Nu}_{bot}$ is very close for RBS and RBC. This could lead us to think that the RBS cell behaves as a combination of one no-slip half-cell at the bottom and one free-slip half-cell at the top. A similar idea has been put forward by [11] for other asymmetric configurations.

5 Reversal mechanism: Energy build-up and release of potential energy

We study a standard reversal in terms of the mechanical energy budget. We define the global kinetic and potential energy as $E_{kin} \equiv \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle_V$ and $E_{pot} \equiv -\Pr \langle \theta z \rangle_V$. The potential energy itself is decomposed into available $E_{apot} \equiv -\Pr \langle \theta(z - z_*) \rangle$ and background $E_{bpot} \equiv -\Pr \langle \theta z_* \rangle$ potential parts. Here $z_*(\mathbf{x}, t)$ denotes the height of a fluid parcel located at \mathbf{x} at time t when it is moved through virtual adiabatic motions in a reference state of minimal potential energy attainable (for more details, see Ref. [12]). At a given time t , we use the spatial probability density function of the temperature field $P(\theta)$ to obtain $z_*(\mathbf{x}, t)$ [13]:

$$z_*(\mathbf{x}, t) = z_r(\theta(\mathbf{x}, t)) \quad \text{with} \quad z_r(\theta) = \int_{-0.5}^{\theta} P(\theta) d\theta \quad (5)$$

Figure 2 displays for RBC and RBS configurations, the angular impulse, global kinetic and available potential energy during few consecutive reversals. In both cases available potential energy is building at a regular pace during the *plateau* state. It then approaches an upper bound and it is suddenly released, breaking the overall circulation. A sequence of snapshots of the temperature $\theta(\mathbf{x}, t)$ during this accumulation process is seen in Figure 3.

In this sequence, heat entering the system is transformed into available potential energy and accumulates at the counter-rotating corner flows and inside the boundary layers. Small plumes detached from

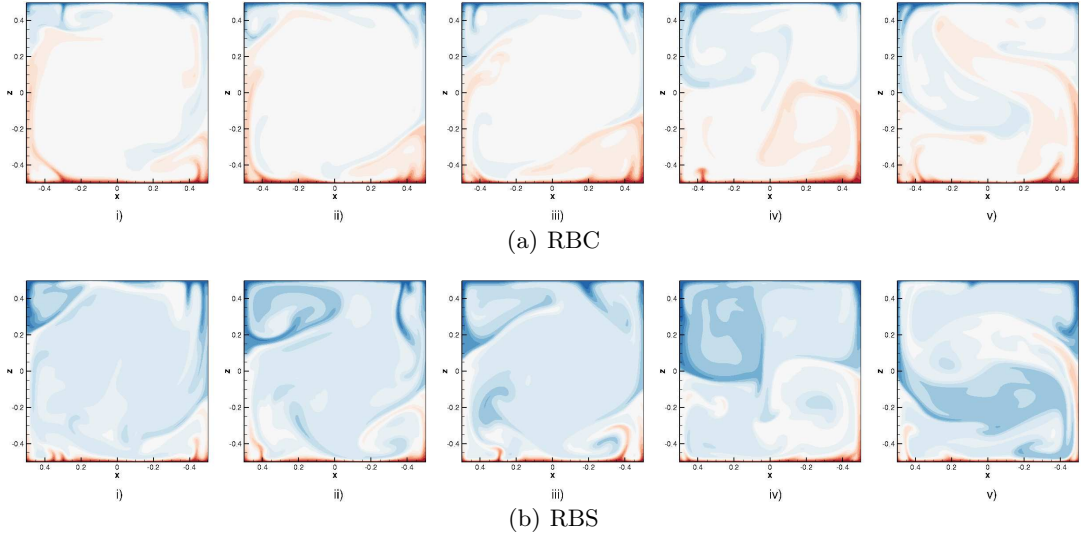


Figure 3. Evolution of temperature field at $Ra = 5 \times 10^7$: (a) RBC: i) $t = 4,160$, ii) $t = 4,180$, iii) $t = 4,200$, iv) $t = 4,220$, and v) $t = 4,223$; and (b) RBS: i) $t = 785$, ii) $t = 805$, iii) $t = 825$, iv) $t = 845$, and v) $t = 847$; corresponding to accumulation of energy in the corner flows up to a peak value and detachment.

the boundary layer, are dragged by the circulation and merge with larger plumes that rise/fall along the side-walls, collide with the corner flows and ultimately penetrate the opposing boundary layer, before being fed into the corner flows. Opposing corner flows grow gradually until they touch and release the energy into the bulk almost at once. The same stages are observed for both RBC and RBS, although it was observed that RBS has a significantly lower bulk temperature than RBC observed for the duration of the simulations.

Energy conversion rates between the kinetic and potential energies are given by [14]

$$\begin{cases} \frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \Phi_z - \epsilon, & \frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = \Phi_i + \Phi_{b1} - \Phi_z, \\ \frac{dE_{\text{apot}}}{dt} = \Phi_i - \Phi_d - \Phi_z + \Phi_{b1} + \Phi_{b2}, & \frac{dE_{\text{bpot}}}{dt} = \Phi_d - \Phi_{b2}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \Phi_z \equiv \text{Pr} \langle w\theta \rangle, & \epsilon \equiv \text{Pr} Ra^{-\frac{1}{2}} \langle \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \rangle, \\ \Phi_d \equiv \text{Pr} Ra^{-\frac{1}{2}} \langle \nabla z_* \cdot \nabla \theta \rangle, & \Phi_i \equiv \text{Pr} Ra^{-\frac{1}{2}}, \\ \Phi_{b1} \equiv -\text{Pr} Ra^{-\frac{1}{2}} \oint z_* \partial_n \theta dS, & \Phi_{b2} \equiv \text{Pr} Ra^{-\frac{1}{2}} \oint z_* \partial_n \theta dS, \end{cases} \quad (7)$$

where Φ_z is the buoyancy flux, Φ_d the conversion rate due to irreversible mixing, and ϵ the viscous dissipation rate. Φ_{b1} and Φ_{b2} correspond to the conversion rate from heat entering the system into potential energy and background potential energy, respectively. Note that due to the imposed boundary conditions for temperature $\Phi_{b1}(t) = \Phi_{b2}(t)$, and both values are equally related to $0.5(\text{Nu}_{\text{top}} + \text{Nu}_{\text{bot}})$.

The buoyancy flux Φ_z is a measure of hot/cold ascending/descending plumes towards a thermally stable state. For both cases, this quantity peaks as the energy stored in the corners is released (Fig. 3v). It then decreases abruptly becoming negative. This seems correlated to the following observation: the deflection of plumes by the opposite walls and the return to the circulation (not shown here). The term Φ_d is always positive, mixing front is localized at the interface between the plumes and the bulk (Fig. 1 (c) and (f)). This term fluctuates strongly as the circulation breaks and irreversible mixing intensifies.

In this context, the time-averaged values of Φ_z and Φ_d are not very informative since they satisfy the following relations, $\overline{\Phi_z} = \bar{\epsilon} = (\overline{\text{Nu}} - 1) \text{Pr} / \sqrt{\overline{\text{Ra}}}$ and $\overline{\Phi_d} = \overline{\Phi_{b1}} = \overline{\text{Nu}} \text{Pr} / \sqrt{\overline{\text{Ra}}}$ given by [14]. These equalities are verified within 1% in our simulation. Instead, we choose to show the standard deviation of these quantities during the flow reversal regime (Table 2) where a noticeable increase from RBC to RBS is observed.

Top BC	Ra	$\sigma(\Phi_z)$	$\sigma(\Phi_d)$	$\sigma(\epsilon)$	$\sigma(\Phi_{b1})$
No-slip	1×10^7	4.3	2.5	1.3	0.9
	5×10^7	7.8	4.2	2.0	1.5
Free-slip	1×10^7	8.4	4.1	2.3	1.8
	5×10^7	12.7	6.2	3.2	2.7

Table 2. Standard deviations of terms from Eq. (7), where all terms have been normalized by $\text{Pr}/\sqrt{\text{Ra}}$.

6 Conclusions

We have studied the influence of mechanical boundary conditions on Rayleigh-Bénard convection, and in particular inside the flow reversal regime. For values of $\text{Ra} = 5 \times 10^7$, $\text{Pr} = 4.3$ this flow reversal regime is observed for both no-slip and free-slip convection and is characterized by a roll-dominated convection, with a single central vortex and two-counter rotating corner flows. As the opposing corner flows grow, they touch and form a single roll, releasing the energy store into the circulation before self-organizing anew. The reversal mechanism is indeed identical for both RBC and RBS, but reversals are significantly faster and happen more frequently for RBS than RBC. For the free-slip cell the mean temperature is 10% lower than $(\theta_{\text{bot}} + \theta_{\text{top}})/2$. An increased heat-flux is also observed for free-slip convection where the Nusselt number is around 40% bigger for all values of $\text{Ra} - \text{Pr}$, consistent with previous observations [5]. We have used the angular impulse and mechanical energy budgets to provide a more complete description of the flow reversal process.

References

1. H. J. H. CLERCX, S. R. MASSEN & G. J. F. VAN HELJST, Spontaneous spin-up during the decay of 2D turbulence in a square container with rigid boundaries, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 5129–5132 (1998).
2. M. CHANDRA & M. K. VERMA, Flow Reversals in turbulent convection via vortex reconnections, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 114503 (2013).
3. K. SUGIYAMA *et al.*, Flow reversals in thermally driven turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, **105**, 034503 (2010).
4. B. PODVIN & A. SERGENT, A large-scale investigation of wind reversal in a square Rayleigh-Bénard cell, *J. Fluid Mech.*, **766**, 172–201 (2015).
5. E. P. VAN DER POEL, R. OSTILLA-MÓNICO, R. VERZICCO & D. LOHSE, Effect of velocity boundary conditions on the heat transfer and flow topology in two-dimensional Rayleigh-Bénard convection, *Phys. Rev. E*, **90**, 013017 (2014).
6. J. B. BELL, P. COLELLA & H. M. GLAZ, A second-order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comp. Phys.*, **283**, 257–283 (1989).
7. S. POPINET, *Basilisk, an incompressible Navier-Stokes solver (centered formulation)*, <http://basilisk.fr/>.
8. R. J. A. M. STEVENS, R. VERZICCO & D. LOHSE, Radial boundary layer structure and Nusselt number in Rayleigh-Bénard convection, *J. Fluid Mech.*, **643**, 495–507 (2010).
9. B. I. SHRAIMAN & E. D. SIGGIA, Heat transport in high-Rayleigh-number convection, *Phys. Rev. A*, **42**, 3650–3653 (1990).
10. D. MOLENAAR, H. J. H. CLERCX & G. J. F. VAN HELJST, Angular momentum of forced 2D turbulence in a square no-slip domain, *Physica D*, **196**, 329–340 (2004).
11. J. SALORT, O. LIOT *et al.*, Thermal boundary layer near roughnesses in turbulent Rayleigh-Bénard convection: Flow structure and multistability, *Phys. Fluids*, **26**, 015112 (2014).
12. K. B. WINTERS & W. R. YOUNG, Available potential energy and buoyancy variance in horizontal convection, *J. Fluid Mech.*, **629**, 221–230 (2009).
13. Y. H. TSENG & J. H. FERZIGER, Mixing and available potential energy in stratified flows, *Phys. Fluids*, **13**, 1281–1293 (2001).
14. G. HUGHES, B. GAYEN & R. W. GRIFFITHS, Available potential energy in Rayleigh-Bénard convection, *J. Fluid Mech.*, **729**, R3 (2013).

Imageurs du non-linéaire : de l'imagerie ultrasonore médicale au contrôle non destructif industriel

Serge Dos Santos^{1,2}, Zuzana Dvorakova³, Jennifer Chaline², Martin Lints⁴ & Djamel Remache²

¹ INSA Centre Val de Loire, Campus de Blois, Academia NDT International, 3 rue de la Chocolaterie, CS 23410, F-41034 Blois cedex

² Unité Mixte de Recherche "Imagerie et Cerveau", Inserm U930, Université François Rabelais, Tours

³ Czech Technical University, FNSPE, Brehova 7, CZ-11519, Prague 1, Czech Republic

⁴ Institute of Cybernetics, Tallinn University of Technology, Tallinn, Estonia

`serge.dossantos@insa-cvl.fr`

Résumé. L'imagerie ultrasonore des milieux complexes est proposée en utilisant la symbiose d'une technique de focalisation acoustique par Retournement Temporel (TR) permettant l'extraction des propriétés élastiques non linéaires (NEWS). Ce dispositif est complété par un système électronique embarqué d'optimisation d'excitation permettant de solliciter les paramètres non linéaires d'élasticité du milieu considéré (comme la non-linéarité classique), puis des propriétés plus complexes, comme les phénomènes à hystérésis, bien connus pour posséder des propriétés de mémoire susceptibles de renseigner l'utilisateur sur la connaissance du vieillissement ou sur la dégradation d'un système. Le système expérimental TR-NEWS est proposé de façon à tenir compte des conditions particulières d'excitation acoustique (symétries intrinsèques) associée au processus d'imagerie harmonique. La modélisation mécanique et le traitement du signal associé à cette étude exploite les techniques d'optimisation d'excitation adaptées à l'analyse des systèmes à hystérésis, comme le codage d'impulsion par inversion. L'instrumentation est élaborée en tenant compte des dernières techniques brevetées concernant les systèmes de focalisation ultrasonore dans les milieux complexes et est proposée comme innovation dans le domaine du contrôle non destructif et de l'imagerie médicale.

Abstract. Recent years have seen considerable development of optimized signal processing methods for improving nonlinear Non Destructive Testing (NDT) methods and harmonic imaging derived from Nonlinear Elastic Wave Spectroscopy (NEWS). Using symmetry invariance, nonlinear Time Reversal (TR) and reciprocity properties, the classical NEWS methods are supplemented and improved by new excitations having the intrinsic property of enlarging frequency analysis bandwidth and time domain scales, with now both medical acoustics and electromagnetic applications. Based on previously published results within the nonlinear acoustic areas, some practical implementation will be proposed as a new way to define TR-NEWS based methods applied to NDT and medical bubble based non-destructive imaging. It is shown how results from the nonlinear dynamics can help us to define new methodologies and new experimental setup involving modern signal processing tools. Generalized TR based NEWS methods and their associate symmetry skeleton will be taken as an example with some new specific signal processing tools such as Pulse Inversion. Some example of practical realizations will be proposed in the context of biomedical non-destructive imaging using Ultrasound Contrast Agents (ACUs) where symmetry and invariance properties allow us to define a microscopic scale-invariant experimental setup describing intrinsic symmetries of the microscopic complex system.

1 Introduction

Depuis de nombreuses années et les premiers travaux en évaluation non destructive des matériaux, les propriétés non linéaires élastiques des solides et des fluides suscitent une curiosité et un intérêt croissant. En particulier, il est désormais reconnu que la signature non linéaire (au sens large) d'un milieu physique ou biologique est un indicateur sensible de la dégradation, du vieillissement ou de la caractérisation non destructive du milieu. Depuis les travaux pionniers des années 1980 réalisés par la NASA [1], la mesure des paramètres élastiques non linéaires par la mesure de la variation de la vitesse d'un composite epoxy/graphite (T300/5208) et sa difficulté métrologique associée à la mesure des nombreuses constantes élastiques d'ordre supérieur, a été clairement mis en évidence et constitue encore aujourd'hui un challenge

métrologique. Depuis le début des années 1980 et les premiers dispositifs expérimentaux, de nombreuses méthodes de traitement du signal non linéaire ont permis d'améliorer l'instrumentation et la précision des mesures. Cette progression technologique a conduit à une nouvelle forme d'imagerie de la non-linéarité (appelée imagerie harmonique) et est désormais utilisée en routine dans le domaine de l'imagerie médicale. La prise en compte des composantes harmoniques des signaux mesurés dans la réponse ultrasonore a ouvert la voie à cette imagerie ultrasonore non conventionnelle ; l'imagerie non linéaire avec des applications fondamentales. L'imagerie harmonique débuta avec la mesure spectrale des harmoniques proportionnels au coefficient de non-linéarité acoustique (classique) β dans les solides et les fluides, engendrant une variation de la célérité des ondes en fonction de l'amplitude de celles-ci. Les nombreux résultats ont montré que ce paramètre β permettait une observation et une détection plus précoce de la dégradation et du vieillissement du matériau [2]. C'est donc ainsi à partir de ce concept fondamental de caractérisation non linéaire qu'a émergé cette nécessité d'explorer ce signal non linéaire, souvent considéré comme du bruit de mesure. C'est donc aussi grâce à l'effort conduit ces dernières années en terme de mesures de bruit que les effets non linéaires sont été considérés comme une source d'information à part entière. La métrologie associée à la caractérisation non linéaire, puis à l'imagerie du non-linéaire doit également être une métrologie de pointe. En effet, comme tout effet non linéaire est dépendant de l'amplitude de l'excitation lui ayant donné la cause, il est d'autant plus important de connaître précisément les grandeurs physiques appliquées.

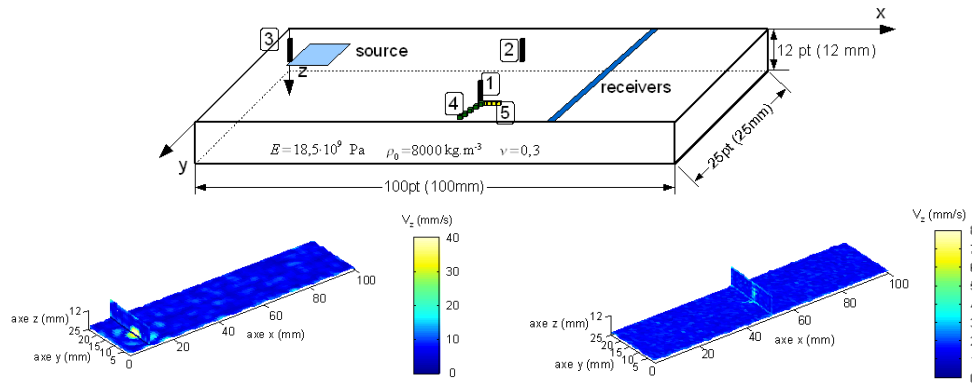


Figure 1. Méthode TR-NEWS de sollicitation des non-linéarités dans un système complexe [3]. Alors que le retournement temporel linéaire permet la focalisation des ondes sur la source de linéarité (gauche), le retournement temporel non linéaire permet la focalisation des signatures non linéaires sur les sources de non-linéarité (droite).

Nous proposons de présenter quelques résultats expérimentaux obtenus depuis les vingt dernières années dans le contexte du Contrôle Non Destructif (CND) de structures complexes, puis dans le domaine de l'imagerie ultrasonore harmonique non destructive. Afin d'illustrer ces résultats, nous proposons de présenter les développements récents dans le domaine du CND permettant de localiser temporellement une source acoustique de non-linéarité. En imagerie harmonique non destructive, ce sont les produits de contraste [4] pour lesquelles l'utilisation d'une symbiose du processus de retournement temporel (TR) et de la spectroscopie d'ondes élastiques non linéaires (NEWS) qui permettent, via l'utilisation d'un processus de codage d'excitation solitonique [5], de proposer à la communauté le principe TR-NEWS (Fig. 1) confirmant le concept de « retournement temporel non linéaire » comme un formidable potentiel pour la localisation des non-linéarités physiques d'un système complexe [6–8].

2 La non-linéarité à solliciter via TR-NEWS

Que ce soit dans le milieu médical de l'imagerie ultrasonore ou dans le contexte industriel du contrôle non destructif, l'imagerie du non-linéaire non destructive est un enjeu majeur de l'utilisation de l'acous-

tique ultrasonore et nécessite des outils de traitement du signal avancés issues des théories des systèmes dynamiques non linéaires. Au cours d'une propagation acoustique dans un milieu non linéaire, la relation

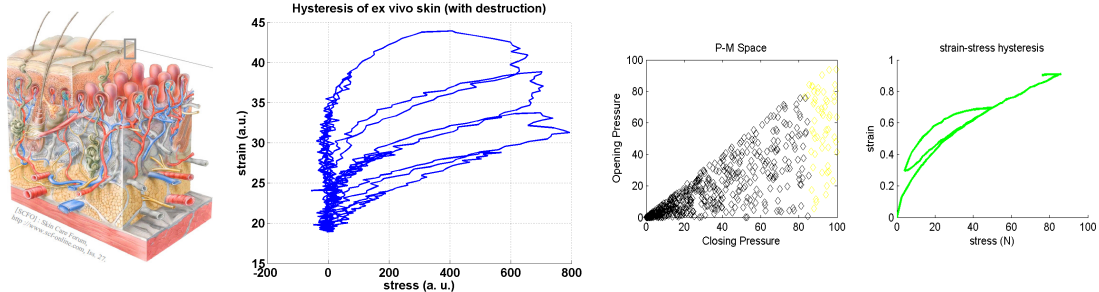


Figure 2. Les non-linearités de type hystériques sont également explorées par la méthode TR-NEWS au travers d'expériences d'interaction d'ondes acousto-mécaniques. Les propriétés multi-échelles sont extraites [9] dans les signatures non linéaires localisées via TR-NEWS.

contrainte-déformation conduit à une relation module-déformation dépendante de l'amplitude ; le module étant calculé à partir de la dérivée de la contrainte par rapport à la déformation. Dans certains cas, le module est plus faible pour des grandes valeurs d'amplitude de déformation, alors qu'il est plus important pour de petites amplitudes de déformation. Ceci implique que la célérité des ondes acoustiques diminue lorsque les déformations augmentent, conférant ainsi à la non-linéarité la propriété de « ramollir » le milieu de propagation. Ainsi, durant la propagation, les surpressions vont se propager moins vite que les dépressions. Ceci génère alors une déformation de la forme d'onde, qui, si elle est sinusoïdale, conduira à la création de nouvelles composantes spectrales (les harmoniques) facilement observables macroscopiquement et désormais mesurables expérimentalement. D'autres effets, ou signatures non linéaires, peuvent également apparaître. La non-unicité de la relation contrainte-déformation matérialisée par une hystérésis conduit à une perte d'énergie, appelée extra-atténuation non linéaire, lors de chaque cycle d'excitation de la déformation (Fig. 2). Les recherches développées aujourd'hui permettent de valider le concept d'imagerie harmonique pour l'exploration des tissus ou organes à signatures non linéaires complexes : cœur, foie, fœtus, os, dent [10], peau (Fig. 3). Parallèlement, se sont développées des méthodes de traitement du signal permettant d'extraire certains types de non-linéarités via une symétrisation de l'excitation acoustique. C'est ainsi que la méthode d'inversion d'impulsion, utilisée aujourd'hui en routine

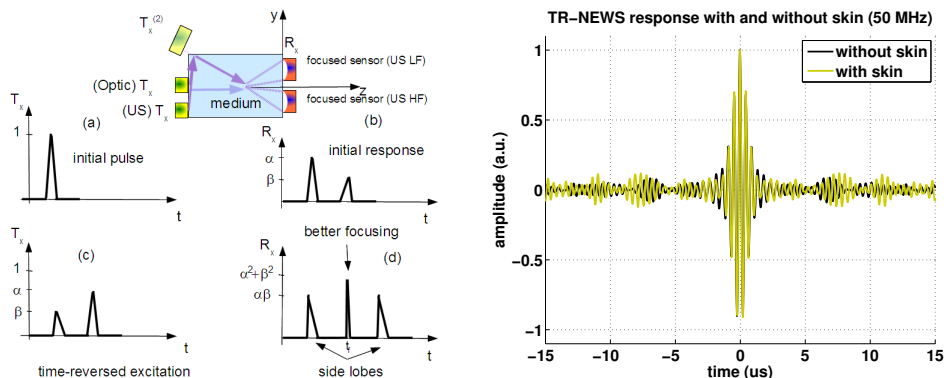


Figure 3. Principe de base des méthodes TR-NEWS : la focalisation acoustique utilisant les principes linéaires de réciprocité et de retournement temporel permettent, lorsque ceux-ci ne sont plus vérifiés, de mesurer la brisure de symétrie dans le domaine temporel (gauche). Exemples de focalisation TR-NEWS dans le cas de caractérisation expérimentale de la peau (droite).

sur les échographes modernes, autorise une cadence image élevée. Actuellement, de nouvelles méthodes de traitement du signal utilisant le codage d'excitation permet d'explorer la richesse structurelle de la signature non linéaire d'un milieu complexe [11]. En effet, afin de localiser spatialement et temporellement les sources de non-linéarités, afin de différencier les non-linéarités classiques (développement de la loi de Hooke) des non-linéarités non classiques (hystérétiques observées dans le processus de chargement de la peau), il est désormais possible d'utiliser des concepts développés dans d'autres domaines de la physique non linéaire : excitation multi-fréquences [2] et multi-modales [9], mélanges d'ondes et modulations, propagation solitoniques [5]. Dans la recherche de nouvelles méthodes de CND améliorées en sensibilité et susceptibles de localiser et quantifier des dégradations micro-structurales dans une large gamme de matériaux, de nombreuses équipes de chercheurs [6, 8, 12] à travers le monde ont développé des techniques innovantes qui explorent le comportement micromécanique des matériaux et leurs effets sur la propagation d'ondes acoustiques en observant les propriétés macroscopiques et leurs dépendances en fonction de l'amplitude. Ces méthodes sont appelées *spectroscopie d'ondes élastiques non linéaires* (NEWS pour *Nonlinear Elastic Wave Spectroscopy*). En combinant un processus de retournement temporel (TR) décrit sur la figure 3, il est désormais possible de solliciter puis localiser une non-linéarité dans un milieu complexe. Les méthodes TR-NEWS ont pu être étendues aux problématiques de localisation de non-linéarités dans les domaines de l'électromagnétisme [7].

3 Les signatures non linéaires à localiser, puis à classifier

La plupart des tissus biologiques et des matériaux possèdent une structure complexe dans laquelle la propagation d'ondes acoustiques engendre des vibrations non linéaires, signatures de non-linéarités multi-échelles aux propriétés désormais classifiées et localisées spatialement par une propriété d'invariance temporelle. Le principe de base du retournement temporel (TR) traditionnel est le suivant : si un champ

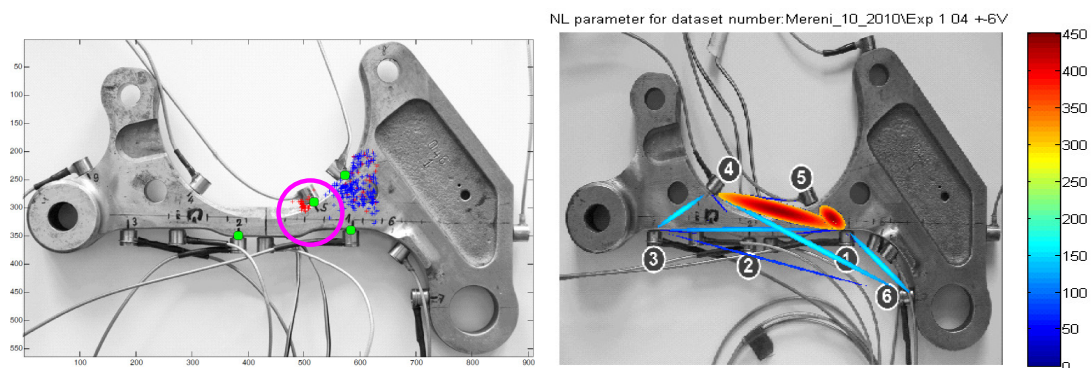


Figure 4. Méthode TR-NEWS comparée [13] à d'autres méthodes de CND (émission acoustique à gauche). La localisation de la non-linéarité induite par la dégradation de la structure est mesurée entre les capteurs 4 et 5.

d'onde acoustique est complètement déterminé en fonction du temps sur les frontières d'un domaine fermé, il est possible de reconstruire le passé de ce champ en chaque point de ce domaine en renvoyant les signaux dans le domaine, après les avoir préalablement retournés temporellement. C'est la conséquence de l'invariance de l'équation des ondes linéaires par rapport au temps. En d'autres termes, le processus TR est tel que les ondes enregistrées aux frontières du domaine en fonction du temps rétrofocalisent en temps et en espace sur les sources acoustiques. L'un des avantages du processus TR est de localiser, à l'aide d'un post-traitement, ces régions importantes de diffraction (cavités, interfaces avec contrastes d'impédances, etc.), qui sont cachées dans le domaine. Pour de plus petits diffuseurs tels que les zones de dégradation, les liaisons faibles ou les petits défauts, la sensibilité du processus TR classique atteint les limites des techniques acoustiques classiques. Notre expérience dans les techniques NEWS a montré

que les micro-dégradations agissent sur les ondes acoustiques par un processus non linéaire, générant principalement des harmoniques, ou d'autres effets d'intermodulation, plutôt que des effets linéaires. Ainsi, selon cette approche, la procédure TR doit être améliorée de sorte que l'essentiel du traitement du signal soit concentré sur les différentes signatures non linéaires produites à l'occasion de la propagation des ondes dans le domaine. Une des solutions consiste à uniquement sélectionner l'énergie/information correspondant à la partie non linéaire de la réponse du domaine et de la retourner dans ce même domaine à l'aide de la procédure TR classique. En conséquence, le signal rétropropagé sera amené à se focaliser à la source de non-linéarité, c'est-à-dire dans la zone de dégradation où les harmoniques ont été créés, alors que les « diffuseurs linéaires » seront insensibles à cette excitation, qui se trouve être extrêmement complexe. L'opération TR peut être effectuée dans un premier temps afin de rétrofocaliser de l'énergie dans une zone limitée afin de solliciter le comportement non linéaire par des déformations de grandes amplitudes. De la même manière, l'analyse NEWS peut être réalisée en pré-traitement afin de solliciter les sources locales de non-linéarité qui seront ensuite extraites par un processus TR. C'est donc à partir de fonctions d'autocorrélation temporelle et de leurs brisures de symétrie vis-à-vis d'un processus non linéaire que les signaux TR-NEWS permettent la localisation (Fig. 4) et la classification (Fig. 5) des sources de non-linéarités. C'est ainsi qu'émerge depuis les années 2005 l'idée d'utiliser les propriétés d'invariance par réciprocité et par retournement temporel (TR) des systèmes biologiques complexes afin d'en imagier les propriétés non linéaires mésoscopiques et multi-échelles.

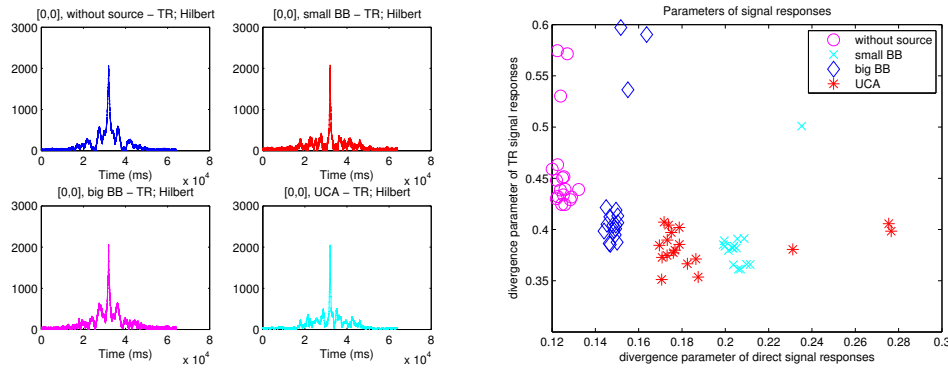


Figure 5. La classification des signaux d'autocorrélation TR-NEWS permet de mesurer les ruptures de symétrie des réponses TR-NEWS en fonction des sources de non-linéarités : bulles d'air, agents de contraste ultrasonore (ACUs) pour des applications en imagerie de contraste non destructive.

4 Conclusion et perspectives

Alors qu'un phénomène ou une action linéaire est indépendante de l'amplitude d'excitation et qu'elle vérifie le principe de superposition, une métrologie et une imagerie du non-linéaire doit nécessairement passer par une étape d'étalonnage lorsque l'objectif de métrologie quantitative est mis en avant.

C'est ainsi une des conséquences inattendues de la mise en place d'un standard en terme d'imagerie du non-linéaire : il est nécessaire d'y associer une obligation de standardisation en terme de métrologie harmonique et une nécessité de définition de procédures et protocoles rigoureux en terme d'instrumentation. La progression lente et besogneuse liée à l'émergence d'une imagerie du non-linéaire trouve désormais une issue et constitue un potentiel d'innovation assurée. L'imageur du non-linéaire pourrait constituer un nouveau métier au sein duquel les compétences en physique non linéaire, en traitement du signal et en instrumentation pointue doivent être définies, validées et standardisées (Fig. 6). Que se soit dans le

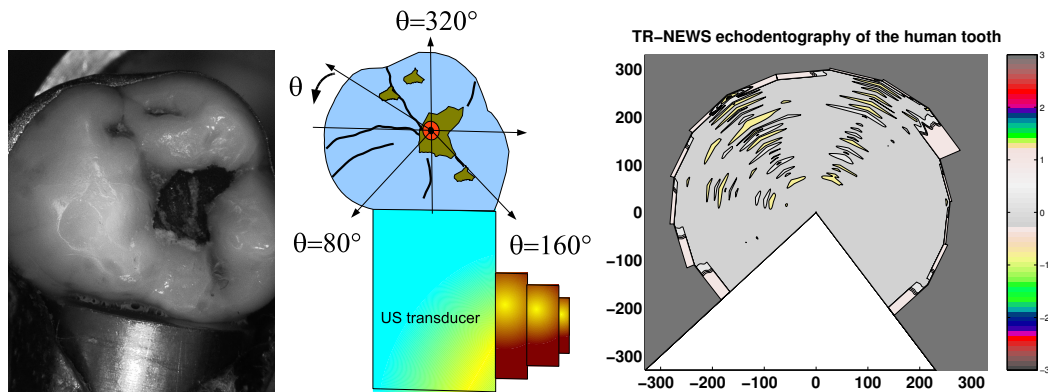


Figure 6. Échodentographie ultrasonore par TR-NEWS : les non-linéarités sont localisées dans le milieu de propagation complexe de la dent [10]. L'étalonnage quantitatif de cette non-linéarité reste à optimiser.

domaine du contrôle non destructif ou dans l'imagerie de contraste, les imageurs du non-linéaire seront des chercheurs, des ingénieurs ou des techniciens assurément aptes à apprécier le potentiel d'information présent dans la signature non linéaire d'un système complexe.

Références

1. W. H. PROSSER, *Ultrasonic characterization of the nonlinear elastic properties of unidirectional graphite/epoxy composites*, Technical report, NASA, Washington (1987).
2. S. DOS SANTOS *et al.*, Application de l'acoustique non linéaire dans le contrôle non destructif : mesure du paramètre non linéaire de la silice par une méthode de modulation de phase, in *Actes de la 6^e Rencontre du Non-Linéaire*, pp. 107–112, Paris (2003).
3. T. GOURSOLLE *et al.*, A two dimensional pseudospectral model for time reversal, (TR) and nonlinear elastic wave spectroscopy (NEWS), *J. Acoust. Soc. Am.*, **122**, 3220–3229 (2007).
4. V. J. SÁNCHEZ-MORCILLO *et al.*, Spatio-temporal dynamics in a ring of coupled pendula: Analogy with bubbles, In *Localized Excitations in Nonlinear Complex Systems*, vol. **7** de *Nonlinear Systems and Complexity*, pp. 251–262, Springer (2014).
5. M. LINTS *et al.*, Simulation of solitary wave propagation in carbon fibre reinforced polymer, accepté pour publication dans *P. Est. Acad. Sci.* (2015).
6. T. J. ULRICH *et al.*, Time reversal and non-linear elastic wave spectroscopy (TR-NEWS) techniques, *Int. J. Nonlinear Mech.*, **43**, 209–216 (2008).
7. M. FRAZIER *et al.*, Nonlinear time reversal in a wave chaotic system. *Phys. Rev. Letters*, **110**, 063902 (2013).
8. ZHANG LUE *et al.*, Multi-crack imaging using nonclassical nonlinear acoustic method, *Chin. Phys. B*, **23**, 104301 (2014).
9. S. DOS SANTOS *et al.*, Viscoelastic and/or hysteretic properties of the skin: Acousto-mechanical evaluation using nonlinear time reversal imaging in symbiosis with uniaxial loading, in *Proceedings of the 28th IFSCC*, pp. 1561–1570 (2014).
10. S. DOS SANTOS & Z. PREVOROVSKY, Imaging of human tooth using ultrasound based chirp-coded nonlinear time reversal acoustics, *Ultrasonics*, **51**, 667–674 (2011).
11. S. DOS SANTOS *et al.*, Nonlinear signal processing for ultrasonic imaging of material complexity. *P. Est. Acad. Sci.*, **59**, 301–311 (2010).
12. J. RIVIÈRE *et al.*, Time reversed elastic nonlinearity diagnostic applied to mock osseointegration monitoring applying two experimental models, *J. Acoust. Soc. Am.*, **131**, 1922–1927 (2012).
13. Z. PREVOROVSKY *et al.*, Nonlinear time reversal ultrasonic pseudo-tomography, *Int. J. Microstructure Materials Properties*, **6**, 206–213 (2011).

Effet du mouillage sur l'écoulement d'un fluide à travers un trou

Jérémy Ferrand, Valérie Vidal & Éric Freyssingeas

Laboratoire de Physique, Université de Lyon, École Normale Supérieure de Lyon - CNRS, 46 Allée d'Italie,
69364 Lyon cedex 07, France
jeremy.ferrand@ens-lyon.fr

Résumé. Les écoulements de fluides newtoniens ou complexes sont étudiés depuis très longtemps, cependant leur étude n'est pas complète notamment en ce qui concerne l'interaction entre le fluide et le solide sur ou à travers lequel il s'écoule. Notre démarche s'inscrit dans une volonté de comprendre et de caractériser entièrement un écoulement de fluide à travers un trou percé dans un matériau donné. Nous avons construit un réservoir pouvant se vider à travers un orifice et permettant de modifier facilement le rayon, la forme ainsi que le matériau dans lequel est percé un trou circulaire. Nous mettons notamment en évidence que le modèle de l'écoulement parfait peut s'appliquer à condition de considérer un rayon effectif pour le trou et une hauteur initiale effective de fluide. Ces paramètres effectifs dépendent de nombreuses grandeurs physiques comme la viscosité mais également de deux grandeurs qui n'ont pas été étudiées jusqu'ici : la tension de surface liquide-air et le mouillage du liquide sur la surface où est percé le trou. De plus, une instabilité du jet se développe lorsque la hauteur initiale de fluide est assez grande.

Abstract. Flows of Newtonian or complex fluids have been studied for a long time. However, these studies did not focus on the interaction between the fluid and solid on which or through which it flows. Our work aims at understanding and characterizing the fluid flow through a circular hole perforated in a given material. The experiential setup consists of a tank filled with a fluid. The fluid can flow through a hole perforated at the bottom of the tank; the hole radius, shape and the material in which the tank bottom is made can be easily modified. We bring out that the perfect flow model can be used to describe this flow provided that we consider an effective radius for the hole and an effective initial height of fluid. These effective parameters depend on many physical quantities as viscosity but also two quantities never studied up to now: the surface tension between liquid and air and the bottom plate wetting properties. Moreover, we observe the development of a jet instability when the initial height is large enough.

1 Introduction

L'écoulement d'un fluide newtonien ou complexe à travers un orifice est un processus rencontré dans la vie quotidienne, dans des phénomènes naturels comme la circulation sanguine [1] ou dans l'industrie. Certains industriels s'intéressent notamment à des recherches sur la forme du réservoir et de l'orifice permettant d'optimiser l'écoulement [2]. L'étude d'un tel système a commencé il y a presque 400 ans avec la publication de Torricelli [3]. Cette loi a ensuite été corrigée notamment avec un coefficient de compressibilité par Boussinesq [4], Helmholtz [5] et Kirchhoff [6]. Des études plus récentes tendent à préciser le domaine de validité de ces lois [7, 8], tracer numériquement les champs de vitesse [9], observer l'écoulement pour un trou non cylindrique [10], analyser la surface libre [11] ou encore utiliser des fluides complexes [12]. Cependant, les mécanismes physiques à l'origine des observations restent encore inexplicables, même pour des fluides simples. Nous avons utilisé différentes tailles de trou percés dans différents matériaux afin de faire varier le mouillage et donc l'interaction du fluide et du solide au niveau du trou. Les rayons des trous sont inférieurs à 2 mm ce qui nous permet d'avoir des longueurs caractéristiques de l'écoulement du même ordre de grandeur que la longueur capillaire afin que les effets de mouillage puissent être importants. Nous montrons que de tels écoulements et notamment certains paramètres effectifs adimensionnés dépendent du matériau dans lequel le trou est percé.

2 Dispositif expérimental

Notre dispositif expérimental est assez simple dans sa conception, il est présenté sur la figure 1 (a). Une cuve cubique en verre sans fond de 10 cm de côté est collée à une pièce en Dural cylindrique permettant de changer facilement le fond de la cuve. Ainsi il est possible de changer le rayon r ou la longueur L du trou mais également le matériau dans lequel il est percé. On place sous l'orifice une balance (KERN 572) interfacée à un ordinateur afin de mesurer la masse de fluide écoulee au cours du temps lors de l'écoulement. Le système permet de visualiser le jet de fluide dès sa sortie du trou. Cette visualisation s'effectue par ombroscopie en plaçant d'un côté un panneau de LED et de l'autre une caméra PixelLink 1280×1024 équipée d'un objectif macro 18–108 mm.

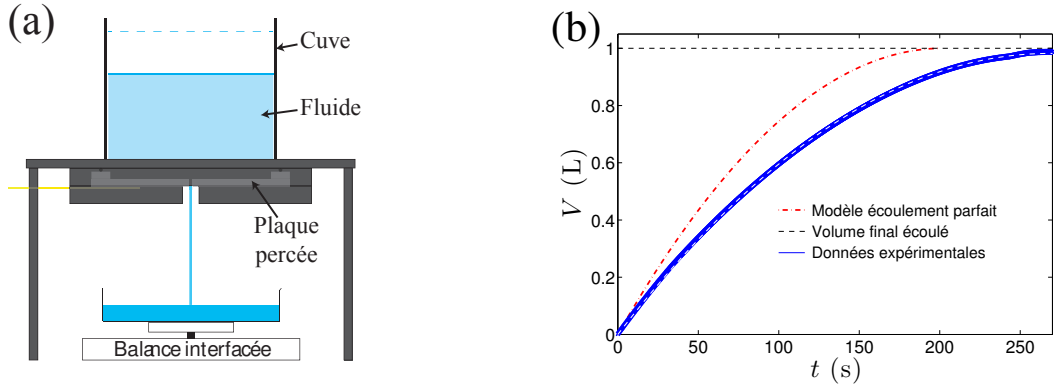


Figure 1. Dispositif expérimental permettant l'écoulement de fluides à travers un orifice et modèle du fluide parfait. (a) Vue d'ensemble du système expérimental. La distance entre le trou et le cristalliseur est fixe (15 cm). (b) Comparaison entre le modèle de l'écoulement parfait et les données expérimentales : volume de fluide écoulé V en fonction du temps t . [$r = 2$ mm ; $L = 2$ mm ; $h_0 = 10$ cm ; Plexiglas]. L'épaisseur du trait représente l'erreur expérimentale de la mesure. Les pointillés blancs représentent l'ajustement $V = \alpha t^2 + \beta t$ des données expérimentales avec α et β libres.

Pour effectuer un écoulement, le trou est bouché et le réservoir rempli de fluide jusqu'à une hauteur initiale donnée h_0 . On ôte le bouchon et on enregistre la forme du jet avec la caméra ainsi que la masse au cours du temps. La condition initiale est reproductible. Nous présentons dans cet article les résultats que nous avons obtenus avec de l'eau distillée. L'utilisation d'autres fluides est en cours.

La longueur capillaire est définie par :

$$\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma_{LG}}{\rho g}} \quad (1)$$

où γ_{LG} est la tension de surface liquide air, ρ la masse volumique du liquide et g la constante de gravité [14]. La longueur capillaire pour l'eau distillée a été mesurée à $\kappa^{-1} = (2,63 \pm 0,04)$ mm. Nous avons utilisé des trous circulaires ayant des rayons de 0,5 à 2 mm, c'est-à-dire des longueurs caractéristiques (correspondant au diamètre du trou) de 1 à 4 mm. Cela signifie que nous avons des écoulements où la longueur caractéristique de l'écoulement est plus grande ou plus petite que la longueur capillaire. Ainsi nous pouvons étudier les effets de tension de surface. Pour caractériser le mouillage nous utilisons la loi de Young-Dupré :

$$\gamma_{LG} \cos \theta_S = \gamma_{SG} - \gamma_{SL} \quad (2)$$

où γ_{LG} , γ_{SG} et γ_{SL} représentent respectivement la tension de surface liquide/gaz, solide/gaz et solide/liquide [14]. Le paramètre pertinent pour quantifier le mouillage est l'angle θ_S de cette loi. Nous avons réalisé la totalité des trous dans des plaques de Plexiglas, PVC et Téflon afin d'avoir des angles θ_S pour l'eau de 60,3°, 75,3° et 98,5°, respectivement.

3 Caractérisation de l'écoulement

3.1 Modèle de l'écoulement parfait

Les premières observations montrent que les nombres de Reynolds ($\text{Re} = V_0 \times (2r)/\nu$ où V_0 est la vitesse caractéristique du fluide en sortie et ν la viscosité cinématique du fluide) pour l'écoulement d'eau à travers les trous utilisés sont compris entre 1 400 et 6 000, ce qui est très grand devant 1. Ainsi le modèle de l'écoulement parfait semble être un bon candidat pour une modélisation. En appliquant la relation de Bernoulli sur les lignes de courant du fluide on trouve que la vitesse du fluide au niveau du trou est uniforme et vaut $v_0(t) = \sqrt{2gz(t)}$ où $z(t)$ est la hauteur du fluide par rapport au trou. Cette formule est connue sous le nom de formule de Torricelli. On peut alors déterminer le volume V écoulé ou le débit volumique Q_V au cours du temps :

$$V(t) = \pi\sqrt{2gr^2}h_0^{1/2}t - \frac{\pi^2g}{2a^2}r^4t^2, \quad Q_V(t) = \pi\sqrt{2gr^2}h_0^{1/2} - \frac{\pi^2g}{a^2}r^4t, \quad (3)$$

où r est le rayon du trou, h_0 la hauteur initiale du fluide et a le côté de la cuve cubique.

Si l'on essaye de confronter la théorie avec l'expérience on obtient les courbes de la figure 1 (b). La courbe en pointillés, représentant le modèle de l'écoulement parfait, est en avance par rapport aux données expérimentales en trait plein. Ainsi le modèle de l'écoulement parfait surestime la vitesse du fluide en sortie car l'eau possède une viscosité finie qui l'empêche de se comporter comme un fluide parfait. Cependant on remarque que la forme de la courbe expérimentale ressemble à celle de la théorie. Il est alors possible d'ajuster les données par la forme $V(t) = \alpha t + \beta t^2$ en laissant les coefficients α et β libres. La courbe en pointillés blancs correspond à cet ajustement sur nos données expérimentales.

3.2 Détermination des paramètres effectifs à partir du débit volumique

L'ajustement à partir de la variation du volume au cours du temps n'est pas un bon moyen de rendre compte de nos écoulements dans certains cas. En effet dans certaines conditions une instabilité ressemblant à l'instabilité de Rayleigh-Taylor de jet [15] se développe et s'arrête avant la fin de l'écoulement. Ainsi nous pouvons avoir deux régimes bien distincts pendant un même écoulement. La donnée de la courbe $V(t)$ ne permet pas de distinguer ces deux régimes. Afin de pallier ce problème, nous avons utilisé le débit volumique pour étudier l'écoulement. Nous dérivons nos données expérimentales afin d'obtenir les courbes $Q_V(t)$ dont deux exemples sont représentés sur la figure 2. La seule grandeur physique qui différencie les deux écoulements présentés est l'angle θ_S . On observe que lorsqu'aucune instabilité ne se développe (Fig. 2 (a)), le débit est linéaire avec le temps pour tout l'écoulement sauf à la fin lorsque le jet s'amincit. L'ajustement correspond à celui effectué sur la courbe $V(t)$. Cependant, lorsqu'une instabilité est présente (Fig. 2 (b)), on constate une rupture de pente lorsque l'instabilité s'arrête sur le film. Ainsi on distingue les deux régimes (jet instable et jet stable).

Ces ajustements via le débit volumique Q_V nous permettent d'obtenir des coefficients effectifs pour le régime stable ou instable qui sont reliés à deux grandeurs physiques effectives, le rayon du trou r_{eff} et la hauteur initiale de fluide $h_{0\text{eff}}$:

$$Q_V(t) = 2\alpha t + \beta, \quad \alpha = -\frac{\pi^2g}{2a^2}r_{\text{eff}}^4, \quad \beta = \sqrt{2g\pi}r_{\text{eff}}^2h_{0\text{eff}}^{1/2}. \quad (4)$$

4 Discussion

L'analyse des écoulements pour différentes grandeurs physiques (r , h_0 et θ_S) nous a permis de quantifier les dépendances des différentes grandeurs effectives (r_{eff} et $h_{0\text{eff}}$). Nous avons tout d'abord regardé la dépendance de r_{eff} et $h_{0\text{eff}}$ lorsqu'on change le rayon du trou r ou la hauteur initiale effective h_0 . Les résultats pour des trous percés dans du Téflon sont présentés Fig. 3. La figure 3 (a) représente r_{eff} normalisé par r en fonction de la pression initiale ρgh_0 subie par le fluide au niveau du trou normalisée

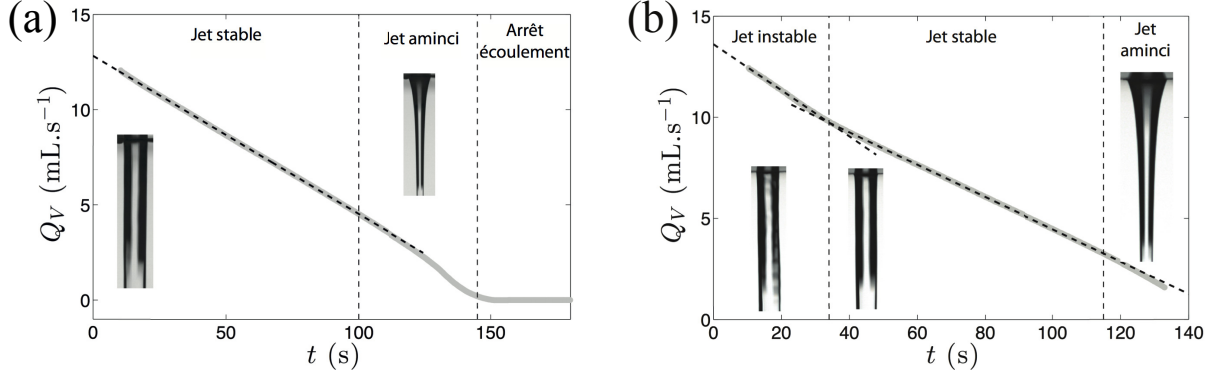


Figure 2. Ajustement du débit volumique dans le cas sans et avec une instabilité [$r = 2$ mm ; $L = 2$ mm ; $h_0 = 10$ cm]. (a) [Téflon] Aucune instabilité n'est visible sur le film. (b) [Plexiglas] Une instabilité est visible sur le film au début et on observe les deux régimes grâce à une rupture de pente.

par la pression normale $P_0 = 1$ bar. La figure 3(b) représente $h_{0\text{eff}}$ normalisée par h_0 en fonction de r normalisé par la longueur capillaire $\kappa^{-1}/2$ (divisée par 2 car on compare au rayon du trou). On remarque que pour des tailles de trou supérieures à la longueur capillaire ($r = 2$ ou 1,5 mm), le rapport r_{eff}/r ne dépend pas de la pression initiale effective car les effets d'inertie prédominent sur les effets capillaires. Par contre pour des tailles de trou inférieures à la longueur capillaire ($r = 1$ ou 0,5 mm), le rapport r_{eff}/r diminue lorsque la pression initiale diminue car les effets inertiels et capillaires sont du même ordre de grandeur. Ainsi lorsqu'on diminue la pression initiale, les effets capillaires jouent un rôle de plus en plus important ce qui réduit le débit de l'écoulement et donc le rayon effectif. La conclusion pour le rapport $h_{0\text{eff}}/h_0$ est la même avec une perte de charge significative pour les petits trous. On remarque également que lorsque le jet est instable, le rayon effectif est plus grand car le liquide s'écoule plus vite. Cette instabilité a tendance à diminuer l'interaction entre le liquide et le solide, ce qui réduit les effets capillaires. Elle dissipe plus d'énergie que dans le cas stable, mais cela semble négligeable par rapport à la diminution d'effets capillaires. En revanche, on voit que cette dissipation d'énergie entraîne une perte de charge comme on peut le voir avec la diminution du rapport $h_{0\text{eff}}/h_0$ (Fig. 3(b)). L'ordre dans lequel sont rangés les différentes séries de points de r_{eff}/r reste encore incompris et on peut voir sur la figure 4 que cet ordre change en fonction du matériau utilisé.

Nous avons également étudié comment le mouillage du fluide sur le solide pouvait influencer sur l'écoulement. Nous avons tracé les mêmes rapports r_{eff}/r et $h_{0\text{eff}}/h_0$ en fonction de l'angle de mouillage statique θ_S (Fig. 4). Chaque point correspond à une moyenne sur une série de mesure où h_0 a été modifié. On remarque que le rapport r_{eff}/r semble augmenter lorsque θ_S augmente. Cela peut se justifier qualitativement par le fait que lorsque θ_S augmente, l'affinité entre le liquide et le solide diminue ce qui permet au fluide de s'écouler au plus proche des parois en modifiant les lignes de courant à l'approche du trou. Cela reste à confirmer par une mesure ultérieure des lignes de courant dans l'écoulement. En revanche, pour le rapport $h_{0\text{eff}}/h_0$ aucune tendance ne se dégage en fonction du mouillage. Cela signifierait que le mouillage n'a pas d'influence sur la perte de charge au passage du trou.

Nous avons également essayé de modifier la longueur du trou L en doublant l'épaisseur des plaques de PVC. Nous avons donc pu comparer des séries de mesures pour $L = 2$ mm et $L = 4$ mm. Cette augmentation de la longueur du trou a une influence non négligeable sur l'écoulement. Tout d'abord l'instabilité qu'on observe habituellement pour des hauteurs initiales assez importantes ($h_0 = 10$ à 8 cm) pour $L = 2$ mm se développe pour des hauteurs initiales jusqu'à $h_0 = 5$ cm pour $L = 4$ mm. Cependant les changements qui sont observés sur les ratios r_{eff}/r et $h_{0\text{eff}}/h_0$ ne sont pas encore compris et des expériences supplémentaires sont nécessaires.

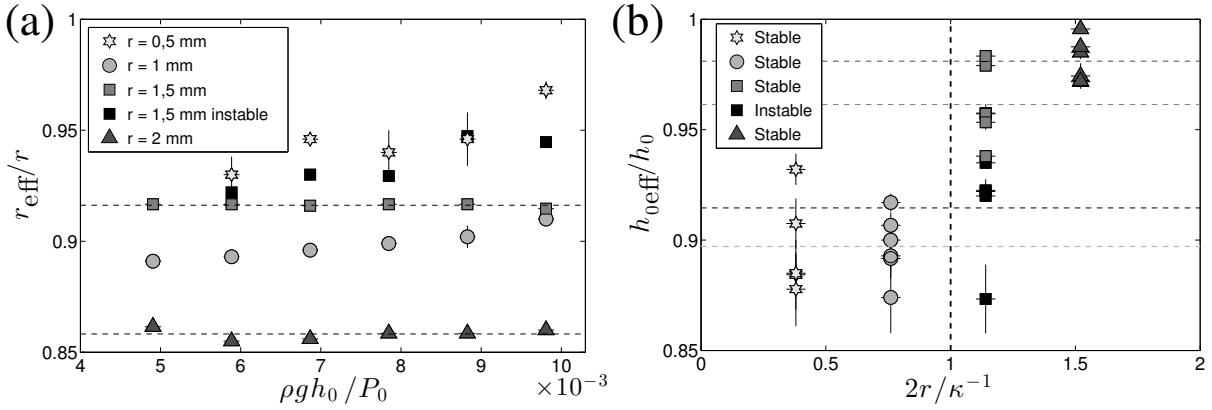


Figure 3. Dépendance des grandeurs effectives normalisées pour des trous percés dans du Téflon. (a) Les lignes en pointillés permettent de visualiser que les points sont alignés. (b) Les lignes horizontales en pointillés représentent la moyenne pour chaque r .

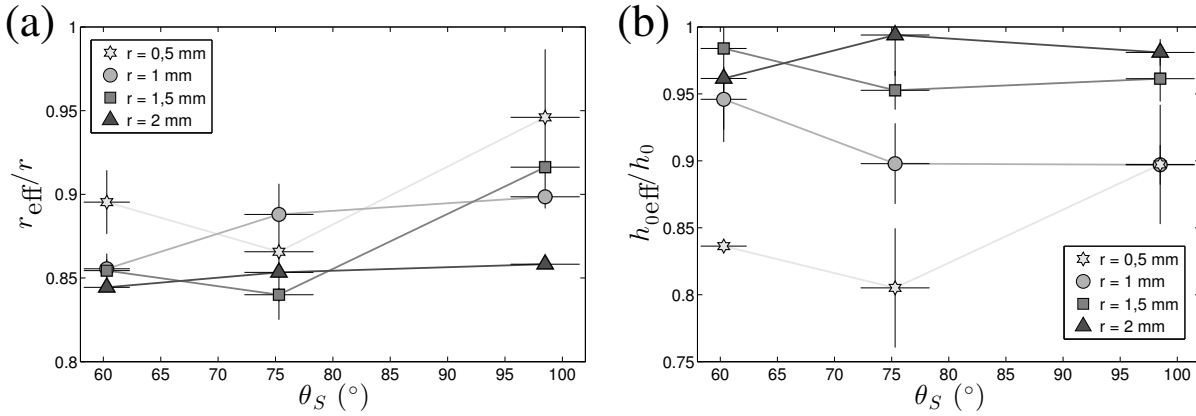


Figure 4. Dépendance des grandeurs effectives r_{eff}/r et $h_{0,\text{eff}}/h_0$ normalisées avec le mouillage (angle θ_S).

5 Conclusion

Malgré la simplicité du dispositif expérimental d'une vidange d'un fluide à travers un orifice et les nombreuses études qui ont déjà été effectuées, des phénomènes physiques restent encore incompris sur ce système. Nous avons mis en évidence que le mouillage du fluide sur la plaque dans lequel est percé le trou a une influence sur l'écoulement. Nous avons extrait du modèle de l'écoulement parfait un rayon effectif et une hauteur initiale effective permettant de caractériser l'écoulement du fluide. Cependant nous remarquons que l'étude de ces paramètres n'est pas suffisante pour caractériser entièrement le système et de nouvelles études sont en cours de réalisation. Les effets observés sont faibles (mais non négligeables), un soin tout particulier sera apporté au perçage des trous, afin de voir une éventuelle influence de la rugosité de surface et d'assurer une reproductibilité des écoulements. L'étude de la forme du jet ainsi que son angle de contact au niveau du trou nous donnera plus d'informations sur les mécanismes physiques des écoulements en fonction du mouillage. De plus, le développement et l'étude de l'instabilité observée nous intéresse grandement. Le tracé d'un diagramme des régimes est en cours de réalisation et des expériences supplémentaires sont nécessaires afin de le construire. Enfin cette étude pourra être poursuivie par des écoulements d'autres fluides newtoniens ou de fluides complexes.

Références

1. J. HOLEN, R. C. WAAG, R. GRAMIAK, M. R. VIOLANTE & S. A. ROE, Doppler ultrasound in orifice flow. In vitro studies of the relationship between pressure difference and fluid velocity, *Ultrasound Med. Biol.*, **11**, 261–266 (1985).
2. R. OUZIAUX & J. PERRIER, *Mécanique des fluides appliquée - Tome 1 - Fluides incompressibles*, Dunod, Paris (1966).
3. E. TORRICELLI, De motu gravium, *Opera Geometrica*, 191–204 (1644).
4. J. BOUSSINESQ, Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi, *C. R. Acad. Sc.*, **114**, 704–710 (1870).
5. H. VON HELMHOLTZ, Monatsberichte der Akad. der Wissenschaften, *Berlin* (1963).
6. G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über mathematische Physik*, p. 341 (1876).
7. G. F. DAVIDSON, Experiments on the flow of viscous fluids through orifices, *Proc. R. Soc. Lond.*, **89**, 91–99 (1913).
8. C. CLANET, Clepsydrae, from Galilei to Torricelli, *Phys. Fluids*, **12**, 2743–2751 (2000).
9. E. ALENUS, Mode switching in a thick orifice jet, an LES and dynamic mode decomposition approach, *Comput. Fluids*, **90**, 191–196 (2014).
10. P. SHARMA & T. FANG, Breakup of liquid jets from non-circular orifices, *Exp. Fluids*, **55**, 1666 (2014).
11. S. COURRECH DU PONT & J. EGGERS, Sink flow deforms the interface between a viscous liquid and air into a tip singularity, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 034501 (2006).
12. T. TOPLAK, H. TABUTEAU, J. R. DE BRUYN & P. COUSSOT, Gravity draining of a yield-stress fluid through an orifice, *Chem. Eng. Sci.*, **62**, 6908–6913 (2007).
13. A. USHIDA, T. HASEGAWA & T. NARUMI, Anomalous phenomena in several types of liquid flows through small orifices in a range of low Reynolds numbers, *Exp. Therm. Fluid Sci.*, **52**, 191–196 (2014).
14. P. G. DE GENNES, F. BROCHARD-WYART & D. QUÉRÉ, *Gouttes, bulles, perles et ondes*, Belin (2002).
15. Q. CHANG, M. ZHANG, F. BAI, J. WU, Z. XIA, K. JIAO & Q. DU, Instability analysis of a power law liquid jet, *J. Non-Newton. Fluid*, **198**, 10–17 (2013).

A new theory to describe the magnetoelastic instability

Fabien Gerbal^{1,2}, Wang Yuan¹, Jean-Claude Bacri¹, Florian Lyonnet², Thierry Hocquet^{1,2}, Martin Devaud¹

¹ Laboratoire Matière et Systèmes Complexes (MSC) UMR 7057 (CNRS) and Université Denis Diderot — Sorbonne Paris Cité, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75013 Paris, France

² Université Pierre et Marie Curie — Paris 6, Sorbonne Universités, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

fabien.gerbal@upmc.fr

Résumé. L'instabilité magnéto-élastique désigne un processus de flambage qui intervient quand une tige magnétique et flexible est soumise à un champ magnétique uniforme orthogonal à son axe. Maintenue à l'une ou aux deux extrémités, elle demeure droite tant que le champ n'atteint pas un seuil critique au-delà duquel elle fléchit subitement. Cette instabilité a été décrite initialement en 1968 [1] par Moon et Pao qui prévoyaient un seuil qui s'est avéré être 50 % supérieur à leurs mesures expérimentales. D'autres auteurs [2] ont montré qu'une prise en compte des effets de bords des tiges à section rectangulaire permettait de réduire cette divergence à 15 %. Nous avons récemment soumis un article qui présente une nouvelle théorie qui s'accorde à 0,7 % avec nos nouvelles expériences [4]. Nous en détaillons ici la théorie en insistant sur les divergences avec celles présentées auparavant. Notamment, nous montrons en quoi le modèle initial ne s'applique pas aux matériaux de grande susceptibilité magnétique, car cela est incompatible avec l'hypothèse faite que les portions de tiges ne s'influencent pas magnétiquement [3]. Nous rappelons nos résultats expérimentaux qui montrent que ceux-ci sont en bon accord avec notre modèle qui suppose l'aimantation uniforme le long de la tige. Enfin nous présentons un modèle simplifié à partir duquel il est aisé de montrer que cette instabilité est une transition de phase du second ordre selon le critère de Landau. De ce point de vue, les expériences passées et récentes présentent des aspects surprenants. Nous proposons une explication basée sur l'effet Barkhausen qui permet de comprendre les erreurs d'interprétations passées.

Abstract. The magnetoelastic instability designs a buckling process which occurs when a magnetic and elastic rod is submitted to a uniform magnetic field perpendicular to its main axis. Hold at any or both ends, the rod remains straight until the field reaches a threshold, at which a sudden bending occurs. This instability was initially described by Moon and Pao in 1968 [1] who expected a theoretical threshold which appeared to be 50 % lower than their measures. Others [2], by taking into consideration the magnetic edge effects of their rectangular cross-section rods reduced the gap down to 15 %. Recently, we submitted a work which presents a new theory along with new experiments with an agreement of 0.7 % [4]. We detail here the theory and insist on the differences with the previous one. In particular we show that the initial theory does not apply to high susceptibility material, which can not stand the hypothesis that local portions are magnetically independent of each other. We briefly present our experimental results, which indeed correlate with our model which supposes the magnetization to be uniform along the rod axis. We detail a simplified model from which it is easy to describe this buckling phenomenon as a phase transition of the second type according to Landau. This raises question concerning some peculiar aspects of the experiments. We propose an explanation based on the Barkhausen effect which sheds light on the past misinterpretations.

1 Introduction

The Euler instability is a well-known phenomenon: when we press axially a flexible straight rod, at first the material undergoes a compression with induces small deformation. But once the force amplitude reaches a threshold the axial symmetry breaks spontaneously while a lateral bending occurs [10]. An analogous mechanism happens when the driving energy is not the external mechanical force, but the rod magnetization induced by a uniform induction field B_0 orthogonal to its main axis. No deformation happens until the field reaches a finite value at which the rods bends suddenly. This magneto-elastic buckling mechanism was first described in 1968 [1] in a paper which presented both a model along with the experiments. The power law of the theory fitted well the experiments but the theoretical values were

lower than the measures by a factor of two. The theory consisted in establishing the expression for the field in an infinite straight slab to which the bending modes were added as perturbations. Since then, many papers tried to provide an explanation for the difference, and the best effort reduced it down to 15% by taking into account the edge effect when a slab of rectangular section was used [2]. A more recent paper showed the theory could be much simpler with an energetic approach, but found for cylindrical rods the same result as the initial paper [3]. Most papers were published in journals of mechanics, using classical ferromagnetic for the experiments. Independently the problem also appeared in the soft condensed matter community who dealt with new material and more sophisticated geometries without resolving the initial problem [6, 7]. In a recent paper [4], we have presented a new theory and new experiments with two different systems: a classical ferromagnetic nickel rod of few centimeters long and tens of microns long superparamagnetic iron rods. It demonstrated incidentally that this buckling is fundamental and may occur at different scales with different materials. Our model matched very well our buckling measures (within 0.7%) and the shape of the post-buckled rod fitted very well those observed. Surprisingly, our theory expects the buckling thresholds to be even lower than predicted by the first theory! But we interpreted differently the experiments: we propose that in many times the appearing threshold was overestimated in ferromagnetic material treated as paramagnetic. The problem indeed disappeared for the super-paramagnetic material. In the paper, we will review the different theories and shortly remind our experiments. We will then explain how the mechanism at the origin of the Barkhausen effect (the Weiss domains are hindered in their rotation) may be responsible for delay in the buckling mechanism and might have been a cause of a long term misinterpretation in past reports.

2 Theory

We consider a cylindrical rod with length L and radius $r \ll L$ (Fig. 1), straight at rest. We suppose it is a Hookean solid, homogeneous, with Young modulus E and bending modulus $C = \frac{\pi}{4}r^4E$. The magnetic susceptibility of the material (not supposed to be linear) is defined by $\chi(H) = \frac{M}{H} \xrightarrow{H \rightarrow 0} \chi_0$. The cylindrical geometry brings two advantages: the Poisson ratio is not involved in the bending modulus [8] and the absence of edge avoids any magnetic point effects. Except for those induced by the field, we neglect any external force such as gravity which did not interfere in the experiments. We are not considering twist in the problem which therefore reduces to two dimensions, the third being omitted in the forthcoming.

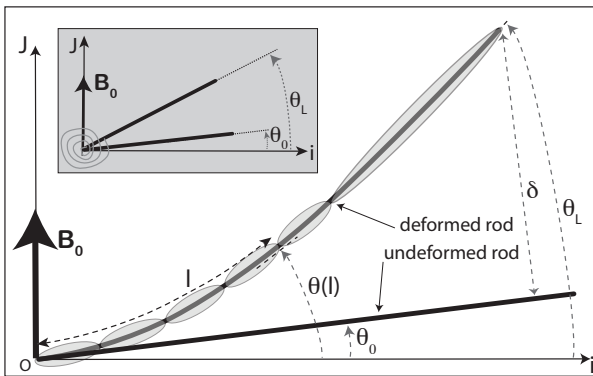


Figure 1. Notations for a magnetized bent rod modeled by a chain of ellipsoids. Inset: schematic for the toy model. The shape of the rod is parametrized by the coordinates $(x(l), y(l))$ in the coordinate system $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ where \mathbf{j} is the unitary vector oriented with the uniform induction field $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$ and l is the curvilinear abscissa. We define $\theta(l) = (\mathbf{i}, \mathbf{d}\mathbf{l})$. For the sake of simplicity we will only consider the cantilevered rod clamped at $l = 0$ and free at $l = L$. We note $\theta_0 = \theta(l = 0)$ and $\theta_L = \theta(l = L)$. δ is the distance between the tip of the deformed rod and its projection on the undeformed rod. The symbols \parallel and \perp applied to any vector $(\mathbf{M}, \mathbf{B}_0, \dots)$ design respectively their axial and orthogonal projections on the rod.

The physics principles which determine the bending shape of a magneto-elastic rod are rather simple: locally, the magnetic torque due to the angle between the internal magnetization and the external field must balance the mechanical torque associated with the bending. Considerations on the magnetization of a large aspect ratio ellipsoid, for which the infinite cylinder appears to be a limit, enlighten the buckling mechanism: for an isotropic and paramagnetic material of such a shape, the magnetization is uniform and

the strong demagnetizing field in the transverse direction tends to orient the magnetization in the axial direction. So, for a rod, the magnetization (\mathbf{M}) is transverse only when the field is strictly orthogonal to it. Therefore, a cantilevered rod submitted to a strictly orthogonal field remains undeformed as long as the energy cost of bending dominates the magnetic energy term. But once the field (\mathbf{B}_0) reaches a critical value the balance is in favor of the magnetic term ($\propto -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0$): while bending, the magnetization becomes mostly axial and increases suddenly. In a first approach, this mechanism ensures that the paramagnetic feature of the model presented below will describe correctly the experiments although also performed with ferromagnetic material. These latter are primarily demagnetized and since the deformations during an increase of the external field yields a monotonic increase of the magnetization, this latter follows a *first magnetization curve*, thus mimicking a paramagnetic material.

The theoretical difficulty to solve this problem is that the complete solution of the field of a magnetic solid in a uniform field is only easy for very simple geometries such as slab, or for ellipsoids for which the inside magnetization is uniform. With very little approximation the cylindrical straight rod may be modeled as a degenerate ellipsoid if its aspect ratio is large enough.

2.1 Toy model

The following simplified model contains enough physics to report for the principle of the instability: consider an infinitely rigid and magnetic rod with a free anchorage condition but whose angular displacement is hindered by an angular spring of stiffness $C' = \frac{C}{L}$, constraining the rod to the resting angle θ_0 (Fig. 1, inset). The corresponding torque balance equation for this system is:

$$\frac{C}{L}(\theta_L - \theta_0) = \pi r^2 L \frac{B_0^2}{2\mu_0} \Delta\chi \sin(2\theta_L), \quad (1)$$

where the right hand side is the result of $\mathbf{M} \wedge \mathbf{B}_0 = \pi r^2 L H_0^2 \begin{pmatrix} \chi_{\parallel} \cos \theta_L \\ \chi_{\perp} \sin \theta_L \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos \theta_L \\ \sin \theta_L \end{pmatrix}$. χ_{\parallel} and χ_{\perp} depend on the geometrical demagnetization factor and $\chi(H)$. For a long cylinder we can write with a very good approximation: $\Delta\chi = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp} \simeq \chi_{\parallel}$ when $\chi \gg 1$ because $0 < \chi_{\perp} = \frac{M_{\perp}}{H_{0\perp}} = \frac{\chi(H_{\perp})}{1 + \frac{\chi(H_{\perp})}{2}} < 2$. It is interesting to solve geometrically Eq. (1). If $\theta_0 = 0$, the linear curve meets the sine curve for non trivial values only when B_0 reaches a threshold. The solution for the threshold is: $B_c^h = \frac{1}{rL} \sqrt{\frac{\mu_0 C}{\pi \Delta\chi}} = \frac{B_c^a}{\sqrt{2}}$. If $\theta_0 \neq 0$, no critical point appears. Interestingly, an energy equation of the system is obtained by integration of the torque balance equation :

$$E_{B_0 \rightarrow B_c^h} = \frac{1}{4} B_0^2 + \frac{1}{2} [(B_c^h)^2 - B_0^2] \theta'^2 + \frac{1}{6} (B_c^h)^4 \theta'^4, \quad (2)$$

which has the form of a classical energy development of a second order transition according to Landau.

2.2 The independent model

A more realistic model consists in taking into account the possible bending of the rod everywhere. For this purpose, let approximate the rod by a series of degenerate prolate ellipsoids (see Fig. 1). The general equation of the “toy model” is now local and the system is governed by the minimization of a functional energy: $F = \int_0^L [g_b(l) + \pi r^2 g_m(l)] dl$, where $g_b(l) = \frac{C}{2} \left(\frac{d\theta(l)}{dl} \right)^2$ is the local bending energy per unit length [8] and $g_m = g_0(T) - \int_0^{B_0} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{B}_0$ is the free magnetic enthalpy per unit volume at position l along the rod [9]. It is possible to show [4] that even if the material is magnetically nonlinear, differentiation of the functional leads to the local torque balance equation :

$$C \frac{d^2}{dl^2} \theta + \pi r^2 \frac{\Delta\chi B_0^2}{2\mu_0} \sin(2\theta) = 0, \quad (3)$$

for $0 < l < L$ and the boundary condition at the free extremity : $\frac{d\theta}{dl}|_L = 0$. The value of θ_0 fixes the other boundary condition. Interestingly, when $\theta_0 = 0$, $\theta(l) = 0 \forall l$ is a valid solution. This solution was

presented recently [3] and expects the buckling field to be: $B_c^i = \frac{1}{2rL} \sqrt{\frac{\pi\mu_0 C}{\Delta\chi}}$. Interestingly, while it dealt with cylindrical rods, the predicted value of the buckling threshold was in fact the same as that found in the original article by Moon and Pao in 1968 for slabs of section $h \times l$: the differences between the results vanishes if one accounts for the change in geometry which affects both the volume of magnetic material ($hl \rightarrow \pi r^2$) and the moment of inertia ($\frac{lh^3}{12} \rightarrow \frac{\pi}{4}r^4$, $\nu^2 \rightarrow 0$, where ν is the Poisson ratio). In the 1968 paper, the calculus of the threshold was made by establishing the equation of the field in the slab supposed to be infinitely long. A treatment by perturbations accounted for the slightly bent slab. In each paper, the initial approximations (infinite slab and degenerate ellipsoid) are in fact equivalent for the calculus of the magnetization in the undeformed system. Therefore a first order development in each model yields the same result for the critical threshold.

However, something is wrong! This can be easily explained in the “energy method”: this model implicitly relies on the assumption that the local magnetization only depends on the local angle between the rod and the external field and thus that different sections are magnetically independent of each other. The condition of validity of this assumption is that the induced field (H_{ind}) by a magnetized part remains lower than the local external field H_0 . Using the dipolar approximation ($\mathbf{H}_{\text{ind}} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right]$), the field induced by the rod (approximated by an infinite cylinder) into an adjacent section is $H_{\text{ind}\perp} = -\frac{H_0}{4} \left[\frac{\chi}{1+\frac{\chi}{2}} \right]$ when the external field is transverse, and $H_{\text{ind}\parallel} = \frac{\chi H_0}{4}$ when the field is in the axial direction. Since $0 \leq \frac{\chi}{1+\frac{\chi}{2}} \leq 2$, the condition is therefore always pertinent in the transverse case, but only when $\chi \lesssim 1$ in the axial case. For high susceptibility materials, the model is therefore inaccurate.

2.3 The axial model

For materials with $\chi > 1$, local parts of the rod strongly influence each other magnetically. Thus, we proposed, the “axial model” based on the following assumptions: (a) the magnetization mostly orients along the rod axis (if not strictly orthogonal to the field) and its longitudinal component is constant; (b) the magnetization is governed by its maximum value, i.e. by the part of the rod which most aligns with the external field (the free tip for the cantilever rod). In this model the shape is almost entirely determined by the axial magnetization: the transverse magnetization remains weak (because of the demagnetization field) and moreover induces very small torque in case of small deformations because it remains globally parallel to the external field. There is no need at first to determine the origin of the the axial magnetization M_{\parallel} which may arise from the external field (condition (b)) or from a permanent moment. The free magnetic enthalpy per unit length of the rod is now:

$$C \frac{d^2}{dl^2} \theta(l) + \pi r^2 M_{\parallel} B_0 \cos \theta = 0, \quad (4)$$

for $0 < l < L$. Its integration leads to a new Euler equation: $\lambda_1^2 \left[\frac{\partial \theta}{\partial l} \right]^2 = \sin \theta_L - \sin \theta$ in which we have defined the new length scale $\lambda_1 = \sqrt{\frac{C}{2\pi r^2 M_{\parallel} B_0}}$. The rod shape is now described by:

$$x(l) = 2\lambda_1 [\sqrt{\sin(\theta_L) - \sin(\theta_0)} - \sqrt{\sin(\theta_L) - \sin(\theta(l))}], \quad (5)$$

$$y(l) = \lambda_1 \int_{\theta_0}^{\theta(l)} \frac{\sin(\theta) d\theta}{\sqrt{\sin(\theta_L) - \sin(\theta)}}, \quad (6)$$

where θ_L is the always existing solution of: $L = \lambda_1 \int_{\theta_0}^{\theta_L} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta_L) - \sin(\theta)}}$. We now transcript the assumption (b) by $M_{\parallel} = \chi(H_{0\parallel L})H_{0\parallel L}$, with $H_{0\parallel L} = H_0 \sin \theta_L$. Thus, defining ultimately $\lambda_2 = \sqrt{\frac{\mu_0 C}{2\pi r^2 \chi(H_{0\parallel L}) B_0^2}}$, the solution for θ_L now depends on: $L = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\sin \theta_L}} \int_{\theta_0}^{\theta_L} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta_L) - \sin(\theta)}}$ which always admits a solution for $\theta_L \geq \theta_0 > 0$. But in the case $\theta_0 = 0$, a solution exists only if $L \geq 2\lambda_2$. It yields a new value for the critical field: $B_c^a = \frac{1}{rL} \sqrt{\frac{2\mu_0 C}{\pi \chi(H_{0\parallel L})}}$, about 10% lower than B_c^i in the approximation of $\chi \simeq \chi_0$. In fact this new theoretical threshold may have worsen our case because the theoretical values were already below the measures.

3 Comparison with the experimental results

To test our theory we performed experiments on pure nickel rods with a radius of $46 \pm 3 \mu\text{m}$, and length varying from $\sim 2\text{--}8 \text{ cm}$. We measured by independent flexion measurement $C = (5.1 \pm 0.5) \times 10^{-8} \text{ J} \cdot \text{m}$ corresponding to a Young modulus of $E = 230 \pm 70 \text{ GPa}$. Before any magnetoelastic experiment, the rods were demagnetized, so that they would follow a first magnetization curve during the experiment and behave like a paramagnetic while the field increases. The experiments were conducted in the horizontal plane at the center of two solenoids coils in the Helmholtz configuration ($\phi = 70 \text{ cm}$, $L = 7 \text{ mH}$, $R = 0.2 \Omega$) which insured that the field gradient was negligible.

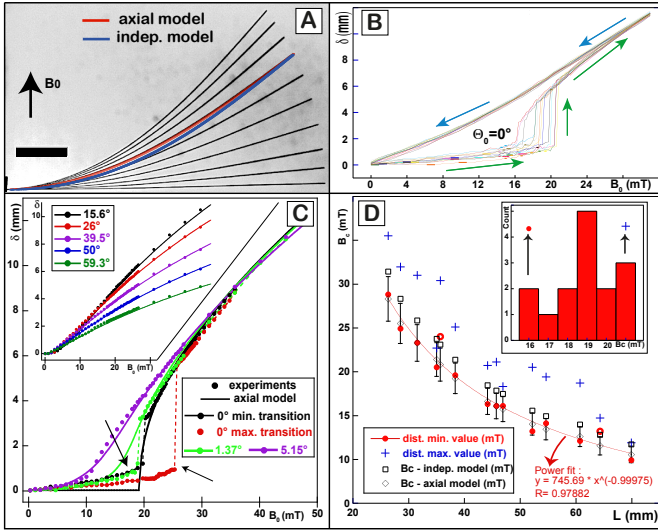


Figure 2. Experiments with nickel rods. A. 10 superposed pictures of the same 60.7 mm rod with increasing values of B_0 from 0 to 39.6 mT by increment of 4.4 mT (bar = 1 cm). On the “26.6 mT” rod are superimposed the theoretical curve from the independent model (blue, mean difference with the experimental shape = 15 %) and the axial model (red, mean difference: 2.4 %). B. repeated magnetization cycles (field increased: green arrow, decreased: blue arrow) showing the absolute value of a rod tip deflections. C. Theoretical (axial model) and measures of rod tip deflections (δ) for a 38.1 mm rod at various incidences as a function of B_0 . The inset and the main figures correspond to the same graph split in two for clarity. Dots: experimental measures. Solid lines: axial model. D. Buckling threshold for various rod lengths. Inset: example of histogram of measures of B_c for one rod. Main figure: minimum (\bullet) and maximum value ($+$) of B_c and theoretical values from the axial model (\diamond) and the independent model (\square).

We first compared the shape of deformed rod (after buckling if any) with the theoretical shape computed from the independent and the axial model (Fig. 2. A.). We found that for any incidence of the angle, for all tested shapes ($N \geq 20$), the difference with the axial model was below 2.5 %, whereas the independent model underestimates the axial magnetization and the curvature of the rod at the vicinity of its anchor (differences $\gtrsim 10\%$). We also checked that the axial model was able to provide the correct deflection of the tip of the rod (δ on Fig. 1, which can be easily derived from Eqs. (5) and (6))¹: Fig. 2. C. shows the axial model provides almost always the correct value for the rod deflection at any incidence of the field without adjustable parameters except at the vicinity of the threshold.

Experimental study of the buckling threshold was performed over 20 different nickel rods. A typical deflection experiment consisted in running an automatic sequence of 80 to 150 measures (see methods) during which the field was incrementally increased from 0 to 44 mT (generator maximum power) and then decreased again back to 0. Still pictures of the equilibrium were taken typically 2 seconds after each new value of the external field. At 0 mT, the rods recovered their straight shape, showing that no plastic deformation had occurred. A sudden transition almost always occurred when the rod was demagnetized before the buckling experiment, and never if no demagnetization were done, thus demonstrating that the erasing of any permanent moment was a strict condition for the buckling. The bend could happen in either way suggesting that no gradient induced a bias in the experiment.

The most striking feature of these experiments is the non reproducibility of the threshold (Fig. 2. B.). For all the rods we tested, although we took great care in reproducing exactly the same procedure (same

1. The dependence of the magnetic susceptibility χ on H was taken into account by writing: $\lambda_2 = \lambda_2^0 \sqrt{\frac{a' B_0 \sin \theta_L}{3\mathcal{L}(a' B_0 \sin \theta_L)}}$ where $\lambda_2^0 = \sqrt{\frac{\mu_0 C}{2\pi r^2 \chi_0 B_0^2}}$, \mathcal{L} is the Langevin function, $a' = \frac{a}{\mu_0}$ and χ_0 are derived from the fit of the magnetization curve as described above.

demagnetization, same repositioning of the rod, same automatic magnetization), we found that the value of the threshold varies from one run to another, without correlation with the sequence order.

For each rod analyzed, we compared the minimum, the mean and the maximum value of the threshold distribution with the theoretical values. Fig. 2.D. shows comparison between theoretical and experimental values of the threshold for various rod sizes. We were surprized that the *minimum* measured threshold for any distribution were in excellent agreement (0.7%) with the value of the threshold predicted by the axial model whereas all the others characteristic values of the distribution disagree with any model. The expected slope of -1 for the dependence on the length was also found for the minimum values.

4 Conclusion

The results of the experiments are therefore contradictory: on the one hand, the axial model fits extremely well the shape of the deflected rods, the amplitude of the deflexion. It also provides a correct value for the minimum observed threshold of the transitions. On the other hand, these theoretical values were even further away from the experimental values previously reported... and the agreement with the minimum rather than the maximum threshold was quite surprizing. Other features were also striking: Fig. 2.B. shows that the rods most of the time starts to bend right away when the field departs from zero. Thus, these experiments show that an instability occurs after the symmetry has already been broken: this is totally inconsistent with a second order Landau transition.

We interpret these data by considering some classical behavior of the Weiss domains in ferromagnetic systems. While ferromagnetic materials behave in average like a paramagnetic one during their first magnetization curve, individual Weiss domains may be stuck and not comply to the external field excitation. They would “slip” only if the frustration in energy is too high. This “stick-slip” mechanism at the level of the Weiss domains are at the origin of the “cracks” that can be heard in magnetized wired: this is the well known Barkhausen effect. According to these ideas, we have performed some numerical simulations [4] that are able to account for the experiments in Fig. 2.B. They show that the maximum measured thresholds in our experiments — but also in past reports — are irrelevant for the paramagnetic buckling mechanism. Stuck Weiss domains delay the transition. This counterintuitive phenomenon encouraged most experimentalists to put aside the minimum measured thresholds of the experiments [7]... and systematically found values higher than the theoretical expectations!

Acknowledgements: The authors thank the organizers of the RNL conference for selecting their contribution for a presentation.

References

1. F. MOON & Y. H. PAO, *J. Appl. Mech.*, **35**, 53–58 (1968).
2. K. MIYA *et al.*, *J. Appl. Mech.*, **45**, 355–360 (1978).
3. W. YANG *et al.*, *J. Appl. Mech.*, **66**, 913–917 (1999).
4. F. GERBAL, Y. WANG, J.-C. BACRI, F. LYONNET, T. HOCQUET & M. DEVAUD, Submitted to *PNAS*.
5. C. GOUBAULT *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 260802 (2003).
6. A. CEBERS, *J. Phys. Cond. Matt.*, **15**, S1335–S1344 (2003).
7. J. DALRYMPLE *et al.*, *J. Appl. Mech.*, **41**, 145–150 (1974).
8. L. D. LANDAU, *Théorie de l'élasticité*, 2nd edition, MIR, Moscow, pp. 95–100 (1990).
9. L. D. LANDAU, *Électrodynamique des milieux continus*, MIR, Moscow, pp. 169–172 (1969).
10. V. G. A. GOSS, *Snap Buckling, Writhing and Loop Formation in Twisted Rods*, PhD Thesis, University of London (2003).

Collision d'un tourbillon fluide annulaire sur une surface conique

Sergio Hernandez Zapata¹, Erick Javier Lopez Sanchez¹, Veronica Raspa² & Gerardo Ruiz Chavarria¹

¹ Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, 04510 Mexico D.F., Mexique

² Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Argentine

shernandezzapata@yahoo.com.mx

Résumé. Lorsqu'un tourbillon de fluide approche une paroi solide, de la vorticité est engendrée en raison de l'apparition de gradients de vitesse au voisinage de la paroi. Il se développe alors une couche limite qui, sous certaines conditions, se détache, permettant ainsi la formation d'un autre tourbillon dont la vorticité est de signe opposée. Dans ce travail, nous présentons des résultats numériques et expérimentaux sur l'évolution d'un anneau tourbillonnaire impactant l'intérieur d'une surface conique. Pour cela, nous considérons le même axe de symétrie pour le tourbillon et le cône. Loin de la surface conique, le vortex se déplace à une vitesse constante et son diamètre ne se modifie pas.   l'approche du cône, le vortex annulaire augmente sa taille, diminue sa vitesse de translation, s'arrête puis rebondit. En même temps, un autre vortex annulaire se forme et les deux vortex interagissent. Leur interaction conduit, d'une part, à l'arrêt du rebond du tourbillon primaire et à son déplacement vers l'intérieur du cône, et d'autre part, à l' jection du tourbillon secondaire.   la fin du processus, les deux vortex disparaissent   cause de la dissipation visqueuse.

Abstract. When a vortex lies in the vicinity of a wall some additional vorticity is created due to the fact that velocity must go to zero on a solid body. Near the wall a boundary layer develops which, under certain conditions, detaches, allowing the formation of another vortex that rotates in opposite sense. In this work we present both numerical and experimental results about the evolution of a vortex ring impacting the inner surface of a cone. We assume that the cone and the vortex share the same axis of symmetry. Far from the cone the vortex moves with a constant speed and its diameter does not modify. But close to the wall, the vortex increases its size and its speed decreases. At the same time another vortex ring is created. Initially both vortices interact, the secondary one rotates around the primary vortex leading to stop its bouncing. After that, the two vortices separate. The primary eddy moves towards the vertex of the cone and the secondary one moves away due to its self-induced velocity. Finally, the two vortices disappear due to viscous dissipation.

1 Introduction

L'interaction d'un vortex avec un corps solide a été étudié numériquement et expérimentalement [1,2]. Dans le cas d'un vortex annulaire la plupart des études ont été menées quand le tourbillon impacte une plaque plane selon une incidence normale. Dans ce cas, la théorie non visqueuse prédit — en utilisant la méthode d'images — que lorsque le vortex s'approche de la paroi, son diamètre augmente et en même temps sa vitesse diminue. Ensuite le tourbillon (qui, par la suite, sera appelé le *vortex primaire*) s'arrête puis rebondit. Près de la paroi, ce modèle ne marche plus et il faut alors prendre en compte la viscosité. La présence du vortex induit un écoulement radial et la production de vorticité secondaire de signe opposé. Walket et coll. [3] ont fait une étude expérimentale de ce système. Ils ont fait des visualisations des anneaux tourbillonnaires dans l'eau pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à 3000. Ils ont trouvé que pour $Re < 250$ le vortex secondaire n'arrive pas à se produire. Au-delà de cette valeur il est possible de voir l'apparition d'un vortex annulaire qui, initialement, a un diamètre supérieur à celui du vortex primaire. En raison du fait que la vorticité de l'un des tourbillons est positive et que la vorticité de l'autre est négative, l'anneau secondaire tourne autour du primaire. Ce comportement donne lieu à l'arrêt du rebond de l'anneau primaire. Pour un nombre de Reynolds autour de 3000 on observe que le vortex secondaire se détache et s'éloigne. Pour l'étude de la stabilité de ces tourbillons Swearingen et coll. [4] ont fait une simulation numérique pour un nombre de Reynolds $Re = 645$. Ils ont résolu les équations de Navier-Stokes et de continuité avec une méthode spectrale de Fourier-Chebyshev. Ces auteurs ont

trouvé que le vortex secondaire développe des instabilités azimutales, tandis que le vortex primaire reste symétrique.

Le système étudié dans ce papier est un vortex annulaire qui se déplace vers la surface intérieure d'un cône, comme on peut le voir sur la figure 1. On a choisi un angle de 45 degrés entre la génératrice du cône et l'axe de symétrie. Le comportement du tourbillon a des différences importantes par rapport à l'impact d'un vortex annulaire contre une plaque plane. D'abord le vortex secondaire se détache de la paroi et après une brève interaction avec le tourbillon primaire, il s'éloigne dans la direction opposée. D'autre part le diamètre du vortex secondaire est plus grand que celui du tourbillon primaire.

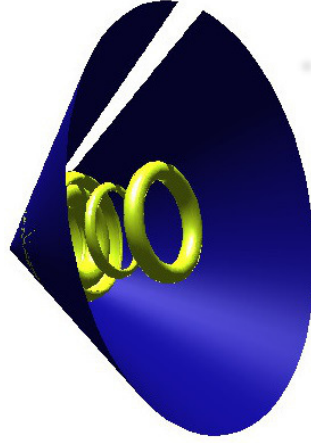


Figure 1. Impact d'un tourbillon annulaire contre une surface conique. L'axe de symétrie est le même pour le cône et le vortex. Pour l'étude numérique on utilise un système de coordonnées cylindriques, dont l'origine coïncide avec le sommet du cône.

2 Description du problème et méthodes

Nous avons conduit une recherche numérique et expérimentale pour déterminer l'évolution du tourbillon annulaire primaire, le développement de la couche limite et la génération du vortex secondaire. Afin d'être conformes avec les résultats d'autres auteurs, nous avons choisi comme vitesse caractéristique celle du vortex primaire loin de la paroi, tandis que comme longueur représentative, nous avons pris son diamètre initial. Ces deux quantités et la viscosité cinématique nous permet de définir le nombre de Reynolds (Re). Les valeurs de Re dans les simulations numériques et les expériences sont comprises entre 1 000 et 3 000. Mais comme le comportement est essentiellement le même, nous allons présenter des résultats uniquement pour $Re = 2000$.

2.1 Méthode numérique

Les équations à résoudre sont les suivantes :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Pour résoudre l'équation de Navier-Stokes, on a utilisé la méthode de projection. En ce qui concerne le traitement des variables spatiales, on a utilisé une méthode spectrale de Fourier [6] pour la coordonnée angulaire et une méthode de différences finies pour les coordonnées r et z . En outre, on a utilisé un schème d'Adams-Bashforth de deuxième ordre pour le temps. Évidemment, au vu des équations, nous avons utilisé un système de coordonnées cylindriques (dont l'origine se trouve au sommet du cône). Le domaine d'intégration a une taille de 10 unités en z et de 2,5 unités en r . Le maillage a 400 points pour la coordonnée z , 100 pour r et pour la variable θ , on a utilisé 64 modes.

En ce qui concerne les conditions aux limites, on impose $\mathbf{u} = 0$ sur la surface du cône et l'annulation de la dérivée normale sur les autres frontières. Pour la pression, on a choisi comme condition aux limites l'annulation de la dérivée normale. Quant à la condition initiale, on va supposer que le tourbillon annulaire existe déjà à $t = 0$. Il est placé à une distance de 5 unités de l'origine des coordonnées. Une bonne hypothèse est que l'anneau tourbillonnaire a une distribution de vorticité gaussienne. Le champ vitesse se calcule ensuite en utilisant la loi de Biot et Savart. Dans certains cas, on a utilisé comme condition initiale une distribution de vitesse obtenue des mesures faites avec un anémomètre à fil chaud. *In fine*, les résultats obtenus sur l'interaction entre le tourbillon et la paroi sont presque les mêmes.

2.2 Dispositif expérimental

Pour l'étude de l'évolution de tourbillon annulaire nous avons mesuré la composante de vitesse u_z avec un anémomètre à fil chaud. Ce dispositif permet d'obtenir une série temporelle de valeurs de vitesse en un point fixe. Pour accéder aux valeurs de vitesse sur un ensemble de points dans le plan (r, z) , nous avons utilisé un système de positionnement X-Y construit à l'aide des moteurs pas à pas. La production du vortex annulaire a été faite en appliquant une perturbation électrique à une cavité dont l'une des parois est un haut-parleur. De l'autre côté de la cavité se trouve un trou circulaire qui permet la sortie de l'air et la formation du vortex. Finalement, la génération du vortex a été synchronisée avec la prise de données de vitesse par une carte d'acquisition de 14 bits. Afin d'éviter les perturbations de l'extérieur, le système a été mis à l'intérieur d'une cage fait en plexiglass.

3 Résultats

La vitesse d'un tourbillon annulaire libre est égale à [7]

$$u_z = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left[\log \left(\frac{8R}{a} \right) - \frac{1}{4} \right], \quad (5)$$

où Γ est la circulation, R est le rayon du vortex et a est le rayon du noyau. Cette relation nous permet d'avoir une estimation de la circulation des tourbillons si la taille du noyau est connue. Dans la simulation numérique le rayon du vortex libre est $R = 0,5$ tandis que la valeur absolue de la vitesse est 1. D'autre part, à partir des données de la vitesse, on obtient $a = 0,15$; l'estimation de la circulation du tourbillon loin de la paroi est alors $\Gamma = 2,07$. Nous avons fait le même calcul pour le vortex secondaire pour un nombre de Reynolds $\text{Re} = 2000$ quand il se trouve à $z = 3$, ce qui nous donne la valeur $\Gamma = -0,7$. Ces valeurs de la circulation sont proches de ceux que l'on obtient à partir de la définition Γ comme l'intégrale de contour de la vitesse (2,2 et $-0,8$ respectivement).

Une première approche pour l'étude de l'interaction entre le cône et le tourbillon primaire est le calcul de la trajectoire suivi par ce dernier. Dans ce but, la figure 2 montre sa position (coordonnée z) en fonction du temps. La première partie de la courbe est une ligne droite avec une pente égale à -1 . Cela signifie que, au début, le tourbillon annulaire se déplace à une vitesse constante en raison du fait qu'il est loin d'objets solides. Au fur et à mesure que le vortex s'approche du cône, il décélère, s'arrête puis rebondit (ce qui se passe autour de $t = 4,6$). Le rebond se produit en même temps qu'une augmentation de son diamètre. Le tourbillon s'éloigne un peu mais l'interaction avec le vortex secondaire fait qu'il récupère le mouvement dans la direction initiale. Une meilleure façon de décrire le comportement de l'anneau tourbillonnaire est de montrer sa trajectoire (voir Fig. 3). D'abord le mouvement de l'anneau est rectiligne. Ensuite, il décélère et s'approche de la paroi. Il fait une boucle et enfin continue son déplacement suivant la direction initiale.

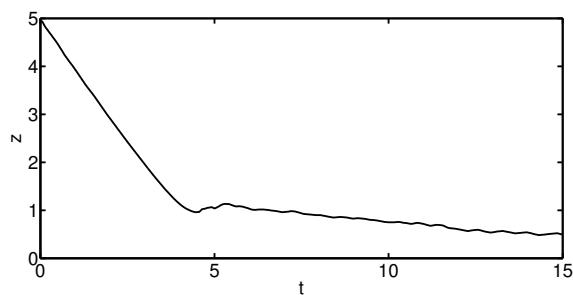


Figure 2. Position du vortex (coordonnée z) en fonction du temps. Au début le tourbillon se déplace à vitesse constante, puis il rebondit et il s'éloigne un peu, pour finalement se déplacer dans la direction initiale.

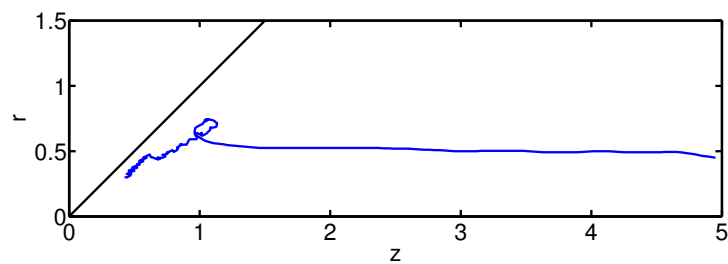


Figure 3. Trajectoire du tourbillon annulaire. D'abord il se déplace parallèlement à l'axe de symétrie. Après, il est freiné par la présence de la paroi. Il se rapproche du cône, il s'arrête et il rebondit. Ensuite le vortex récupère son déplacement dans la direction originale. À la fin, il disparaît à cause de la dissipation visqueuse.

La proximité du vortex de la surface du cône intensifie le cisaillement et la production de vorticité. Pour que le vortex secondaire se forme il faut que la couche limite se détache. Le critère pour déterminer la position du décollement de la couche limite est que $\sigma_r = 0$. Les données du champ de vitesse nous permettent calculer la position (coordonnée z) pour laquelle σ_r s'annule, ce qui est montré dans la figure 4. Un tourbillon annulaire se caractérise pour avoir une vitesse qui varie rapidement à l'intérieur du noyau. Par contre, à l'extérieur, la vitesse décroît lentement selon la loi $u \approx \frac{1}{\xi}$ où ξ est la distance

au centre de l'anneau. Ce comportement est modifié par la présence d'un objet solide à cause de la condition d'annulation de la vitesse à l'interface fluide-solide. Initialement, l'écoulement extérieur est potentiel mais la présence de la surface conique induit que la vitesse tombe jusqu'à zéro, ce qui conduit à une production de cisaillement et aussi de vorticité. Les contraintes augmentent au fur et à mesure que le tourbillon annulaire se rapproche du cône. Et   un certain instant le vortex primaire est si près de la frontière solide que le noyau de celui-ci se déforme et donne lieu à l'apparition d'un jet qui précède la formation du tourbillon secondaire. La courbe de la figure 4 indique que la position de l'annulation de σ_τ décroît rapidement quand l'anneau tourbillonnaire s'approche de la paroi, mais cela ne correspond pas au décollement de la couche limite. Ce processus commence autour de $t = 4,5-5$, lorsque la courbe atteint sa valeur minimale. La position du décollement de la couche limite s'éloigne de l'origine des coordonnées ce qui est lié au rebond du vortex primaire. Ensuite, le tourbillon secondaire se forme et ces deux structures interagissent, c'est-à-dire, le vortex secondaire tourne autour du primaire. L'évolution ultérieure de ce système est diff rent si l'on fait une comparaison avec l'impact d'un tourbillon annulaire contre une paroi plane. Ici le vortex secondaire se sépare du vortex primaire et il se déplace dans la direction opposée. La figure 5 contient des distributions de vorticité dans le plan (r, z) pour un angle $\theta = 0$ et à plusieurs instants. Il faut noter que le champ de vitesse a une faible dépendance par rapport à θ , ce qui signifie que les tourbillons restent symétriques. La figure 5(a) montre la vorticité avant l'impact ($t = 2$) lorsque le centre du vortex se trouve à $z = 3$. Le tourbillon est bien décrit par une distribution de vorticité gaussienne. Les figures 5(b) et 5(c) correspondent à des instants de la formation du vortex secondaire ($t = 5,2$ et $t = 6,4$ respectivement). Dans la première, le tourbillon secondaire s'est déjà détaché de la paroi et il y a une forte interaction avec le tourbillon primaire. En effet, une fraction de la vorticité se sépare du dernier et les deux structures tournent. Dans la deuxième (Fig. 5(c)) les deux tourbillons se sont déjà séparés, mais le détachement de la couche limite continue. Finalement, dans la figure 5(d), le vortex secondaire se trouve à $z = 2,6$ et il s'éloigne à une vitesse $u_z \approx 0,27$, tandis que la valeur de sa circulation Γ est $-0,8$.

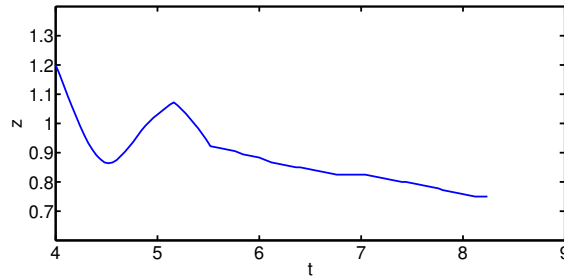
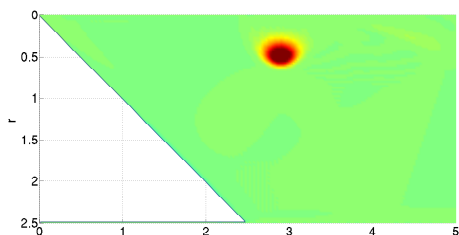


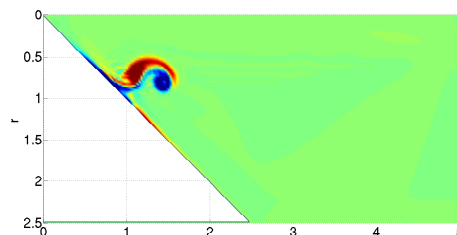
Figure 4. Position (coordonnée z) de l'annulation de σ_τ sur la surface du cône. Cette position correspond au point du décollement de la couche limite et elle indique le lieu de la formation du tourbillon secondaire.

4 Conclusion

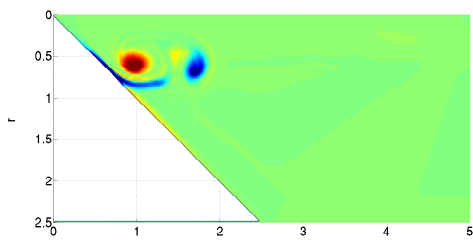
Nous avons montré plusieurs résultats sur l'interaction d'un anneau tourbillonnaire qui impacte la surface intérieure d'un cône. Initialement le vortex se déplace à une vitesse constante et au fur et à mesure qu'il s'approche de la paroi, il décélère, puis il rebondit et son diamètre augmente. Ce vortex fait une boucle avant de continuer son déplacement vers l'intérieur du cône. L'interaction du vortex avec la surface conique conduit à la formation d'un anneau tourbillonnaire secondaire. Les deux structures interagissent puis elles se séparent. Une différence majeure avec le cas de l'impact d'un tourbillon contre une paroi plane est que le vortex secondaire se sépare et s'éloigne de la paroi pour tous les nombres de Reynolds considérés dans cette étude ($1000 < Re < 3000$).



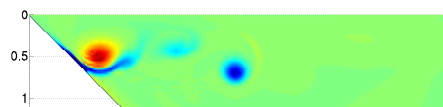
(a) Distribution de vorticité à $t = 2,0$. Le vortex primaire est encore loin de la paroi.



(b) Distribution de vorticité à $t = 5,2$. Il y a une forte interaction entre les deux tourbillons.



(c) Distribution de vorticité à $t = 6,4$. Les deux vortex se sont déjà séparés, mais de la vorticité se détache de la paroi.



(d) Distribution de vorticité à $t = 8,8$. Le vortex secondaire s'éloigne à une vitesse $u_z \approx 0,27$.

Figure 5. Distribution de vorticité dans le plan (r, z) pour $\theta = 0$. Les figures montrent un tourbillon libre, l'interaction du vortex primaire avec la surface solide et l'évolution du tourbillon secondaire.

Remerciements : Les auteurs remercient la DGAPA -UNAM pour le soutien dans le contrat PAPIIT IN116312 (*Vorticidad y ondas no lineales en fluidos*). Veronica Raspa remercie la DGECI-UNAM pour le soutien d'une mission à l'UNAM en 2014.

Références

1. J. E. V. GUZMAN, L. P. J. KAMP & G. J. F. VAN HEIJST, Vortex dipole collision with a sliding wall, *Fluid Dyn. Res.*, **45**, 045501 (2013).
2. T. L. DOLIGALSKI, C. R. SMITH & J. D. A. WALKER, Vortex interactions with walls, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **26**, 573–616 (1994).
3. J. D. A. WALKER, C. R. SMITH, A. W. CERRA & T. L. DOLIGALSKI, The impact of a vortex ring on a wall, *J. Fluid Mech.*, **181**, 99–140 (1987).
4. J. D. SWEARINGEN, J. D. CROUCH & R. A. HANDLER, Dynamics and stability of a vortex ring impacting on a solid wall, *J. Fluid Mech.*, **297**, 99–140 (1995).
5. M. CHENG, J. LOU & L. S. LUO, Numerical study of a vortex ring impacting a flat wall, *J. Fluid Mech.*, **660**, 430–455 (2010).
6. R. PEYRET, *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow* Springer, New York (2003).
7. M. LAVRANTIEV & B. CHABAT, *Effets hydrodynamiques et modèles mathématiques*, Mir, Moscou (1980).

Dualité onde-corpuscule macroscopique : perte de déterminisme et émergence d'un comportement statistique par effet mémoire

Maxime Hubert¹, Stéphane Perrard², Matthieu Labousse², Nicolas Vandewalle¹ & Yves Couder²

¹ GRASP, Allée du 6 août, 17, 4000 Liège, Belgique

² Matière et Systèmes Complexes, 10, rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75013 Paris, France
maxime.hubert@ulg.ac.be

Abstract. Walking droplets can store information about their past on the surface they bounce on with Faraday waves. We study here the effect of such a memory on the walking droplet dynamics. More specifically, we study the effect of an increasing memory on the stability of the dynamics and subsequent chaotic behaviors. Through Lyapounov exponent, we show that, as the memory increases, the dimension of the phase space related to the walker increases. We also show that unstable regions appear in this phase space and discuss the role of the memory as factor of chaos and probabilistic behavior. This study gives new insights about chaos in walking dynamics, due to memory properties, and its relation with statistical descriptions of such objects.

1 Introduction

À la surface d'un bain de liquide en oscillation verticale, il apparaît des ondes stationnaires au-delà d'une accélération de forçage γ_F . Ce phénomène est appelé *instabilité de Faraday*. Pour un forçage γ proche, mais sous le seuil γ_F , l'impact d'une goutte sur la surface du liquide suffit à exciter des ondes stationnaires de Faraday. Ces ondes sont amorties au bout d'un temps $\tau \propto \gamma_F/(\gamma_F - \gamma)$ dit *temps de mémoire*. En 2006, l'équipe d'Yves Couder et Emmanuel Fort a montré qu'une goutte en rebond peut se mouvoir sur la surface qu'un liquide grâce aux ondes de Faraday qu'elle émet sous le seuil γ_F [1]. Nous parlons alors de *marcheurs*. Sur son passage, le marcheur laisse ainsi des sources d'ondes de Faraday qui persistent pour un temps τ . Nous parlons alors de *mémoire de chemin* d'origine ondulatoire [2]. Pour explorer cette dynamique, plusieurs expériences de confinement de marcheurs ont été réalisées [3, 4], dans lesquelles le marcheur est forcé à interagir avec le champ qu'il a lui-même généré précédemment. Citons, en particulier, le confinement d'un marcheur dans un puits de potentiel harmonique d'origine magnétique qui a permis l'observation de la quantification du rayon et du moment cinétique des trajectoires mais aussi l'observation de familles d'états propres comme illustrées sur les figures 1(a) et 1(b). Des dynamiques chaotiques de basse dimension et l'émergence d'un comportement statistique ont également pu être observées. Si les différents auteurs s'accordent pour dire que le comportement imprévisible voire non déterministe provient des effets de mémoire, une seule étude majoritairement expérimentale s'est attachée à décrire cette transition d'une dynamique simple déterministe, vers un comportement chaotique [5]. Une illustration en est donnée sur les figures 1(c) et 1(d).

Pour décrire la dynamique d'un marcheur en présence de mémoire, plusieurs modèles ont été développés. Une première description proposée par M. Miskin et M. Labousse consiste à décrire le champ d'onde en terme de modes orthogonaux [3]. Un modèle basé sur l'apparition de structure semi-locales dans le champ d'onde (pivots) a également permis de décrire l'origine des états quantifiés en force centrale [6]. Ces deux approches ont en commun de considérer le champ d'onde comme un ensemble de variables supplémentaires et de chercher à décrire l'évolution temporelle de cet ensemble. De ce point de vue, il n'y a plus d'effets de mémoire, mais un système non linéaire de dimension supérieure, régi par des équations du premier ordre du temps.

Nous nous proposons ici de décrire cette transition d'une dynamique stable vers une dynamique plus chaotique à l'aide de simulations numériques en intégrant les effets de mémoire comme partie inhérente

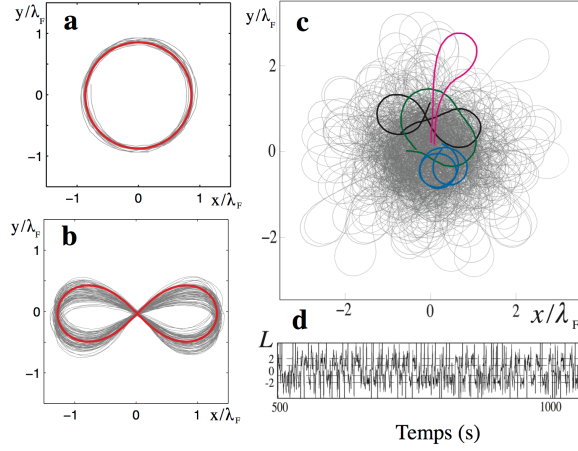


Figure 1. (a) Trajectoire circulaire d'un marcheur dans un puits de potentiel. (b) Trajectoire d'un marcheur donnant naissance à une lemniscate de Bernoulli. Les trajectoires (a) et (b) sont des états propres du puits de potentiel harmonique [3]. (c) Trajectoire chaotique dans un puits de potentiel résultant de la superposition statistique d'états propres du système [5]. (d) Série temporelle associée à la figure (c) donnant le moment cinétique au cours du temps et illustrant le passage d'un état propre à un autre.

du système. Dans ce cadre, nous chercherons à comprendre comment la dynamique du marcheur peut évoluer d'une dynamique stable à basse mémoire à une dynamique plus désordonnée, via l'augmentation de la cohérence temporelle.

2 Démarche

La dynamique d'un objet ponctuel de masse m en présence d'effets de mémoire peut être décrite par une équation de Newton de la forme

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), \{\mathbf{x}(t - i\Delta t) | i \in \{1, \dots, N\}\}) \quad (1)$$

où \mathbf{F} est une force dépendant de la position \mathbf{x} , de la vitesse \mathbf{v} au temps t mais aussi de termes de retard régulièrement espacés d'une quantité Δt . Dans cette expression, N définit la taille maximale de la mémoire du système. Ce type d'équation s'applique au cas des marcheurs où \mathbf{F} provient de l'interaction de la goutte avec les ondes qu'elle crée sur la surface. Celle-ci va subir, à chaque atterrissage, une force proportionnelle au gradient du champ d'onde au point d'impact. Cette force a pour forme

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_{\text{imp}}) = -CA_0 \nabla J_0(k_F \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\text{imp}}\|) \exp\left(-\frac{1}{\text{Me}}\right), \quad (2)$$

où C est un coefficient de couplage entre l'onde et la goutte qui l'a générée et A_0 l'amplitude initiale de l'onde. Le coefficient $\text{Me} = \tau/\tau_F$, τ_F étant la période de Faraday séparant deux impacts successifs, correspond au temps qu'il faut pour atténuer l'amplitude des ondes émises par le marcheur. Plus ce coefficient est élevé et plus les ondes subsistent à la surface du liquide, traduisant une mémoire de longue durée. En considérant que le marcheur a laissé sur la surface N impacts à intervalles de temps réguliers τ_F , il faudra compter autant d'ondes. La force totale vaut alors

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), \{\mathbf{x}(t - i\Delta t) | i \in \{1, \dots, N\}\}) = -\gamma\mathbf{v}(t) - CA_0 \nabla \sum_{i=1}^N J_0(k_F \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_i\|) \exp\left(-\frac{i}{\text{Me}}\right). \quad (3)$$

Un terme dépendant de la vitesse a été également rajouté pour rendre compte de la friction entre la goutte et la surface lors de l'impact. Finalement, il est possible de tirer partie de la nature stroboscopique

de la dynamique, en discrétisant l'équation (1). En effet, les impacts avec la surface étant des événements régulièrement espacés dans le temps, cette équation peut s'exprimer sous la forme suivante

$$\mathbf{v}_{p+1} - \mathbf{v}_p = -\gamma \mathbf{v}_p - CA_0 \sum_{n=p-N}^p \nabla J_0(k_F \|\mathbf{x}_{p+1} - \mathbf{x}_n\|) \exp\left(-\frac{p-n}{\text{Me}}\right), \quad (4)$$

$$\mathbf{x}_{p+1} - \mathbf{x}_p = \tau_F \mathbf{v}_p. \quad (5)$$

Ce modèle a été proposé par E. Fort et a été validé et éprouvé dans le cadre de diverses études sur les marcheurs [7,8]. La nature discrète de ces équations permet aussi de restreindre la dynamique à un nombre fini de degrés de liberté, à l'inverse d'équations différentielles continues à retard qui contiennent un nombre infini de dimensions, comme dans le cas du modèle de A. Oza [9]. De plus, dans le cas particulier du marcheur, cette dynamique, bien qu'ayant lieu dans un espace de dimension $2N + 4$, se représente aisément dans le plan (x, y) sans perte d'information sous la forme de la trajectoire du marcheur. En effet, la trajectoire passée permet de calculer le champ d'onde total entourant le marcheur et de déterminer de manière univoque sa trajectoire future.

Il se pose, dans un tel espace, la question des conditions initiales et de leurs influences sur la dynamique future. Pour illustrer nos propos, les figures 2 (a) et 2 (b) nous montrent, en rouge et noir, un couple de trajectoires expérimentales dans un puits de potentiel harmonique. Les traits pleins correspondent aux conditions initiales de la goutte et les traits discontinus à son évolution. Malgré une trajectoire passée proche et des vitesses initiales identiques, ces trajectoires divergent dans certains cas. Nous pouvons en conclure que la trajectoire, enregistrée dans le mémoire du marcheur, a influencé sa propagation. La troisième image 2 (c) nous illustre le même phénomène en simulation numérique dans le cas d'un marcheur sans force extérieure. Dans ce cas, les conditions initiales sont des cercles concentriques de rayons légèrement différents.

Afin de quantifier la convergence ou divergence de deux trajectoires proches à haute mémoire, nous considérons l'exposant de Lyapounov partiel. Celui-ci est défini comme

$$\lambda = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \ln \left| \frac{d(t_0 + \Delta t)}{d(t_0)} \right|. \quad (6)$$

$d(t_0)$ représentant la distance spatiale entre deux marcheurs à l'instant initial t_0 et Δt un incrément temporel. La figure 2 (c) illustre le calcul de cette variable.

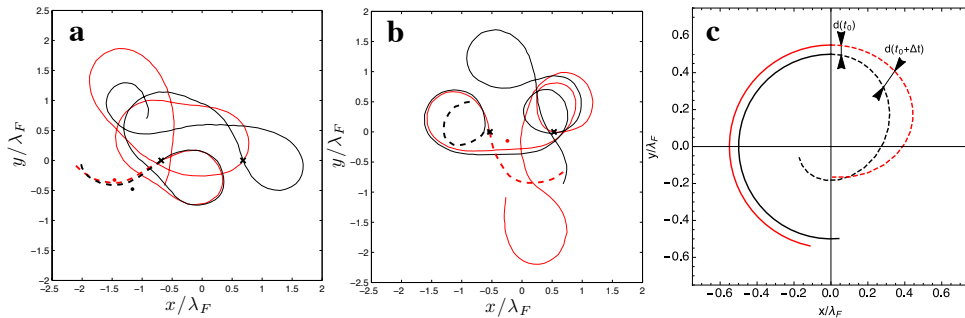


Figure 2. (a) et (b) Trajectoires expérimentales issues d'une étude en potentiel central à haute mémoire. Nous constatons que le marcheur suit, en pointillé, une trajectoire pouvant être fort différente d'un cas à l'autre malgré un passé « relativement » proche, représenté en trait plein. (c) Trajectoires simulées numériquement, sans considérer aucune force extérieure, illustrant le même phénomène de divergence. L'évolution de la distance entre deux trajectoires permet de définir l'exposant de Lyapounov partiel du système.

3 Résultats

Le but principal de cette étude est de chercher à quantifier l'effet de la mémoire sur la divergence de trajectoires initiales proches. Pour illustrer cette divergence, considérons la figure 3 (a). Cette figure présente trente trajectoires simulées numériquement à une mémoire $Me = 5$, sans force extérieure, et chacune ayant comme passé une trajectoire issue des études réalisées en potentiel harmonique [3]. Les figures 3 (b) et 3 (c) sont réalisées à une mémoire $Me = 20$ et $Me = 100$ respectivement. Les mêmes trajectoires initiales ont été utilisées pour ces trois figures. Cependant, compte tenu de la différence de mémoire, les trajectoires simulées à $Me = 100$ intègrent plus de points que les simulations à $Me = 20$ et que $Me = 5$. Les conditions initiales sont alors différentes bien qu'issues de trajectoires identiques. Sur la figure 3 (a), nous constatons que pour $Me = 5$, les trajectoires simulées forment un faisceau faiblement dispersé. Toutefois, lorsque la mémoire est augmentée, nous constatons que la largeur de ce faisceau augmente. Ces différentes trajectoires divergent ainsi peu à peu les unes des autres. Tâchons de comprendre ce comportement. L'origine de la divergence ne peut se trouver que dans le passé de la goutte, aucune force extérieure n'agissant lors de la simulation. Il a été démontré par Labousse et coll. [6] que les ondes laissées par le marcheur peuvent générer des forces centripètes courbant sa trajectoire future. Cet effet est d'autant plus important que la mémoire est importante car plus d'impacts situés sur la trajectoire passée agissent. La divergence s'en trouve donc justifiée. Cependant, il nous importe de considérer la mémoire comme partie intégrante de la dynamique, sans considérer les ondes et leur émission le long de la trajectoire. Sous cet angle, l'ajout d'une courbure sur la trajectoire mène à l'existence d'une accélération non nulle du marcheur malgré sa vitesse constante sur le bain. Celle-ci s'exprimant comme $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{v}\|^2/R_c$ où R_c est le rayon de courbure. Ainsi pour rationaliser la divergence en l'absence de forces extérieures et d'origine ondulatoire, nous pouvons affirmer que l'accélération du marcheur possède un effet sur la dynamique et constitue un degré de liberté supplémentaire à prendre en compte lorsque la mémoire augmente. Ainsi, considérant toute la trajectoire passée du marcheur, les conditions initiales sont $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \{\mathbf{x}_i\})$, tandis qu'en considérant le marcheur comme un objet ponctuel, la corrélation temporelle générée par la mémoire mène à considérer des conditions initiales de la forme $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{a}_0)$.

Cependant, une trajectoire expérimentale se résume rarement à un seul rayon de courbure. Si cela est le cas pour les cercles illustrés sur la figure 1 (a), les lemniscates de la figure 1 (b) nous montrent un tout autre comportement où la courbure de la trajectoire varie le long de celle-ci. Ainsi, d'autres informations que le rayon de courbure, et donc l'accélération, peuvent être nécessaires pour décrire la dynamique. En constatant que, si le rayon de courbure vient à changer, les dérivées d'ordre supérieur à 2 deviennent non nulles, nous choisissons d'utiliser l'ensemble des dérivées successives de la position de marcheur au temps initial t_0 comme base de décomposition. Il s'agit d'exploiter la bijection entre la trajectoire passée du

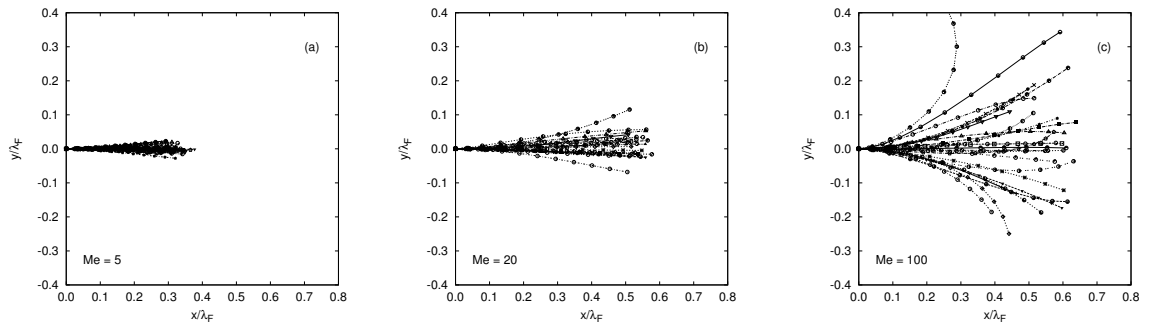


Figure 3. Trajectoires simulées depuis des conditions initiales expérimentales issues de [3] pour diverses mémoires. Nous pouvons constater qu'à mémoire croissante, l'effet du passé de la goutte devient de plus en plus important avec pour conséquence la divergence des diverses trajectoires à haute mémoire. Dans chaque cas, trente trajectoires sont proposées. Les conditions initiales sont toujours identiques pour chaque mémoire.

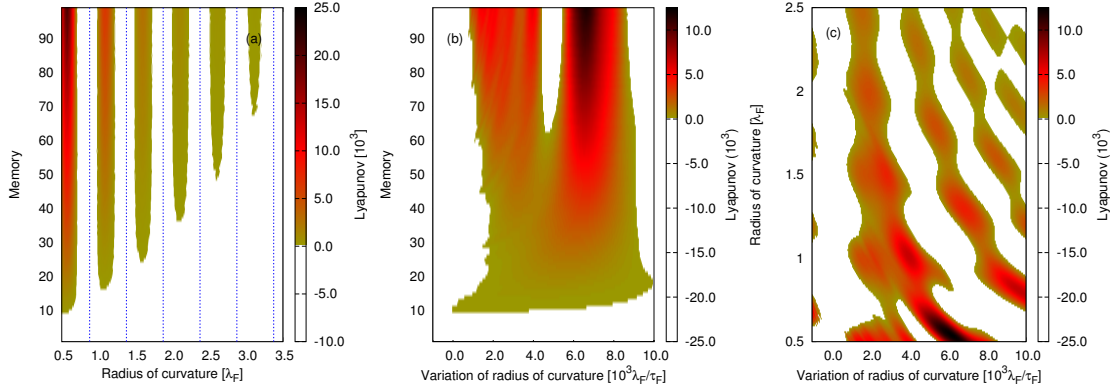


Figure 4. (a) Zones caractérisées par un exposant de Lyapounov positif en fonction de la courbure initiale et de la mémoire. Nous pouvons constater que lorsque la mémoire croît, des zones instables apparaissent pour des rayons de courbure bien déterminés. De plus, ces régions deviennent d’autant plus instables que la mémoire croît. Les zones blanches correspondent à des exposants de Lyapounov négatifs. Les traits verticaux correspondent aux rayons d’orbites stables observées dans [3]. (b) Zones caractérisées par un exposant de Lyapounov positif en fonction de la variation de courbure et de la mémoire lorsque le rayon de courbure initial est fixé à $R_c = 0,5 \lambda_F$. Nous constatons que, bien que le rayon de courbure initial soit fixé, une variation de celui-ci dans le temps suffit à créer des zones d’exposants de Lyapounov positifs. (c) Pour une mémoire de 99, exposant de Lyapounov en fonction du rayon de courbure en t_0 et de sa variation temporelle.

marcheur et l’ensemble de ses dérivées au temps initial.

Selon cette optique de décomposition, commençons par quantifier l’effet de la seconde dérivée de la position sur la divergence en créant artificiellement un jeu de conditions initiales pour la dynamique du marcheur. Les trajectoires passées sont choisies circulaires avec un écart de rayon de courbure $\delta R_c = 0,05 \lambda_F$ pour chaque trajectoire, λ_F étant la longueur d’onde de Faraday. Deux trajectoires de courbures adjacentes sont utilisées dans le calcul de l’exposant de Lyapounov. Cette approche permet ainsi d’étudier l’effet d’une variation infime d’accélération sur la divergence de trajectoires proches. La figure 4 (a) considère l’exposant de Lyapounov en fonction du rayon de courbure initial et de la mémoire. Il y a alternance de bandes d’exposants de Lyapounov positifs et négatifs alors que change la courbure de la trajectoire passée. De plus, des rayons de courbure importants ne se font sentir qu’à une valeur importante de la mémoire. Finalement, nous pouvons constater que sous une certaine valeur de Me , la dynamique est toujours convergente. L’alternance de zones stables et instables au sens des exposants de Lyapounov peut s’expliquer par la théorie des pivots développée dans l’article de Labousse et coll. [6]. En essence, cette théorie établit l’apparition de pivot dans la dynamique de marche permettant des trajectoires circulaires à des rayons spécifiques. Ces rayons correspondent aux zéros de la fonction de Bessel $J_0(k_F \|R_c\|)$. Sur la figure 4(a), ces valeurs sont indiquées en pointillé et correspondent bien à des zones de trajectoires stables. La théorie des pivots peut aussi expliquer pourquoi il existe un seuil de mémoire pour l’apparition de chaque zone de divergence. Il faut en effet assez de points d’impacts le long de la trajectoire pour créer les pivots. Finalement, la figure 4(a) explique l’existence de trajectoires circulaires de rayon quantifié dans toutes les expériences où un confinement permet de générer des conditions initiales circulaires [3, 4]. Cela atteste bien que les observations faites sur la figure 4(a) sont générales et intrinsèques au marcheur. En conclusion, l’exposant de Lyapounov est une fonction oscillante du rayon de courbure et les zones d’exposant de Lyapounov positives n’apparaissent qu’au-delà d’un seuil de mémoire de sorte que l’on puisse écrire

$$\lambda = f(R_c, Me) = f'(\mathbf{a}, Me). \quad (7)$$

En décomposant le passé du marcheur sur les dérivées successives de sa position au temps initial, l’ordre suivant est la dérivée troisième de \mathbf{x} , liée à la variation temporelle de rayon de courbure \dot{R}_c . La

figure 4 (b) illustre l'influence d'une dérivée troisième constante de la position sur l'exposant de Lyapounov en fonction de la mémoire, pour une valeur de R_c donnée en t_0 . Il peut encore une fois être observé que l'effet de ce nouveau paramètre ne se fait sentir qu'au-delà d'un certain seuil en mémoire. La figure 4 (c) illustre l'effet couplé de R_c et de \dot{R}_c sur la dynamique pour un cas de haute mémoire. Nous pouvons constater que l'exposant de Lyapounov possède une dépendance complexe envers ces deux variables. En effet, il apparaît une périodicité selon R_c et aussi selon \dot{R}_c créant une espace des exposants de Lyapounov à l'aspect non-trivial. À nouveau, ces observations nous permettent de conclure à une expression de l'exposant de Lyapounov de la forme

$$\lambda = f(R_c, \dot{R}_c, \text{Me}) = f'(\mathbf{a}, \mathbf{j}, \text{Me}). \quad (8)$$

Ainsi, par induction, nous pouvons argumenter que la dépendance de l'exposant de Lyapounov est d'autant plus complexe à décrire que la mémoire augmente. De fait, à mémoire croissante, les dérivées successives de \mathbf{x} apparaissent. La mémoire permet donc de sélectionner le « degré de complexité » de la dynamique, argument soutenu dans [3, 5, 6].

Par cette étude de l'influence des conditions initiales sur la dynamique, nous avons vu que le nombre de dimensions instables semble augmenter avec la mémoire. La décomposition en terme de dérivées successives de la position, qui peut se ré-exprimer sous la forme du rayon de courbure et de ses dérivées successives, permet de définir une approche standard pour étudier l'influence d'un nombre grandissant de variable sur la dynamique future du marcheur sans considérer la trajectoire ou encore l'aspect ondulatoire de celui-ci. Le nombre de dimensions pertinentes à prendre en compte et son caractère borné ou non avec la mémoire restent cependant une question ouverte.

4 Conclusion

L'inclusion d'une mémoire dans la dynamique des marcheurs permet ainsi de passer d'une dynamique stable à basse mémoire à une dynamique complexe à haute mémoire. Cette dynamique dépend, en plus de la position et vitesse initiale, des dérivées successives de la position au temps initial. Cela se traduit par un espace des exposants de Lyapounov complexe, de haute dimension, caractérisé par des îlots instables dans un paysage stable. Dès lors, une description de la dynamique d'un marcheur dans la limite de haute mémoire devient complexe. En effet, il nous faut connaître toutes les dérivées de la trajectoire pour décrire avec précision l'avenir du marcheur. La mémoire amène donc une perte de déterminisme apparent qui oblige à passer à une description statistique. C'est d'ailleurs l'outil couramment utilisé pour décrire les expériences à haute mémoire, comme illustré à la figure 1, ou encore dans les expériences en cavité [4]. Nous pouvons nous demander si le passage d'une dynamique déterministe à un régime chaotique est courant dans les systèmes à mémoire. De plus, comment caractériser l'aspect chaotique ou non d'une dynamique à mémoire, et comment passer à une description statistique de tels systèmes? À l'inverse, pouvons-nous interpréter une dynamique intrinsèquement probabiliste comme un système à mémoire, intrinsèquement chaotique?

Références

1. S. PROTIÈRE *et al.*, *J. Fluid Mech.*, **554**, 85–108 (2006).
2. A. EDDI *et al.*, *J. Fluid Mech.*, **674**, 433–463 (2011).
3. S. PERRARD *et al.*, *Nature Comm.*, **5**, 3219–3225 (2014).
4. D. M. HARRIS *et al.*, *Phys. Rev. E*, **88**, 011011 (2013).
5. S. PERRARD *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 104101 (2014).
6. M. LABOUSSE *et al.*, *New J. Phys.*, **16**, 113027 (2014).
7. E. FORT *et al.*, *PNAS*, **107**, 17515 (2010).
8. C. BORGHESI *et al.*, *Phys. Rev. E*, **90**, 063017 (2014).
9. A. U. OZA *et al.*, *J. Fluid Mech.*, **744**, 404–429 (2014).

Analyse Topologique appliquée à deux cas de chaos faiblement dissipatif : le système de Lorenz-84 et le modèle *cereal crops*

Sylvain Mangiarotti

Centre d'Études Spatiales de la Biosphère, 18 av. Édouard Belin, 31401 Toulouse cedex 9, France
sylvain.mangiarotti@cesbio.cnes.fr

Résumé. La modélisation par technique globale a récemment permis d'obtenir des modèles chaotiques faiblement dissipatifs pour la dynamique des cultures céréalières en zone semi-aride à partir de données issues de la télédétection spatiale [1]. Nous proposons dans la présente étude de montrer qu'il s'agit d'un nouvel attracteur. Apporter une telle preuve nécessite de satisfaire à des critères précis [2] qui requièrent l'extraction de la structure topologique de l'attracteur. Ce type d'analyse est difficile à appliquer à des systèmes faiblement dissipatifs comme celui obtenu ici. Une nouvelle approche de suivi de trajectoire par traceurs colorés est introduite et utilisée pour extraire la structure topologique (le gabarit) du modèle *cereal crops* et du premier attracteur faiblement dissipatif découvert par Lorenz en 1984 [3]. L'analyse des deux structures des attracteurs présente pour chacune d'entre elles un comportement d'étirement bidirectionnel local au sein du flot qui apparaît caractéristique du comportement faiblement dissipatif. Les structures sont néanmoins très différentes, permettant d'affirmer que l'attracteur *cereal crops* est un nouvel attracteur.

Abstract. A three-dimensional model was recently obtained for the cycles of cereal crops in semi-arid region [1]. The attractor resulting from this model is chaotic and exhibits a weakly dissipative structure. To investigate if the *cereal crops* attractor is a new attractor, a new approach based on color tracer is introduced. It is applied to the *cereal crops* model and to the first weakly dissipative system discovered by Lorenz in 1984 [3]. The analysis reveals that a double direction stretching occurs locally in both attractors. The comparison of the two attractors also shows that the two attractors are quite different. The *cereal crops* attractor is thus a new attractor.

1 Introduction

Basée sur la théorie des systèmes dynamiques non linéaires, la modélisation globale [4, 5] permet de s'intéresser aux comportements dynamiques observés à partir d'un petit nombre de variables (éventuellement une seule), sur la base de séries temporelles courtes. L'approche n'a pu être appliquée à ce jour qu'à un petit nombre de cas environnementaux [6–8]. Appliquée aux couverts céréalières du nord du Maroc en utilisant des indices de végétation issus de la télédétection spatiale, l'approche a récemment permis d'obtenir un modèle de petite dimension caractérisé par une dynamique chaotique faiblement dissipative [1]. L'objectif principal de cette étude est de montrer que l'attracteur chaotique ainsi obtenu est un nouvel attracteur. Pour prouver cela, l'attracteur doit répondre à des certains critères introduits par Letellier & Aguirre [6] : (a) son gabarit (non simplifié) ne doit pas être topologiquement équivalent à un gabarit d'attracteur déjà rapporté ; (b) l'attracteur ne doit pas non plus être une version symétrique [9] d'un attracteur connu. Mettre en évidence un nouvel attracteur requiert donc une analyse topologique. Une méthode efficace a été introduite [10,11] pour l'analyse topologique des systèmes fortement dissipatifs. Son application aux cas faiblement dissipatifs requiert toutefois de nouveaux développements.

2 Données

L'indice de végétation NDVI (*Normalized Difference Vegetation Index*) issu du *Global Inventory Modeling and Mapping Study* du *Global Land Cover Facility* [12] est utilisé pour cette étude sur la période 1982 à 2008. Il s'agit d'un produit bimensuel basse résolution 8×8 km² tiré des capteurs *Advanced Very High Resolution Radiometer* de la *National Oceanic Atmospheric Administration*. Afin de ramener

le signal à une série temporelle unique et d'en réduire le niveau de bruit, les indices NDVI ont été agrégés spatialement par simple moyennage sur la zone d'étude principalement composée de cultures céréalières (cf. Ref. [1]). La méthode de Savitzky-Golay [13] a ensuite été appliquée avec une fenêtre de ± 3 mois pour filtrer le signal agrégé et calculer ses dérivées successives, rééchantillonnant le signal à 3 jours.

3 Le modèle de Lorenz-84

Destiné à modéliser la dynamique grande échelle de l'atmosphère, le modèle suivant a été proposé par Lorenz en 1984 [3] :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^2 - z^2 - ax + aF, \\ \dot{y} = xy - bxz - y + G, \\ \dot{z} = bxy - xz - z. \end{cases} \quad (1)$$

Pour la paramétrisation $(a, b, F, G) = (0,25, 4,0, 8,0, 1,0)$ utilisée dans cette étude, le modèle présente une dynamique chaotique. L'attracteur qui en résulte est caractérisé par une structure très enchevêtrée, particulièrement difficile à analyser.

4 Éléments théoriques

4.1 La modélisation globale

La modélisation globale vise à obtenir un jeu d'équations différentielles capable de produire des simulations dont la dynamique est équivalente à la dynamique observée. L'un de ses intérêts est de pouvoir être appliqué à partir d'une observable unique. La modélisation globale s'appuie sur la possibilité — de principe — de réécrire un jeu original de n équations différentielles ordinaires $\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$ sous la forme canonique

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2, \\ \dot{X}_2 = X_3, \\ \vdots \\ \dot{X}_n = F(X_1, X_2, \dots, X_n), \end{cases} \quad (2)$$

où $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une fonction non linéaire de la variable X_1 et de ses dérivées successives, X_1 étant reliée au système original par la fonction de mesure non linéaire $X_1 = h(x_i)$. De façon pratique, la modélisation globale vise à obtenir un jeu d'équations du type (2) dans l'objet de mieux comprendre la dynamique du système original.

Deux algorithmes récents, *Polynomial Model Search* et *Global Modeling* (PoMoS & GloMo) [5], ont été spécifiquement développés pour ce type de modélisation. Appliquée au cycle des cultures céréalières, l'approche a permis d'obtenir un attracteur chaotique tridimensionnel dont le portrait de phase est présenté Fig. 1 en même temps qu'une section de Poincaré choisie ainsi que son application de premier retour.

4.2 L'analyse topologique

Les attracteurs chaotiques sont constitués d'un enchevêtrement complexe de trajectoires difficile à analyser. L'approche topologique vise à recouvrir le squelette autour duquel s'organise les trajectoires de l'attracteur, permettant une description synthétique de l'attracteur aussi bien visuelle qu'algébrique. L'approche topologique constitue un puissant outil par sa robustesse au bruit et sa faible sensibilité aux variations paramétriques [11]. L'approche a permis de caractériser et de classer la plupart des attracteurs chaotiques tridimensionnels, qu'ils soient issus de systèmes théoriques ou de mesures observationnelles.

Le flot d'un attracteur chaotique s'organise autour d'orbites périodiques instables. Chacune de ces orbites périodiques constitue un nœud et l'ensemble des orbites périodiques un entrelac de nœuds. Cet

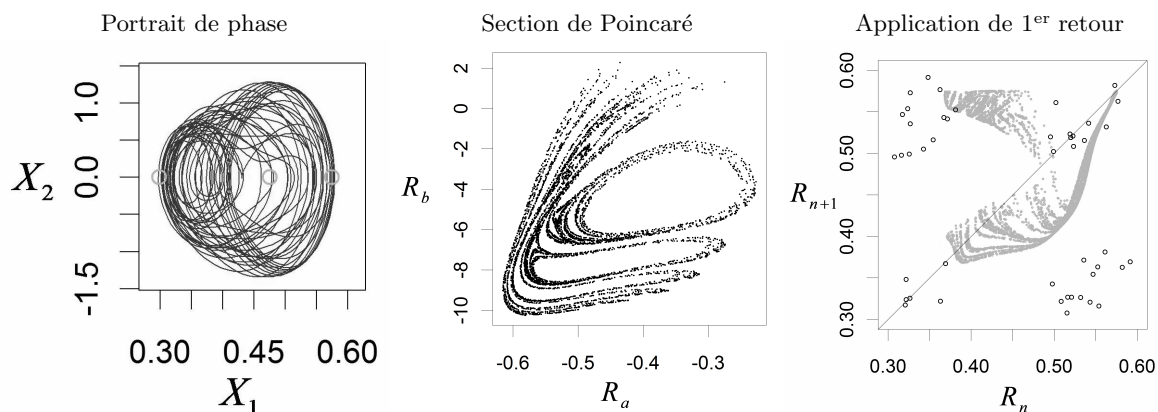


Figure 1. Portrait de phase, section de Poincaré et application de premier retour de l'attracteur *cereal crops*.

entrelac complexe rend difficile l'extraction du gabarit sous-jacent : une variété branchée et orientée sur laquelle le flot peut être projeté pour fournir une description non ambiguë du flot. Pour remonter à ce gabarit, il est souvent utile de disposer d'une application de premier retour représentative. En effet, une telle application peut permettre d'identifier les principaux éléments du gabarit, notamment le nombre de branches nécessaires à la description de l'attracteur. L'application de premier retour peut aussi permettre de distinguer les mécanismes à l'œuvre [14]. En contexte fortement dissipatif, l'existence d'un tel gabarit est garanti par le théorème de Birman-Williams [15]. Le théorème s'applique facilement aux attracteurs fortement dissipatifs car ceux-ci garantissent la contraction rapide du flot vers la variété stable. Bien que cette existence reste peut-être possible en contexte faiblement dissipatif, celle-ci devient particulièrement difficile en pratique. D'autres éléments peuvent contribuer à rendre l'extraction du gabarit délicate. De tels systèmes ne permettent généralement pas de disposer d'une application de premier retour surjective, rendant ainsi délicate la détection des orbites périodiques et des branches. C'est notamment le cas pour le premier des attracteurs faiblement dissipatif découvert par Edouard N. Lorenz [3], dont le gabarit n'a, à notre connaissance, pas encore été rapporté.

5 Analyse par traceurs colorés

L'application de premier retour doit être surjective pour permettre de remonter au gabarit de l'attracteur facilement. Dans les cas faiblement dissipatifs, les applications de premier retour affichent non seulement une large épaisseur mais présentent aussi par endroit des branches doubles. Aucune partition simple ne peut donc en être déduite. Cette impossibilité peut provenir de l'anamorphisme complexe des sections de Poincaré reconstruites, n'autorisant pas l'obtention d'une application de premier retour simple par projection simple.

Aucune partition n'ayant pu être tirée de l'application de premier retour, il a été choisi de revenir à la section de Poincaré et d'étudier l'application de cette section vers elle-même pour essayer d'y distinguer les différentes branches du flot. Pour cela l'utilisation d'un traceur coloré (ici en niveau de gris) s'est avéré très utile pour distinguer certains des mouvements à l'œuvre au sein du flot (cf. Fig. 2), et en particulier les zones de repliement, de déchirement. L'approche suivante a été utilisée en pratique : une première zone de la section est choisie et découpée. Cette zone est propagée en sens direct jusqu'à obtenir une couverture complète de la section de Poincaré, en éliminant à chaque tour les redondances, définissant ainsi un premier découpage de la section. La zone choisie est ensuite propagée en sens rétrograde conduisant à un second découpage. Le croisement de ces deux découpages fournit une première partition de la section. La zone sélectionnée est alors modulée et le processus de recherche réitéré jusqu'à obtenir un découpage non trivial aussi simple que possible. En pratique, l'une des difficultés de départ tient au choix *a priori* de la première zone de découpage. Le découpage doit permettre de distinguer les différentes

branches de l'attracteur. Cette zone doit coïncider avec les zones de déchirement/recollement/repliement du flot. La lecture visuelle de l'évolution des traceurs coloré peut donc nous servir à effectuer ce premier découpage. Pour l'attracteur *cereal crops*, la partition la plus simple a été obtenue à partir d'une zone de la section de Poincaré se distinguant visuellement du reste de la section. La partition a permis de distinguer trois mécanismes distincts : (a) une accumulation progressive de couches caractérisée à la fois par une compaction dans une direction et un étirement dans une direction orthogonale ; (b) un double étirement local avec déchirement ; (c) un enroulement avec recollement (Fig. 3).

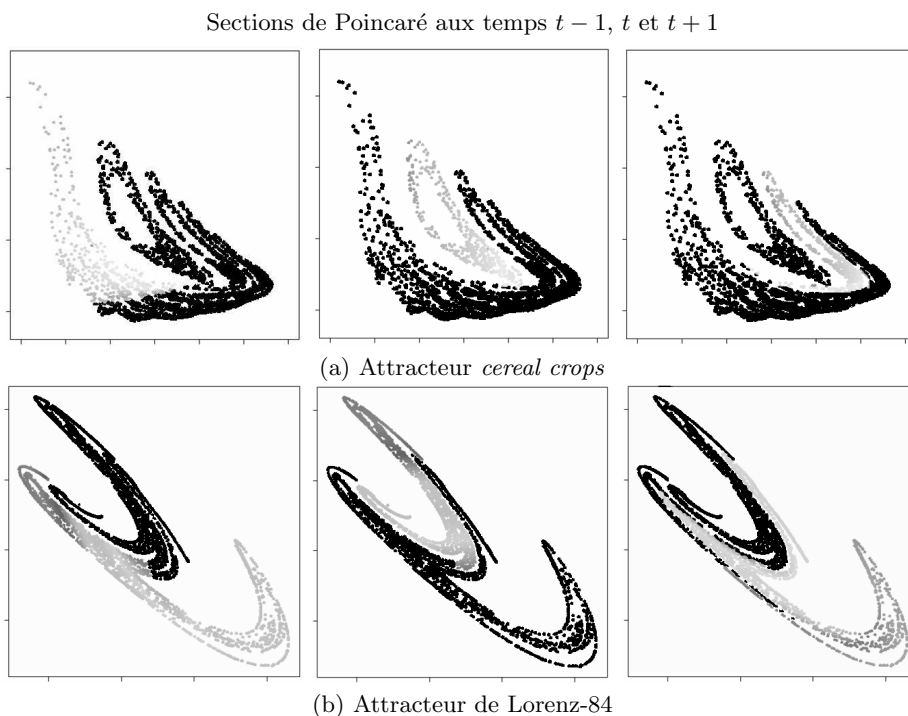


Figure 2. Application de la section de Poincaré vers elle-même aux temps t_{n-1} , t_n et t_{n+1} , pour les attracteurs (a) *cereal crops* et (b) Lorenz-84.

Le mécanisme de double étirement local mérite un intérêt tout particulier car vraisemblablement spécifique au cas faiblement dissipatif. Le premier étirement correspond à la direction d'étirement global du flot comme on le rencontre classiquement dans les systèmes fortement dissipatifs. Le second étirement est local et agit suivant une direction qui correspond globalement à la direction de contraction. Ce mécanisme n'est rendu possible que par la lenteur de la contraction, laquelle résulte du caractère faiblement dissipatif de l'attracteur. Ce type de contraction est vraisemblablement propre aux attracteurs faiblement dissipatifs et se traduit sur le gabarit par un dédoublement de branche dans la direction orthogonale au gabarit. Le repliement est également caractéristique du cas faiblement dissipatif puisqu'il conserve sa structure en couches fines, jusqu'à son recollement, et au-delà.

6 Resultats et discussion

En se basant sur la partition de la section de Poincaré expliquée ci-dessus, un gabarit tridimensionnel de l'attracteur *cereal crops* a pu être reconstruit (des sections de Poincaré supplémentaires ont été utilisées pour s'assurer d'avoir bien détecté tous les mécanismes en présence). Ce gabarit a pu être aplani en un gabarit bidimensionnel en autorisant l'émergence de branches dans la direction orthogonale au plan du

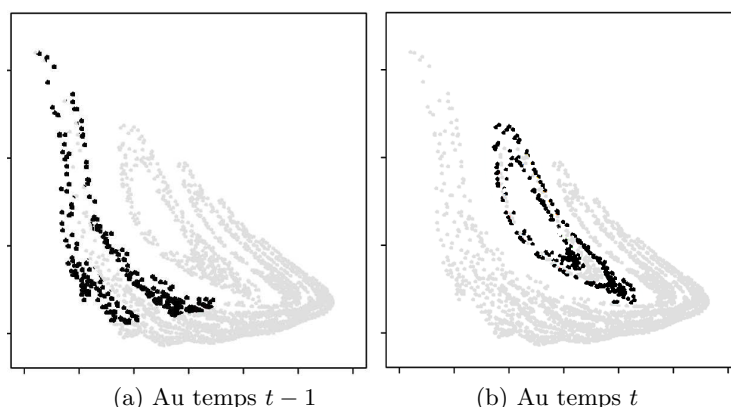


Figure 3. Sections de Poincaré du modèle *cereal crops*. Les bords de la zone de déchirement sont présentés en noir (a). Une partie vient se replier par enroulement (b).

gabarit et en négligeant les effets liés à l'épaisseur des zones repliées. Bien que cette reconstruction ait pu se faire sans extraire d'orbites périodiques, ces dernières seraient utiles pour vérifier de façon indépendante le gabarit obtenu, présenté en Fig. 4 (a). On trouve dans l'attracteur deux branches principales dont l'une présente de nombreuses ramifications conduisant à un total de six branches distinctes. Ainsi aplani, le gabarit ne met pas en évidence la présence d'un espace libre (un trou) au sein de la plus complexe des deux branches. Des outils destinés à fournir une description formelle du gabarit sous la forme de nombres entiers et permettant de représenter le double étirement local ont été récemment proposés [16].

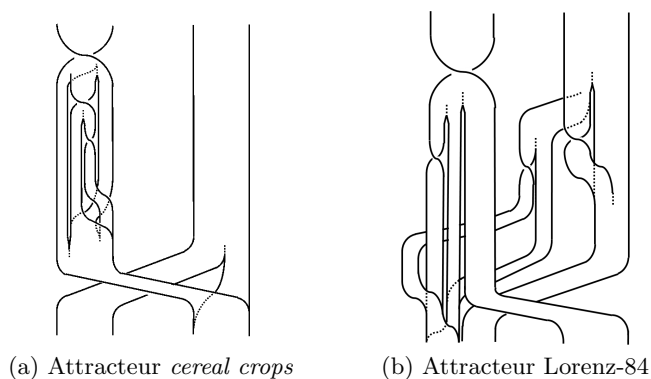


Figure 4. Gabarits aplanis obtenus (a) pour l'attracteur *cereal crops* obtenu par solution du modèle globale et (b) pour l'attracteur de Lorenz-84.

La même approche a pu être appliquée à l'attracteur de Lorenz-84. L'analyse détaillée n'a pas montré de zone de déchirement mais, comme pour l'attracteur *cereal crops*, une région localisée d'étirement bidirectionnel. Comme pour l'attracteur *cereal crops*, un gabarit aplani a pu être développé en faisant émerger une branche dans la direction orthogonale au plan du gabarit. Le gabarit (Fig. 4 (b)) présente trois branches principales, deux d'entre elles comportent de nombreuses ramifications conduisant à distinguer au total huit branches. La détection d'un double étirement apparaît spécifique aux attracteurs chaotiques faiblement dissipatifs car rendue possible par l'épaisseur du flot. La présence d'étirements multiples suggère d'affiner le descriptif visuel et algébrique du gabarit afin de pouvoir rendre compte de ce nouveau type de comportement.

7 Conclusions

Une approche basée sur l'application de la section de Poincaré vers elle-même est développée pour l'extraction des gabarits d'attracteurs chaotiques faiblement dissipatifs puis appliquée aux modèles *cereal crops*, récemment obtenu par modélisation globale, et au système Lorenz-84. L'approche permet de mettre en évidence des mécanismes d'étirements multiples spécifiques au contexte faiblement dissipatif et pouvant être associés à un déchirement (dans le cas de l'attracteur *cereal crops*). La structure topologique des deux attracteurs a pu être ramenée à des gabarits bidimensionnels révélant des structures topologiques différentes ne pouvant être ramenées l'une à l'autre par symétrie, réunissant ainsi les critères [2] de mise en évidence d'un nouvel attracteur.

Remerciements : Le financement de ce travail a été assuré par le programme LEFE/INSU (projets AMoGlo et MoMu) et par l'Appel d'Offre IRD Spirales (projet PamChaos), le Centre National d'Études Spatiales (CNES) et l'université Paul Sabatier Toulouse 3. Je tiens aussi à remercier C. Letellier pour son aimable relecture d'une version préalable du manuscrit.

Références

1. S. MANGIAROTTI, L. DRAPEAU & C. LETELLIER, Two chaotic global models for cereal crops cycles observed from satellite in northern Morocco, *Chaos*, **24**, 023130 (2014).
2. C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Required criteria for recognizing new types of chaos: Application to the cord attractor, *Phys. Rev. E*, **85**, 036204 (2012).
3. E. N. LORENZ, Irregularity: A fundamental property of the atmosphere, *Tellus*, **36**, 98–110 (1984).
4. G. GOUESBET & C. LETELLIER, Global vector field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 -approximation on nets, *Phys. Rev. E*, **49**, 4955–4972 (1994).
5. S. MANGIAROTTI, R. COUDRET, L. DRAPEAU & L. JARLAN, Polynomial search and global modeling : two algorithms for modeling chaos, *Phys. Rev. E*, **86**, 046205 (2012).
6. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE, J. MAQUET & R. GILMORE, Evidence for low dimensional chaos in the sunspot cycles, *Astron. Astrophys.*, **449**, 379–387 (2006).
7. J. MAQUET, C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Global models from the Canadian lynx cycles as a direct evidence for chaos in real ecosystems, *Math. Biol.*, **55**, 21–39 (2007).
8. S. MANGIAROTTI, Un modèle chaotique pour l'épidémie de peste bubonique ayant sévi à Bombay à partir de 1896, in *Comptes-rendus de la 18^e Rencontre du Non-Linéaire* (2015).
9. R. GILMORE & C. LETELIER, *The Symmetry of Chaos*, Oxford University Press (2007).
10. R. GILMORE & M. LEFRANC, *The Topology of Chaos*, Wiley (2002).
11. N. B. TUFILLARO, T. ABBOTT & J. REILLY, *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, New York (1992).
12. C. J. TUCKER, J. E. PINZON, M. E. BROWN, D. A. SLAYBACK, E. W. PAK, R. MAHONEY, E. F. VERMOTE & N. E. SALEOUS, An extended AVHRR 8-km NDVI dataset compatible with MODIS and SPOT vegetation NDVI data, *Int. J. Remote Sens.*, **26**, 4485–4498 (2005).
13. A. SAVITZKY & M. J. E. GOLAY, Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures, *Anal. Chem.*, **36**, 1627–1639 (1964).
14. C. LETELLIER, E. ROULIN & O. E. RÖSSLER, Inequivalent topologies of chaos in simple equations, *Chaos Soliton. Fract.*, **28**, 337–360 (2006).
15. J. S. BIRMAN & R. F. WILLIAMS, Knotted periodic orbits in dynamical systems I: Lorenz's equations, *Topology*, **22**, 47–82 (1983).
16. S. MANGIAROTTI, *Modélisation globale et Caractérisation topologique de dynamiques environnementales : de l'analyse des enveloppes fluides et du couvert de surface de la Terre à la caractérisation topodynamique du chaos*, Habilitation à Diriger des Recherches, Université Toulouse 3 (2014).

Un modèle chaotique pour l'épidémie de peste bubonique ayant sévi à Bombay à partir de 1896

Sylvain Mangiarotti

Centre d'Études Spatiales de la Biosphère, 18 av. Édouard Belin, 31401 Toulouse cedex 9, France
sylvain.mangiarotti@cesbio.cnes.fr

Résumé. L'épidémie de peste ayant sévi à Bombay à la fin du XIX^e siècle est détectée en 1896 et devient rapidement endémique. Son évolution a été suivie de près par un comité consultatif d'experts mandaté en 1905 permettant de collecter une quantité d'information considérable concernant le nombre de personnes touchées par la maladie, les vecteurs potentiels (notamment puces et rongeurs) [1]. Les outils de modélisation par technique globale développés ces dernières années [2] sont utilisés ici pour analyser certains de ces enregistrements. Plusieurs modèles de dimension trois ont pu être obtenus. L'obtention de tels modèles montre que, de manière approchée, l'épidémie se comporte comme un système déterministe de petite dimension pouvant produire des comportements chaotiques. L'analyse multivariée permet de mettre en évidence le couplage entre l'épidémie et les épizooties des principales espèces de rat en présence.

Abstract. A plague epidemic was detected in Bombay in 1896 which became endemic. An Advisory Committee was appointed in 1905 who gathered an impressive quantity of information, in particular the number of people attacked and who died from plague, estimates of flea and rudent populations, as well as meteorological measurements [1]. Algorithms recently developed for global modeling from time series [2] are applied to single and multivariate observational observables. Several 3D-models were obtained for which a chaotic behavior could be observed. Obtaining such model proves that the dynamics of plague can be approximated by low-dimensional deterministic system that can produce chaos. The multivariate model provides a strong argument for the coupling between the epidemy and the epizooties of the two main species of rat.

1 Introduction

La technique de modélisation globale vise à obtenir des modèles dynamiques déterministes directement à partir de séries temporelles. Au cours des trois dernières décennies, les travaux se sont principalement concentrés sur l'utilisation monovariée de cette technique (une série temporelle unique). La technique de modélisation globale a montré qu'elle pouvait être appliquée à la modélisation de certains comportements environnementaux, même en présence d'un couplage à la dynamique climatique impliquant donc un très grand nombre de variables. L'approche a notamment pu être appliquée aux cycles d'indices de végétation mesurés par télédétection spatiale en région semi-aride [3]. L'approche a également été testée sur une épidémie de coqueluche dans une formulation à temps discret [4]. À notre connaissance, l'approche n'a été appliquée qu'à un seul cas multivarié, celui de la respiration humaine, en s'appuyant là aussi sur des modèles discrets [5].

La plupart des modèles épidémiologiques sont battis analytiquement à partir d'hypothèses formelles [6]. Quoiqu'argumentées par des observations, les modèles ainsi construits présentent souvent une formulation mieux adaptée aux hypothèses du modélisateur qu'à la réalité des données. Au contraire, la technique de modélisation globale ne nécessite pas d'hypothèse forte *a priori* quant aux processus en jeu, ce qui lui permet — en principe — d'obtenir des modèles plus directement adaptés aux données observationnelles. En contrepartie, les processus qu'ils permettent de simuler ne sont pas toujours faciles à identifier.

La maladie de la peste est provoquée par le bacille *Yersinia pestis*. L'infection se transmet généralement par la piqûre de puces ayant transité par un rat ou un rongeur infecté. Le contact d'une zone de morsure avec les selles, l'urine ou le sang de rongeurs infectés [7, p. 235]. La peste bubonique se manifeste par des ganglions lymphatiques (bubons) souvent situés au niveau du cou, des aisselles et à l'aîne. La

période d'incubation est généralement de 2 à 6 jours. Sans traitement antibiotique adapté, la maladie se transforme en septicémie qui entraîne la mort dans les trente-six heures.

Les premiers cas de l'épidémie de Bombay sont rapportés par le *British Medical Journal* qui fait état de centaines de morts, les neufs premiers décès ayant eu lieu le 29 septembre 1896 [8]. L'épidémie devient rapidement endémique, et se propage vraisemblablement bien au-delà de 1911. Un comité d'expert nommé en 1905 par le *Secretary of State for India*, la *Royal Society* et le *Lister Institute* met en place de nombreuses expérimentations de laboratoire et enquêtes de terrain, visant à étudier la maladie sous tous les angles possibles. Une quantité d'information considérable est ainsi collectée et publiée dans le *Journal of Hygiene* à partir de 1906. Les rapports de cette étude sont aujourd'hui librement accessibles sur Internet [9].

En s'appuyant sur ces données, les analyses de ce groupe d'experts ont notamment permis de mettre en évidence un retard systématique entre les épizooties de deux espèces de rats (*Mus decumanus* et *Mus rattus*, dont les populations prodigieuses sont aussi les plus importantes parmi les rongeurs) et entre les épizooties et l'épidémie de peste bubonique. Il s'agit donc ici d'un problème d'éco-épidémiologie. Les retards systématiques observés entre l'épidémie et les deux épizooties ont conduit les experts [10] à la conclusion que : l'épizootie de l'espèce *M. decumanus* est directement responsable de la diffusion de la peste dans la ville de Bombay (p. 762) ; l'épizootie de l'espèce *M. rattus* est directement attribuable à l'épizootie de l'espèce *M. decumanus* (p. 762) ; l'épidémie est directement attribuable à l'épizootie de l'espèce *M. rattus* (p. 767) tout en précisant que l'infection est occasionnellement transférée directement de l'espèce *M. decumanus* à l'homme, sans l'intervention de l'espèce *M. rattus* (p. 768).

Dans cet article, nous nous proposons d'abord de mettre en évidence un comportement déterministe de petite dimension pour l'épidémie de peste chez l'homme en nous appuyant sur les enregistrements de décès semi-mensuels causés par la peste, puis de faire ressortir les liens de causalité identifiés entre les épizooties de peste des deux espèces principales de rat et l'épidémie de peste bubonique.

2 Données

Deux types de données sont utilisés dans le présent travail.

(1) Le suivi semi-mensuel des décès causés par la peste sur la période 1897–1911 dont les enregistrements sont tirés des publications du comité d'experts. La période 1897–1906 a été obtenue par numérisation de courbes [10], tandis que la période 1907–1911 était directement fournie sous forme de tables [12]. Les courbes de la première période étant tracées sous la forme d'un écart à la moyenne annuelle, elles ont été renormalisées en s'appuyant sur les estimations annuelles de décès [13].

(2) Le décompte semi-mensuel du nombre de rats capturés (vivants ou morts) infectés par le bacille de la peste pour les deux principales espèces de rongeur, *Mus decumanus* et *Mus rattus*. Ces décomptes sont disponibles sur la période 1907–1911 [12]. Leurs populations totales semblent difficiles à estimer en raison de leur profusion et de leur capacité à nicher dans des lieux inaccessibles (pour se faire une idée de cette profusion, notons que 117 091 rats ont été examinés en 1906 [10, p. 750]). Le décompte séparé des populations des deux espèces principales de rongeur se justifie non seulement de part le retard observé entre les dynamiques des deux populations (retard estimé d'environ 10 jours [10, p. 754]), mais aussi en raison de leurs différence de mode de vie et d'habitat. L'espèce *M. rattus* vit dans une grande promiscuité avec l'homme et sa présence est souvent considérée avec la plus grande tolérance dans les habitations [10, p. 746]. On le rencontre aussi bien au rez-de-chaussée qu'à tous les étages des bâtiments. L'espèce *M. decumanus* vit principalement à l'extérieur des maisons dans les égouts, les canalisations d'eaux pluviales et les granges [10, p. 747, 767]. On ne le rencontre par contre jamais à l'étage des bâtiments, mais il peut creuser des terriers très étendus directement sous les planchers des salons de certaines habitations qui leur confère une proximité plus réduite avec l'homme, mais toutefois non négligeable (p. 748). Les deux espèces se rencontrent communément à proximité des magasins d'alimentation (car généralement situés à proximité d'une rigole), des entrepôts divers, de granges ou de bâtiments inhabités dans des proportions qui varient en fonction des préférences spécifiques à chacune des espèces [10, p. 775]. Ces lieux constituent des zones d'interaction privilégiées entre les deux espèces.

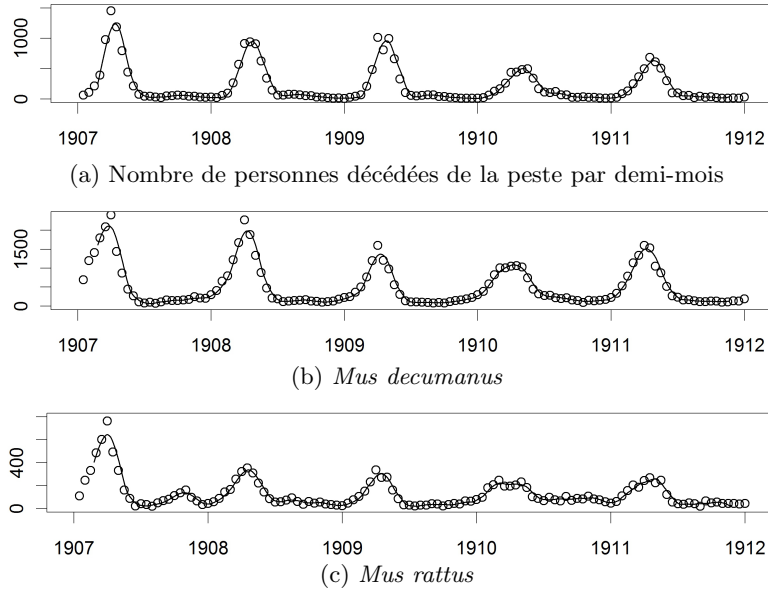


Figure 1. Évolution temporelle du nombre de personnes décédées de la peste bubonique (par demi-mois) et du nombre de rats capturés étant infestés (*M. decumanus* et *M. rattus*) du virus de la peste. Les points correspondent aux données originales, les courbes aux filtrages rééchantillonnés.

Pour chaque série temporelle, une spline a d'abord été appliquée afin de ré-échantillonner le signal à un pas de temps hebdomadaire (en fait 1/4 de mois). Les dérivées successives de chaque série ont ensuite été calculées en utilisant un filtre de type Savitzky-Golay [14] avec une fenêtre de ± 3 semaines. Les séries temporelles brutes et filtrées sont présentées sur figure 1 sur la période 1907–1911.

3 Modélisation par technique globale

La modélisation par technique globale vise à obtenir des modèles déterministes directement à partir de séries observationnelles [15]. Nous nous restreindrons ici aux formulations continues. Disposant d'une série observationnelle unique, la technique globale vise à obtenir un jeu d'équations à dérivées ordinaires sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2, \\ \dot{X}_2 = X_3, \\ \vdots \\ \dot{X}_n = F(X_1, X_2, \dots, X_n), \end{cases} \quad (1)$$

où la variable X_1 correspond à la variable observée et X_2 à X_n aux dérivées successives de X_1 . En pratique, la modélisation par technique globale consiste à retrouver la fonction $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ou une approximation (généralement polynomiale) de cette fonction. Deux algorithmes (*Polynomial Model Search* et *Global Modeling*) ont été spécifiquement développés pour cette tâche dont la validité a pu être testée avec succès sur des cas théoriques et expérimentaux de difficultés diverses [2], de même qu'à des cas environnementaux réels (par exemple [3] pour les cultures céréalières et [16] pour la dynamique du couvert neigeux).

Lorsque plusieurs séries temporelles sont disponibles, on peut alors chercher un couplage dynamique entre ces observables qui prendra alors la forme :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = F_1(X_1, X_2, \dots, X_n), \\ \dot{X}_2 = F_2(X_1, X_2, \dots, X_n), \\ \vdots \\ \dot{X}_n = F_n(X_1, X_2, \dots, X_n). \end{cases} \quad (2)$$

Le problème pratique nécessitera d'approcher non plus une seule fonction F mais n fonctions F_i . Les algorithmes précédemment mentionnés ont été généralisés afin d'être applicable au cas multivarié présenté équation (2) mais aussi dans des formulations hybrides combinant plusieurs variables et leurs dérivées (combinaisons des équations (1) et (2)).

4 Résultats

4.1 Modélisation monovariée

La modélisation monovariée a été appliquée aux cycles annuels des décès résultant de la peste. Un seul modèle non trivial a pu être obtenu, en s'appuyant sur la période 1897–1908. Le portrait de phase issu des données pour cette période (Fig. 2(a)) permet de mettre en évidence une structure cohérente relativement et peu bruitée. Les oscillations de grande amplitude correspondent aux oscillations annuelles. Les oscillations de très faible amplitude visibles à proximité de l'origine dans la région ($D \simeq 0, 0 < \dot{D} < 200$) correspondent aux oscillations situées entre deux épidémies. Un modèle tridimensionnel présentant une dynamique périodique de période 5 a pu être obtenu à partir de ce jeu de données (Fig. 2(b)). Le modèle présente 14 termes polynomiaux de degré maximum $q = 3$ [17]. Ce modèle permet de couvrir une région de l'espace des phases plus grande que celle couverte par le jeu d'observations utilisé pour en tirer le modèle, les plus grandes amplitudes pouvant atteindre un nombre de décès semi-mensuel $D > 2\,100$ alors que le maximum du portrait original était d'environ $D = 1\,600$ sur la période utilisée pour obtenir le modèle. Un comportement chaotique a pu être facilement obtenu par ajustement manuel du paramétrage (Fig. 2(c)). L'application de premier retour tiré de ce modèle ajusté (Fig. 2(d)) présente quatre branches monotones.

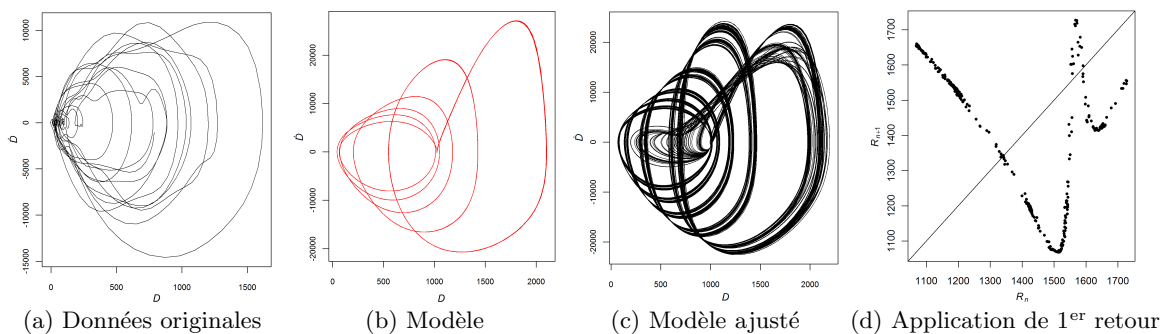


Figure 2. Portraits de phase tirés (a) des observations originales; (b) du modèle global; (c) du modèle global ajusté. (d) Application de premier retour obtenue à partir du modèle ajusté.

Cette analyse permet de mettre en évidence un comportement sous-jacent déterministe de petite dimension pour la dynamique étudiée, un régime chaotique ou proche du chaos pouvant résulter de petites perturbations du système (le modèle présenté sur la figure 2(b) correspondant à une situation idéale — non perturbée) et une dynamique pouvant potentiellement présenter des comportements asynchrones,

comme l'indiquent les quatre branches de l'application de premier retour et pouvant se traduire par des reprises de l'épidémie après une diminution temporaire du nombre de décès. Le modèle obtenu ici ne permet pas de simuler les oscillations de très petites amplitudes correspondant aux phases d'accalmie de l'épidémie. Ce modèle ne peut donc pas permettre de modéliser la cyclicité annuelle mais seulement l'évolution intra-saisonnière de l'épidémie.

4.2 Modélisation multivariée

L'approche multivariée a été appliquée afin de mettre en évidence le couplage entre les épizooties de peste *M. decumanus* et *M. rattus* et entre épizootie et épidémie. Les séries observationnelles présentées sur les figures 1 (a-c) ont été utilisées pour cette analyse (sur la période complète 1907–1911), permettant d'obtenir plusieurs modèles constitués de 8 à 14 termes polynomiaux de degré maximum $q = 2$. Deux de ces modèles présentaient directement un comportement chaotique. Le modèle chaotique le plus simple est constitué de 11 termes et se formule comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -0,0976 X_3^2 + 0,045 X_2 X_3 - 12,6237 X_1, \\ \dot{X}_2 = 0,0107 X_2^2 - 0,0237 X_1 X_2, \\ \dot{X}_3 = 0,0213 X_3^2 + 2,0814 X_2 - 0,0013 X_2^2 - 6,9174 X_1 - 0,0255 X_1 X_3 + 0,0078 X_1 X_2. \end{cases} \quad (3)$$

Les modèles obtenus sont tous construits autour de la même structure algébrique dont le diagramme de fluence est présenté en Fig. 3 (a) où X_1 correspond aux nombre de décès humains enregistrés, et X_2 et X_3 respectivement aux nombres de rats *M. decumanus* et *M. rattus* capturés infectés. Si l'on ne distingue pas les liens linéaires (traits pleins) des liens non linéaires (traits pointillés), on constate qu'un seul lien direct est absent ($X_2 \leftarrow X_3$) correspondant à la rétroaction de l'épizootie *M. rattus* sur l'épizootie *M. decumanus*, ce qui permet d'expliquer que l'épizootie *M. decumanus* puisse ralentir alors que celle des *M. rattus* continue de perdurer. Le diagramme suggère également que l'épidémie est contrôlée simultanément par les deux épizooties dans la mesure où la variable X_1 n'a qu'une rétroaction linéaire sur elle-même alors qu'au contraire les épizooties semble pouvoir s'auto-entretenir.

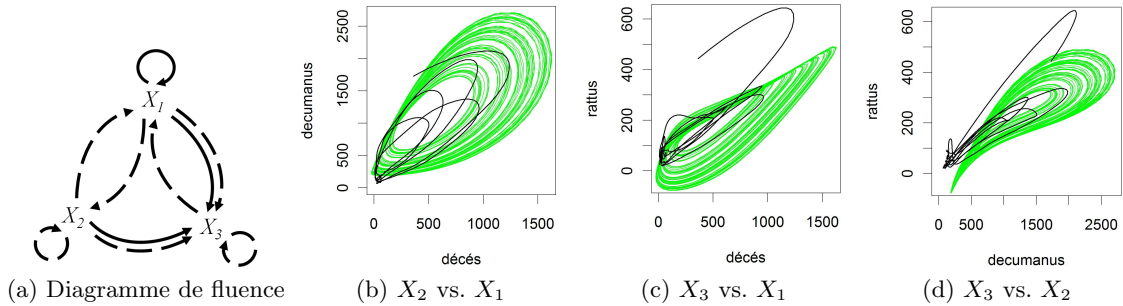


Figure 3. (a) Diagramme de fluence. (b–d) Portraits de phase tirés des différentes combinaisons de variables X_1 , X_2 et X_3 . Les portraits issus de données sont superposés en trait gras sur les portraits issus du modèle.

Les portraits de phases du modèle obtenu sont présentés sur les figures 3 (b–d). Mis à part le début des trajectoires qui s'écarte assez nettement du reste des portraits, un bon accord est observé entre modèles et données.

5 Conclusions

La technique de modélisation globale est appliquée au cycle de la peste bubonique pour la première fois, s'appuyant, d'abord sur une variable observationnelle unique, puis sur un jeu de trois variables relatives

à l'épidémie de peste bubonique et aux épizooties la précédant chez les deux espèces dominantes de rat. Dans les deux cas, l'approche permet d'obtenir des systèmes déterministes de petite dimension qui peuvent donner lieu à des comportements chaotiques. L'analyse multivariée permet de retrouver certaines des conclusions émises par le groupe d'expert ayant publié les données au début du siècle dernier et notamment d'identifier l'effet direct de l'épizootie *M. decumanus* sur l'épizootie *M. rattus*. Cette analyse permet aussi d'identifier des relations de couplage bidirectionnels entre l'épidémie et chacune des deux épizooties. En revanche, la rétroaction de l'épizootie *M. rattus* vers l'épizootie *M. decumanus* apparaît négligeable ou du moins très secondaire.

Remerciements : Le financement de ce travail a été assuré par le programme français LEFE/INSU (projet MoMu) et par l'Appel d'Offre IRD-Spirales (projet PamChaos).

Références

1. W. F. GATACRE, *Report on the Bubonic Plague in Bombay 1896–1897*, Bombay : Times of India (1897).
2. S. MANGIAROTTI, R. COUDRET, L. DRAPEAU & L. JARLAN, Polynomial search and Global modelling: Two algorithms for modeling chaos, *Phys. Rev. E*, **86**, 046205 (2012).
3. S. MANGIAROTTI, L. DRAPEAU L. & C. LETELLIER, Two chaotic global models for cereal crops cycles observed from satellite in northern Morocco, *Chaos*, **24**, 023130 (2014).
4. G. BOUDJEMA & B. CAZELES, Extraction of nonlinear dynamics from short and noisy time series. *Chaos Soliton. Fract.*, **12**, 2051–2069 (2003).
5. C. LETELLIER, G. G. RODRIGUES, J.-F. MUIR & L. A. AGUIRRE, Individuality of breathing patterns in patients under noninvasive mechanical ventilation evidenced by chaotic global models, *Chaos*, **23**, 013137 (2013).
6. N. BACAËR, *Histoires de mathématiques et de populations*, Cassini (2009).
7. ADVISORY COMMITTEE APPOINTED BY THE SECRETARY OF STATE FOR INDIA, Reports on plague investigations in India, XXVIII, Additional observations on the septicaemia in human plague with an account of experiments on the infectivity of the excreta, *J. Hyg. (Lond.)*, **8**, 221–235 (1908).
8. REUTER'S TELEGRAM, The reported appearance of plague in Bombay, *Brit. Med. J.*, the 3rd Oct. 1896, 966 (1896).
9. <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/journals/326/>
10. ADVISORY COMMITTEE APPOINTED BY THE SECRETARY OF STATE FOR INDIA, Reports on plague investigations in India, XXII, Epidemiological observations made by the commission in Bombay City. *J. Hyg. (Lond.)*, **7**, 724–798 (1907).
11. ADVISORY COMMITTEE APPOINTED BY THE SECRETARY OF STATE FOR INDIA, Reports on plague investigations in India, XXXI, On the seasonal prevalence of plague in India, *J. Hyg. (Lond.)*, **8**, 266–301 (1908).
12. ADVISORY COMMITTEE APPOINTED BY THE SECRETARY OF STATE FOR INDIA, Reports on plague investigations in India, XLIX, Statistics of the occurrence of plague in man and rats in Bombay, *J. Hyg. (Lond.)*, **12**, 221–226 (1912).
13. CONSUL DENNISON REPORTS, India: Bombay. Plague, Cholera, and Smallpox in 1909, *Public Health Reports (1896–1970)*, **25**, 1731–1733 (1910).
14. A. SAVITZKY & M. J. E. GOLAY, Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures, *Anal. Chem.*, **36**, 1627–1639 (1964).
15. G. GOUESBET & C. LETELLIER C., Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets, *Phys. Rev. E*, **49**, 4955–4972 (1994).
16. S. MANGIAROTTI, *Modélisation globale et Caractérisation topologique de dynamiques environnementales : de l'analyse des enveloppes fluides et du couvert de surface de la Terre à la caractérisation topodynamique du chaos*, Habilitation à Diriger des Recherches, Université Toulouse 3 (2014).
17. La fonction F de l'équation (1) s'écrit pour ce modèle : $F(X_1, X_2, X_3) = -6,9486 \times 10^{-5} X_3^2 - 272,040 X_2 + 0,002759419 X_2 X_3 - 6,9 \times 10^{-9} X_2 X_3^2 + 0,0407520656 X_2^2 - 4,1988 \times 10^{-6} X_2^3 - 0,0192162887 X_1 X_3 + 1,038 \times 10^{-7} X_1 X_3^2 + 0,3441848835 X_1 X_2 - 7,18665 \times 10^{-5} X_1 X_2^2 - 1,6411368277 X_1^2 + 3,34312 \times 10^{-5} X_1^2 X_3 + 9,29916 \times 10^{-5} X_1^2 X_2 + 0,0033671941 X_1^3$.

Vers un modèle de dynamique des grandes échelles dans les écoulements de paroi transitionnels

Paul Manneville

Laboratoire d'Hydrodynamique, UMR 7646, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France
 paul.manneville@ladhyx.polytechnique.fr

Résumé. La transition vers la turbulence des écoulements de paroi est marquée par la coexistence entre écoulements laminaire et turbulent. Un système d'équations simplifiées est proposé pour régir la rétroaction entre les recirculations dans les régions laminaires et les tensions de Reynolds engendrés par la turbulence à petite échelle modélisée par une extension de l'approche de Waleffe [5].

Abstract. A system of simplified equations is proposed to govern the feedback interactions of large-scale flows present in laminar-turbulent patterns of transitional wall-bounded flows with small-scale Reynolds stresses generated by the self-sustainment process of turbulence, itself modelled using an extension of Waleffe's approach [5].

1 Contexte

Les écoulements contrôlés par les effets visqueux à proximité de parois solides transitent vers la turbulence de façon résolument sous-critique, restant linéairement stables jusqu'à des valeurs du nombre de Reynolds R suffisamment élevées pour que les régimes non-triviaux permis par la non-linéarité des équations de Navier–Stokes puissent exister en compétition avec le régime laminaire. Deux exemples où l'écoulement de base reste stable vis-à-vis de perturbations infinitésimales pour tout R sont emblématiques de cette situation : l'écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique soumis à un gradient de pression et l'écoulement de cisaillement simple entre deux plaques parallèles en translation relative, dit de Couette plan, en anglais *plane Couette flow* abrégé en PCF dans la suite. Sur un intervalle en R limité, dit *régime transitionnel*, cette compétition se manifeste alors sous la forme de poches sièges d'un écoulement turbulent à petite échelle (*puffs*, *spots*) coexistant avec un écoulement resté laminaire. Les spécificités de cette situation sont examinées sous l'angle expérimental, numérique et théorique dans l'article de revue [1]. Le régime transitionnel de PCF et d'autres écoulements plans est caractérisé par la présence de larges bandes obliques alternativement turbulentes et laminaires [2] dont la compréhension détaillée est rendue difficile précisément par l'existence de deux échelles spatio-temporelles, l'une *grande*, celle du motif laminaire–turbulent présentant des interfaces statistiquement bien définies et évoluant *lentement*, l'autre *petite*, interne aux régions agitées d'une turbulence *rapide*, ce qu'illustre la figure ci-contre.

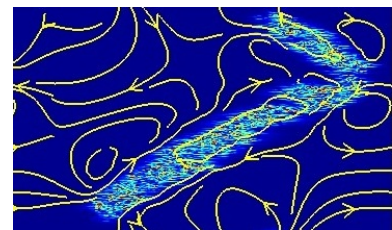


Figure 1. Recirculations à grande échelle autour de fragments de bande turbulente dans PCF obtenues par simulation numérique [3].

L'origine de la turbulence à l'échelle locale peut être considérée comme comprise dans le cadre d'une approximation dite de « cellule minimale d'écoulement », en anglais *Minimal Flow Unit* (MFU) [4] permettant d'accéder au mécanisme assurant la persistance de solutions non-triviales « loin » du régime laminaire, en anglais *Self-Sustainment Process* ou SSP [5]. Dans ce même cadre, exploitant la cohérence locale des perturbations à l'écoulement de base, les développements théoriques ultérieurs ont ensuite conduit à une interprétation de la dynamique en termes de *chaos déterministe* typique des systèmes à petit nombre de degrés de liberté [6], faisant l'impasse sur les aspects spatio-temporels qui seraient mieux aux systèmes d'intérêt expérimental. La cohérence locale observée expérimentalement peut cependant aussi servir de point de départ à une modélisation plus propice à la description des motifs laminaires–turbulents présents dans tout le régime transitionnel [1, App. B]. Elle justifie en effet une approche qui repose sur

l'idée que la dépendance des champs hydrodynamiques dans la direction perpendiculaire à la paroi est plus ou moins figée, mais qui restitue sa liberté à la dynamique dans les directions complémentaires (système quasi-unidimensionnel pour l'écoulement dans un tube, quasi-bidimensionnel dans les autres cas). C'est la voie que nous suivrons en nous limitant à PCF bien que l'approche soit de portée plus générale. Nous nous intéresserons en particulier aux écoulements à grande échelle [3, 7, 8] plus facilement détectables dans les intervalles entre les domaines turbulents (cf. figure 1) rejoignant une problématique formulée dans le cadre — et utilisant les outils — de la théorie générale de la formation des motifs (*patterns*) dans les systèmes hors équilibre [9].

2 Modèle cadre

PCF est l'écoulement plan qui se développe entre deux plaques parallèles en translation relative dans une direction notée x ; y désigne la direction normale aux plaques, z complétant le système de coordonnées. Les composantes de la perturbation de vitesse à l'écoulement de base $u_b = Uy/h$ sont dénotées u, v, w . $2U$ mesure la vitesse relative des plaques et $2h$ la distance qui les sépare. Le nombre de Reynolds est défini par $R = Uh/\nu$ où ν est la viscosité cinématique et nous adoptons un système d'unités basé sur h pour les distances et h/U pour les temps. Dans un tel système, R est numériquement égal à $1/\nu$. Pour simplifier le traitement de la pression, nous adoptons une représentation où v et $\zeta = \partial_z u - \partial_x w$ sont les variables fondamentales. Les équations primitives gouvernant la perturbation à l'écoulement de base dans cette formulation sont introduites et discutées en détail dans le livre de Schmid & Henningson [10], p. 155 et suivantes.

Nous retiendrons des approches antérieures [1] que la dépendance normale aux parois des champs hydrodynamiques est bien décrite à l'ordre le plus bas par une projection sur des fonctions de base prenant en compte la condition de non-glissement le long d'une paroi solide et la condition de continuité :

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0. \quad (1)$$

La cohérence des perturbations de vitesse observée expérimentalement suggère donc de prendre :

$$u = U_0 g_0(y) + U_1 g_1(y) + u', \quad v = V_1 f_1(y) + v', \quad w = W_0 g_0(y) + W_1 g_1(y) + w',$$

avec [11, 12] :

$$f_1 = A(1 - y^2)^2, \quad g_0 = B(1 - y^2), \quad g_1 = Cy(1 - y^2),$$

où A, B et C sont des constantes de normalisation. Les amplitudes $U_{0,1}, W_{0,1}$ et V_1 sont des fonctions de l'espace et du temps, les quantités u', w', v' sont des résidus. Les équations gouvernant les amplitudes sont obtenues en projetant les équations de Navier–Stokes sur les trois fonctions de base retenues. La condition de continuité conduit immédiatement à :

$$\partial_x U_0 + \partial_z W_0 = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x U_1 + \partial_z W_1 = \beta V_1$$

où β joue le rôle d'un vecteur d'onde dans la direction normale aux plaques ($\beta = \pi/2$ pour des conditions aux limites libres, $\beta = \sqrt{3}$ en cas de non-glissement aux parois avec les polynômes explicités ci-dessus).

Posant $Z_{0,1} = \partial_z U_{0,1} - \partial_x W_{0,1}$, nous obtenons [12] :

$$\begin{aligned} (\Delta - \beta^2) \partial_t V_1 &= \nu (\Delta^2 - 2\beta^2 \Delta + p_1) V_1 - (q\Delta - \bar{r}) (\partial_x (U_0 V_1) + \partial_z (W_0 V_1)) \\ &\quad + r [\partial_{xx} (U_1 U_0) + \partial_{xz} (U_1 W_0 + U_0 W_1) + \partial_{zz} (W_0 W_1)] + \mathcal{N}_{V_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \partial_t Z_0 + b \partial_x Z_1 + \bar{b} \partial_z V_1 &= \nu (\Delta - \bar{p}_0) Z_0 + s_0 (\partial_{xz} (U_0^2 - W_0^2) + (\partial_{zz} - \partial_{xx})(U_0 W_0)) \\ &\quad + s_1 [\partial_{xz} (U_1^2 - W_1^2) + (\partial_{zz} - \partial_{xx})(U_1 W_1)] - \bar{s}_0 [\partial_z (U_1 V_1) - \partial_x (W_1 V_1)] + \mathcal{N}_{Z_0}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \partial_t Z_1 + b \partial_x Z_0 &= \nu (\Delta - \bar{p}_1) Z_1 + 2s_1 [\partial_{xz} (U_1 U_0 - W_1 W_0) + (\partial_{zz} - \partial_{xx})(U_1 W_0 + U_0 W_1)] \\ &\quad - \bar{s}_1 [\partial_z (U_0 V_1) - \partial_x (W_0 V_1)] + \mathcal{N}_{Z_1}, \end{aligned} \quad (4)$$

où $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{zz}$ désigne le Laplacien dans le plan de l'écoulement. Les coefficients qui apparaissent dans ces équations sont des intégrales sur $y \in [-1, 1]$ de produits des fonctions de base et de leurs dérivées dont les valeurs peuvent être tirées de [12] où les résidus étaient également analysés en vue de dépasser le premier ordre significatif de façon systématique et quantitative. Au contraire ici, nous négligeons tous les termes en \mathcal{N} qui décrivent les interactions entre les variables retenues et leurs résidus et les résidus entre eux. Nous retrouvons donc un système de structure identique au modèle à trois champs obtenu dans [11, a], excepté que l'écoulement y était traité en variables primitives et pas en formulation vitesse-vorticité comme ici, ce qui conduit à un jeu de coefficients légèrement différents principalement pour les termes visqueux. Les simulations numériques directes des équations de Navier–Stokes ont montré que cette représentation de l'écoulement au premier ordre significatif contenait de l'ordre de 90 % de l'énergie de perturbation sur toute la plage de nombres de Reynolds correspondant au régime transitionnel [1, Fig. B6]. Nous nous contenterons donc de cette simplification tout en sachant que, si les recirculations à grande échelle sont restituées de façon qualitativement satisfaisante [11, b], la simulation numérique du système ainsi tronqué ne semble pas permettre de retrouver la coexistence laminaire–turbulent en bandes [13], ce qui nous avait d'ailleurs incité à retourner à des simulations directes [3].

3 Séparation d'échelles

Nous nous intéressons plus particulièrement au problème des écoulements à grande échelle mis en évidence empiriquement, principalement par simulation numérique directe des équations de Navier–Stokes [3, 7, 8]. La théorie développée dans [11, b] fait dériver ces recirculations de termes sources associés au tenseur de Reynolds des fluctuations de vitesse à petite échelle sans pour autant fermer le système par des équations gouvernant ces dernières [7, 8]. C'est à cette limitation que nous nous attaquons ici en séparant explicitement les dépendances lente et rapide, en temps et en espace, des champs de vitesse. Pour formaliser ce filtrage nous introduisons, en supplément des coordonnées naturelles x, z, t supposées rapidement variables, des coordonnées lentes, X, Z, T . (La coordonnée y a été éliminée par l'étape de projection préalable.) Dans cette approche multi-échelle, notant \mathcal{Y} l'ensemble des variables d'intérêt $\{U_{0,1}; V_1; W_{0,1}\}$, nous posons donc

$$\mathcal{Y} := \bar{\mathcal{Y}}(X, Z, T) + \tilde{\mathcal{Y}}(X, Z, T|x, z, t). \quad (5)$$

La situation sous-critique à laquelle nous faisons face ici ne permet pas de formaliser la distinction entre échelles par un développement perturbatif systématique et rigoureux comme dans le cas super-critique pour décrire la dynamique des cellules de convection ou les rouleaux de Taylor près du seuil d'instabilité [9]. Nous admettons donc une séparation absolue des échelles qui conduit à considérer que les opérateurs différentiels en coordonnées naturelles se dédoublent en s'appliquant sur les champs gouvernés par (2–4). En particulier la condition de continuité (1) produit séparément :

$$\begin{aligned} \partial_x \tilde{U}_0 + \partial_z \tilde{W}_0 &= 0 & \text{et} & & \partial_x \tilde{U}_1 + \partial_z \tilde{W}_1 &= \beta \tilde{V}_1, \\ \partial_X \bar{U}_0 + \partial_Z \bar{W}_0 &= 0 & \text{et} & & \partial_X \bar{U}_1 + \partial_Z \bar{W}_1 &= \beta \bar{V}_1. \end{aligned}$$

Considérons tout d'abord les grandes échelles lentement variables. Pour obtenir les équations qui les gouvernent il suffit de faire la substitution (5) dans (2–4) et de ne garder dans que les termes mettant en jeu les dérivées d'ordre le plus faible dans les variables lentes. Il vient :

$$\beta^2 \partial_T \bar{V}_1 + \underline{\nu p_1} \bar{V}_1 = -\bar{r} \left(\partial_X \overline{\tilde{U}_0 \tilde{V}_1} + \partial_Z \overline{\tilde{W}_0 \tilde{V}_1} \right), \quad (6)$$

$$\partial_T \bar{Z}_0 + \underline{\nu \bar{p}_0} \bar{Z}_0 + \underline{b} \partial_X \bar{Z}_1 + \underline{\bar{b}} \partial_Z \bar{V}_1 = \bar{s}_0 \left(\partial_X \overline{\tilde{W}_1 \tilde{V}_1} - \partial_Z \overline{\tilde{U}_1 \tilde{V}_1} \right), \quad (7)$$

$$\partial_T \bar{Z}_1 + \underline{\nu \bar{p}_1} \bar{Z}_1 + \underline{b} \partial_X \bar{Z}_0 = \bar{s}_1 \left(\partial_X \overline{\tilde{W}_0 \tilde{V}_1} - \partial_Z \overline{\tilde{U}_0 \tilde{V}_1} \right), \quad (8)$$

où le surlignage des termes au membre de droite indique l'opération qui consiste à ne retenir des quantités correspondantes que la partie lentement variable fonction des coordonnées X, Z, T . Les termes soulignés sont ceux retenus dans [11, b] qui ne s'intéressait qu'au régime quasi-stationnaire ($\partial_T \equiv 0$) et admettait

implicitement que les autres termes au membre de droite ne contribuaient pas pour des raisons de symétrie statistique [11, a §2.4]. Cette hypothèse est valide en l'absence de brisure de symétrie « $z \leftrightarrow -z$ » mais doit être levée en toute généralité car elle n'est pas vérifiée lors de la croissance des spots [8] et à plus forte raison en présence de motif laminaire-turbulent oblique [2].

Le problème est donc ramené à l'évaluation des tensions de Reynolds au membre de droite de (6–8) où apparaissent des moyennes de produits de fluctuations aux petites échelles rapides. Pour les estimer, nous remarquerons que les écoulements à petite échelle impliqués dans ces termes sont induits par le SSP que nous allons approcher à la manière de Waleffe [5] dans le cadre de la MFU (perspective *locale* opposée au point de vue plus *global* relatif aux grandes échelles). Le modèle à huit variables qu'il a introduit rend compte d'une dépendance simplifiée de l'écoulement dans le plan (x, z) décomposée en série de Fourier et tronquée au-delà du premier harmonique. Les modes qu'il a choisis correspondent à une phase qui assure une résonance parfaite entre les différentes composantes de vitesse impliquées. Ici, nous allons garder l'hypothèse de MFU réduite au premier harmonique notant les vecteurs d'ondes présents $\alpha = 2\pi/\ell_x$ et $\gamma = 2\pi/\ell_z$, où ℓ_x et ℓ_z sont les dimensions de la MFU, mais nous allons partir d'une expression plus souple autorisant des glissements de phase entre ces composantes, ce qui, d'une certaine façon, permet d'incorporer l'effet de l'invariance par translation sur les couplages locaux [9]. Définissant un potentiel ϕ et une fonction de courant ψ dont dérivent les composantes de vitesses selon $u = -\partial_z\psi + \partial_x\phi$, $v = -\Delta\phi$, $w = \partial_x\psi + \partial_z\phi$, de sorte que $\zeta = -\Delta\psi$, nous prenons donc les expressions les plus générales possibles :

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= -\overline{U}_0 z + \overline{W}_0 x + A_0 \cos \alpha x + \underline{B}_0 \sin \alpha x + C_0 \cos \gamma z + D_0 \sin \gamma z \\ &\quad + E_0 \sin \alpha x \cos \gamma z + F_0 \cos \alpha x \cos \gamma z + G_0 \cos \alpha x \sin \gamma z + H_0 \sin \alpha x \sin \gamma z, \\ \Psi_1 &= -\underline{\overline{U}}_1 z + \overline{W}_1 x + \underline{A}_1 \cos \alpha x + B_1 \sin \alpha x + C_1 \cos \gamma z + D_1 \sin \gamma z \\ &\quad + \underline{E}_1 \sin \alpha x \cos \gamma z + F_1 \cos \alpha x \cos \gamma z + G_1 \cos \alpha x \sin \gamma z + H_1 \sin \alpha x \sin \gamma z, \\ \Phi_1 &= \underline{A}'_1 \cos \alpha x + B'_1 \sin \alpha x + \underline{C}'_1 \cos \gamma z + D'_1 \sin \gamma z \\ &\quad + E'_1 \sin \alpha x \cos \gamma z + F'_1 \cos \alpha x \cos \gamma z + \underline{G}'_1 \cos \alpha x \sin \gamma z + H'_1 \sin \alpha x \sin \gamma z.\end{aligned}$$

Les variables soulignées sont celles apparaissant sous d'autres noms dans le modèle de Waleffe *stricto sensu* que nous noterons Wa97, avec un “w” en indice. Ce sont $\overline{U}_1 \equiv M_w - 1$, $D_0 \equiv -U_w/\gamma$, $B_0 \equiv A_w/\alpha$, $F_0 \equiv -B_w$, $A_1 \equiv -C_w/\alpha$, $E_1 \equiv D_w$, $C'_1 \equiv V_w/\gamma$, et $G'_1 \equiv E_w$. L'ensemble des amplitudes $\{\overline{U}_0; \overline{W}_0; \overline{U}_1; \overline{W}_1\} := \overline{\mathcal{U}}$, surlignées à dessein, correspond évidemment aux valeurs locales des composantes de vitesse à grande échelle introduites précédemment. L'autre ensemble, $\{A_0; B_0; \dots; G'_1; H'_1\} := \mathcal{A}$, contient toutes celles affectées des différentes dépendances périodiques à l'échelle de la MFU. Toutes ces amplitudes rendant compte de la cohérence à petite échelle sont supposés uniquement fonction du temps « rapide » t et des coordonnées « lentes » X, Z et T .

De façon parfaitement standard, le système gouvernant la dynamique à l'échelle de la MFU est obtenu en introduisant les expressions des composantes des vitesses qui dérivent de $\Psi_{0,1}$ et Φ_1 comme indiqué plus haut dans (2–4) et en séparant les différentes lignes trigonométriques en x et z . Il vient ainsi un système de 28 équations différentielles à 28 inconnues décrivant tous les processus attendus des équations de Navier-Stokes, *lift-up*, dissipation visqueuse et termes d'advection quadratiques, que nous écrivons formellement :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A} + \mathcal{L} \mathcal{A} = \mathcal{M}(\overline{\mathcal{U}}) \mathcal{A} + \mathcal{N}(\mathcal{A}, \mathcal{A}), \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\mathcal{U}} + \mathcal{L}' \overline{\mathcal{U}} = \mathcal{N}'(\mathcal{A}, \mathcal{A}). \quad (10)$$

Vu sa taille, expliciter ici le système (9,10) n'est pas possible. Concernant (10) nous ne donnerons que les équations qui gouvernent \overline{U}_0 et \overline{U}_1 , soit :

$$\frac{d}{dt} \overline{U}_0 + \nu \overline{p}_0 \overline{U}_0 = \frac{1}{4} \gamma \overline{s}_0 [2\gamma^2 (C'_1 D_1 - C_1 D'_1) + \kappa^2 (E_1 H'_1 + F_1 G'_1 - E'_1 H_1 - F'_1 G_1)], \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{U}_1 + \nu \overline{p}_1 \overline{U}_1 = \frac{1}{4} \gamma \overline{s}_1 [2\gamma^2 (C'_1 D_0 - C_0 D'_1) + \kappa^2 (F'_1 G_0 + E'_1 H_0 - E_0 H'_1 - F_0 G'_1)], \quad (12)$$

où $\kappa^2 = \alpha^2 + \gamma^2$. La première équation est sans équivalent chez Waleffe. La seconde est la version développée de la première équation de son système [5, p. 891], celle pour $M_w = 1 + \overline{U}_1$, soit dans les

notations présentes : $\frac{d}{dt}\bar{U}_1 + \nu\bar{p}_1\bar{U}_1 = \frac{1}{4}\gamma\bar{s}_1[2\gamma^2C'_1D_0 - \kappa^2F_0G'_1]$. À titre d'exemple d'équation du sous-système (9) nous ne donnons que celle pour D_0 attachée à la composante de u en $\cos(\gamma z)$ indépendante de x (c'est l'ingrédient principal des trainées turbulentes, *streak* en anglais, $-U_w/\alpha$ chez Waleffe). Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}D_0 + \nu\kappa_0^\gamma D_0 - \bar{b}C'_1 &= s_0\gamma(C_0\bar{W}_0 + \frac{1}{2}\alpha(B_0F_0 - A_0E_0)) \\ &+ s_1[\gamma(C_1\bar{W}_1 + \beta C'_1\bar{U}_1) + \frac{1}{2}\alpha\gamma((B_1F_1 - A_1E_1) + \beta^2(A'_1E'_1 - B'_1F'_1)) \\ &- \frac{1}{2}\alpha^2\beta(A_1G'_1 + A'_1G_1 + B_1H'_1 + B'_1H_1)], \end{aligned} \quad (13)$$

où, outre les coefficients déjà introduits, $\kappa_0^\gamma = \gamma^2 + \bar{p}_0$. Cette équation et ses homologues sont plutôt compliquées mais on identifie ici facilement le terme de relaxation visqueuse et le terme de *lift up* au membre de gauche (C'_1 correspond à V_w/γ chez Waleffe). Des trois amplitudes uniformes \bar{W}_0 , \bar{U}_1 et \bar{W}_1 qui correspondent à la contribution de $\mathcal{M}(\bar{U})\mathcal{A}$ dans (9) pour cette équation, seule figure \bar{U}_1 , i.e. $M_w - 1$, dans sa version Wa97. Dans nos notations, l'équation pour U_w se réduit en effet à :

$$\frac{d}{dt}D_0 + \nu\kappa_0^\gamma D_0 - \bar{b}C'_1 = \frac{1}{2}\alpha\gamma s_0 B_0 F_0 - \frac{1}{2}\alpha\gamma s_1 A_1 E_1 - \frac{1}{2}\alpha^2\beta s_1 A_1 G'_1 + \gamma\beta s_1 C'_1 \bar{U}_1.$$

Notons qu'outre Wa97 qui comporte 8 équations, the système (9–10) contient deux autres sous-systèmes fermés à 15 équations. Le premier porte sur $\{\text{Wa97}; \text{AU}_0; \bar{U}_0; D_1\}$, où $\text{AU}_0 := \{A_0; E_0; B_1; F_1; H'_1\}$ et le second sur $\{\text{Wa97}; \text{AW}_0; \bar{W}_0; B'_1\}$ où $\text{AW}_0 := \{C_0; G_0; H_1; D'_1; F'_1\}$. Ces systèmes sont fermés au sens où toute trajectoire initiée dans les sous-espaces correspondants y réside indéfiniment. Chacun des sous-ensembles AU_0 et AW_0 est constitué des amplitudes associées aux générateurs des translations infinitésimales respectivement selon x pour AU_0 et z pour AW_0 . Ainsi, par exemple une solution translatée de δx selon x se déduit d'une solution quelconque de Wa97 à condition de prendre une perturbation réduite à $A_0 = \epsilon_x B_0$, $E_0 = -\epsilon_x F_0$, $B_1 = -\epsilon_x A_1$, $F_1 = \epsilon_x E_1$, et $H'_1 = -\epsilon_x G'_1$, avec $\epsilon_x = \alpha\delta_x$ et l'on vérifie sur (11) réduite à $\frac{d}{dt}\bar{U}_0 + \nu\bar{p}_0\bar{U}_0 = \frac{1}{4}\gamma\bar{s}_0\kappa^2(E_1H'_1 + F_1G'_1)$, les autres termes étant absents par hypothèse, qu'une telle solution ne génère pas la composante uniforme \bar{U}_0 . À l'opposé, une perturbation quelconque en AU_0 va génériquement engendrer une composante de recirculation \bar{U}_0 . Il en va de même pour les perturbations en AW_0 et \bar{W}_0 . Les recirculations \bar{U} font donc naturellement partie de la dynamique d'ensemble du système de Waleffe ainsi généralisé à 28 amplitudes.

Si maintenant nous admettons que ce système ne décrit l'écoulement qu'à petite échelle (MFU) et que les amplitudes qui en sont solutions peuvent être victimes de modulations lentes gouvernées par (6–8), nous voyons s'introduire des rétroactions non-locales via les termes en $\mathcal{M}(\bar{U})\mathcal{A}$ dont l'équation (13) nous fournit un exemple par la présence de \bar{W}_0 , \bar{U}_1 et \bar{W}_1 à son membre de droite. Ces termes décrivent une *advection* au sens large des composantes \mathcal{A} (petites échelles de l'écoulement).

4 Discussion

En premier lieu, dans une approche purement phénoménologique reposant sur une équation de Ginzburg–Landau adaptée à une bifurcation sous-critique, Hayot et Pomeau [15] introduisaient la rétroaction non-locale entre recirculation à grande échelle et intensité de la turbulence par une condition intégrale. On peut comprendre le système (6–8) comme la stricte contre-partie différentielle de cette condition.

D'autre part, dans une perspective de dynamique de phase [9] essentielle dans le contexte des systèmes étendus d'intérêt expérimental, l'introduction des deux groupes d'amplitudes additionnelles AU_0 et AW_0 affectées aux générateurs infinitésimaux de translation dans le plan de l'écoulement, apporte une nouvelle ouverture apte à lever la rigidité inhérente à l'hypothèse d'une MFU dont les dimensions sont fixées de façon stricte, en autorisant des modulations de longueur d'onde et d'orientation via l'analogie des instabilités d'Eckhaus et zig-zag en convection [9], mais ici en régime pleinement non-linéaire, loin de tout seuil d'instabilité. L'inévitable génération de recirculations lentement variables dans l'espace et le temps $\bar{U}_0, \bar{W}_0, \bar{W}_1$ dès que la contribution \bar{U}_1 qui produit le profil moyen en S de la vitesse en régime turbulent n'est plus uniforme [8, 11] conduit à penser qu'un facteur important, le couplage via (6–8), a été mis en évidence quant aux conditions de la coexistence laminaire–turbulent dans les écoulements de

paroi transitionnels. L'argument n'est pas limité au système (2–4) où les termes en \mathcal{N} sont négligés, mais via l'élimination adiabatique des résidus, porterait de la même façon sur un modèle effectif plus général mieux susceptible de rendre compte de l'apparition du régime de turbulence en bandes obliques observé dans les simulations du même modèle mais tronqué à un ordre plus élevé [12].

Lors d'un travail précédent [14] nous étions partis du modèle de Waleffe simplifié à 4 amplitudes pour développer une théorie de l'apparition des modulations de l'intensité turbulente. De façon purement phénoménologique, nous autorisons la diffusion dans une direction arbitraire de l'espace d'une distribution inhomogène de ces amplitudes et nous avons montré que l'alternance laminaire–turbulent de PCF pouvait tirer son origine d'un mécanisme de Turing quand la diffusivité des différentes amplitudes étaient d'ordre de grandeur suffisamment séparés. Nous appelions alors à la dérivation d'un modèle permettant d'interpréter cette diffusion à partir des équations primitives. Ce qui précède est proposé comme un élément de réponse dans cette perspective générale mais nous voyons aussi que le résultat ne se met pas du tout sous la forme attendue. L'advection des petites échelles par les recirculations à grande échelle [8, 16] apparaît ainsi plus naturelle que la diffusion associée à une viscosité turbulente que l'on peine à modéliser à partir des équations primitives.

Remerciements : L'auteur tient à exprimer sa gratitude à G. Kawahara et M. Shimizu (Osaka), T. Tsukahara (Tokyo), Y. Duguet (LIMSI), R. Monchaux et M. Couliou (ENSTA-ParisTech) pour de nombreuses discussions, notamment dans le cadre du programme JSPS-CNRS TRANSTURB « *Localized turbulent structures in transitional wall-bounded flows* », ainsi qu'à K. Seshasayanan pour sa participation au développement et à la simulation du modèle sur lequel repose une partie de la discussion.

Références

1. P. MANNEVILLE, On the transition to turbulence of wall-bounded flows in general, and plane Couette flow in particular, *Eur. J. Mech. B*, **49**, 345–362 (2015).
2. A. PRIGENT *et al.*, Long-wavelength modulation of turbulent shear flows, *Physica D*, **174**, 100–113 (2003).
3. P. MANNEVILLE, (a) On the decay of turbulence in plane Couette flow, *Fluid Dyn. Res.*, **43**, 065501 (2011); (b) On the growth of laminar–turbulent patterns in plane Couette flow, *Fluid Dyn. Res.*, **44**, 031412 (2012).
4. J. JIMÉNEZ & P. MOIN, The minimal flow unit in near wall turbulence, *J. Fluid Mech.*, **225**, 213–240 (1991).
5. F. WALEFFE, On a self-sustaining process in shear flows, *Phys. Fluids*, **9**, 883–900 (1997).
6. B. ECKHARDT *et al.*, Dynamical systems and the transition to turbulence in linearly stable shear flows, *Phil. Trans. R. Soc. A*, **366**, 1297–1315 (2008).
7. D. BARKLEY & L.S. TUCKERMAN, Mean flow of turbulent-laminar patterns in plane Couette flow, *J. Fluid Mech.*, **576**, 109–137 (2007).
8. Y. DUGUET & P. SCHLATTER, Oblique laminar-turbulent interfaces in plane shear flows, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 034502 (2013).
9. R. HOYLE, *Pattern Formation: An Introduction to Methods*, Cambridge University Press, 2006.
10. P. SCHMID & D. HENNINGSON, *Stability and Transition in Shear Flows*, Springer (2001).
11. M. LAGHA & P. MANNEVILLE, (a) Modeling transitional plane Couette flow, *Eur. Phys. J. B*, **58**, 433–447 (2007); (b) Modeling of plane Couette flow. I. Large scale flow around turbulent spots, *Phys. Fluids*, **19**, 094105 (2007).
12. K. SESHASAYANAN & P. MANNEVILLE, Laminar-turbulent patterning in wall-bounded shear flows: A Galerkin model, soumis à *Fluid Dyn. Res.* (2014).
13. P. MANNEVILLE, From temporal to spatiotemporal dynamics in transitional plane Couette flow, *Phys. Rev. E*, **83**, 036308 (2011).
14. P. MANNEVILLE, Turbulent patterns in wall-bounded flows: A Turing instability?, *Europhys. Lett.*, **98**, 64001 (2012).
15. F. HAYOT & Y. POMEAU, Turbulent domain stabilization in annular flows, *Phys. Rev. E*, **50**, 2019–2021 (1994).
16. Y. POMEAU, The transition to turbulence in parallel flows: A personal view, *C. R. Mécanique*, **343**, 210–218 (2015).

Génération expérimentale de solitons de *cut-off* dans une ligne électrique non linéaire

Patrick Marquié¹, Kevin Tse Ve Koon², Patrice Tchobo-Dinda³ & Savério Morfu¹

¹ Laboratoire LE2I, UMR CNRS 6306. Université de Bourgogne. BP 47870. 21078 Dijon

² Laboratoire CREATIS UMR CNRS 5220, Inserm U1044, INSA Lyon, Université de Lyon1, 69622 Villeurbanne

³ Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de Bourgogne (ICB), UMR CNRS 6303, Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21078 Dijon

marquie@u-bourgogne.fr

Résumé. Nous étudions le phénomène de supratransmission dans un milieu non linéaire discret, soumis, à une excitation périodique dont la fréquence appartient à la bande interdite. Nous montrons l'existence d'un seuil de tension au-dessus duquel l'instabilité modulationnelle (IM) va se développer dans la ligne, valeur de seuil dépendant de la fréquence d'excitation. Si elle n'empêche pas l'apparition de l'IM par supratransmission, la dissipation présente dans la ligne est un obstacle à la génération des solitons de *cut-off*, obstacle que nous sommes parvenus à contourner par un choix approprié de l'amplitude de l'excitation.

Abstract. We address the problem of supra-transmission of waves in a discrete nonlinear system, driven by a periodic excitation at a frequency lying above the phonon band edge. In an experimental electrical transmission line made of 200 elementary cells, we establish the existence of a voltage threshold for a supra-transmission enabling the generation and propagation of cut-off solitons within the line. The decisive role of Modulational Instability in the onset and development of the process of generation of cut-off solitons is clearly highlighted. The phenomenon of dissipation is identified as being particularly harmful for the soliton generation, but we show that its impact can be managed by a proper choice of the amplitude of the voltage excitation of the system.

1 Introduction

La transmission d'énergie dans un milieu non linéaire soumis à une excitation dont la fréquence appartient à une bande interdite est un phénomène connu sous le terme de supratransmission non linéaire [1]. Il a été montré que ce phénomène universel peut exister dans un grand nombre de systèmes physiques comme les réseaux de jonctions Josephson couplées [2,3] la génération de solitons de Bragg ou la génération de *breathers* dans les lignes électriques non linéaires [4]. Ce concept, qui a été étudié initialement sur des systèmes uni-dimensionnels, a ensuite été appliqué aux systèmes bi-dimensionnels [5,6]. D'autres moyens permettant de déclencher la supratransmission ont également été proposés, en complément de l'excitation initiale périodique en entrée du milieu considéré [7–10].

Les premiers travaux consacrés à la supratransmission ont considéré des systèmes de type passe-bande [1]. Il y était montré que, lorsque le système est soumis à une excitation dont la fréquence appartient à la bande interdite inférieure, la transmission d'énergie par supratransmission se fait sous la forme de solitons de *gap*. Dans le cas des systèmes non linéaires discrets, il a ensuite été prouvé que la supratransmission pouvait également avoir lieu pour des fréquences supérieures à la fréquence de coupure haute, soit dans la bande interdite supérieure du système considéré [4, 11]. Plus particulièrement, dans l'étude présentée dans la référence [4], les auteurs ont étudié la problématique de la supratransmission et de la bistabilité au-dessus de la fréquence de coupure f_c d'une ligne de transmission non linéaire courte, constituée de 18 cellules et soumise à un signal périodique de fréquence supérieure à f_c . Ils ont expérimentalement établi l'existence d'une tension de seuil de supratransmission permettant la génération de modes non linéaires localisés dans la ligne, supratransmission associée à l'existence d'une bistabilité du système. Numériquement, en considérant une longue ligne constituée cette fois de 2 000 cellules, les auteurs ont mis en évidence la possibilité de créer et faire propager des solitons de *cut-off* dans la ligne, en la soumettant à une excitation de fréquence supérieure à f_c au-dessus d'un certain seuil de tension.

Dans cette communication, nous présentons une démonstration expérimentale de création de solitons de *cut-off* par supratransmission dans une ligne non linéaire discrète LC, comme prédit dans [4]. Nous montrons que l'instabilité modulationnelle [12] peut effectivement se développer dans la ligne, malgré la dissipation, mais que celle-ci peut affecter la création des solitons de *cut-off*.

2 Caractéristiques de la ligne et seuil de supra-transmission

Nous étudions une ligne de transmission expérimentale discrète constituée de $N = 200$ cellules élémentaires comportant chacune une self-inductance L , une capacité non linéaire $C(V)$, et une résistance r pour tenir compte de la dissipation introduite par la self-inductance, comme représenté Fig. 1 :

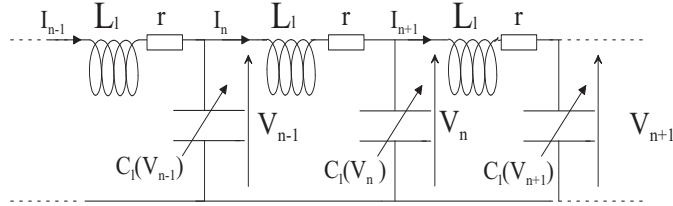


Figure 1. Représentation de la ligne électrique expérimentale.

La capacité non linéaire, réalisée à partir d'une diode VARICAP BB112, obéit à la relation suivante [13]

$$C(\bar{V} + V_n) = C \times [1 - 2\alpha V_n + 3\beta V_n^2], \quad (1)$$

dans laquelle \bar{V} représente la tension continue de polarisation, qui est choisie telle que $\bar{V} = 2 \text{ V}$. Ainsi, avec $|V_n| \leq 2 \text{ V}$, nous avons les paramètres suivants :

$$C = 320 \text{ pF}, \quad L = 220 \text{ }\mu\text{H}, \quad \alpha = 0,21 \text{ V}^{-1}, \quad \beta = 0,0197 \text{ V}^{-2}. \quad (2)$$

En appliquant les lois de Kirchoff, nous obtenons le système d'équations régissant la propagation de la tension dans la ligne, pour $n = 1, 2, \dots, N$:

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{d}{dt} \right\} (V_n - \alpha V_n^2 + \beta V_n^3) = \frac{1}{LC} (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n). \quad (3)$$

Il est aisé de déduire la relation de dispersion linéaire de la ligne en considérant une solution de type onde plane $V_n(t) = V_0 \exp[i(kn - 2\pi ft)]$, ce qui conduit à

$$f = f_c \sin(k/2), \quad f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad (4)$$

où f_c représente la fréquence de coupure haute de la ligne électrique, présentant un caractère de type passe-bas. Il a été montré [4] que ce type de ligne non linéaire peut présenter le phénomène de supra-transmission dès lors que, forcée à l'entrée par un signal $V_0(t) = \tilde{V}_0 \cos(\omega t)$ dont la fréquence f est supérieure à la fréquence de coupure f_c , l'amplitude \tilde{V}_0 dépasse une tension de seuil V_{th} donnée par :

$$V_{\text{th}} = 4\sqrt{\frac{\omega - \omega_c}{\omega_c(2\alpha^2 - 3\beta)}}. \quad (5)$$

3 Etude expérimentale

Afin de pouvoir observer la génération de solitons de *cut-off*, nous avons réalisé une ligne électrique comportant 200 cellules. Ainsi, la ligne est suffisamment longue pour amortir les ondes réfléchies et éviter la formation d'ondes stationnaires. À ce stade, il convient de préciser qu'une étude théorique de notre modèle a permis de montrer que la génération des solitons de *cut-off* est directement liée à l'instabilité modulationnelle, et ce, en prenant en compte l'influence de la dissipation [14]. Par ailleurs, la ligne étudiée peut présenter des différences notables entre le modèle théorique et sa réalisation expérimentale. Plus précisément, dans le modèle théorique, les valeurs des composants sont identiques pour toutes les cellules, alors que d'un point de vue pratique, ces valeurs peuvent fluctuer autour de leur valeur supposée. Une fluctuation de l'ordre de 10 % de la valeur des différents composants utilisés en pratique, va induire une fluctuation de la valeur de la fréquence de coupure entre 1,14 MHz et 1,26 MHz, pour une valeur théorique $f_c = 1,197$ MHz $\simeq 1,2$ MHz. Celà étant, dans le cadre de notre étude expérimentale, nous avons supposé que la valeur de la fréquence théorique est égale à $f_c = 1,2$ MHz et nous avons étudié les fréquences d'excitation dans la gamme allant de 1,2 MHz à 1,36 MHz.

3.1 Seuil expérimental de supratransmission

Avant de s'intéresser à la génération de solitons, il convient de vérifier que notre ligne présente effectivement le phénomène de supratransmission d'un point de vue expérimental. Pour un signal d'excitation à l'entrée de la ligne de fréquence 1,2 MHz et d'amplitude $A = 4,94$ V, l'énergie ne se propage pas dans la ligne et nous obtenons un profil évanescant. En effet, l'amplitude de la tension diminue extrêmement rapidement pour atteindre quelques millivolts dès la cinquième cellule. Par contre, dès que cette amplitude est dépassée, la ligne devient subitement passante en terme d'énergie, ce qui se traduit par une valeur de tension relativement élevée pour toutes les cellules, même si celle-ci décroît avec la distance. C'est ce qui est illustré sur les sous-figures (a-d) de la figure 2 dans lesquelles sont présentées les tensions mesurées respectivement sur les cellules 2, 10, 20 et 150, pour une amplitude de forçage de 5 V.

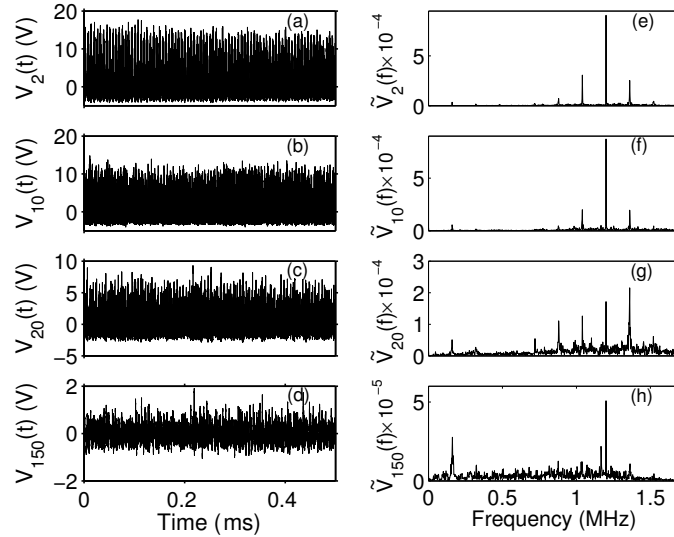


Figure 2. Tensions expérimentales mesurées sur les cellules 2, 10, 20 et 150 (a-d) et spectres correspondants obtenus par FFT (e-h). Paramètres de l'excitation : $f = 1,2$ MHz et $A = 5$ V.

L'étude expérimentale du seuil de supratransmission en fonction de la fréquence a ensuite été réalisée, confirmant les études préalables indiquant que la valeur du seuil d'amplitude est d'autant plus élevée que la fréquence est éloignée de la fréquence de coupure, comme le montre la figure 3.

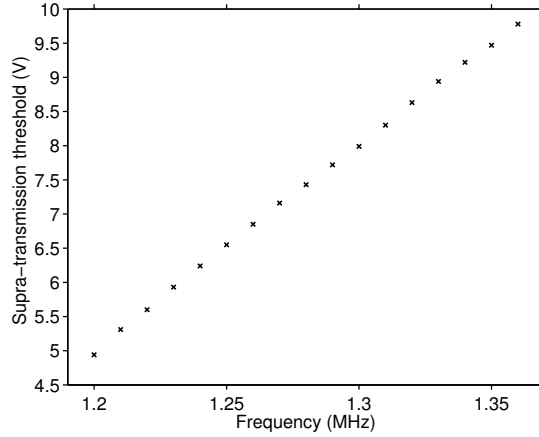
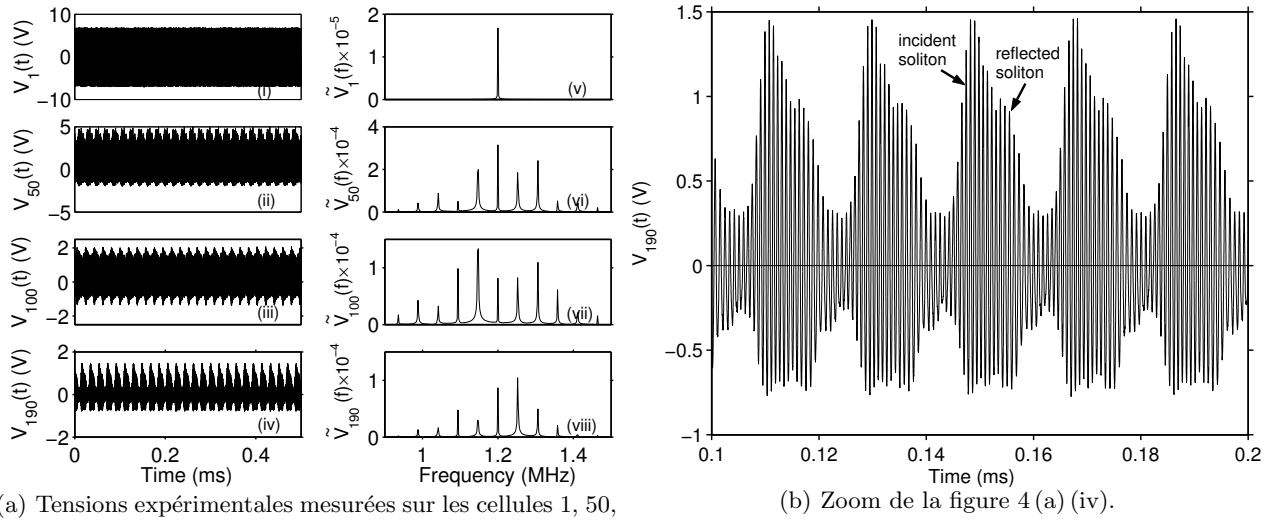


Figure 3. Seuil expérimental de supratransmission pour des fréquences d'excitation variant de 1,2 MHz à 1,36 MHz.

3.2 Observation des solitons de *cut-off*

Lorsque la ligne est attaquée par un signal dont l'amplitude est juste supérieure à l'amplitude de seuil de supratransmission, le phénomène d'instabilité modulationnelle a bien lieu, comme le montrent les spectres des figures 3 (e), 3 (f) et 3 (g), mais ce phénomène ne conduit pas à la formation d'un train de solitons. Nous attribuons cette « non génération » de solitons à la dissipation qui semble pénaliser leur apparition, pour les valeurs d'amplitude considérées. Par contre, si, pour une fréquence d'excitation au-dessus de la fréquence de coupure, on choisit une amplitude bien supérieure à l'amplitude de seuil, il est possible d'obtenir un certain nombre de régimes plus ou moins « cohérents » en terme de forme de signal, régimes parmi lesquels nous avons pu identifier celui correspondant à la génération d'un train de solitons de *cut-off*, ainsi que le montre la figure 4. Comme on peut le voir sur les sous-figures de la figure 4 (a), la modulation de l'onde plane initialement générée par supratransmission, se développe jusqu'à la formation de pulses visibles sur la sous-figure 4 (a) (iv).

En regardant attentivement la sous-figure 4 (a) (iv), on devine la présence non pas d'un, mais de deux trains de solitons contrapropagatifs, du fait de l'extrémité de la ligne en sortie ouverte, provoquant ainsi la réflexion des ondes. Ces deux trains de solitons peuvent s'observer plus clairement sur la sous-figure 4 (b) qui est un zoom de la sous-figure 4 (a) (iv). Cette observation expérimentale a par ailleurs été confirmée par des simulations numériques (non présentées ici) sur une ligne faiblement dissipative de 200 cellules avec sortie ouverte. Notons que cette génération de trains de solitons a également pu être observée expérimentalement pour des fréquences plus éloignées de la fréquence de coupure f_c , par exemple 1,3 MHz, et ce, dans la limite des tensions délivrables par le générateur de tension utilisé. Enfin, il est important de relever le fait que les signaux observés expérimentalement, ainsi que leurs spectres, sont tout à fait similaires à ceux obtenus par simulations numériques, que ce soit dans le cas où la supratransmission donne lieu à des solitons de *cut-off* ou dans celui pour lequel l'amplitude est suffisante pour provoquer la supratransmission, mais insuffisante pour la génération de solitons.



(a) Tensions expérimentales mesurées sur les cellules 1, 50, 90 et 190 (i–iv) et spectres correspondants obtenus par FFT (v–viii). Paramètres de l’excitation : $f = 1,2$ MHz et $A = 7$ V.

(b) Zoom de la figure 4 (a) (iv).

Figure 4. Génération et propagation de trains de solitons et spectres correspondants.

4 Conclusion

Dans cette communication, nous avons présenté la génération et la propagation de solitons de *cut-off* dans une ligne électrique non linéaire de 200 cellules attaquée par un signal de fréquence supérieure à sa fréquence de coupure. Nous avons pu mettre en évidence l’apparition d’instabilité modulationnelle par supratransmission, condition nécessaire à l’existence de solitons de *cut-off*. Une mesure du seuil expérimental de supratransmission a pu être réalisée en fonction de la valeur de la fréquence d’excitation au-dessus de la fréquence de coupure f_c . Enfin, il nous a été possible de générer des solitons de *cut-off* en augmentant l’amplitude de l’excitation initiale, l’instabilité modulationnelle se développant alors jusqu’à la formation d’un train d’impulsions localisées.

Références

1. F. GENIET & J. LEON, Energy Transmission in the forbidden band gap of a nonlinear chain, *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 134102 (2002).
2. D. CHEVRIAUX, R. KHOMERIKI & J. LEON, Theory of a Josephson junction parallel array detector sensitive to very weak signals, *Phys. Rev. B*, **73**, 214516 (2006).
3. B. BODO, S. MORFU, P. MARQUIÉ & M. ROSSÉ, A Klein-Gordon electronic network exhibiting the supra-transmission effect, *Electron. Lett.*, **46**, 123–124 (2010).
4. K. TSE VE KOON, J. LEON, P. MARQUIÉ & P. TCHOFO-DINDA, Cut-off solitons and bistability of the discrete LC electrical line, theory and experiments, *Phys. Rev. E*, **75**, 066604 (2007).
5. J. E. MACÍAS-DÍAZ, Numerical study of the transmission of energy in discrete arrays of sine-Gordon equations in two space dimensions, *Phys. Rev. E*, **77**, 016602 (2008).
6. J. E. MACÍAS-DÍAZ, Bistability of a two-dimensional Klein-Gordon system as a reliable means to transmit monochromatic waves: A numerical approach, *Phys. Rev. E*, **78**, 056603 (2008).
7. B. BODO, S. MORFU, P. MARQUIÉ & B. Z. ESSIMBI, Noise induced breather generation in a sine-Gordon chain, *J. Stat. Mech.*, **2009**, PO1026 (2009).

8. G. YU, X. WANG & Z. TAO, Resonant emission of solitons from impurity-induced localized waves in nonlinear lattices, *Phys. Rev. E*, **83**, 026605 (2011).
9. A. B. TOGUEU MOTCHEYO, C. TCHAWOUA & J. D. TCHINANG, Supratransmission induced by waves collisions in a discrete electrical lattice, *Phys. Rev. E*, **88**, 040901 (2013).
10. S. B. YAMGOUÉ, S. MORFU & P. MARQUIÉ, Noise effects on gap wave propagation in a nonlinear discrete LC transmission line, *Phys. Rev. E*, **75**, 036211 (2007).
11. R. KHOMERIKI, S. LEPRI & S. RUFFO, Nonlinear supratransmission and bistability in the Fermi-Pasta-Ulam model, *Phys. Rev. E*, **70**, 066626 (2004).
12. T. B. BENJAMIN & J. E. FEIR, The disintegration of wave trains on deep water, *J. Fluid Mech.*, **27**, 417–430 (1967).
13. P. MARQUIÉ, J. M. BILBAULT & M. REMOISSENET, Generation of envelope and hole solitons in an experimental transmission line, *Phys. Rev. E*, **49**, 828–835 (1994).
14. K. TSE VE KOON, P. MARQUIÉ & P. TCHOFO-DINDA, Experimental observation of the generation of cutoff solitons in a discrete LC nonlinear electrical line, *Phys. Rev. E*, **90**, 052901 (2014).

La résonance cohérente : amélioration de la régularité de la réponse d'un système non linéaire par le bruit

Savério Morfu, Patrick Marquié & Gaétan Lassere

Université de Bourgogne, Laboratoire LE2I, UMR 6306, Aile des sciences de l'ingénieur, BP 47870, 21078 Dijon Cedex, France
 smorfu@u-bourgogne.fr

Résumé. Cette communication est consacrée à l'étude expérimentale du comportement d'un circuit électronique non linéaire du type FitzHugh-Nagumo soumis exclusivement à du bruit. En l'absence de bruit, le circuit est paramétré en mode excitable près de la bifurcation d'Andronov-Hopf. Cette dernière se manifeste par un changement du fonctionnement du circuit qui devient oscillant. Nous montrons que le circuit peut utiliser le bruit pour déclencher des ondes du type potentiels d'action. Ce déclenchement atteint une régularité qui peut être maximisée pour une quantité appropriée de bruit via le phénomène de Résonance Cohérente.

Abstract. Coherence Resonance in a nonlinear circuit ruled by the set of FitzHugh-Nagumo set of equations is investigated. The circuit is tuned in the excitable mode but near the Andronov-Hopf bifurcation which defines the transition between the excitable and the oscillatory behaviours. In the exclusive presence of noise, that is without other drivings, the circuit can respond with a regularity which can be optimized by tuning the noise intensity.

1 Introduction

Ces dernières années, de nombreux travaux ont porté sur la prise en compte des effets du bruit sur la réponse des systèmes non linéaires [1–3]. Cet intérêt est dû au fait que certains phénomènes observés dans la nature ne peuvent pas s'expliquer sans inclure la contribution de fluctuations aléatoires. Les systèmes neuronaux sont un exemple où la nature peut tirer profit du bruit via différents effets non linéaires [4–6]. Par exemple, le bruit peut améliorer la détection de signaux subliminaux dans les systèmes neuronaux via le phénomène de Résonance Stochastique [1]. Par ailleurs, dans les réseaux de neurones, sous certaines conditions, le bruit peut soutenir la propagation d'information [7]. Plus récemment, certains mécanismes de perception auditive ont pu être expliqués par le phénomène de *Ghost Stochastic Resonance* où le bruit permet d'induire une réponse à une fréquence absente du stimuli excitant le système [8, 9].

Par ailleurs, l'influence du bruit sur la réponse des systèmes dynamiques non linéaires a permis de rendre compte de l'activité des neurones en l'absence de tout autre stimuli. Cet effet, appelé *résonance cohérente* (RC) [2, 10–13] apparaît généralement quand les paramètres du système sont ajustés près de la bifurcation d'Andronov-Hopf [10]. Sans bruit, le portrait de phase du système ne montre pas de cycle périodique, le système demeurant à l'état de repos. De ce fait, ajouter du bruit peut induire un cycle aléatoire. Selon l'intensité du bruit, ce cycle peut être plus ou moins régulier. Par conséquent, il existe une valeur optimum de bruit qui améliore la régularité de la réponse du système. Dans cette communication, en utilisant un circuit régi par les équations de FitzHugh-Nagumo [13], on se propose de montrer expérimentalement cet effet de Résonance Cohérente. Dans un premier temps, en l'absence de bruit, le paramétrage du circuit en mode excitable est détaillé. Par la suite, nous analysons comment le circuit répond en présence de bruit. Nous introduisons pour cela différentes mesures du degré de régularité de la réponse du système.

2 Paramétrage du circuit électronique

Nous considérons le circuit de la figure 1 qui comprend 4 branches en parallèle. Ce circuit inclut une résistance non linéaire R_{NL} parcourue par le courant non linéaire $I_{NL}(V)$, un condensateur de capacité

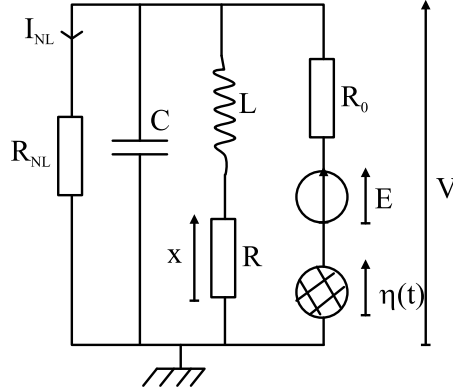


Figure 1. Schéma synoptique du circuit étudié et dont les tensions V et x sont solutions du système d'équations (1). R_{NL} est une résistance parcourue par le courant non linéaire $I_{NL}(V)$ défini par la relation (5) avec $a = 203$ V et $b = -2,53$ V. E est une tension continue et $\eta(t)$ est un bruit blanc gaussien. Les valeurs des composants sont : $R_0 = 1,33$ k Ω , $L = 10$ mH, $C = 22$ nF, $R = 320$ Ω .

C , une self inductance L , une source de tension continue E , un générateur de bruit $\eta(t)$ et des résistances R_0 et R [13]. Si l'on exprime le courant dans chaque branche du circuit, on obtient très rapidement le système d'équations suivants [13] :

$$\begin{aligned} C \frac{dV}{dt_{\text{exp}}} &= -I_{NL}(V) - \frac{x}{R} + \frac{E + \eta(t) - V}{R_0}, \\ \frac{L}{R} \frac{dx}{dt_{\text{exp}}} &= V - x, \end{aligned} \quad (1)$$

où t_{exp} représente le temps. À l'aide du changement de variables

$$W = \frac{R_0 x}{R}, \quad t = \frac{t_{\text{exp}}}{R_0 C}, \quad (2)$$

et en introduisant les paramètres γ et ϵ définis par

$$\gamma = \frac{R}{R_0}, \quad \epsilon = \frac{R_0^2 C}{L}, \quad (3)$$

le système d'équations (1) peut se mettre sous la forme normalisée

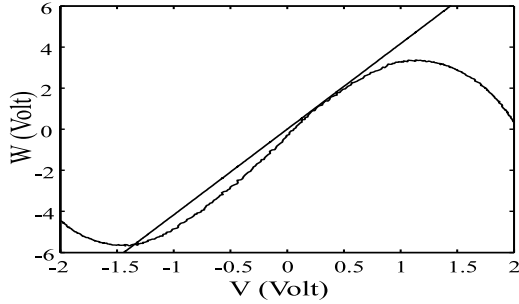
$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= [-R_0 I_{NL}(V) - V] - W + E + \eta(t), \\ \frac{dW}{dt} &= \epsilon(V - \gamma W). \end{aligned} \quad (4)$$

Par ailleurs, la résistance non linéaire qui a été utilisée est détaillée dans la référence [13]. Elle inclut des multiplieurs analogiques et sa caractéristique courant-tension obéit à

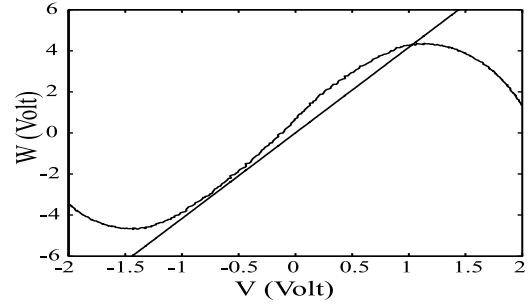
$$I_{NL}(V) = \frac{V(V-a)(V-b) - V}{R_0}. \quad (5)$$

En reportant cette expression dans le système (4), on obtient le système de FitzHugh-Nagumo normalisé

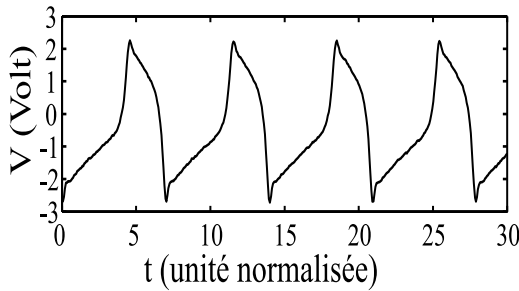
$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -V(V-a)(V-b) - W + E + \eta(t), \\ \frac{dW}{dt} &= \epsilon(V - \gamma W). \end{aligned} \quad (6)$$



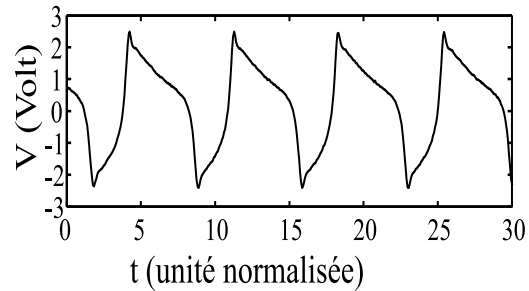
(a) Tracé des nullclines d'équations (7) pour $E = E_{\text{inf}} = -0,33V$.



(b) Tracé des nullclines d'équations (7) pour $E = E_{\text{sup}} = 0,65V$.



(c) Chronogramme de la tension V quand le système est en mode oscillant avec $E = E_{\text{inf}} = -0,33 V$.



(d) Chronogramme de la tension V quand le système est en mode oscillant avec $E = E_{\text{sup}} = 0,65 V$.

Figure 2. Comportement oscillant du circuit obtenu pour les 2 valeurs critiques de E induisant la bifurcation d'Andronov-Hopf.

Tous les résultats seront présentés en unité de temps normalisée (via le changement de variables (2)). En l'absence de bruit, c'est-à-dire quand $\eta(t) = 0$, le comportement du système (6) peut s'interpréter assez facilement à l'aide de ses nullclines. En effet, en annulant les dérivées du système (6), nous obtenons les équations des nullclines

$$W = -V(V - a)(V - b) + E \quad \text{et} \quad W = \frac{V}{\gamma}. \quad (7)$$

La première équation définit la V -nullcline qui correspond à une fonction cubique translatée verticalement par la tension continue E . La seconde équation, qui correspond à une droite, constitue la W -nullcline. Le système est en mode oscillant lorsque la tension continue E fait en sorte que la W -nullcline intercepte la V -nullcline cubique entre ses deux extrema [10].

Les figures 2(a) et 2(b) correspondent aux deux valeurs limites E_{inf} et E_{sup} de E pour lesquelles l'intersection des nullclines est localisée entre les 2 extrema de la nullcline cubique. Le circuit est alors en mode oscillant si la tension continue E est dans l'intervalle $[E_{\text{inf}}, E_{\text{sup}}]$. Les valeurs critiques E_{inf} et E_{sup} sont des valeurs de la tension E qui provoquent la bifurcation d'Andronov-Hopf, c'est-à-dire le changement de fonctionnement du circuit qui passe du mode excitable au mode oscillant et vice-versa. À titre indicatif, dans le cas de ces deux valeurs extrêmes $E_{\text{inf}} = -0,33 V$ et $E_{\text{sup}} = 0,65 V$, les oscillations de la tension V sont représentées aux figures 2(c) et 2(d).

3 Prise en compte du bruit

Nous choisissons un niveau de tension continue E de $-0,35$ V, c'est-à-dire en dessous de la première valeur critique $E_{\text{inf}} = -0,33$ V provoquant la bifurcation d'Andronov-Hopf. En l'absence de bruit, le circuit est ainsi polarisé en mode excitable et ne déclenche pas d'onde de tension V de type potentiels d'action.

Dans cette partie, nous nous proposons d'analyser le comportement du circuit en fonction de la valeur efficace σ du bruit blanc gaussien $\eta(t)$. Les chronogrammes de la tension V obtenus pour trois valeurs efficaces de bruit différentes sont présentés aux figures 3 (a), 3 (c) et 3 (e). Pour la plus faible valeur efficace de bruit, soit $\sigma = 0,05 V_{\text{RMS}}$, comme le montre la figure 3 (a), la réponse du système est plutôt irrégulière puisque très peu de potentiel d'action sont produits. Pour la valeur la plus importante de bruit

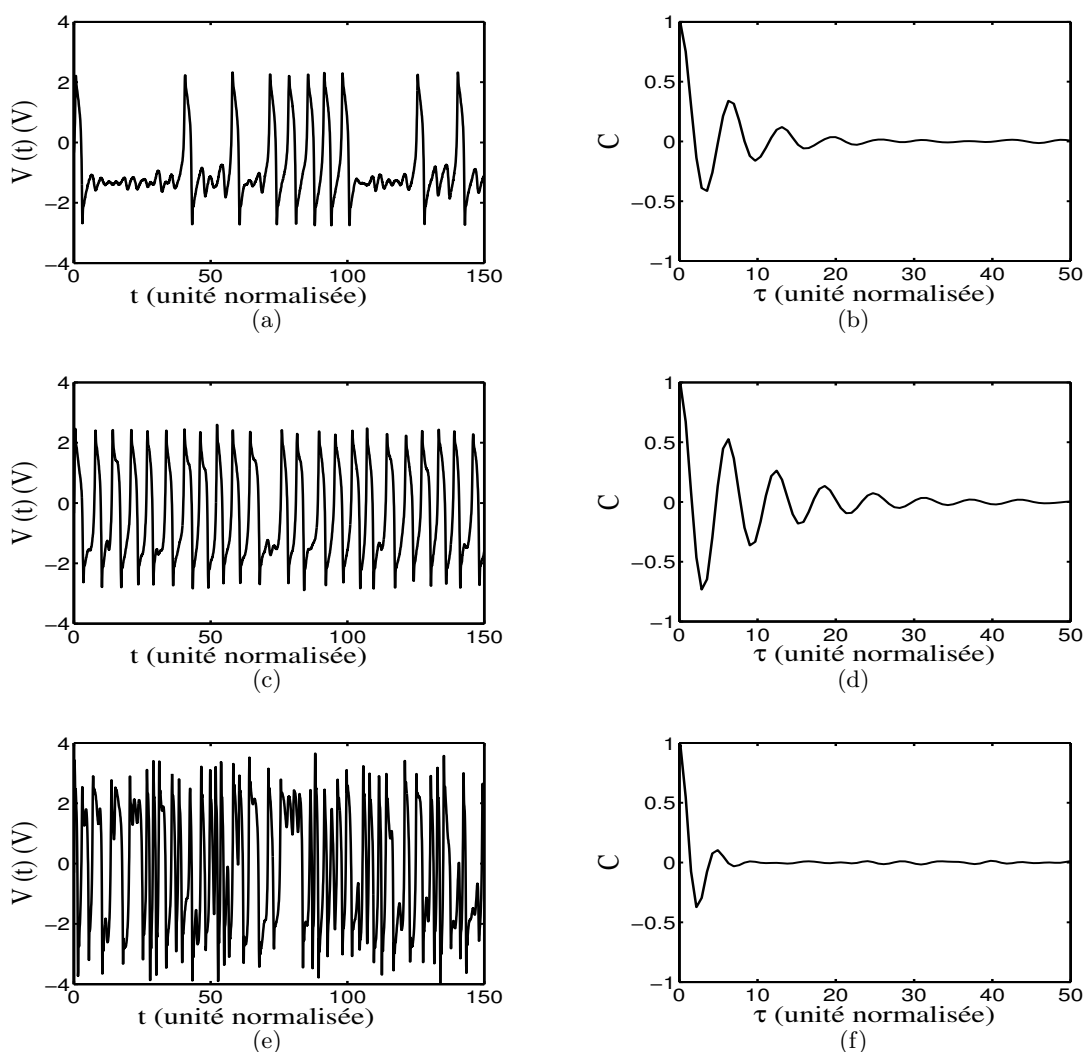
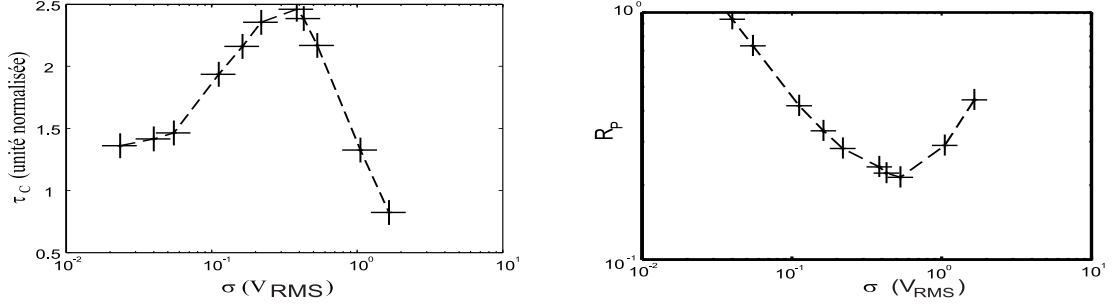


Figure 3. Mise en évidence expérimentale de la résonance cohérente. Paramètres du dispositif expérimental : $a = 2,03$, $b = -2,53$, $\gamma = 0,24$, $\epsilon = 3,89$, $E = -0,35$ V, $R_0 = 1,33$ k Ω , $R = 320$ Ω , $C = 22$ nF, $L = 10$ mH. À gauche sont représentés les chronogrammes de la tension V tandis que les autocorrélations correspondantes sont tracées à droite pour les valeurs efficaces de bruit suivantes : (a) et (b) $\sigma = 0,05 V_{\text{RMS}}$, (c) et (d) $\sigma = 0,38 V_{\text{RMS}}$, (e) et (f) $\sigma = 1,65 V_{\text{RMS}}$.



(a) Évolution du temps de corrélation τ_c de la tension V en fonction de la valeur efficace du bruit σ .

(b) Évolution du temps du coefficient de variation R_p de la tension V en fonction de la valeur efficace du bruit σ .

Figure 4. Quantification de la régularité de la réponse du système en fonction de l'amplitude efficace σ du bruit. Paramètres du dispositif expérimental : $a = 2,03$, $b = -2,53$, $E = -035$ V, $R_0 = 1,33$ k Ω , $R = 320\Omega$, $C = 22$ nF, $L = 10$ mH.

considérée, le chronogramme de la figure 3 (e) montre que, même si beaucoup plus de potentiels d'action sont déclenchés par le bruit, la régularité de la réponse du système n'est pas la meilleure. Cependant, comme le montre la figure 3 (c), c'est pour la valeur intermédiaire de bruit $\sigma = 0,38 V_{\text{RMS}}$ que le système se met à répondre avec la meilleure régularité.

Pour caractériser la régularité de la réponse du système, il est tout naturel de considérer l'auto-corrélation normalisée définie par :

$$C(\tau) = \frac{\langle \tilde{V}(t)\tilde{V}(t+\tau) \rangle}{\langle \tilde{V}(t)^2 \rangle}, \quad (8)$$

où $\tilde{V}(t) = V(t) - \langle V(t) \rangle$ correspond à la tension V sans sa composante continue. Des trois autocorrélations présentées aux figures 3 (b), 3 (d) et 3 (f), c'est celle obtenue à la figure 3 (d) qui correspond au processus le plus régulier, c'est-à-dire à la valeur intermédiaire de bruit $\sigma = 0,38 V_{\text{RMS}}$.

À partir de l'autocorrélation (8), nous pouvons mesurer la régularité de la réponse du système en définissant le temps de corrélation suivant [10] :

$$\tau_C = \int_0^\infty C^2(t) dt. \quad (9)$$

L'évolution du temps de corrélation en fonction de la valeur efficace de bruit σ est tracée à la Figure 4 (a) et montre un comportement du type résonant. En effet, la valeur efficace de bruit $\sigma = 0,38 V_{\text{RMS}}$ permet de maximiser le temps de corrélation et donc d'optimiser la régularité de la réponse du circuit. Le temps de corrélation révèle donc bien l'existence du phénomène de résonance cohérente. Afin de montrer cet effet, nous avons voulu utiliser une deuxième mesure. Pour cela, il suffit de remarquer que, dans le domaine des neurosciences, il est assez courant de prendre en compte l'intervalle de temps entre deux potentiels d'action consécutifs. En effet, les neurones encodent l'information en produisant des séquences de potentiels d'action plus ou moins espacées les uns des autres. Du fait du bruit, cet espacement t_p séparant deux potentiels d'action consécutifs est une variable aléatoire de moyenne $\langle t_p \rangle$ et d'écart-type $\sqrt{\text{var}(t_p)}$.

Pour caractériser la manière dont sont déclenchés les potentiels d'action, il est possible d'introduire le coefficient de variation [2] :

$$R_p = \frac{\sqrt{\text{var}(t_p)}}{\langle t_p \rangle}. \quad (10)$$

En remarquant qu'un coefficient de variation nul correspond à un déclenchement périodique de potentiels d'action, une bonne cohérence de la réponse du système se traduira par une faible valeur de R_p et vice-versa. Précisons qu'afin de déterminer les instants correspondant au déclenchement d'un potentiel d'action, nous avons considéré par convention qu'un potentiel d'action est produit quand la tension V excède la valeur seuil $V_0 = 0,8$ V.

En prenant cette définition pour les instants de déclenchement, le coefficient de variation a pu être tracé en fonction de la valeur efficace de bruit σ sur la figure 4 (b), La courbe obtenue atteint un minimum pour la valeur de bruit $\sigma = 0,38 V_{\text{RMS}}$. Ainsi, le système a su utiliser le bruit pour produire la réponse la plus régulière, ce qui est caractéristique du phénomène de résonance cohérente.

4 Conclusion

Dans cette communication, un circuit non linéaire obéissant au système d'équations de FitzHugh-Nagumo sert de support d'investigation expérimentale pour étudier le phénomène de résonance cohérente. Cet effet se manifeste en présence exclusive de bruit et se traduit par l'existence d'une valeur optimale de bruit pour laquelle la réponse du système est la plus régulière. Deux mesures ont été utilisées pour mener à bien notre étude expérimentale. La première s'appuie sur l'autocorrélation de la réponse du système et consiste à calculer un temps de corrélation qui quantifie directement la régularité du système. La seconde mesure analyse comment se répartit statistiquement l'intervalle de temps séparant le déclenchement de deux potentiels d'action consécutifs. Nous avons montré que le bruit pouvait réduire cette dispersion statistique montrant ainsi l'effet de résonance cohérente.

Références

1. L. GAMMAITONI, P. HÄNGGI, P. JUNG & F. MARCHESONI, Stochastic Resonance, *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 223–282 (1998).
2. B. LINDNER, J. GARCIA-OJALVO, A. NEIMAN & L. SCHIMANSKY-GEIER, Effect of noise in excitable systems, *Phys. Rep.*, **392**, 321–424 (2004).
3. F. SAGUÈS, J. M. SANCHO & J. GARCIA-OJALVO, Spatiotemporal order out of noise, *Rev. Mod. Phys.*, **79**, 829–882 (2007).
4. G. SCHMID, I. GOYCHUK, P. HÄNGGI, Channel noise and synchronization in excitable membrane, *Physica A*, **325**, 165–175 (2003).
5. J. A. WHITE, J. T. RUBINSTEIN & A. R. KAY, Channel Noise in neurons, *Trends Neurosci.*, **23**, 131–137 (2000).
6. G. SCHMID, I. GOYCHUK & P. HÄNGGI, Effect of channel block on the spiking activity of excitable membranes in a stochastic Hodgkin-Huxley model, *Phys. Biol.*, **1**, 61–66 (2004).
7. A. OCHAB-MARCINEK, G. SCHMID, I. GOYCHUK & P. HÄNGGI, Noise-assisted spike propagation in myelinated neurons, *Phys. Rev. E*, **79**, 011904 (2009).
8. D. R. CHIALVO, O. CALVO, D. L. GONZALEZ, O. PIRO & G. V. SAVINO, Subharmonic stochastic synchronization and resonance in neuronal systems, *Phys. Rev. E*, **65**, 050902 (2002).
9. M. BORDET, S. MORFU & P. MARQUIÉ, Ghost stochastic resonance in FitzHugh-Nagumo circuit, *Electron. Lett.*, **50**, 861–862 (2014).
10. S. PIKOVSKY & J. KURTHS, Coherence resonance in a noise-driven excitable system, *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 775–778 (1997).
11. G. SCHMID & P. HÄNGGI, Intrinsic coherence resonance in excitable membrane patches, *Mathematical Biosciences*, **207**, 235–245 (2007).
12. D. PAYDARFAR & D. M. BUERKEL, Dysrhythmias of the respiratory oscillator, *Chaos*, **5**, 18–29 (1995).
13. G. LASSERE, S. MORFU & P. MARQUIÉ, Coherence resonance in a Bonhoeffer Van der Pol circuit, *Electron. Lett.*, **45**, 669–670 (2009).

Comment naissent les vagues sous l'effet du vent ?

Anna Paquier, Frédéric Moisy & Marc Rabaud

Laboratoire FAST, Université Paris-Sud, CNRS - Bât. 502, Rue du Belvédère - Campus Universitaire d'Orsay - 91405 Orsay Cedex, France
paquier@fast.u-psud.fr

Résumé. Afin d'étudier les mécanismes clés de la formation des premières vagues par le vent, nous avons monté une expérience nouvelle utilisant un fluide visqueux et un système de visualisation permettant de mesurer avec une précision micrométrique les déformations de sa surface. Les résultats de cette expérience mettent en évidence l'existence de deux régimes de génération de vagues à l'interface liquide-air. Le premier régime, de très faible amplitude, correspond à la réponse de l'interface aux fluctuations de pression présentes dans l'air ; le second régime, d'amplitude beaucoup plus forte, correspond à la croissance d'un système de vagues de longueur d'onde bien définie.

Abstract. In order to study the key mechanisms of the generation of the first waves by wind, we have built a new experiment using a viscous fluid and a visualisation method that measures the surface deformation with a micrometric accuracy. The results of this experiment show the existence of two regimes of deformation of the liquid-air interface. The first regime, of very small amplitude, corresponds to the response of the interface to the pressure fluctuations in the airflow; the second regime, of much higher amplitude, corresponds to the growth of waves with a well-defined wavelength.

1 Introduction

La question de la formation des vagues sous l'action du vent, bien qu'apparemment simple, a suscité un grand nombre de travaux théoriques, expérimentaux et numériques. En dépit de ces nombreuses études, les détails des mécanismes de génération et de croissance des vagues induites par un écoulement d'air restent encore mal compris et les modèles existants, les plus classiques étant ceux de Kelvin-Helmholtz, de Phillips et de Miles, fournissent des prédictions parfois contradictoires et souvent assez éloignées de la réalité.

Kelvin et Helmholtz sont les premiers à proposer une explication pour la formation des vagues [1]. Si leurs noms restent attachés à une des instabilités les plus connues de la mécanique des fluides, les prédictions de leur modèle s'écartent fortement des observations expérimentales. En 1957, Phillips propose un modèle basé sur les effets des fluctuations de pression dans la couche limite d'un écoulement d'air turbulent sur un liquide initialement au repos [2]. Il en déduit une croissance temporelle linéaire du carré de l'amplitude des vagues. La même année, Miles propose un autre mécanisme à partir de l'analyse de la stabilité du profil moyen dans l'air [3]. Il prédit lui une croissance exponentielle de la taille des vagues en fonction du temps. De nombreuses tentatives ont été faites depuis pour tester ces prédictions, sans toutefois aboutir à des réponses claires.

Alors même que Kelvin attribuait les mauvaises prédictions de son modèle aux effets visqueux, le modèle de Phillips comme celui de Miles ne prennent pas en compte la viscosité. Afin d'étudier l'origine de la formation des premières vagues par le vent, nous avons monté une expérience nouvelle utilisant un fluide visqueux plutôt que de l'eau. Nous pensons que cette particularité peut simplifier l'expérience et faciliter l'identification des mécanismes clés de la formation des vagues.

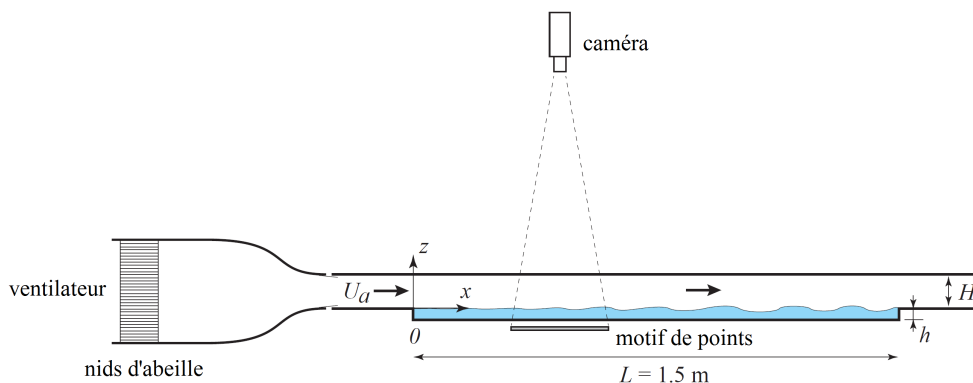


Figure 1. Schéma du montage expérimental.

2 Montage expérimental

Le montage expérimental est constitué d'une cuve en Plexiglas de longueur $L = 1,5$ m, de largeur $l = 296$ mm et de profondeur $h = 35$ mm (ce qui est suffisant pour être dans l'approximation des grandes profondeurs pour les ondes observées). Cette cuve est surmontée par un canal de même largeur et de hauteur $H = 105$ mm, complété par deux zones planes de 26 cm en amont et aval de la cuve (Fig. 1). La cuve contient un mélange de 80 % de glycérol et de 20 % d'eau, de densité $\rho = 1,2$ kg \cdot m $^{-3}$, de tension de surface $\gamma = 60 \pm 5$ mN \cdot m $^{-1}$ et de viscosité cinématique $\nu = 3,0 \times 10^{-5}$ m 2 \cdot s $^{-1}$, soit 30 fois la viscosité de l'eau. Le niveau du liquide coïncide exactement avec la surface inférieure du canal. L'air est injecté dans le canal par une soufflerie permettant d'ajuster la vitesse moyenne de l'écoulement U_a entre 1 et 10 m \cdot s $^{-1}$.

La mesure de la topographie de la surface est réalisée par la méthode optique Free Surface-Synthetic Schlieren (FS-SS) [4]. Pour cela, un motif aléatoire de points est disposé sous la cuve et une caméra rapide le filme à travers le liquide sur un champ de visualisation de 39 cm \times 28 cm. Le déplacement apparent des points entre l'image de référence (quand le liquide est au repos) et l'image déformée (quand l'interface est perturbée) est calculé par corrélation d'image. L'intégration de ce champ de déplacement donne le champ de hauteur du liquide $\zeta(x, y, t)$. La topographie de l'interface est entièrement reconstruite avec une résolution temporelle suffisante pour pouvoir suivre le déplacement des perturbations de la surface du liquide. Cette méthode non intrusive permet ainsi de mesurer avec une résolution micrométrique les amplitudes de déformation de la surface et d'accéder aux premières déformations à faible vitesse de vent.

Les écoulements dans le liquide et dans l'air ont été caractérisés respectivement par vélocimétrie par images de particules et par anémométrie à fil chaud (Fig. 2). Du fait de la viscosité élevée du liquide, l'écoulement y reste laminaire et quasi bidimensionnel, avec un profil parabolique. L'écoulement d'air est lui turbulent et présente une zone logarithmique avant raccordement à la vitesse moyenne constante.

3 Résultats

Grâce aux données obtenues par FS-SS, deux régimes de génération de vagues à l'interface liquide-air ont été mis en évidence. On observe les premières perturbations de la surface aux plus faibles vitesses de vent, inférieures à 1 m \cdot s $^{-1}$. Ces perturbations, de très faibles amplitudes, à peine visibles à l'œil nu, sont de taille centimétrique et sont désorganisées spatialement et généralement allongées dans le sens de l'écoulement (Fig. 3 (a)). Dans un premier temps, quand la vitesse du vent augmente, ces perturbations augmentent d'amplitude tout en restant décorréées spatialement. Cependant, passé un seuil en vitesse de vent, elles s'organisent spatialement et atteignent rapidement un état structuré de vagues quasi parallèles entre elles et perpendiculaires à la direction du vent (Fig. 3 (b)). La longueur d'onde de ces vagues est d'environ 35 mm, soit plus de deux fois la longueur capillaire $\lambda_c = 2\pi\sqrt{\gamma/\rho g} = 14,2$ mm.

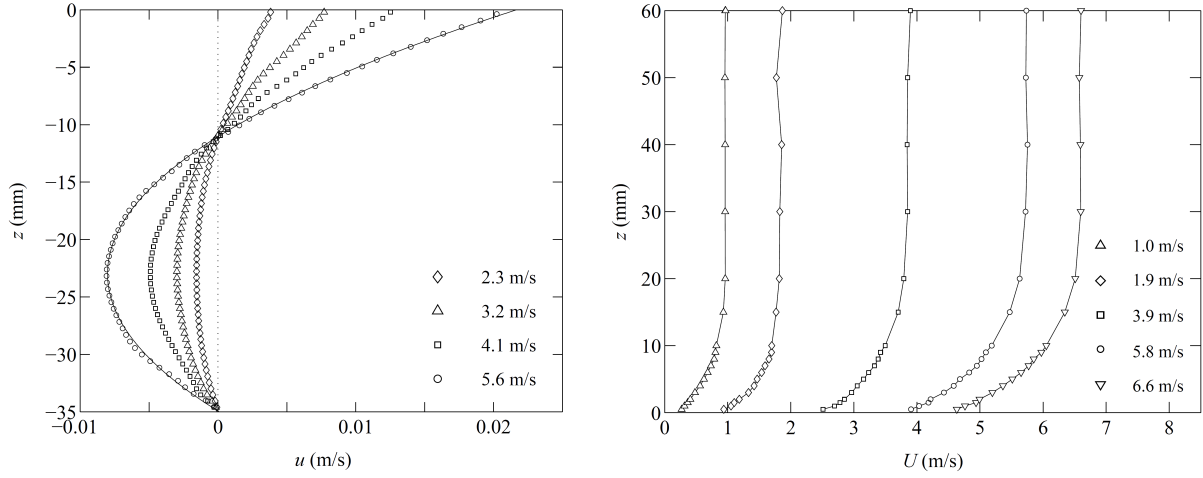


Figure 2. Profils des écoulements à différentes vitesses de vent (à gauche) dans le liquide, à $x = 37,5$ cm ; (à droite) dans l'air, à $x = 50$ cm.

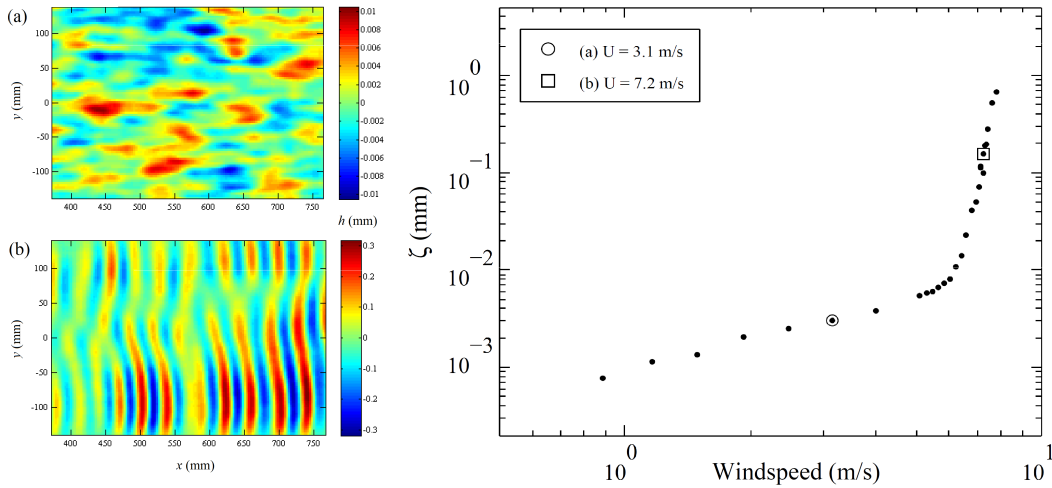


Figure 3. Gauche : Champs de hauteur instantanés aux vitesses de vent (a) $U_a = 3,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et (b) $U_a = 7,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Droite : Amplitude moyenne des déformations en fonction de la vitesse du vent à *fetch* (la distance de liquide sur laquelle le vent souffle) $x = 57$ cm.

Ces deux régimes sont également facilement visibles dans l'évolution de l'amplitude des déformations de la surface. L'amplitude moyenne des perturbations de la surface est prise comme la moyenne quadratique de la hauteur du liquide, moyennée en temps (sur 100 images prise à 10 Hz de fréquence d'acquisition) et en espace (sur tout le champ de visualisation) (Fig. 3, à droite). Sous le seuil, l'amplitude des vagues augmente lentement avec la vitesse du vent en suivant une loi de puissance avec un exposant proche de l'unité. La transition a lieu pour $U_c \simeq 6,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et au-dessus de ce seuil, l'amplitude continue de croître avec la vitesse du vent mais beaucoup plus rapidement que dans le premier régime, d'où la rupture de pente nette au passage entre les deux régimes. On accède également à l'amplitude moyenne à un *fetch* donné en ne moyennant $\zeta(x, y, t)$ que dans le temps et dans la direction transversale à la direction du vent. Les courbes ainsi obtenues d'amplitude des perturbations en fonction du *fetch* (Fig. 4) présentent des comportements différents selon que la vitesse du vent est inférieure ou supérieure à la vitesse seuil. Aux faibles vitesses de vent du premier régime, l'amplitude des perturbations de l'interface ne semble pas

varier avec le *fetch*. Une fois le seuil franchi et les vagues organisées, la hauteur des vagues va au contraire rapidement augmenter avec le *fetch*. Au début de la cuve, cette croissance spatiale est rapide, similaire à une croissance exponentielle, mais elle devient plus lente en aval, ce qui suggère des effets non linéaires non négligeables.

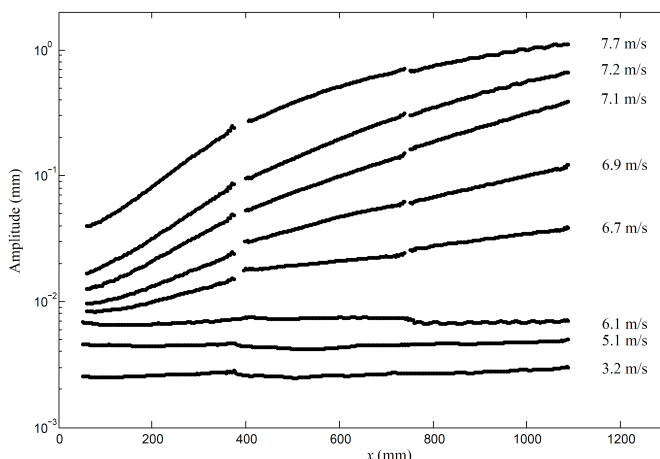


Figure 4. Amplitude des déformations en fonction du *fetch* à différentes vitesses de vent.

4 Discussion

La précision de la méthode FS-SS a permis d'étudier les premières déformations de l'interface sous l'action du vent. Si elles ont été observées lors de simulations numériques [5], cela n'avait jusqu'à présent pas été fait expérimentalement avec une telle précision.

Ces premières déformations de l'interface seraient à rapprocher du modèle de Phillips, en les interprétant comme la réponse de l'interface aux fluctuations de pression de l'écoulement d'air turbulent. Du fait de la viscosité élevée du liquide, la réponse de l'interface à ces fluctuations est essentiellement locale, les perturbations en surface étant alors le reflet quasi instantané de ces fluctuations. Quand la vitesse moyenne de l'écoulement d'air augmente, les fluctuations de pression augmentent également, d'où la croissance de l'amplitude des perturbations. L'amplitude des déformations reste néanmoins encore faible, suffisamment pour ne pas influencer en retour l'écoulement d'air, d'où une amplitude de déformation constante sur toute la longueur de la cuve. Au-dessus du seuil, l'approximation de la croissance spatiale par une fonction exponentielle amène à un rapprochement au modèle d'instabilité de Miles.

Les prochaines campagnes de mesures, en faisant varier la viscosité du liquide, devraient permettre d'en apprendre plus.

Références

1. O. DARRIGOL, *Worlds of Flow*, Oxford University Press (2005).
2. O. M. PHILLIPS, On the generation of waves by turbulent wind, *J. Fluid Mech.*, **2**, 417–445 (1957).
3. J. W. MILES, On the generation of surface waves by shear flows, *J. Fluid Mech.*, **3**, 185–204 (1957).
4. F. MOISY, M. RABAUD & K. SALSAC, A synthetic schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface, *Exp. Fluids*, **46**, 1021–1036 (2009).
5. M.-Y. LIN, C.-H. MOENG, W.-T. TSAI, P. P. SULLIVAN & S. E. BELCHERS, Direct numerical simulation of wind-wave generation processes, *J. Fluid Mech.*, **616**, 1–30 (2008).

Synchronisation dans des réseaux complexes d'équations de réaction-diffusion de type FitzHugh-Nagumo

Van Long Em Phan, Benjamin Ambrosio & M. A. Aziz-Alaoui

LMAH, FR-CNRS-3335, ULH, ISCN, Normandie Université, BP 540, 76058, Le Havre Cedex, France
 pvlem6a2@gmail.com

Résumé. On s'intéresse au comportement asymptotique de réseaux complexes de systèmes de réaction-diffusion de type FitzHugh-Nagumo (FHN). On montre l'existence de l'attracteur global et la synchronisation identique, pour laquelle on établit, pour une topologie d'un réseau donnée, l'existence d'une valeur seuil de force de couplage qui assure la synchronisation, on utilise la méthode *connection graph stability*. On présente ensuite des simulations numériques, et une loi heuristique qui en est issue, donnant la force de couplage minimale nécessaire pour obtenir la synchronisation, ceci par rapport au nombre de noeuds et de la topologie du réseau.

Abstract. We are interested in the asymptotic behavior of complex networks of reaction-diffusion systems of FitzHugh-Nagumo type. We show the existence of the global attractor and the identical synchronization, for which we establish, for a given network topology, the existence of a threshold value of the coupling strength which ensures the synchronization, we use the *connection graph stability* method. We then present the numerical simulations, and a heuristic law which is derived giving the minimum coupling strength necessary to obtain the synchronization, with respect to the number of nodes and the network topology.

1 Introduction

Dans ce travail, l'existence de l'attracteur global du réseau dans l'espace $(L^2(\Omega)^d)^n$ pour une topologie quelconque étant admise [8, 9], sous des conditions sur les fonctions de couplage et sur les fonctions non linéaires de réaction, on présente l'analyse de la synchronisation identique du réseau pour une topologie quelconque dans le cas d'un couplage linéaire. Une question centrale est de déterminer le seuil minimal de la force de couplage de sorte que la stabilité de la synchronisation soit assurée. On obtient des résultats théoriques grâce à la méthode de *connection graph stability*, voir [7], que l'on illustre par des simulations numériques.

Soit Ω un ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^N avec la frontière $\partial\Omega$. On considère le problème suivant en modélisant un réseau impliquant un vecteur $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)^T$ de $\Omega \times \mathbb{R}^+$ dans $(\mathbb{R}^d)^n$; U_i satisfait,

$$U_{it} = F(U_i) + Q\Delta U_i + PH_i(U), \quad (1)$$

où U_{it} désigne la dérivée de U_i par rapport au temps t et ΔU_i , l'opérateur laplacien de U_i . Le vecteur $F(U_i) = (F^1(U_i), \dots, F^d(U_i))^T$ est un vecteur de fonctions non linéaires définissant les dynamiques de l'oscillateur individuel de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d , $U_i = (U_i^1, \dots, U_i^d)^T$ est un d -vecteur qui contient les coordonnées de l' i -ième oscillateur, et $H_i(U) = (H_i^1(U), \dots, H_i^d(U))^T$ représente la fonction de couplage de \mathbb{R}^{nd} dans \mathbb{R}^d . Les éléments non-zéros de la matrice $P_{d \times d}$ définissent les variables de couplage des oscillateurs (noeuds). L'indice t désigne la dérivée selon le temps $t \in \mathbb{R}^+$ et Δ l'opérateur laplacien. Pour plus de clarté, on considère une version vectorielle avec la matrice diagonale $P = \text{diag}(p_1, \dots, p_d)$, où $p_l = 1$ pour $l = 1, 2, \dots, s$, et $p_l = 0$ pour $l = s + 1, \dots, d$.

La matrice $Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_d)$, où $q_1 > 0, q_2 > 0, \dots, q_s > 0$ et $q_l = 0$ pour $l = s + 1, \dots, d$, de façon à ce que les s termes de diffusion se trouvent dans les s premières équations de (1). Ainsi, les $d - s$ dernières équations sont ordinaires. On considère le système (1) avec les conditions initiales $U_i(x, 0) = U_{i0}(x)$, et une condition aux bords de Neumann, $\frac{\partial U_i}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$ (ν est la normale extérieure au domaine Ω).

Soit $L_{d \times d} = I_{d \times d} - P$, où $I_{d \times d}$ est la matrice identité. Supposons qu'on peut écrire les $d - s$ dernières équations du système (1) comme suit,

$$LU_{it} = LF(U_i) = -L\sigma(x)U_i - L\Phi(x, PU_i),$$

où $\sigma(x) = \text{diag}(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_d(x))$, $\sigma_i(x) \geq \delta > 0, i = s + 1, \dots, d, \sigma_i(x) = 0, i = 1, \dots, s$, et $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_d)^T$, où $\Phi_l = 0, l = 1, \dots, s; \Phi_l = \Phi_l(x, PU_i), l = s + 1, \dots, d$.

Alors, le réseau (1) peut être réécrit comme suit,

$$\begin{cases} PU_{it} = PF(U_i) + Q\Delta U_i + PH_i(U), \\ LU_{it} = -L\sigma(x)U_i - L\Phi(x, PU_i). \end{cases} \quad (2)$$

Les fonctions F, H_i, σ et Φ sont supposées être deux fois continûment différentiables pour toutes les variables et satisfaire les conditions acquises pour l'existence de l'attracteur global [6, 8, 9].

2 Synchronisation identique d'un réseau de n systèmes de réaction-diffusion

Dans cette partie, on s'intéresse à la synchronisation identique dans des réseaux couplés symétriquement avec couplage linéaire [4]. On utilise la méthode appelée « *Connection graph stability* » pour calculer les seuils de force de couplage nécessaires pour la synchronisation [7–9].

Définition 1. Soit $S(t) = (U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)), i = 1, \dots, n$ un réseau d'oscillateurs. On dit que $S(t)$ synchronise identiquement [1, 2] si,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^d \left(\left\| U_i^j(t) - U_{i+1}^j(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \right) = 0.$$

On appelle *norme de l'erreur de synchronisation de S* , la quantité,

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^d \left\| U_i^j(t) - U_{i+1}^j(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère un réseau couplé symétriquement,

$$U_{it} = F(U_i) + Q\Delta U_i + \sum_{j=1}^n \epsilon_{ij}(t) PU_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

où $G = (\epsilon_{ij}(t))$ une matrice symétrique $n \times n$ telle que la somme de chaque ligne vaut zéro et les éléments hors de la diagonale sont non négatifs, i.e., $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}, \epsilon_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$, et $\epsilon_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^n \epsilon_{ij}, i = 1, \dots, n$.

Théorème 1. *Supposons que,*

$$\epsilon_k(t) > \frac{a}{n} b_k(n, m) \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, m \text{ et pour tout } t. \quad (4)$$

Alors, la variété de synchronisation du système (3) est globalement asymptotiquement stable, où

$$b_k(n, m) = \sum_{j > i; k \in P_{ij}}^n z(P_{ij})$$

est la somme de tous les chemins choisis P_{ij} qui passent par une arête donnée k qui appartient à la configuration de couplage. Ici, m est le nombre d'arêtes du graphe, et a est une constante qui dépend de la dynamique d'un oscillateur individuel.

Démonstration. Voir [8, 9]. Pour les graphes, voir [5].

Exemple 1. Dans un réseau complet avec couplage linéaire, on suppose que tous les $\epsilon_{i_k, j_k}(t) \geq \epsilon > 0, k = 1, \dots, \frac{1}{2}n(n-1)$ pour tout $i_k, j_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout t , i.e., chaque noeud est connecté à tous les autres. Ainsi, grâce ce théorème, le seuil de synchronisation est $\frac{a}{n}$.

Dans le cas où $n = 3$, le réseau complet de trois systèmes de réaction-diffusion de type FitzHugh-Nagumo (FHN) s'écrit comme suit,

$$\begin{cases} u_{1t} = f(u_1) - v_1 + d\Delta u_1 - g_3(u_1 - u_2) - g_3(u_1 - u_3), \\ v_{1t} = au_1 - bv_1 + c, \\ u_{2t} = f(u_2) - v_2 + d\Delta u_2 - g_3(u_2 - u_1) - g_3(u_2 - u_3), \\ v_{2t} = au_2 - bv_2 + c, \\ u_{3t} = f(u_3) - v_3 + d\Delta u_3 - g_3(u_3 - u_1) - g_3(u_3 - u_2), \\ v_{3t} = au_3 - bv_3 + c, \end{cases} \quad (5)$$

où g_3 est la force de couplage.

Numériquement, on s'intéresse donc à la valeur minimale de force de couplage permettant la synchronisation du réseau. On peut trouver les *patterns* dans le réseau complet de trois « neurones » (trois nœuds) (voir Fig. 1). On observe alors que la synchronisation survient pour $g_3 \geq 0,025$.

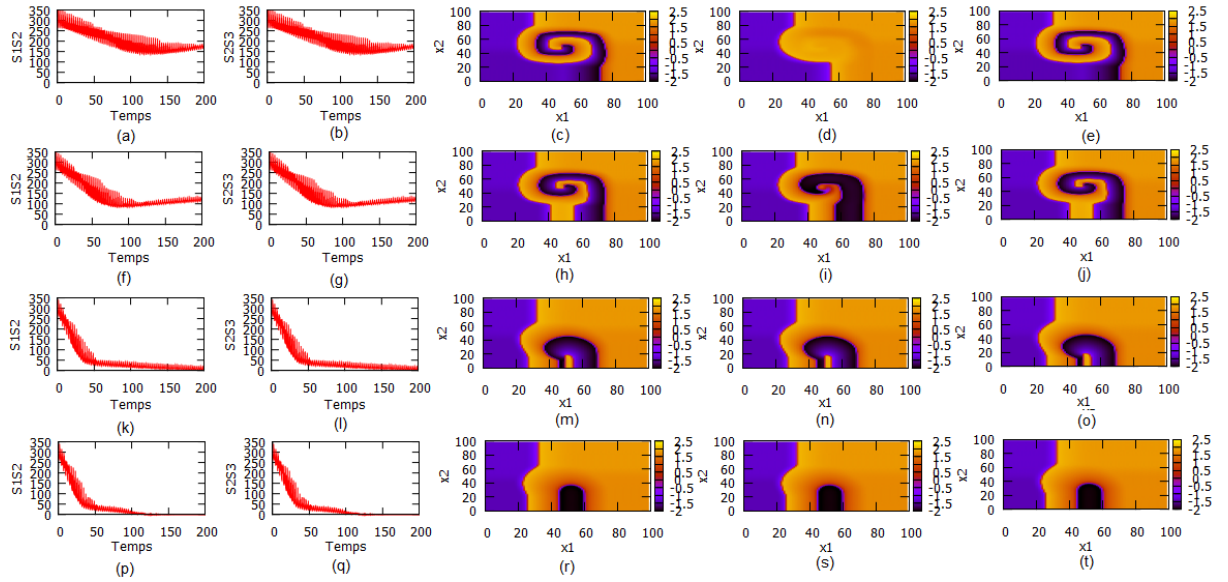


Figure 1. Synchronisation d'un réseau complet de trois « neurones » couplés linéairement avec $f(u) = -u^3 + 3u, a = 1, b = 0,001, c = 0, \epsilon = 0,1, d = 0,05$. La synchronisation survient pour $g_3 \geq 0,025$. Avant synchronisation, pour $g_3 = 0,005$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les iso-valeurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des iso-valeurs de $u_2(x_1, x_2, t)$ et $u_3(x_1, x_2, t)$; des simulations similaires sont reproduites pour $g_3 = 0,01$ (figures (f-j)), $g_3 = 0,023$ (figures (k-o)) et $g_3 = 0,025$ (figures (p-t)). Pour la valeur $g_3 = 0,025$, on observe la synchronisation de trois « neurones ».

En augmentant le nombre de noeuds de 3 à 20 dans le graphe, on trouve numériquement les forces de couplage nécessaires pour avoir la synchronisation, voir le tableau 1.

Grâce à ces simulations numériques, on constate que cette force de couplage dépend du nombre de noeuds. En effet, les points de la figure 2 représentent la force de couplage de synchronisation en fonction

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
g_n	0,025	0,015	0,012	0,009	0,008	0,007	0,006	0,005	0,0045
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20
g_n	0,004	0,0038	0,0035	0,0032	0,003	0,0028	0,0026	0,0024	0,0023

Table 1. Tableau donnant les forces de couplage minimales nécessaires g_n afin d'observer un phénomène de synchronisation entre n noeuds dans le réseau complet.

du nombre de noeuds dans le réseau complet avec couplage linéaire. La courbe les lissant représente la loi suivante,

$$g_n = \frac{0,051}{n-1} - 0,00041,$$

où n est le nombre de noeuds du réseau. Ainsi, la force de couplage nécessaire pour obtenir la synchronisation de n noeuds, qui suit cette loi, diminue lorsque le nombre de noeuds dans le réseau augmente (loi de puissance inverse).

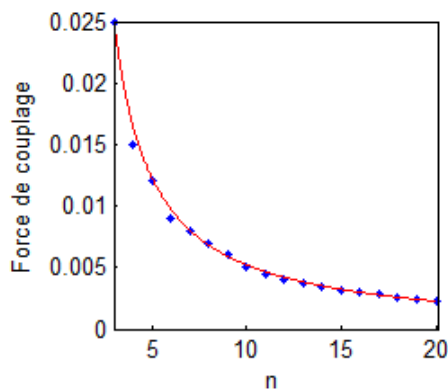


Figure 2. Évolution de la force de couplage g_n pour laquelle la synchronisation de n noeuds a lieu en fonction du nombre n de noeuds dans le réseau complet et elle suit la loi $g_n = \frac{0,051}{n-1} - 0,00041$.

3 Conclusion

Les phénomènes de synchronisation sont omniprésents dans beaucoup de systèmes naturels ou artificiels. Aussi, une question centrale est de déterminer le seuil minimal de la force de couplage pour que la synchronisation soit assurée. Dans ce travail, on analyse différents réseaux de systèmes FHN couplés. On a obtenu des résultats théoriques et numériques pas tous exposés ici, sur la synchronisation. On a choisi de montrer un seul exemple dans cet article. En plus, des résultats sur le réseau complet présenté ici, d'autres utilisant des topologies de réseaux différentes (en anneau, en étoile...) sont données dans les références [8, 9].

Références

1. B. AMBROSIO & M. A. AZIZ-ALAOUI, Synchronization and control of coupled reaction-diffusion systems of the FitzHugh-Nagumo-type, *Comput. Math. Appl.*, **64**, 934–943 (2012).
2. B. AMBROSIO & M. A. AZIZ-ALAOUI, Synchronization and control of a network of coupled reaction-diffusion systems of generalized FitzHugh-Nagumo type, *ESAIM: Proc.*, **39**, 15–24 (2013).
3. C. WU & L. CHUA, On a conjecture regarding the synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems, *IEEE T. Circuits Syst.*, **43**, 161–165 (1996).
4. M. A. AZIZ-ALAOUI, Synchronization of Chaos, *Encyclopedia of Mathematical Physics*, Elsevier, Vol. **5**, 213–226 (2006).
5. M. VAN STEEN, *Graph Theory and Complex Network*, ISBN : 978-90-815406-1-2 (2010).
6. M. MARION, Finite-dimensional attractors associated with partly dissipative reaction- diffusion systems, *SIAM J. Appl. Math.*, **20**, 816–844 (1989).
7. V. BELYKH, I. BELYKH & M. HASLER, Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems, *Physica D*, **159**, 159–187 (2004).
8. V. L. E. PHAN, B. AMBROSIO & M. A. AZIZ-ALAOUI, Analysis of a complex network of reaction-diffusion equations of FitzHugh-Nagumo type, en cours de soumission.
9. V. L. E. PHAN, B. AMBROSIO & M. A. AZIZ-ALAOUI, Synchronisation identique dans des réseaux complexes d'équations de Réaction-Diffusion de type FitzHugh-Nagumo, Thèse en cours de l'Université du Havre.

Oscillations et fragmentation spontanées de bulles d'air remontant dans une solution de polymère confinée

Raphaël Poryles & Valérie Vidal

Laboratoire de Physique, Université de Lyon, École Normale Supérieure de Lyon - CNRS,
46 Allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France
raphael.poryles@ens-lyon.fr

Résumé. Nous nous intéressons à la remontée d'une bulle unique dans un fluide non-newtonien confiné dans une cellule de Hele-Shaw verticale. Le fluide que nous utilisons est une solution de polyéthylène-oxyde (PEO) que nous avons caractérisé comme étant rhéofluidifiant. Les bulles ont une forme qui dépend de leur volume : elles peuvent être arrondies ou présenter une singularité à l'arrière (« *cusp* »). Lorsque le volume de ces bulles est suffisamment élevé, une instabilité se développe spontanément. L'avant de la bulle s'aplatit alors selon un angle donné et sa trajectoire n'est plus rectiligne, la bulle étant déviée latéralement. Lorsque l'angle d'aplatissement est assez faible, nous observons une digitation visqueuse du fluide dans la bulle rappelant l'instabilité de Saffman-Taylor. Lorsque cette instabilité croît suffisamment rapidement, la bulle se fragmente. Nous avons caractérisé cette fragmentation en fonction de l'angle d'aplatissement et de la taille de la bulle, ainsi que des propriétés non-newtoniennes de la solution de PEO.

Abstract. We are interested in the rise of a unique bubble in a non-Newtonian fluid confined in a vertical Hele-Shaw cell. The fluid that we use is a polyethylene-oxide solution (PEO) that we have characterized as shear-thinning. The bubbles shape depends on their volume: they can present a round shape or have a singularity at the rear (cusp shape). When the volume of these bubbles is large enough, an instability develops spontaneously. The front of the bubble flattens at a given angle and its trajectory is not straight any more, the bubble is deflected from its path. When the flattening angle is small, we observe a viscous fingering of the fluid in the bubble reminiscent of the Saffman-Taylor instability. When this instability grows quickly enough, the bubble fragments. We characterized this fragmentation depending on the flattening angle and the size of the bubble, as well as the non-Newtonian properties of the PEO solution.

1 Introduction

L'étude de la remontée de bulles dans des fluides non-newtoniens trouve des applications dans de nombreux domaines allant de l'industrie agroalimentaire, chimique ou cosmétique à la géophysique. On peut citer par exemple dans l'industrie pétrochimique l'importance d'écoulements diphasiques faisant intervenir à la fois des phases gazeuses et aqueuses pour extraire le pétrole et les gaz naturels. En géophysique, les chambres magmatiques contiennent généralement des poches de gaz et des bulles qui jouent un rôle important lors du déclenchement d'événements volcaniques [1].

La forme et la dynamique de remontée de bulles dans un fluide non-newtonien présente des caractéristiques particulières qui ont été largement étudiées en milieu non confiné (3 dimensions) [2–4]. On peut citer, dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant, la présence d'une singularité (« *cusp* ») à l'arrière de la bulle [5], des oscillations de taille et de vitesse, ou la formation de chaînes de bulles [6]. Le cas de remontée de bulles confinées à 2 dimensions présente des liens avec les différents domaines cités ci-dessus. En volcanologie, les poches de gaz peuvent remonter dans le magma (qui est non-newtonien) dans des failles volcaniques étroites (« *dykes* »); en catalyse chimique, des réactions faisant intervenir des bulles ont également lieu dans cette géométrie [7].

Ainsi dans ces domaines, le comportement de ces bulles est un problème essentiel car il influe directement sur la dynamique du système, et il est important de comprendre les mécanismes physiques en jeu. Nous étudions, à l'échelle du laboratoire, la dynamique de remontée d'une bulle unique dans un fluide non-newtonien, confiné en cellule de Hele-Shaw verticale.

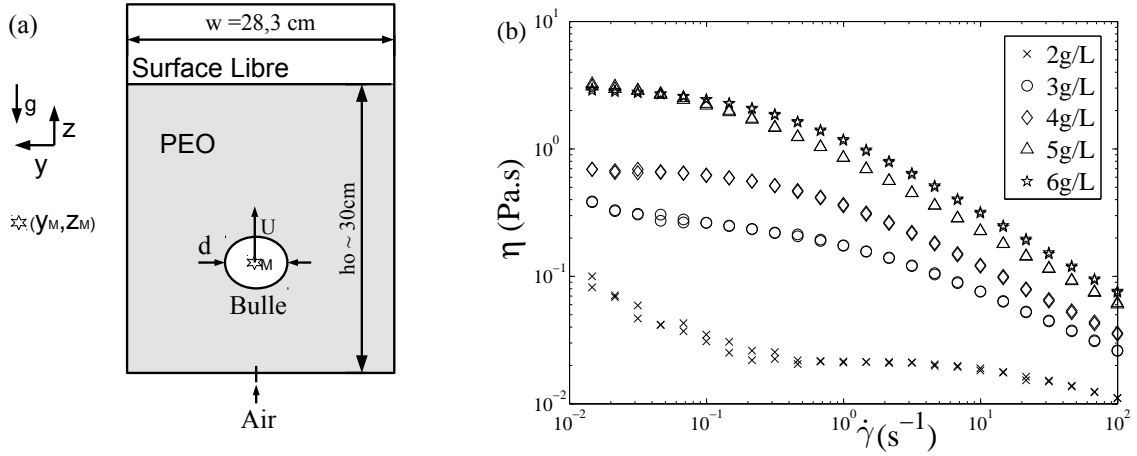


Figure 1. (a) Schéma du dispositif expérimental. On note U la vitesse de remontée verticale de la bulle, d sa taille caractéristique et M son centre de masse [coordonnées (y_M, z_M)]. (b) Viscosité η en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ pour les différentes solutions de PEO (concentrations en PEO indiquées sur la figure). Les mesures sont faites sur un aller-retour en cisaillement et on laisse le système s'équilibrer 10 secondes entre chaque mesure.

2 Dispositif expérimental

2.1 Description

Le schéma de l'expérience est présenté en Figure 1 (a). La cellule est constituée de deux plaques de verre de largeur $w = 28,3$ cm, de hauteur $h = 40$ cm et séparées d'un espacement (*gap*) $e = 2$ mm. La hauteur du fluide est $h_0 \sim 30$ cm. L'air est injecté à travers un orifice de 1 mm de diamètre via une seringue (60 mL) contrôlée à la main. Le volume injecté varie entre $V = 0,02$ mL et $V = 1,5$ mL.

La cellule expérimentale est rétroéclairée à l'aide d'un éclairage plan à néon blanc (JustNormLicht, Classic Line) qui fournit un éclairage homogène. La visualisation se fait par ombroscopie en utilisant une caméra PL-B781 (PixeLink) avec une résolution de 1280×416 pixels. L'objectif utilisé est une lentille 12,5–75 mm avec une distance focale de 1,2 m. La fréquence d'acquisition est alors de 44 images par seconde.

2.2 Caractérisation des fluides

Les fluides utilisés sont des solutions de polyéthylène oxyde (PEO) dans l'eau. Dans notre cas, ce polymère a une masse molaire $M_w = 8 \times 10^6$ g/mol (Sigma-Aldrich, 372838). Pour une telle solution de polymère, on peut définir une concentration de recouvrement des chaînes de polymères comme étant :

$$C^* = \frac{M_W}{4/3\pi R_g^3 \mathcal{N}_a}, \quad (1)$$

avec M_W la masse molaire, R_g le rayon de giration du polymère et \mathcal{N}_a le nombre d'Avogadro [8]. Cette concentration correspond à $C^* = 0,04$ g/L. Nous avons étudié 5 différentes solutions à des concentrations de $C = [50, 75, 100, 125, 150] C^*$, correspondant à $C = [2, 3, 4, 5, 6]$ g/L. Ces concentrations élevées nous garantissent que les chaînes de polymères sont enchevêtrées, que les viscosités seront plus élevées que celle de l'eau pure et que les effets non-newtoniens seront importants. La valeur de tension de surface de ces fluides a été mesurée en utilisant un tensiomètre à bulle montante commercial (Tracker, Télclis [9, 10]) pour la solution à $100 C^*$ et vaut $\sigma = 61 \pm 2$ mN/m. Elle est supposée être la même pour toutes les solutions.

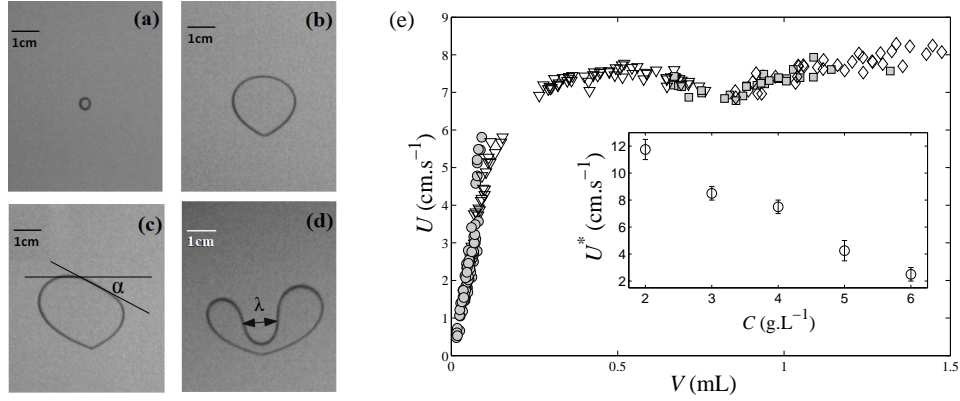


Figure 2. (a–d) Photos des différents régimes observés : (a) petite bulle circulaire; (b) bulle présentant un *cusp* montant rectilignement; (c) bulle oscillante; (d) bulle qui se fragmente. (e) Vitesse en fonction du volume pour la solution à 4 g/L [(○, bulles rondes), (▽, bulles *cuspées* non-oscillantes), (□, bulles oscillantes), (◇, bulles fragmentant)]. En insert, vitesse U^* des bulles de volume $V=0,5$ mL en fonction de la concentration.

Les propriétés rhéologiques de ces solutions ont été caractérisées à l'aide d'un rhéomètre (Bohlin C-VOR 150) en géométrie cône-plan (6 cm de diamètre et 2° d'angle). Ces mesures sont présentées sur la figure 1 (b). Ces courbes montrent que la viscosité des fluides utilisés varie entre 10 et 1 000 fois celle de l'eau environ. De plus, on observe leur caractère fortement rhéofluidifiant pour des taux de cisaillement $\dot{\gamma} > 0,1-1 \text{ s}^{-1}$.

2.3 Volume des bulles

L'injection des bulles se faisant à la main, il est difficile de contrôler leur volume. L'expérience a donc été reproduite un grand nombre de fois (200 par solution) et le volume V des bulles a été déterminé *a posteriori*. Il a été montré [11] pour une bulle confinée entre deux plaques, que l'épaisseur de la couche de lubrification h ne dépend que du nombre capillaire, tant que l'on est à Reynolds faible, et suit la relation suivante :

$$\frac{h}{e} \sim \frac{\text{Ca}^{2/3}}{1 + \text{Ca}^{2/3}}. \quad (2)$$

Dans notre cas, le nombre capillaire $\text{Ca} = \eta U / \sigma$ est petit devant 1 et donc $h/e \sim \text{Ca}^{2/3} \ll 1$. La couche de lubrification est donc petite devant la taille du gap et on peut alors approximer le volume de la bulle par $V = S \cdot e$ avec S la surface apparente de la bulle. La surface est calculée via un programme Matlab : l'image brute est seuillée et binarisée, puis en utilisant la fonction *contour*, on remonte à la forme des bulles. La surface est alors calculée en prenant l'aire à l'intérieur du contour. Le centre de masse est calculé comme étant le barycentre du contour, et on en déduit la vitesse verticale U de la bulle en faisant un ajustement linéaire de la position verticale du centre de masse en fonction du temps.

3 Résultats

3.1 Différents régimes

Pour les solutions à 4-5-6 g/L, on observe trois régimes différents pour la forme des bulles :

- pour de petits volumes ($V < 0,1$ mL), on observe des petites bulles de forme arrondie; les forces capillaires dominent et ces bulles montent verticalement (Fig. 2 (a));

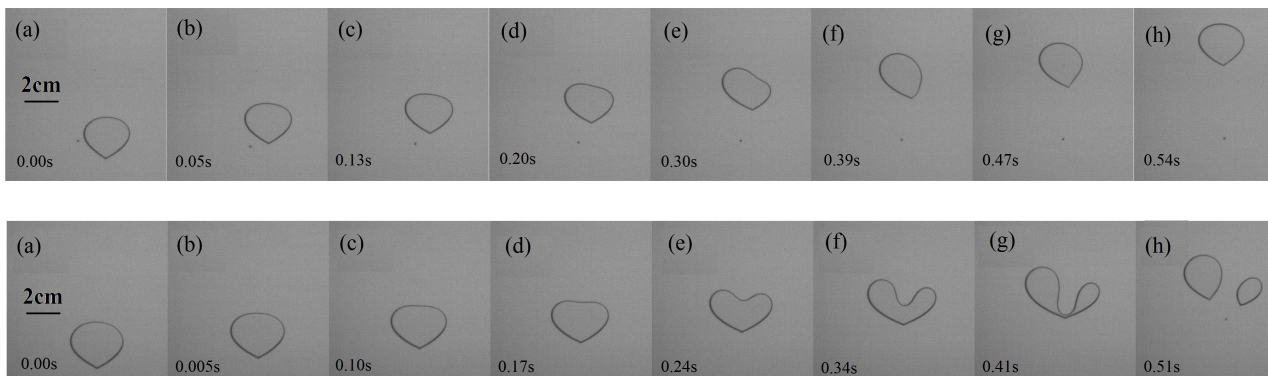


Figure 3. Séquence d'images pour une bulle oscillante (en haut) et une bulle qui fragmente (en bas) [$C = 4$ g/L ; $V_{\text{haut}} = 1$ mL, $V_{\text{bas}} = 1,1$ mL]. Les temps sont indiqués sur les images.

- lorsqu'on augmente le volume des bulles ($0,1 < V < 0,4$ mL), celles-ci présentent une singularité (*cusp*). Ce changement de forme vient du fait que le fluide est complexe et présente un temps de relaxation propre. Lorsque la bulle traverse la couche de fluide, elle désenchevêtre les polymères, qui mettent un certain temps à relaxer à l'arrière de la bulle. Ceci va laisser place à une dépression à l'arrière de la bulle, d'où une singularité (Fig. 2 (b)). La trajectoire des bulles est toujours rectiligne ;
- lorsqu'on augmente encore la taille des bulles ($V > 0,4$ mL), on observe des oscillations (Fig. 2 (c)) ou une fragmentation spontanée de la bulle (Fig. 2 (d)). Ce phénomène est décrit en détail dans la partie suivante.

Ces trois régimes ne sont pas observés pour les solutions à 2 g/L et 3 g/L car les viscosités sont trop faibles et des instabilités inertielles apparaissent, on voit alors des bulles qui se gondolent fortement selon des mécanismes difficiles à décrire. Dans la suite de l'étude nous ne considérerons pas ces concentrations.

La figure 2 (e) montre la vitesse de remontée verticale U des bulles en fonction de leur volume V pour la solution à 4 g/L. On observe lors de cette remontée deux régimes : un premier régime où la vitesse des bulles est proportionnelle à leur volume ($V < 0,2$ mL), puis au-delà de ce volume, les bulles atteignent un régime où la vitesse augmente beaucoup plus faiblement avec le volume des bulles. Pour la solution à 4 g/L les vitesses à grand volume sont comprise entre 7 et 8 cm/s. L'ordre de grandeur de la vitesse verticale U^* pour des bulles de volume $V = 0,5$ mL pour les différentes concentrations est donnée en insert de la figure 2 (e). On observe qu'il y a une diminution de la vitesse des bulles avec la concentration, ce qui est en accord avec l'augmentation de viscosité.

On observe également une nette séparation à $V = 0,7$ mL entre le régime où les bulles montent de manière rectiligne et le moment où l'on observe l'apparition d'oscillations et de fragmentation, ce qui explique la décroissance de la vitesse autour de ce volume, car la vitesse U calculée ici correspond seulement à la composante verticale. Nous expliquons dans la suite l'origine de l'apparition de ce phénomène.

L'expérience a été également menée avec du glycérol concentré qui est un fluide newtonien et qui avait le même ordre de grandeur de viscosité que les solutions de PEO utilisées ($\eta_{\text{gly}} = 0,1$ Pa · s). Nous n'avons observé les oscillations que dans le fluide complexe, ce qui nous laisse à penser que cette instabilité a pour origine les propriétés rhéologiques du fluide.

3.2 Analyse des oscillations/fragmentation

Pour des bulles suffisamment grandes, on observe que le front de la bulle s'aplatit selon un certain angle α (Fig. 2 (c)). L'angle d'aplatissement est relativement faible (inférieur à 20°) mais n'est pas

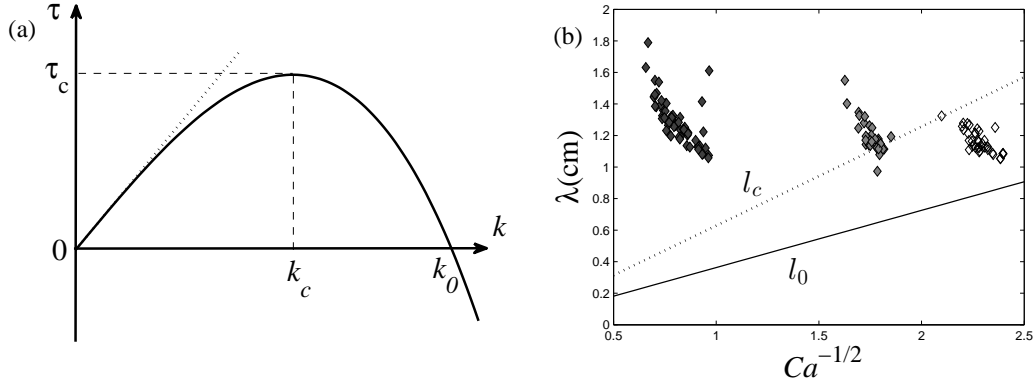


Figure 4. (a) Taux de croissance de l'instabilité de Saffman-Taylor en fonction du nombre d'onde $k = 1/\lambda$ où λ est la largeur du doigt [12, 13]. (b) Largeur du doigt mesurée à mi-hauteur lors d'une fragmentation en fonction de $1/\sqrt{Ca}$ pour les différentes concentrations C [(blanc, 4 g/L), (gris, 5 g/L), (noir, 6 g/L)].

toujours strictement nul. On rapporte deux cas : $\alpha > 10^\circ$ et $\alpha < 5^\circ$:

- lorsque cet angle est assez élevé ($\alpha > 10^\circ$), la bulle aplatie va changer sa trajectoire en étant déviée latéralement du côté opposé à l'aplatissement (Fig. 3, haut, (d–f)). Elle reprend ensuite une forme symétrique et une remontée verticale (Fig. 3, haut, (g, h)) ;
- lorsque l'angle du front est assez faible ($\alpha < 5^\circ$) on observe la croissance d'un doigt à l'intérieur de la bulle (Fig. 3, bas, (d–g)). La bulle se fragmente ensuite (Fig. 3, bas, (h)).

Dans le cas intermédiaire ($5^\circ < \alpha < 10^\circ$), on a un recouvrement entre les deux phénomènes et on ne peut pas prédire *a priori* lequel va avoir lieu.

On peut faire une analogie entre l'apparition de ce doigt et l'instabilité de Saffman-Taylor, qui apparaît lorsqu'un fluide visqueux est poussé dans un autre fluide de viscosité supérieure. Le taux de croissance du doigt en fonction de sa largeur peut être calculé dans le cas de fluides newtoniens (Fig. 4 (a) [12, 13]). Pour que le doigt se développe il faut donc que la bulle s'aplatisse sur une largeur minimale $l_0 = 1/k_0$; le taux de croissance sera maximal pour $l_c = 1/k_c$, avec $l_c = \pi e/\sqrt{Ca}$ et $l_0 = \pi e/\sqrt{3Ca}$. Si la bulle est trop petite, l'instabilité ne pourra pas se développer, d'où le seuil d'apparition présenté plus haut. Si l'angle est trop élevé, l'instabilité ne se développera pas suffisamment vite, un doigt commencera à se développer mais les forces capillaires empêcheront la bulle de se fragmenter, provoquant un déplacement latéral.

Pour comparer la taille des doigts observés dans notre expérience avec celle obtenue en digitation visqueuse, nous avons tracé la largeur des doigts λ à mi-hauteur (Fig. 2 (d)) en fonction de $1/\sqrt{Ca}$ pour les trois concentrations où l'on observe de la digitation. On a placé également sur cette courbe l_c et l_0 dans le cas théorique de l'instabilité de Saffman-Taylor. On remarque que pour toutes ces solutions la taille caractéristique des doigts est plus élevée que celle attendue pour Saffman-Taylor, mais reste du bon ordre de grandeur. Le résultat principal étant qu'on observe des doigts de taille λ supérieur à l_0 , ce qui est compatible avec la théorie de Saffman-Taylor. On remarque que la taille caractéristique de ces doigts ne semble pas dépendre de la concentration.

4 Discussion et conclusion

Lors de la remontée d'une bulle unique dans une solution de PEO en cellule de Hele-Shaw, nous avons observé une instabilité se développant lorsque les bulles avaient un volume suffisant ($V > 0,7$ mL). Cette instabilité provoque un déplacement latéral de la bulle, voire une fragmentation de celle-ci. Nous proposons une interprétation qualitative de ces observations.

Le fluide étant rhéofluidifiant, la viscosité locale est moins élevée sur les bords de la bulle qui sont dans une zone plus cisailée que le front de la bulle. Ces bords ont alors tendance à monter plus rapidement que le front, qui s'aplatit alors selon un angle α avec l'horizontale. Si cet angle est grand, la bulle sera déviée de sa trajectoire initiale et subira un déplacement horizontal global. Lorsque ce front plat est suffisamment large et que son angle avec l'horizontale est relativement faible, on observe un phénomène de digitation qui, lorsqu'il se développe rapidement, aboutit à une fragmentation de la bulle.

Le taux de croissance de cette instabilité ainsi que les relations entre l'angle du front et la largeur des doigts sont des pistes à explorer pour confirmer un lien avec l'instabilité de Saffman-Taylor. Le fait que les doigts soient plus grands que leur analogue dans la théorie de Saffman-Taylor peut s'expliquer par deux faits. D'une part, nous ne sommes pas dans le cadre d'une interface plane infinie que l'on pousse à pression constante (ce qui est le cas dans l'expérience originale [12]). Les forces capillaires liées à la forme de la bulle ont vraisemblablement un rôle à jouer. D'autre part, nous travaillons avec un fluide non-newtonien qui présente une certaine élasticité. Il a été rapporté dans la littérature que dans une solution de PEO, la taille caractéristique de digitation était plus élevée que dans un fluide newtonien à cause d'effets élastiques [13], alors même que les concentrations utilisées sont beaucoup plus faibles que dans notre cas. La mise en place d'une mesure de PIV (*Particle Image Velocimetry*) permettra, dans un futur proche, d'accéder aux champs de vitesse et aux taux de cisaillement locaux, et d'apporter plus d'information sur ces systèmes.

Références

1. M. RIPEPE & E. GORDEEV, Gas bubble dynamics model for shallow volcanic tremor at Stromboli, *J. Geophys. Res.*, **104**, 10639–10654 (1999).
2. A. BELMONTE, Self-oscillations of a cusped bubble rising through a micellar solution, *Rheol. Acta*, **39**, 554–559 (2000).
3. D. FUNFSCHILLING, *Dynamique des bulles dans des fluides rhéologiquement complexes*, Thèse de l'Institut National Polytechnique de Nancy (1999).
4. H. Z. LI, X. FRANK, D. FUNFSCHILLING & P. DIARD, Bubbles rising dynamics in polymeric solutions, *Phys. Lett. A*, **325**, 43–50 (2004).
5. R. P. CHHABRA, *Bubbles, Drops, and Particles in Non-Newtonian Fluids*, 2^e édition, CRC Press (2006).
6. I. L. KLIAKHANDLER, Continuous chain of bubbles in concentrated polymeric solutions, *Phys. Fluids*, **14**, 3375–3379 (2002).
7. D. ÉDOUARD, M. LACROIX, C. PHAM, M. MBODJI & C. PHAM-HUU, Experimental Measurements and Multiphase Flow Models in Solid SiC Foam Beds, *AIChE J.*, **54**, 2823–2832 (2008).
8. P. OSWALD, *Rhéophysique, ou comment coule la matière*, Belin (2005).
9. B. SONG & J. SPRINGER, Determination of interfacial tension from the profile of a pendant drop using computer-aided image processing: 1. Theoretical, *J. Colloid Interf. Sci.*, **184**, 64–76 (1996).
10. B. SONG & J. SPRINGER, Determination of interfacial tension from the profile of a pendant drop using computer-aided image processing: 2. Experimental, *J. Colloid Interf. Sci.*, **184**, 77–91 (1996).
11. M. ROUDET, *Hydrodynamique et transfert de masse autour d'une bulle confinée entre deux plaques*, Thèse de l'Université de Toulouse (2008).
12. P. G. SAFFMAN & G. TAYLOR, The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **245**, 312–329 (1958).
13. A. LINDNER, *L'Instabilité de Saffman-Taylor dans les fluides complexes : relation entre les propriétés rhéologiques et la formation de motifs*, Thèse de l'Université Paris VI (2000).

Intermittency in integrable turbulence

Stéphane Randoux¹, Pierre Walczak¹, Miguel Onorato² & Pierre Suret¹

¹ Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molecules, UMR-CNRS 8523, Université de Lille, France

² Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Torino, 10125 Torino, Italy

`stephane.randoux@univ-lille1.fr`

Résumé. Nous présentons une expérience d’optique dans laquelle nous examinons les changements statistiques résultant de la propagation non linéaire d’une onde incohérente dans un système décrit par l’équation de Schrödinger non linéaire à une dimension. Notre travail se place dans le cadre de l’étude de la turbulence intégrable. Nous mettons en évidence des modifications globales de la statistique de l’onde ainsi que le phénomène d’intermittence associé à des déviations de la loi normale se manifestant lorsque l’on sépare les petites échelles des grandes échelles.

Abstract. We examine the statistical properties of nonlinear random waves that are ruled by the one-dimensional defocusing and integrable nonlinear Schrödinger equation (1D-NLSE). Using fast detection techniques in an optical fiber experiment, we observe that the probability density function of light fluctuations is characterized by tails that are lower than those predicted by a Gaussian distribution. Moreover, by applying a band-pass frequency optical filter, we reveal the phenomenon of intermittency, i.e. small scales are characterized by large heavy-tailed deviations from Gaussian statistics, while the large ones are almost Gaussian.

1 Introduction

The way through which nonlinearity and randomness interplay to influence the propagation of waves is of major interest in various fields of investigation, such as e.g., hydrodynamics, wave turbulence, optics or condensed-matter physics. Wave turbulence (WT) theory provides an appropriate framework for the statistical treatment of the interaction of random nonlinear waves that are described by *non-integrable* equations [1]. If third-order nonlinearity and second-order (linear) dispersion dominate other physical effects in a one-dimensional medium, wave propagation is ruled by the 1D-NLSE, which is an *integrable* equation of fundamental importance in various fields of research.

In the focusing regime, the 1D-NLSE possesses soliton and breather solutions that have been recently observed in various physical systems [2–4]. Considering a random input field, these breather solutions may exist embedded in random waves, thus behaving as prototypes of rogue waves that modify the statistical properties of the random input field [5, 6]. In the defocusing regime, the 1D-NLSE has dark or grey soliton solutions. These solutions have also been experimentally observed [7, 8] but the influence of these coherent structures on the statistics of systems of nonlinear random waves is not known.

As discussed in Ref. [9], the WT theory does not provide an appropriate framework for investigating the statistical phenomena described by integrable wave equations, especially in a strongly nonlinear regime. The theoretical analysis of these phenomena enters within the framework of an emerging field of research introduced by Zakharov under the appellation of “integrable turbulence” [9–11]. Although the inverse scattering theory (IST) provides natural tools to tackle problems related to integrable turbulence, only a few experiments made with one-dimensional incoherent waves have been analyzed using IST [12–15]. Up to now, the accurate description of the statistical properties of incoherent waves described by an integrable system is still a complex and open problem.

In this work, we present an optical fiber experiment accurately ruled by the one-dimensional integrable and *defocusing* NLSE [16]. The experiment has been designed to investigate a situation of integrable turbulence and it has been dimensioned in order to capture the entire dynamics of a partially-coherent optical wave having initially a Gaussian statistics. This is usually never achieved in optics where the

spectrum of the incoherent wave is often much broader than the detector bandwidth. Using fast detection techniques, we explore the changes in the global statistics of the incoherent wave occurring in the nonlinear regime and we observe that the PDF of intensity of light fluctuations is characterized by tails that are lower than those predicted by a Gaussian distribution. Implementing an optical filtering technique, we also examine the statistics of intensity of light fluctuations on different scales and we observe that the PDFs show heavy tails that strongly depend on the scales. This reveals an unexpected phenomenon of intermittency that is similar to the one reported in several other wave systems, though they are fundamentally far from being described by an integrable wave equation [17–21].

2 Experimental Setup

Our experimental setup is schematically shown in Fig. 1. Partially coherent light from a source having a Gaussian statistics is injected inside a single-mode fiber acting as a one-dimensional defocusing nonlinear medium. The key element of our setup is the continuous partially-coherent light source. It brings together the abilities of *i*) delivering a beam that is confined in a unique transverse spatial mode, *ii*) having a narrow bandwidth ($\Delta\nu_0 \sim 14$ GHz) and a high power (up to 10 watt) while *iii*) still presenting a stationary Gaussian statistics that is well-controlled and preserved over approximately 7 decades (see curve plotted in black line in Fig. 2). These specific properties are obtained from a particular arrangement in which partially-coherent light from a continuous-wave Ytterbium-doped fiber laser operating around 1064 nm at a power of ~ 5 watt is filtered by a set of bandpass and stopband filters made from fiber Bragg grating mirrors. The filtering process reduces the full width at half maximum (FWHM) of the laser optical spectrum to ~ 14 GHz and it produces partially-coherent light having a Gaussian statistics. The significant decrease of optical power inherently arising from the filtering process is then compensated by the use of an Ytterbium fiber amplifier that does not modify the statistics and the bandwidth of the partially-coherent light.

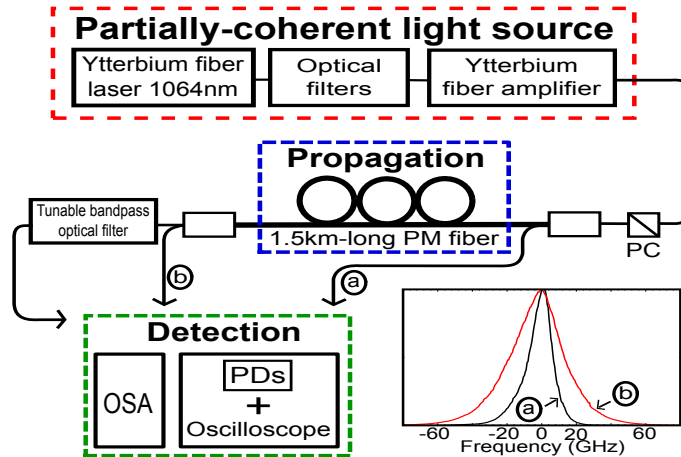


Figure 1. Experimental setup. Linearly-polarized partially-coherent light having a Gaussian statistics is launched inside a polarization maintaining (PM) single-mode fiber through a polarizing cube (PC). Measurement of mean optical power spectra of input and output light waves is made by using an optical spectrum analyzer (OSA). As a result of nonlinear propagation inside the PM fiber, the spectrum broadens from 14 GHz to 32 GHz. Direct time detection of light power fluctuations $P(t)$ is made by using fast photodiodes (PDs) and a 36 GHz-oscilloscope. A tunable optical bandpass filter with a narrow-bandwidth of 6 GHz is used to analyze fluctuations of output light on separate time scales.

The partially-coherent wave emitted by the continuous light source is launched inside a 1.5 km-long polarization-maintaining (PM) single-mode optical fiber after being transmitted by a polarizing cube.

The light wave acquires a linear polarization direction that is maintained all along the PM fiber owing to its very short birefringence length (~ 3 mm). With this precaution about the linear state of light polarization, it is very well justified to consider that our experiment deals with the nonlinear propagation along the z direction of a *scalar* incoherent optical field $A(z, t)$. The optical power P_0 launched inside the PM fiber is ~ 205 mW. As the losses of the PM fiber at 1064 nm are approximately of 1 dB/km, the optical power decreases from ~ 205 mW to ~ 145 mW over the propagation distance $L = 1.5$ km. Rigorously speaking, dissipation cannot be fully ignored in our experiment. However, as it will be discussed more in details from numerical simulations, it does not play a significant role in the statistical features reported in this paper.

Our optical fiber experiment has been dimensioned in order to keep the bandwidth of light fluctuations below the bandwidth of the detection setup. The stochastic dynamics of light power fluctuations $P(t)$ is simultaneously captured at the input and output ends of the PM fiber by using two fast photodiodes connected to a fast oscilloscope having a bandwidth of 36 GHz. The electrical bandwidth of the two photodiodes is of 38 GHz. For each of its two channels, the oscilloscope records in a single shot an ensemble of 40×10^6 points at a sampling rate of 80 GSa/s (one point every 12.5 ps) in a total duration of 500 μ s. Despite the fact that the detection bandwidth is just a little bit wider than the FWHM of the output spectrum (~ 32 GHz, see Fig. 1), the statistical analysis that is made from the recorded time series is weakly influenced by the finite detection bandwidth.

3 Experimental Results

Fig. 2 compares the PDFs for the power fluctuations of the partially-coherent light at the input and at the output of the PM fiber. The PDF for intensity fluctuations of light at the input of the fiber is exponentially decaying (Rayleigh distribution), which means that the statistics of the input field is actually Gaussian. As a result of nonlinear propagation in the defocusing medium, the PDF of the output light shows tails lower than those defined by the Rayleigh distribution. Our results are consistent with the one obtained in Ref. [12], where a different experimental setup was adopted. Optical experiments reported in Ref. [12] are not placed in the time domain but in the spatial domain. They examine the diffraction of an intense beam of spatially incoherent light in a medium with a thermal defocusing nonlinear response. Although experiments reported in Ref. [12] evidence statistical features similar to those plotted in Fig. 2, the physics of the two wave systems cannot be compared in a straightforward way. Experiments of diffraction in a nonlinear medium indeed involve a spatially-localized field propagating over a zero background of light intensity whereas our experiment involves a continuous wave propagating over a non-zero DC background. As pointed out in Ref. [9], the theoretical problem of nonlinear statistical changes observed in our experiment should be addressed by IST tools developed for quasi-periodic functions rather than by usual IST tools related to decaying fields [13–15].

The output end of the nonlinear fiber can be connected to a tunable bandpass optical filter (see Fig. 1) having a 6 GHz-bandwidth that is much narrower than the bandwidth of light fluctuations (~ 32 GHz). Observing the fluctuations of stochastic light at the output of this tunable bandpass filter reveals the occurrence of an intermittent behavior. Detuning the central frequency of the optical filter from the center of the spectrum to its wings and measuring the PDFs of the power fluctuations $P(t)$ at the output of the optical filter, we observe a continuous distortion of the PDFs, see Fig. 3. Increasing the frequency detuning, the PDF moves from the Rayleigh distribution to distributions having tails that become increasingly larger. In other words, the statistics of the light field is Gaussian at small frequency scales, and deviations from Gaussian statistics become larger and larger when considering fluctuations at larger and larger frequency scales. The experimental observation reported in Fig. 3 can be related in a qualitative way to several observations of the intermittency phenomenon previously made in wave turbulence [17–19], solar wind [20], or in the Faraday experiment [21]. However, it must be emphasized that previous works have investigated two- or three-dimensional wave systems that are far from being integrable. On the other hand, our results show that the intermittency phenomenon can also be found in a nearly-integrable wave system accurately described by the one-dimensional NLSE.

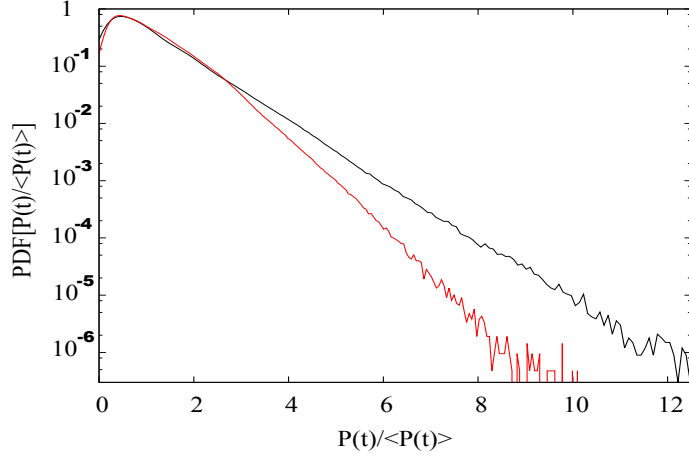


Figure 2. Experiments. Global PDFs measured at the input (black line) and at the output (red line) ends of the PM fiber without using the optical bandpass filter.

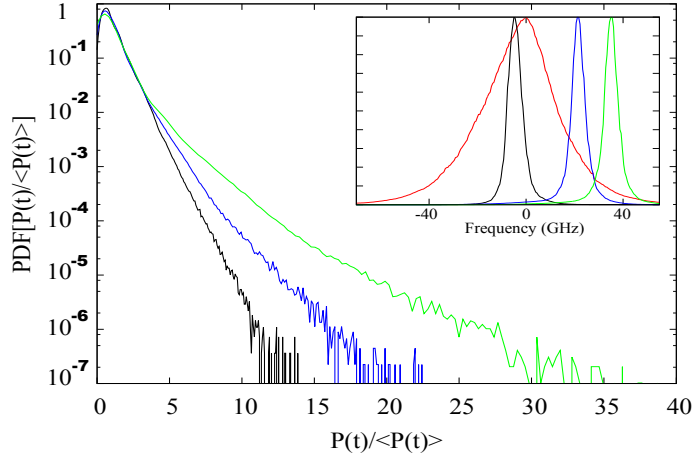


Figure 3. Experiments. PDFs measured at the output of the optical bandpass filter by detuning its central frequency by ~ -5 GHz (black line), ~ 21 GHz (blue line) and ~ 35 GHz (green line) from the center of the output spectrum. Inset: corresponding power spectra measured at the output of the tunable bandpass optical filter. The ~ 32 GHz-wide power spectrum plotted in red line is measured without bandpass filter at the output of the PM fiber.

As a matter of fact, statistical features shown in Fig. 2 and 3 dominantly arise from the interplay between third-order (Kerr) nonlinearity and second-order group velocity dispersion (GVD). They can be described by the following one-dimensional NLSE

$$i \frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = -\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} + \gamma |A(z, t)|^2 A(z, t), \quad (1)$$

where $\beta_2 = +20 \text{ ps}^2 \cdot \text{km}^{-1}$ is the second-order GVD parameter and $\gamma = 6.2 \text{ W}^{-1} \cdot \text{km}^{-1}$ is the nonlinear Kerr coefficient of the fiber. As the bandwidth of light spectrum remains relatively narrow, dispersive effects of order higher than 2 do not influence light propagation in a significative way. From the observation of the spectra of forward- and backward-propagating light, we have carefully checked that the amount of Stokes light arising from stimulated Brillouin scattering and stimulated Raman scattering remains at a very negligible level. Therefore, these two nonlinear effects do not influence light propagation inside the PM fiber. Although dissipation plays a perturbative role, Eq. (1) describes our incoherent light wave system in an accurate way.

4 Numerical simulations

We have conducted a series of numerical simulations of Eq. (1) with random initial conditions. The field $A(z=0, t)$ used as initial condition is made from a discrete sum of uncorrelated Fourier modes with random phases and amplitudes [1]. It is prepared in such a way that the PDF for the real and imaginary parts of each individual Fourier mode is Gaussian. Experimental results plotted in Fig. 2 and Fig. 3 can be reproduced with a very good accuracy from precise numerical simulations taking into account the exact shape of the input spectrum, the fiber losses, the finite bandwidth of the tunable optical filter and the finite detection bandwidth. In the experiment, the nonlinear Kerr length $L_{NL} = 1/(\gamma P_0)$ is of 0.8 km and the linear dispersive length $L_D = 1/(\beta_2(2\pi\Delta\nu_0)^2)$ is of 6.5 km. With a propagation distance of $L = 1.5$ km, the experiment captures a transient evolution in which the nonlinear Kerr effect strongly dominates the linear dispersive effect.

To investigate the asymptotic evolution of the wave system, we have performed numerical simulations of Eq. (1) at a propagation distance that is one order of magnitude greater than the propagation distance reached in the experiment. After a transient evolution of a few kilometers, the wave system reaches a statistically stationary state in which the mean optical power spectrum and the PDFs no longer change with propagation distance. After a propagation distance $z = 15$ km, they assume the shapes shown in Fig. 4 (a–c).

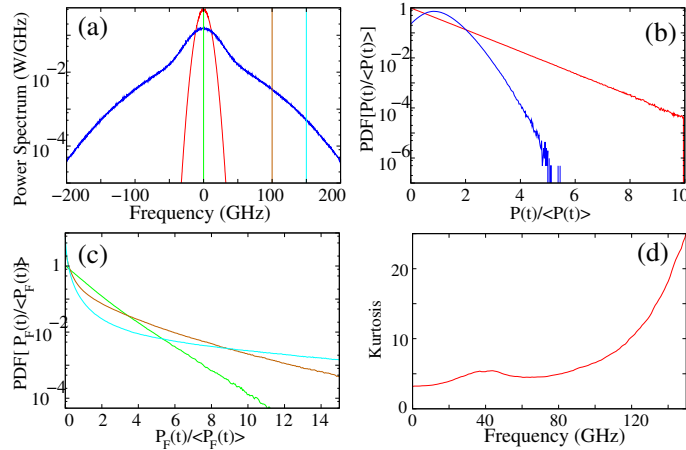


Figure 4. (Color online) Numerical simulations of Eq. (1) between $z = 0$ km and $z = 15$ km with $P_0 = 205$ mW, $\Delta\nu_0 = 14$ GHz, $\beta_2 = +20$ ps² · km⁻¹, $\gamma = 6.2$ W⁻¹ · km⁻¹. (a) Input (red line) and output (blue line) mean power spectra of the partially-coherent wave. (b) Input (red line) and output (blue line) PDFs for $P(t) = |A(z, t)|^2$. (c) PDFs for the power fluctuations $P_F(t)$ found at the output of an ideal bandpass filter centered at $\nu_0 = 0$ GHz (green line), $\nu_0 = 100$ GHz (brown line), $\nu_0 = 150$ GHz (cyan line). Vertical colored lines in (a) indicate the corresponding central frequencies. (d) Kurtosis κ of fluctuations at the output of the bandpass frequency filter.

The field $A(z = L, t) = \int d\nu \tilde{A}(z = L, \nu) e^{i2\pi\nu t}$ computed at $z = L$ has been filtered by an ideal bandpass frequency filter centered at the frequency ν_0 . Fig. 4(c) shows the PDFs for the power fluctuations $P_F(t) = |S_{\nu_0}^{\Delta\nu}(t)|^2$ of the filtered field $S_{\nu_0}^{\Delta\nu}(t) = \int_{\nu_0 - \Delta\nu}^{\nu_0 + \Delta\nu} d\nu \tilde{A}(z = L, \nu) e^{i2\pi\nu t}$ for a bandwidth $2\Delta\nu = 6$ GHz, as in the experiment. As shown in Fig. 4(c), the PDF computed in the center of the spectrum follows the exponential distribution, whereas the PDFs computed in the wings of the spectrum show tails that become larger and larger as ν_0 increases. Considering the real part $R(t) = \text{Re}[S_{\nu_0}^{\Delta\nu}(t)]$ of the filtered field, the intermittency phenomenon can be quantified in a more accurate way through the measurement of the kurtosis $\kappa = \langle R(t)^4 \rangle / \langle R(t)^2 \rangle^2$ of $R(t)$. As shown in Fig. 4(d), the deviations from ~ 3 of the value of κ for frequencies greater than ~ 100 GHz clearly indicate an intermittent behavior. The features evidenced in Fig. 4(c) and 4(d) do not depend qualitatively on the exact nature of the

spectral filtering process: similar deviations from Gaussianity are also observed at the output of ideal highpass or one-mode frequency filters.

5 Conclusion

Summarizing, we have performed a nonlinear fiber optic experiment in which light propagation is accurately ruled by the one-dimensional defocusing and integrable NLSE. We have examined the changes in the statistics of a partially coherent wave that has initially a Gaussian statistics. Global changes in the statistics of the light field have been evidenced and the occurrence of PDFs having tails lower than those defined by the Gaussian distribution has been reported. Using bandpass spectral filters, we have evidenced an intermittency phenomenon in a wave system that is close to integrability. Because of the universality of the NLSE, we expect that similar results could be obtained in different fields where the dynamics is close to be integrable.

Acknowledgments : This work was supported by the Labex CEMPI (ANR-11-LABX-0007-01) and by the French National Research Agency (ANR-12-BS04-0011 OPTIROC). M.O. thanks the University of Lille where this work started during a Visiting Professor program. M.O. was supported also by ONR Grant No. 214 N000141010991 and by MIUR Grant PRIN 2012BFNWZ2.

References

1. S. NAZARENKO, *Wave Turbulence*, Lecture Notes in Physics, vol. **825**, Springer (2011).
2. B. KIBLER *et al.*, *Nat. Physics*, **6**, 790–795 (2010).
3. A. CHABCHOUB *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 204502 (2011).
4. H. BAILUNG *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 255005 (2011).
5. K. B. DYSTHE & K. TRULSEN, *Phys. Scr.*, **T82**, 48–52 (1999).
6. M. ONORATO *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 5831–5834 (2001).
7. A. M. WEINER *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 2445–2448 (1988).
8. A. CHABCHOUB *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 124101 (2013).
9. V. E. ZAKHAROV, *Stud. Appl. Math.*, **122**, 219 (2009).
10. V. E. ZAKHAROV & A. A. GELASH, *Phys. Rev. Lett.*, **111**, 054101 (2013).
11. E.N. PELINOVSKY *et al.*, *Phys. Lett. A*, **377**, 272 (2013).
12. Y. BROMBERG *et al.*, *Nat. Photonics*, **4**, 721 (2010).
13. F. G. BASS *et al.*, *Sov. Phys. JETP*, **65**, 245 (1987).
14. S. A. DEREYANKO & J. E. PRILEPSKY, *Phys. Rev. E*, **78**, 046610 (2008).
15. S. A. DEREYANKO & E. SMALL, *Phys. Rev. A*, **85**, 053816 (2012).
16. S. RANDOUX *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 113902 (2014).
17. S. NAZARENKO *et al.*, *J. Fluid Mech.*, **642**, 395–420 (2010).
18. É. FALCON *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 154501 (2007); P. DENISSENKO *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 014501 (2007).
19. É. FALCON *et al.*, *Europhys. Lett.*, **90**, 34005 (2010).
20. O. ALEXANDROVA *et al.*, *Planet. Space Sci.*, **55**, 2224–2227 (2007).
21. E. BOSCH & W. VAN DE WATER, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 3420–3423 (1993).
22. S. VERGELES & S. K. TURITSYN, *Phys. Rev. A*, **83**, 061801(R) (2011).

Dynamos stellaires : symétries et modulations

Raphaël Raynaud^{1,2}

¹ LRA, Département de Physique de l'ENS, 24 rue Lhomond, 75252 Paris Cedex 5, France

² LERMA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, UMR 8112, F-75014, Paris, France
 raphael.raynaud@ens.fr

Résumé. Le Soleil présente une activité magnétique cyclique interrompue de manière irrégulière par de grands minima dont de nombreuses études ont tenté d'établir l'origine. Ainsi, des dynamos de champ moyen, en accord avec des modèles de basse dimension, ont permis d'interpréter la dynamique du champ magnétique selon deux grandes classes de modulations. Nous confrontons ces résultats à la dynamique de dynamos obtenues par simulations numériques directes d'un écoulement convectif dans une coquille sphérique en rotation.

Abstract. The Sun displays an intermittent cyclic magnetic activity interrupted by grand minima. Mean-field dynamo models revealed two generic types of modulation, which are also recovered in low order models based on symmetry considerations. We report similar dynamical behaviors observed in direct numerical simulations of spherical convectively driven dynamos, and analyze the route to intermittency.

1 Introduction

Bien que mis en évidence indirectement par les tâches solaires observées de manière systématique en Occident dès le début du XVII^e siècle, le champ magnétique demeure depuis 1918 l'un des principaux objets d'étude de la physique solaire, qui achoppe toujours à rendre compte de sa génération et de sa dynamique. L'activité magnétique du Soleil varie en effet selon un cycle de période égale à 22 ans dont l'amplitude est modulée de manière aperiodique sur une échelle de temps de 80 ans environ. De plus, l'analyse de l'abondance de certains isotopes ¹ a permis d'identifier 27 périodes d'activité réduite au cours des dernières 11 000 années, espacées de manière irrégulière à des intervalles de 200–300 ans, et dont la plus célèbre est le minimum de Maunder entre 1645 et 1715 (cf. [1] et références incluses). Plus généralement, le projet entrepris par Wilson en 1968 a permis de détecter des activités similaires sur d'autres étoiles de type solaire en mesurant leur flux d'émission de CaII H+K [2]. Il est généralement admis que le champ magnétique de ces objets est maintenu contre la dissipation ohmique par effet dynamo. De nombreux modèles de champ moyen reproduisent en partie les caractéristiques du cycle solaire dont les modulations temporelles pourraient être de nature stochastique [3, 4] ou chaotique, étant donné le caractère intrinsèquement non linéaire du système (cf. [5] et références incluses). Une approche complémentaire consiste à dériver des modèles de basse dimension contraints par les symétries du système, permettant ainsi d'établir le caractère générique de la dynamique tout en s'affranchissant des problèmes liés à la modélisation des effets de champ moyen. Ces approches combinées ont permis d'identifier deux classes de modulations, le type 1 étant caractérisé par des changements de parité sans modulation d'amplitude et le type 2 par des modulations d'amplitude sans changement de parité [6]. En outre, les interactions entre modes de différente parité conduisent aisément à des champs magnétiques fortement localisés dont il existe plusieurs exemples observationnels [7, 8] et expérimentaux [9]. Nous confrontons ces résultats à la dynamique du champ magnétique obtenu par simulations numériques directes d'un écoulement convectif dans une coquille sphérique en rotation.

1. Le ¹⁰Be contenu dans les calottes polaires et le ¹⁴C dans les cernes des arbres. L'incidence des rayons cosmiques sur Terre influe sur leur production qui s'avère ainsi relativement anti-corrélée avec l'activité solaire.

2 Modèle

Nous utilisons l'approximation anélastique [10] pour modéliser un fluide stratifié conducteur, en convection dans une coquille sphérique de largeur $d = r_o - r_i$ et de facteur de forme $\chi = r_i/r_o$, en rotation à la vitesse angulaire $\Omega \mathbf{e}_z$. Le fluide est assimilé à un gaz parfait caractérisé par ses coefficients de viscosité cinématique ν , de diffusivité turbulente d'entropie κ , de chaleur spécifique c_p et de diffusivité magnétique η , tous supposés constants. La convection est engendrée par un gradient d'entropie Δs imposé entre la sphère interne et la sphère externe. Si l'on suppose que le champ de gravité résulte d'une distribution de masse centrale, $\mathbf{g} = -GM\hat{\mathbf{r}}/r^2$ avec G la constante de gravitation et M la masse contenue dans la sphère interne, alors l'état de référence polytropique donné par l'équilibre du système anélastique prend la forme

$$\bar{P} = P_c w^{n+1}, \quad \bar{\rho} = \rho_c w^n, \quad \bar{T} = T_c w, \quad w = c_0 + \frac{c_1 d}{r}, \quad (1)$$

avec

$$c_0 = \frac{2w_0 - \chi - 1}{1 - \chi}, \quad c_1 = \frac{(1 + \chi)(1 - w_0)}{(1 - \chi)^2}, \quad w_0 = \frac{\chi + 1}{\chi \exp(N_\rho/n) + 1}, \quad w_i = \frac{1 + \chi - w_0}{\chi}, \quad (2)$$

où n dénote l'index polytropique et $N_\rho \equiv \ln[\bar{\rho}(r_i)/\bar{\rho}(r_o)]$. Les valeurs P_c , ρ_c et T_c désignent respectivement la pression, la densité et la température de référence, évaluées à mi-chemin entre la sphère interne et la sphère externe, et servent d'unité pour les variables correspondantes. Les autres variables sont adimensionnées en utilisant les unités suivantes : d est pris comme unité de longueur, d^2/η comme unité de temps, Δs comme unité d'entropie et $\sqrt{\Omega \rho_c \mu \eta}$ comme unité de champ magnétique, où μ désigne la perméabilité magnétique. Les équations MHD anélastiques s'écrivent alors [11]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \text{Pm} \left[-\frac{1}{\text{E}} \nabla \frac{P'}{w^n} + \frac{\text{Pm}}{\text{Pr}} \text{Ra} \frac{s}{r^2} \hat{\mathbf{r}} - \frac{2}{\text{E}} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v} + \mathbf{F}_\nu + \frac{1}{\text{E} w^n} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right], \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = w^{-n-1} \frac{\text{Pm}}{\text{Pr}} \nabla \cdot (w^{n+1} \nabla s) + \frac{\text{Di}}{w} [\text{E}^{-1} w^{-n} (\nabla \times \mathbf{B})^2 + Q_\nu], \quad (5)$$

avec les contraintes $\nabla \cdot (w^n \mathbf{v}) = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. La force visqueuse \mathbf{F}_ν dans (3) est donnée par $\mathbf{F}_\nu = w^{-n} \nabla \mathbf{S}$, avec $S_{ij} = 2w^n (e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v})$ et $e_{ij} = \frac{1}{2} (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$. Enfin, le paramètre de dissipation Di et le chauffage visqueux Q_ν dans (5) ont pour expression $\text{Di} = c_1 \text{Pr} / (\text{Pm} \text{Ra})$ et $Q_\nu = 2 [e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2]$. Aux limites interne et externe, nous imposons des conditions de glissement pour le champ de vitesse et le champ magnétique se raccorde à un champ potentiel. Ce système d'équations est contrôlé par sept nombres sans dimension : le nombre de Rayleigh $\text{Ra} = GMd\Delta s / (\nu \kappa c_p)$, le nombre d'Ekman $\text{E} = \nu / (\Omega d^2)$, le nombre de Prandtl $\text{Pr} = \nu / \kappa$, le nombre de Prandtl magnétique $\text{Pm} = \nu / \eta$, ainsi que le facteur de forme χ , l'index polytropique n et le contraste de densité N_ρ qui définissent l'état de référence. On fixe par la suite $\text{E} = 10^{-4}$, $\text{Pr} = 1$, $\text{Pm} = 1$, $\chi = 0,35$, $n = 2$ et $N_\rho = 0,5$, ce qui correspond à une faible stratification. Dans ces conditions, le Rayleigh critique pour le seuil linéaire de convection vaut $\text{Ra}_c = 3,34 \times 10^5$ [12].

Le système d'équations ci-dessus a été intégré entre 5 et 60 temps de diffusion magnétique avec la version anélastique du code PARODY [12, 13]. L'analyse des simulations repose principalement sur le calcul des énergies cinétique $Ek = \frac{1}{2} \int_V w^n \mathbf{v}^2 dv$ et magnétique $Eb = \text{Pm} / (2\text{E}) \int_V \mathbf{B}^2 dv$. Afin d'étudier les interactions entre les familles de symétrie par rapport au plan équatorial, nous définissons les énergies cinétiques symétrique et antisymétrique EkS et EkA , calculées à partir des écoulements symétrique et antisymétrique. On définit de même les énergies magnétiques symétrique EbS et antisymétrique EbA correspondant aux symétries dipolaire et quadrupolaire.

3 Résultats

En fonction de la géométrie du champ observé, les modèles de dynamos numériques se répartissent en général en deux catégories, la différence étant faite entre les dynamos dipolaires, dominées par un

dipole axial, et les dynamos multipolaires, pour lesquelles le vent zonal² (Ek_T^{ax}) joue un rôle essentiel dans la régénération du champ magnétique toroïdal par effet Ω [14]. Ces dynamos apparaissent suite à une bifurcation de Hopf donnant naissance à des solutions oscillantes, qui peuvent en théorie être de symétrie dipolaire ou quadrupolaire [15]. Ces solutions sont souvent interprétées en terme d'ondes de Parker dont la période est de l'ordre de 0,1 temps de diffusion magnétique. Dans cette étude, nous nous concentrons sur les modulations à basse fréquence de cette branche, qui seule persiste à bas Reynolds magnétique et qui est alors dominée par un mode non axisymétrique $m = 1$ [16]. Proche du seuil dynamo³ ($Ra = 1,4 \times 10^6$), nous observons une nouvelle forme de bistabilité entre solutions de symétrie dipolaire ou quadrupolaire. Les écoulements associés ne brisent pas la symétrie équatoriale et se caractérisent par un mode de convection $m = 9$ dans le cas dipolaire et $m = 8$ dans le cas quadrupolaire. D'autre part, les fluctuations de l'énergie cinétique sont plus importantes pour la solution dominée par la symétrie dipolaire. L'augmentation du nombre de Rayleigh conduit à la déstabilisation de la solution quadrupolaire et à l'apparition d'un cycle limite pouvant être décrit comme l'apparition d'une modulation de type 1 : la symétrie dominante du champ magnétique change périodiquement alors que l'énergie magnétique totale reste relativement constante. Ce cycle coexiste avec la solution de symétrie dipolaire, puis finit par perdre sa stabilité pour $Ra = 1,49 \times 10^6$. L'évolution de ces différentes solutions avec l'augmentation du nombre de Rayleigh est synthétisée figure 1 (a). En outre, lorsque les énergies magnétique et

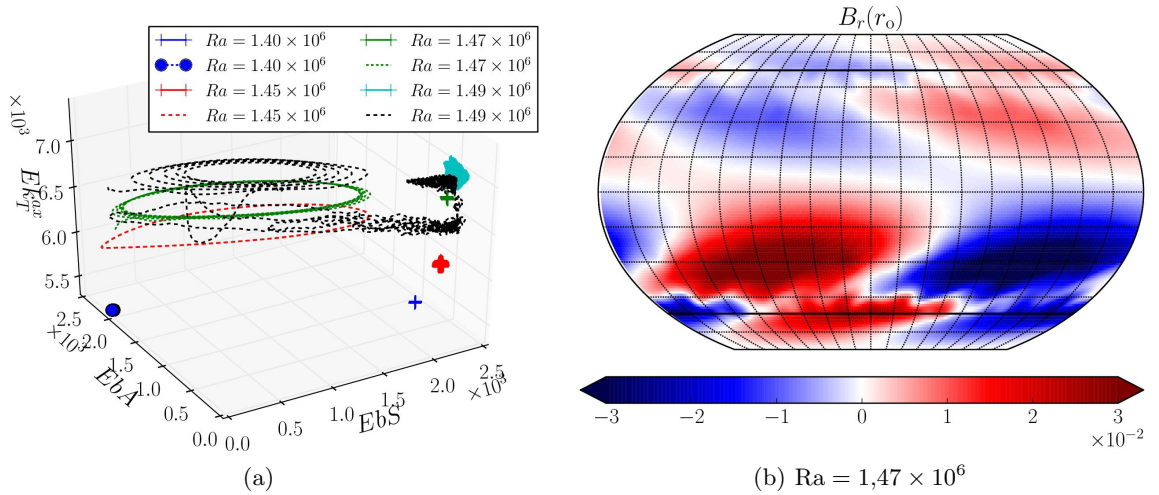


Figure 1. (a) : Bistabilité et déstabilisation du cycle limite. (b) : Instantané du champ magnétique radial à la surface lorsque la symétrie dipolaire domine le cycle limite à $t = 48,735$. On note la localisation hémisphérique du champ magnétique ainsi que la domination claire du mode $m = 1$.

antisymétrique sont du même ordre, le champ magnétique tend à être confiné dans un hémisphère, comme l'illustre la figure 1 (b). Cette forte localisation du champ magnétique revient périodiquement au cours du cycle limite qui est caractérisé par l'interaction des deux familles de symétrie du champ magnétique. Comme on le voit figure 2 (a), ce couplage s'accompagne d'une faible brisure de la symétrie équatoriale de la part de l'écoulement, en adéquation avec les conditions expérimentales propices à l'observation d'un champ magnétique localisé [9]. Enfin, notons que le cycle limite semble apparaître avec une période infinie dont le carré décroît linéairement avec Ra, comme le montre la figure 2 (b). La relation $f \propto \sqrt{\mu}$

2. Le vent zonal (rotation différentielle) est défini comme l'énergie cinétique toroïdale axisymétrique Ek_T^{ax} .

3. Dans ce régime de paramètres, le Rayleigh critique pour le seuil dynamo est tel que $Ra_d > 10^6$.

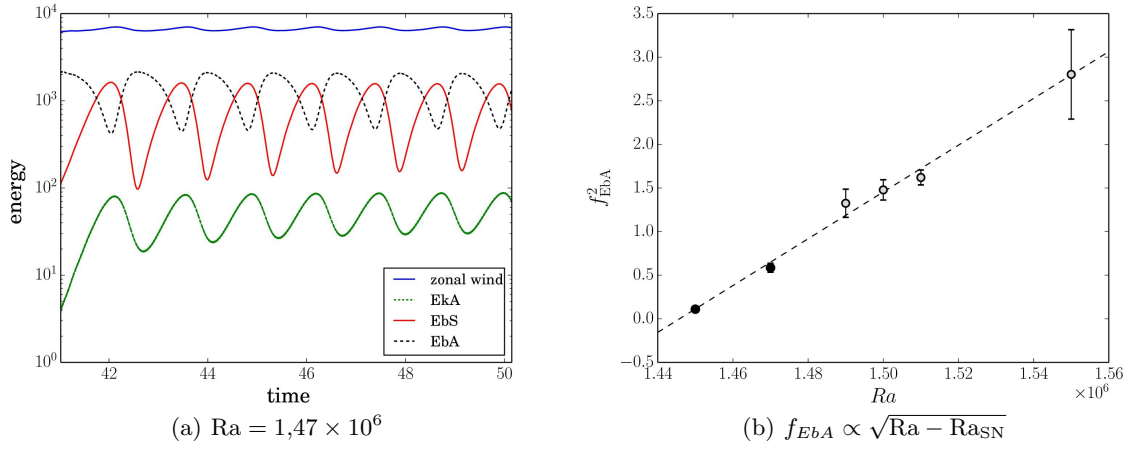


Figure 2. (a) : Séries temporelles de différentes énergies dans le cas du cycle limite. (b) : Évolution en fonction de Ra du carré de la fréquence du cycle calculée à partir des séries temporelles de l'énergie magnétique antisymétrique. Les ronds gris indiquent que le cycle n'est plus stable. L'estimation du seuil donne la valeur $Ra_{SN} \sim 1,446 \times 10^6$ (pointillés). Les barres d'erreurs indiquent les écarts-types.

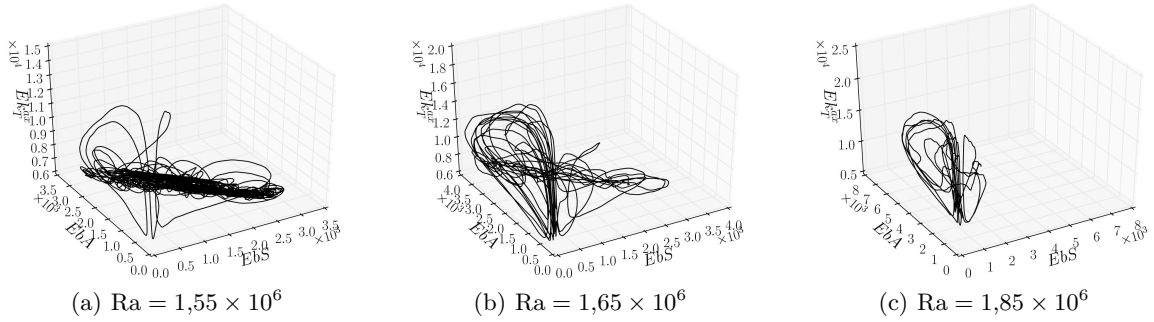


Figure 3. Progressive apparition de la modulation de type 2 avec l'augmentation de Ra .

reliant la fréquence du cycle à l'écart au seuil de la bifurcation indique que ce cycle limite résulte de la collision d'un point fixe stable et d'un point fixe instable (nœud-col).

Lorsque l'on poursuit l'augmentation du nombre de Rayleigh, des modulations d'amplitude apparaissent et l'on passe progressivement d'une modulation de type 1 à une modulation de type 2 pour laquelle le champ magnétique est alors fortement modulé en amplitude mais reste dominé par la symétrie quadrupolaire (cf. figure 3). La dynamo passe alors par des minima dont la fréquence augmente avec Ra . La figure 4 (a) illustre plus particulièrement l'apparition de la modulation d'amplitude, caractérisée par la décroissance intermittente de l'énergie magnétique suivie d'une soudaine augmentation du vent zonal. Entre ces sursauts du vent zonal, les phases saturées sont caractérisées par des échanges d'énergie entre les deux familles de symétries du champ magnétique. Il est même possible de faire la distinction entre les périodes dominées par la symétrie dipolaire et celles dominées par la symétrie quadrupolaire. Le système semble alors revisiter l'ancien cycle limite, comme on peut le voir pour $t \sim 40$ sur la figure 4 (a).

En revanche, les séries temporelles sont trop courtes pour permettre une analyse statistique des modulations d'amplitude de l'énergie magnétique illustrées figure 4 (b). On observe que l'énergie magnétique est bien majoritairement dominée par sa composante antisymétrique EbA et que les minima semblent parfois causés par la croissance graduelle de la composante symétrique EbS . Ce scénario pourrait rappeler une forme d'intermittence *in-out* décrite par certaines études (cf. [17] et références incluses). Toutefois, si la symétrie dipolaire est artificiellement annulée à un instant donné, la modulation d'amplitude persiste,

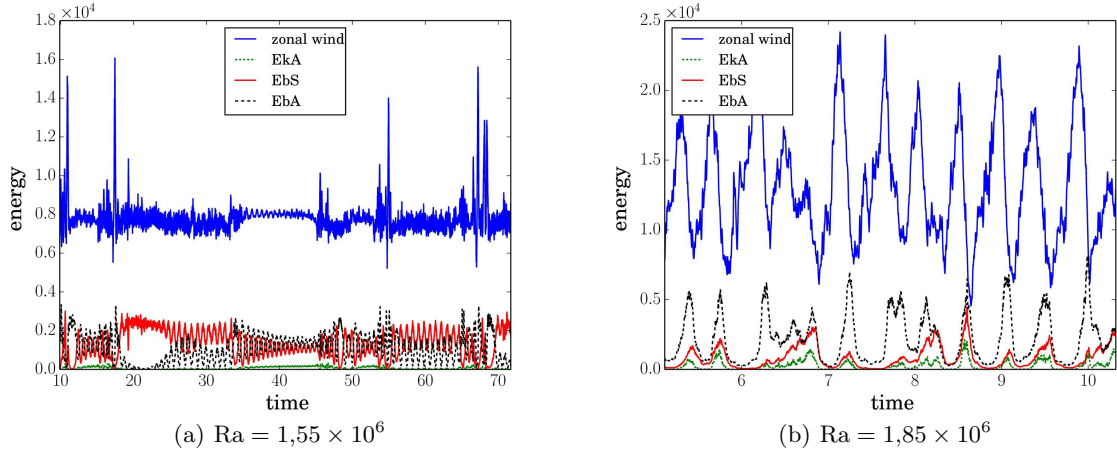


Figure 4. Séries temporelles de différentes énergies dans le cas de la modulation de type 2.

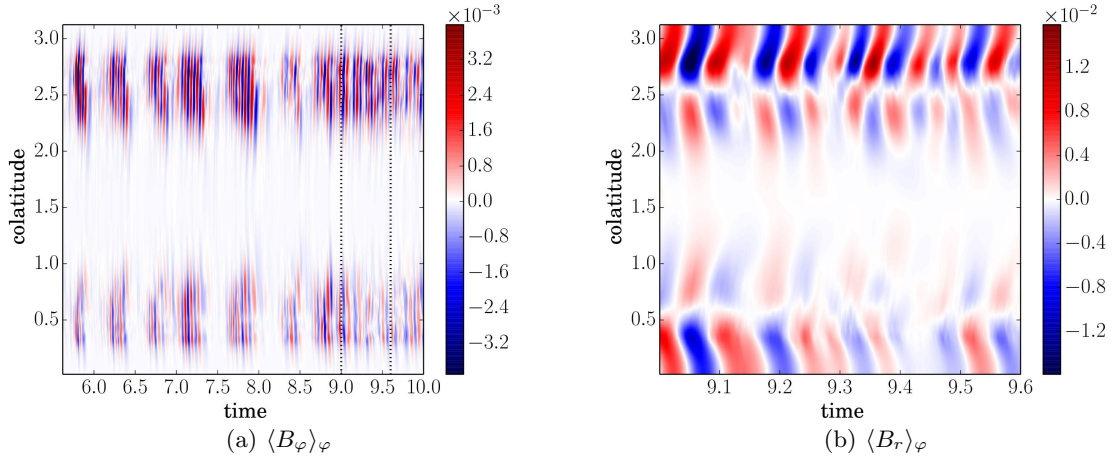


Figure 5. Diagrammes papillon obtenus pour $Ra = 1,65 \times 10^6$ à partir des composantes azimutale (a) et radiale (b) du champ magnétique mesuré sous la surface et moyenné en azimut. La figure (b) correspond à la période délimitée par les lignes pointillées sur la figure (a).

mais avec un autre temps caractéristique. Par ailleurs, la durée moyenne d'une phase saturée entre deux minima peut croître significativement suite à une augmentation de 10 % de Pr ou une diminution de 10 % de Pm . Nous avons également vérifié à l'aide de simulations sans champ magnétique que l'on ne se trouve pas en présence d'oscillations de relaxation du vent zonal : ces modulations ne sont donc pas d'origine purement hydrodynamique.

Enfin, notons que la coexistence des deux types de modulations se répercute sur les diagrammes papillons correspondants sous forme de motifs intéressants qui rappellent en partie les observations solaires. On distingue ainsi les fortes modulations d'amplitude sur la figure 5 (a) alors que la figure 5 (b) met en évidence un changement de symétrie du champ lors d'une phase saturée. De plus, l'activité magnétique migre préférentiellement vers les pôles à haute latitude et vers l'équateur à basse latitude.

4 Conclusion

Les simulations numériques directes présentées mettent en évidence un nouveau type de bistabilité entre dynamos multipolaires de différentes symétries. Bien que dominées par un mode non axisymétrique $m = 1$, ces dynamos présentent un riche comportement dynamique ayant certains points communs avec les études précédentes reposant sur des modèles de champ moyen ou de basse dimension. Toutefois, les détails de la structure de bifurcation semblent ici plus complexes. Nous avons ainsi relié l'apparition d'une modulation de type 1 à la création d'un cycle limite suite à une bifurcation nœud-col où collisionnent un point fixe stable de symétrie quadrupolaire et un point fixe instable de symétrie dipolaire. L'écoulement brise alors faiblement la symétrie équatoriale et le couplage de modes de différentes parités s'accompagne de la localisation périodique du champ magnétique dans un hémisphère. L'augmentation du nombre de Rayleigh conduit à la déstabilisation de ce cycle limite et la dynamo entre alors progressivement dans un régime chaotique correspondant à une modulation de type 2. Ce régime est en effet caractérisé par l'occurrence de minima d'énergie magnétique suivis d'une forte croissance du vent zonal. L'analyse statistique de ces minima mérite d'être approfondie, tout comme l'influence des nombres de Prandtl thermique et magnétique sur la dynamique du système.

Références

1. P. CHARBONNEAU, *Solar and Stellar Dynamos*, Saas-Fee Advanced Course 39, Springer-Verlag (2013).
2. K. OLÁH, Z. KOLLÁTH, T. GRANZER, K. G. STRASSMEIER, A. F. LANZA, S. JÄRVINEN, H. KORHONEN, S. L. BALIUNAS, W. SOON, S. MESSINA & G. CUTISPOTO, Multiple and changing cycles of active stars. II. Results, *Astronom. Astrophys.*, **501**, 703–713 (2009).
3. D. SCHMITT, M. SCHUESSLER & A. FERRIZ-MAS, Intermittent solar activity by an on-off dynamo, *Astron. Astrophys.*, **311**, L1–L4 (1996).
4. A. R. CHOUDHURI & B. B. KARAK, Origin of grand minima in sunspot cycles, *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 171103 (2012).
5. *Mathematical Aspects of Natural Dynamos*, édité par E. DORMY & A. M. SOWARD, CRC Press (2007).
6. E. KNOBLOCH, S. M. TOBIAS & N. O. WEISS, Modulation and symmetry changes in stellar dynamos, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **297**, 1123–1138 (1998).
7. D. SOKOLOFF & E. NESME-RIBES, The Maunder minimum: A mixed-parity dynamo mode?, *Astron. Astrophys.*, **288**, 293–298 (1994).
8. B. LANGLAIS & Y. QUESNEL, New perspectives on Mars' crustal magnetic field, *C. R. Geosci.*, **340**, 791–800 (2008).
9. B. GALLET, S. AUMAÎTRE, J. BOISSON, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, N. BONNEFOY, M. BOURGOIN, P. ODIER, J.-F. PINTON, N. PLIHON, G. VERHILLE, S. FAUVE & F. PÉTRÉLIS, Experimental Observation of Spatially Localized Dynamo Magnetic Fields, *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 144501 (2012).
10. S. I. BRAGINSKY & P. H. ROBERTS, Equations governing convection in earth's core and the geodynamo, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **79**, 1–97 (1995).
11. C. A. JONES, P. BORONSKI, A. S. BRUN, G. A. GLATZMAIER, T. GASTINE, M. S. MIESCH & J. WICHT, Anelastic convection-driven dynamo benchmarks, *Icarus*, **216**, 120–135 (2011).
12. M. SCHRINNER, L. PETITDEMANGE, R. RAYNAUD & E. DORMY, Topology and field strength in spherical, anelastic dynamo simulations, *Astron. Astrophys.*, **564**, A78 (2014).
13. E. DORMY, P. CARDIN & D. JAULT, MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **160**, 15–30 (1998).
14. M. SCHRINNER, L. PETITDEMANGE & E. DORMY, Dipole Collapse and Dynamo Waves in Global Direct Numerical Simulations, *Astrophys. J.*, **752**, 121 (2012).
15. S. TOBIAS, Modulation of solar and stellar dynamos, *Astron. Nachr.*, **323**, 417–423 (2002).
16. R. RAYNAUD, L. PETITDEMANGE & E. DORMY, Influence of the mass distribution on the magnetic field topology, *Astron. Astrophys.*, **567**, A107 (2014).
17. D. MOSS & J. BROOKE, Towards a model for the solar dynamo, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **315**, 521–533 (2000).

Analyse taille finie d'une crise de fluctuations dans l'écoulement de Couette plan transitionnel

Joran Rolland

IAU, Frankfurt Universität, Altenhöferallee 1, Frankfurt, Deutschland
rolland@iau.uni-frankfurt.de

Résumé. Ce compte-rendu présente l'étude d'une crise de fluctuation se déroulant à la disparition de la modulation laminaire-turbulente de l'écoulement de Couette plan (PCF). La modulation prend la forme de bandes, obliques par rapport à la direction de l'écoulement de base. Lorsque que l'on augmente le nombre de Reynolds, on peut voir apparaître des fluctuations d'orientation. De la même manière, lorsque le domaine est assez grand pour contenir plusieurs longueurs d'onde de la modulation, de la coexistence entre les deux orientations peut se manifester spontanément. Afin de quantifier le phénomène, on simule l'écoulement de Couette plan et l'on mesure la fonction de réponse (χ) de l'amplitude de la modulation (M) en fonction du nombre de Reynolds, pour des domaines de tailles croissantes. Les résultats disponibles montrent une croissance du maximum de χ en fonction de la surface du domaine, tandis que le nombre de Reynolds auquel il est atteint semble converger vers une valeur asymptotique. Au-delà de ce nombre de Reynolds, la modulation ne disparaît pas totalement. En poursuivant la comparaison avec un phénomène critique on trouve des lois d'échelle en nombre de Reynolds et en taille typique d'une phase désordonnée pour M et χ .

Abstract. This proceeding presents the study of a fluctuation crisis taking place at the disappearance of the laminar-turbulent modulation of plane Couette flow (PCF). The modulation takes the form of bands oblique with respect to the streamwise direction. As the Reynolds number is increased, visualisations indicate fluctuations of orientation. Meanwhile spatial coexistence of both orientations spontaneously appear when the domain contains several wavelengths of the modulation. So as to quantify this phenomenon, numerical simulations of plane Couette flow are performed and we measure the response function (χ) of the modulation (M) as a function of the Reynolds number, for domains of increasing sizes. The results currently available show that the maximum of χ grows with the surface of the domain, while the Reynolds number at which it is reached seems to converge toward an asymptotic value. Beyond that Reynolds number, the modulation does not disappear completely. Comparison with a critical phenomenon still holds and we find scaling laws in Reynolds number and in size typical of a disordered phase for M and χ .

1 Introduction

L'écoulement de Couette plan (PCF, cf. Fig. 1 (a) qui contient certaines notations), comme de nombreux écoulements de paroi, est linéairement stable pour tout nombre de Reynolds R . En conséquence, la turbulence nécessite des perturbations d'amplitude finie pour se développer. Une des propriétés de ces écoulements est qu'il peut y avoir coexistence spatiale et temporelle de la turbulence. Dans une gamme de Reynolds $[R_g; R_t]$ ($\simeq [325; 415]$ selon les définitions classiques), la coexistence est très régulière et prend la forme de bandes obliques, ayant deux orientations possibles, alternativement laminares et turbulentes [1–3] (Fig. 1 (b)). Ces bandes correspondent à une modulation en très bon accord avec une approximation sinusoidale de l'amplitude de la turbulence de longueur d'onde $\lambda_x \simeq 110 h$, $30 h \lesssim \lambda_z \lesssim 60 h$.

Cette modulation n'est pas permanente. Lorsque R s'approche de R_t par valeurs inférieures, il apparaît des fluctuations d'orientation lorsque le domaine (de taille L_x, L_z) ne contient qu'une seule longueur d'onde [4] ($L_{x,z} \simeq \lambda_{x,z}$). Le temps de vie dans l'une ou l'autre des deux orientations est très bien décrit par une loi de type Arrhenius. Pour l'expliquer, on utilise la théorie d'Eyring–Kramers dans le cadre d'un modèle où A_{\pm} (complexe) décrit l'amplitude locale et instantannée de la modulation :

$$\partial_t A_{\pm} = (R_t - R)A_{\pm} + \Delta A_{\pm} - g|A| \pm^2 A_{\pm} - |A_{\mp}|^2 A_{\pm} + \alpha \zeta. \quad (1)$$

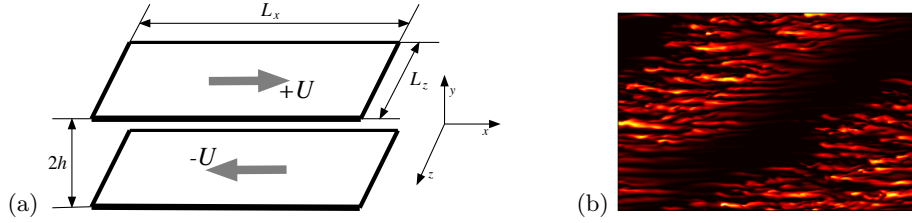


Figure 1. (a) Schéma de l'écoulement de Couette plan. (b) Niveaux de couleur de norme du champ de vitesse, écart à l'écoulement laminaire (résultat numérique).

Soit une équation d'amplitude contenant la compétition entre orientations et un bruit blanc [1, 2]. Ce modèle est quantitativement validé par les mesures et simulations et contient (en plus des fluctuations d'orientation) la loi d'échelle pour $M(R, k_x, k_z)$, le maximum de χ vers R_t , la marche aléatoire de la position relative de la bande dans le domaine (phase de A_{\pm}) [2], ainsi que l'évolution de l'amplitude de la modulation (module de A_{\pm}) qui suit en très bonne approximation un processus d'Ornstein–Uhlenbeck [5]. Aux fluctuations d'orientation, les expériences dans de grands domaines font correspondre de la coexistence spontanée des deux orientations (toujours en accord).

Ces sauts entre structures cohérentes et le maximum de fluctuations semblent très semblables à la crise de fluctuations qui est observée dans l'écoulement de von Kármán (VK) [6]. Cependant, un certain nombre de différences sont présentes (en plus de la taille fixe de VK). D'une part, le cas de PCF n'est pas de la turbulence développée. De plus, dans cette gamme de R , le modèle décrit par l'équation (1) — forcément *ad hoc* car il n'y a pas de dérivation quantitative *bottom-up* à l'heure actuelle — provient de la physique statistique à l'équilibre, tandis que la meilleure description pour VK provient de la physique statistique hors équilibre. Ce caractère gaussien semble être une propriété de toutes les grandeurs moyennées en espace dans l'écoulement, ainsi (dans cette gamme de $R \lesssim R_t$) la fonction de grandes déviations de l'énergie cinétique moyenne est parabolique dans la limite de taille grande [7]. Tout cela étant *ad hoc*, il s'avère que pour des nombres de Reynolds plus faibles, les meilleurs modèles proviennent de la physique statistique hors équilibre [8]¹. Pour cette gamme de $R \gtrsim R_g$, la fonction de grandes déviations de l'énergie cinétique se dissymétrise clairement, les grandeurs moyennées en espace perdent leur caractère gaussien.

Cela motive l'étude de la crise du point de vue d'un phénomène critique. On va chercher à savoir si la comparaison quantitative se maintient lorsque l'on étudie la crise dans la limite thermodynamique. En effet, lors d'une transition de phase du second ordre dans un système de taille finie le maximum de la fonction de réponse χ_m et le paramètre auquel il est atteint $R_L (\simeq R_t)$ suivent des lois d'échelle en fonction de la taille du système :

$$\chi_m \propto L^{\frac{2}{\nu}}, R_L = R_{\infty} \pm L^{-\frac{1}{\nu}}, \gamma, \nu > 0. \quad (2)$$

Les exposants γ et ν sont respectivement l'exposant de la fonction de réponse et celui de la longueur de corrélation. On a $R_t \simeq R_{\infty}$.

On commencera par présenter les grandeurs mesurées et l'on procèdera à une description visuelle du phénomène (Sec. 2). On procèdera ensuite à l'analyse taille finie proprement dite (Sec. 3). On discutera enfin des résultats (Sec. 4).

2 La crise de fluctuation

Les simulations numériques sont réalisées avec le code Channelflow de John Gibson [9]². Dans toute la suite, le champ de vitesse \mathbf{u} (écart à l'écoulement de base) est adimensionné par la vitesse des plaques U ,

1. On précise, pour s'épargner la confusion régulière entre réponse linéaire et physique statistique hors équilibre.

2. On a gardé une habitude peut-être discutable de résolution spatiale intermédiaire, en conséquence, les seuils et valeurs numériques sont tous décalés d'environ 15%.

les longueurs, par le demi-gap h et les durées par h/U . Le nombre de Reynolds est défini par $R = hU/\nu$, avec ν la viscosité cinématique du fluide.

La quantité fondamentale pour étudier la crise de fluctuation est une mesure de l'amplitude de la modulation, dans une orientation donnée. Pour cela, dans des domaines de taille L_x, L_z raisonnable, on utilise le mode fondamental de la modulation pour définir une paire de paramètres d'ordre :

$$m_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{y=-1}^1 |\hat{u}|_x^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda_x}, y, \pm \frac{2\pi}{\lambda_z} \right) dy}. \quad (3)$$

On échantillonne les pdf $\rho(m_{\pm})$, la procédure est relativement standard pour cet écoulement [2, 3]. m_{\pm} et la pdf $\rho(m_{\pm})$ sont directement modélisés par $|A_{\pm}|$ et sa pdf [2]. On définit la moyenne de l'amplitude de la modulation M ainsi que ses fluctuations σ à l'aide cette pdf. On note que les tailles de domaines étudiées ici sont suffisamment petites pour utiliser uniquement le mode fondamental de Fourier. Lorsque les domaines étudiés sont plus grands, il est plus pertinent de travailler à partir de la transformée de Hilbert du champ de vitesse (ou d'une grandeur proportionnelle) [1]. Comme il n'y a pas de champ associé à M (autre différence avec VK), la fonction de réponse est définie à partir des fluctuations $\chi = \sqrt{L_x L_z} \sigma$. On peut aussi définir une fraction turbulente f mesurant la proportion du domaine occupée par un écoulement non trivial. Cependant, elle ne donne aucune information sur l'orientation des bandes.

On présente un exemple de fluctuation d'orientation dans un domaine de taille $L_x \times L_z = 220 \times 96$ pouvant contenir $2\lambda_{x,z}$ dans chaque direction. On suit l'état de l'écoulement à l'aide de visualisations (Fig. 2)³, on choisit R proche de R_t . La grande majorité du temps, la modulation se trouve dans une orientation. On peut distinguer deux types décarts : d'une part, m_{\pm} peut décroître et m_{\mp} croître à f relativement constant : ce type d'événements correspond à un retournement de l'orientation (visible pour $t \in [2 \times 10^4; 5 \times 10^4]$, trois dernières vignettes). L'état intermédiaire est relativement désordonné et présente des traces des deux orientations. On a constaté parfois que la turbulence envahit de manière transitoire tout l'écoulement afin de laisser à nouveau sa place aux bandes (vignettes 1 et 2). Ce type d'événements laisse une trace nette dans la fraction turbulente. Il conduit de plus à l'existence d'un troisième maximum dans les pdf de m_{\pm} et peut éventuellement causer une transition discontinue juste après la crise de fluctuations.

3 Analyse taille finie

On décrit maintenant l'analyse taille finie proprement dite. La moyenne du paramètre d'ordre M et la fonction de réponse χ sont échantillonnées en fonction de R pour des domaines de taille $L_x \times L_z = 110 \times 64, 220 \times 48, 440 \times 48, 220 \times 96, 110 \times 192$ et 660×48 . On examine d'abord rapidement le paramètre d'ordre en fonction de R , pour toutes les tailles (Fig. 3). Il indique que la modulation disparaît progressivement pour laisser place à de la turbulence de paroi uniformément répartie dans le domaine (ici, pour $R \simeq 340$). On note que le paramètre d'ordre ne tombe pas à 0 : cela indique qu'il reste une trace de modulation, de manière intermittente et désorganisée à des nombres de Reynolds plus importants. Les valeurs prises décroissent avec la taille du domaine. Ainsi, on retrouve cette modulation dans des domaines contenant une longueur d'onde [2, 3], tandis qu'elle a quasiment disparu dans de très grands domaines [1]. Ce fait se retrouve aussi dans la fraction turbulente, qui ne converge que très lentement vers 1. L'effet a aussi été observé dans l'écoulement de Poiseuille dans une conduite [10].

On passe à la description de la fonction de réponse (Fig. 3). On note que pour des R clairement en dessous ou clairement au-dessus de R_L , la fonction de réponse prend des valeurs modérées, et dans l'ensemble, indépendantes de la taille du domaine. Il y a cependant un pic très marqué à $R \simeq 340$, précisément là où se manifestent les fluctuations d'orientation. On note que la valeur maximum de χ_m croît avec la surface du domaine. La valeur R_L à laquelle elle est atteinte semble elle aussi dépendre de $L_x L_z$. On examine plus précisément le comportement au maximum. La croissance de χ_m en fonction de

3. Des visualisations couleurs sont visibles dans [4, 5], le choix du noir et blanc *coarse grained* est dicté par le coût de stockage en mémoire des champs de vitesse. La méthode de calcul est décrite dans [2, 5].

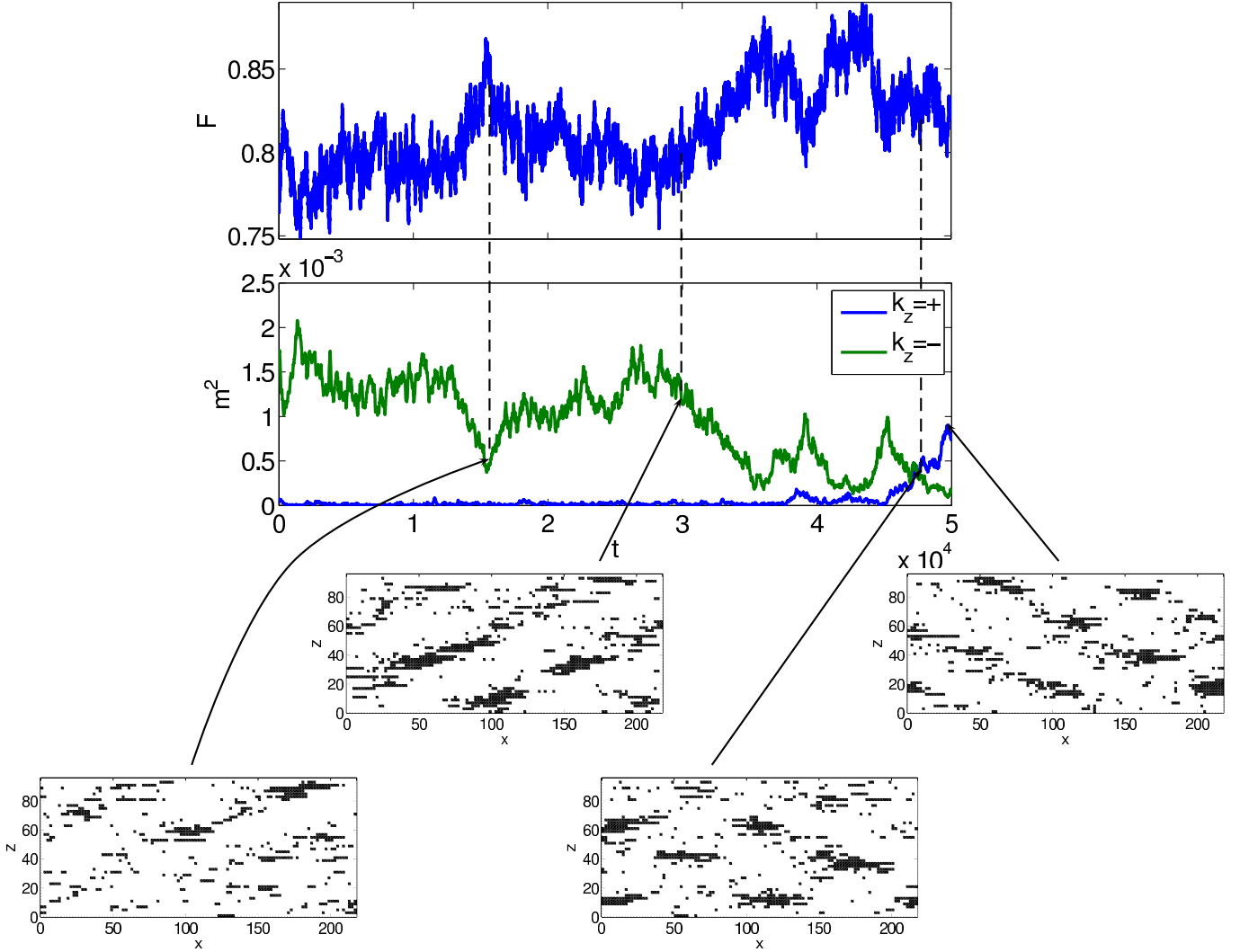


Figure 2. Exemple de métastabilité et de fluctuations dans un domaine de taille $L_x \times L_z = 220 \times 96$. Une série temporelle des deux paramètres d'ordre m_{\pm}^2 est affichée au milieu, la série temporelle de la fraction turbulente f correspondante est affichée en haut. Les images en noir et blanc correspondent à une discrimination laminaire/turbulente de l'écoulement (blanc : turbulent, noir : laminaire). Les flèches pointent aux instants correspondant dans la série temporelle de m_{\pm}^2 .

$L_x L_z$ est bien visible (Fig. 4 (a)). Cependant des données sur des tailles plus importantes sont nécessaires pour affirmer que l'on a bien un comportement critique (et extraire d'éventuels exposants). En ce qui concerne R_L , il semble converger vers une valeur asymptotique R_{∞} . Des données plus fines en R et pour des tailles plus importantes devraient là aussi aider à préciser le comportement de R .

On revient sur la traces de modulation au-delà de R_L . Dans une première approche de champ moyen, en taille finie et dans la phase désordonnée, on s'attend à des lois d'échelle pour $1/M^2$ et $1/\chi^2$ respectivement en $L_x L_z (R - R_L)$ et en $(R - R_L)$ [2, 5], déduites de l'équation (1). On avait noté la faible variabilité de χ en fonction de la surface, on remarque de plus que $L_x L_z M^2$ ne dépend pas de la surface du domaine. On trace donc $1/(M^2 L_x L_z)$ (Fig. 5 (a)) et $1/\chi^2$ (Fig. 5 (b)) en fonction de R , moyennés sur l'ensemble des tailles de domaines disponibles. Les barres d'erreurs correspondent à la variance pour les différentes tailles de domaines. Comme dans le cas de la phase ordonnée, une approche « champ moyen » donne une bonne prédiction des lois d'échelle (il y a un léger décrochage pour χ) [1, 2]. Le ratio entre $M^2 L_x L_z$ et χ^2

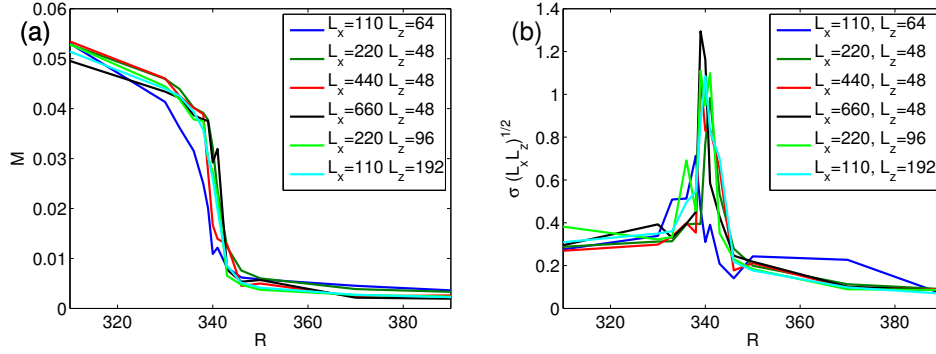


Figure 3. (a) Paramètre d'ordre en fonction de R , pour toutes les tailles considérées. (b) Fonction de réponse du paramètre d'ordre en fonction de R pour toutes les tailles considérées.

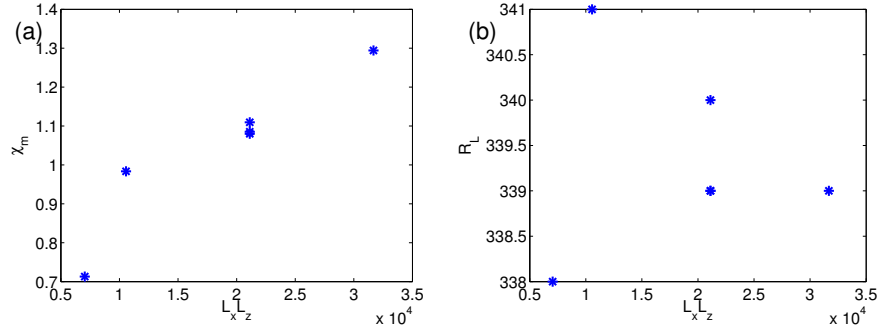


Figure 4. (a) Maximum de la fonction de réponse χ en fonction de la surface du domaine $L_x L_z$. (b) Nombre de Reynolds où le maximum de χ est atteint en fonction de la surface du domaine $L_x L_z$.

dans cette phase sont en bon accord avec la constatation que la pdf de $|m_{\pm}|$, divisée par $|m_{\pm}|$ ne trouve pas son maximum en 0, mais décalé d'une valeur δ [3]. Dans notre cas, δ est indépendant de R . Cela étant dit, il s'agit d'un paramètre assez fin, dont l'estimation est fortement dépendante de l'observable utilisée. L'accord sur $\delta \neq 0$ ainsi que son ordre de grandeur (environ $M(R \gtrsim R_L)$) est le point important.

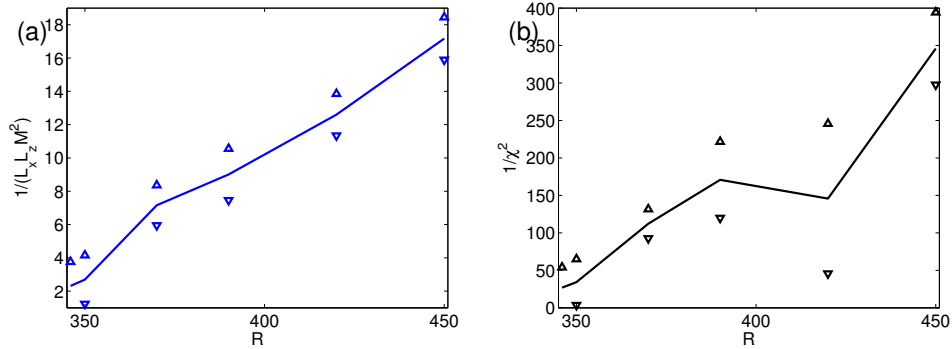


Figure 5. Dans la « phase désordonnée », moyenné sur toutes les tailles considérées : (a) inverse du carré de M , normalisé par la taille, (b) : inverse du carré de la fonction de réponse.

4 Discussion

Ce compte-rendu présente une analyse en taille finie de la crise de fluctuations se produisant lors de la disparition de la modulation de la turbulence dans l'écoulement de Couette plan. Les résultats numériques indiquent que l'on retrouve un comportement de champ moyen dans la « phase désordonnée » en bon accord avec ce qui a été mesuré dans la « phase ordonnée » [1, 2]. En ce qui concerne l'analyse taille finie proprement dite, les données actuellement disponibles montrent la croissance du maximum de fluctuation avec la surface du domaine. Des données supplémentaires sont toutefois nécessaires pour vérifier si cette croissance se poursuit et si la comparaison quantitative avec un phénomène critique est valide.

La réapparition transitoire de la turbulence (Fig. 2, parfois appelée intermittence [3]) se manifeste autour de R_L . En introduisant un troisième maximum dans les pdf $\rho(m_{\pm})$, qualitativement différent des deux autres (en $m_{\pm} \simeq M, m_{\mp} \gtrsim 0$), ce phénomène est potentiellement de nature à changer la transition se produisant à R_L . Il reste en effet à voir s'il apparaît une discontinuité dans des grandeurs comme la fraction turbulente ou le paramètre d'ordre en effectuant des simulations (ou des expériences) pour une gamme de R suffisamment fine autour de R_L et des tailles suffisamment grandes.

Références

1. A. PRIGENT, G. GRÉGOIRE, H. CHATÉ, O. DAUCHOT & W. VAN SARLOOS, *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 014501 (2002).
2. J. ROLLAND & P. MANNEVILLE, *Eur. Phys. J. B*, **80**, 529–544 (2011).
3. L. S. TUCKERMAN & D. BARKLEY, *Phys. Fluids*, **23**, 041301 (2011).
4. J. ROLLAND & P. MANNEVILLE, *J. Stat. Phys.*, **142**, 577–591 (2011).
5. J. ROLLAND, Thèse de doctorat de l'École Polytechnique (2012).
6. P. P. CORTET, É. HERBERT, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE & V. PADILLA, *J. Stat. Mech.*, **P07012**, 065107 (2011).
7. J. ROLLAND, *Eur. Phys. J. B*, accepté, arxiv :1502.00813, DOI : 10.1140/epjb/e2015-50344-y.
8. D. BARKLEY, *Phys. Rev. E*, **84**, 016309 (2011).
9. J. GIBSON, J. HALCROW & P. CVITANOVIĆ, *J. Fluid Mech.*, **611**, 107–130 (2008).
10. M. AVILA & B. HOF, *Phys. Rev. E*, **87**, 063012 (2013).

Influence d'une mousse liquide sur le ballotement d'un liquide

Alban Sauret¹, François Boulogne², Jean Cappello^{2,3}, Émilie Dressaire⁴ & Howard A. Stone²

¹ Surface du Verre et Interfaces, UMR 125 CNRS/Saint-Gobain, 93303 Aubervilliers, France

² Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Princeton University, Princeton, NJ 08544, USA

³ École Normale Supérieure de Cachan, 94235 Cachan, France

⁴ Department of Mechanical and Aerospace Engineering, New York University Polytechnic School of Engineering, Brooklyn, NY 11201, USA

alban.sauret@saint-gobain.com

Résumé. Nous avons étudié expérimentalement le ballotement de la surface libre d'un liquide dans une cellule rectangulaire mince sous l'effet d'un forçage harmonique ou d'un forçage impulsionnel. Dans un premier temps, le ballotement d'un fluide newtonien a été caractérisé. Puis, nous avons pu montrer que l'addition de mousse liquide au-dessus du fluide newtonien permet d'amortir de manière significative les oscillations de la surface libre. En utilisant un système bidimensionnel, nous avons pu quantifier l'influence de la mousse sur la dynamique de ballotement et relier le mouvement des bulles à la dissipation totale dans le système. Dans notre système, nous observons que quelques couches de bulles sont suffisantes pour amortir significativement les oscillations de la surface libre. Ces résultats expérimentaux ont été modélisés par une approche phénoménologique traduisant la dissipation visqueuse induite par le mouvement des bulles sur les parois du conteneur.

Abstract. We experimentally investigated the sloshing, i.e. the oscillations, of the free surface of a fluid in a thin rectangular cell under the effect of a harmonic forcing or an impulse. We first characterized the sloshing of a Newtonian fluid. Then, we showed that the addition of liquid foam above the Newtonian fluid dampens significantly the sloshing of the free surface. Using a two-dimensional system, we were able to quantify the influence of the foam on the sloshing dynamics and relate the motion of the bubbles to the damping of the system. In our system, we observe that few layers of bubbles are sufficient to significantly damp the oscillations of the free surface. We rationalized our experimental findings using a phenomenological model that describes the viscous dissipation induced by the motion of the bubbles against the walls of the container.

1 Introduction

Le ballotement (ou *sloshing*) est défini comme le mouvement de l'interface libre d'un liquide placé dans un conteneur partiellement rempli [1–3]. Ce ballotement est induit par une variation de la vitesse du récipient ce qui entraîne une perturbation du liquide et la génération d'ondes de surface. Un tel effet est observable dans la vie quotidienne lorsque l'on se déplace avec une tasse de café [4] ou lorsque l'on fait tourner le vin dans son verre pour l'aérer [5]. À plus grande échelle, lors du transport de pétrole ou de gaz liquéfiés dans les pétroliers et les camions-citernes, l'oscillation du fluide peut déstabiliser le conteneur et endommager ses parois. De plus, lorsque la fréquence du mouvement du conteneur correspond à la fréquence de résonance de ces ondes de surface, l'amplitude des ondes peut augmenter fortement.

Du fait de ces problématiques, différentes méthodes ont été mises au point pour amortir le ballotement d'un fluide : utiliser des membranes élastiques fixées aux sommets des conteneurs [6], placer des chicanes ou des ergots sur les conteneurs au niveau de l'interface liquide-air [7], ou enfin utiliser des conteneurs eux-même élastiques.

Néanmoins, des observations de la vie courante suggèrent que la présence de mousse peut également être utilisée pour amortir le ballotement du fluide. En effet, chacun a pu se rendre compte qu'il est plus facile de transporter de la bière que du café sans générer de grandes oscillations de la surface libre du fluide [8]. Afin de mieux comprendre ce phénomène, nous avons étudié expérimentalement, à l'aide d'un système modèle, l'effet de l'ajout d'une mousse liquide au-dessus d'un fluide dans une cellule mince.

2 Méthodes expérimentales

Les expériences sont réalisées dans des cellules minces en verre de largeur $L = 7$ cm, d'épaisseur w comprise entre 0,3 cm et 1,9 cm et de hauteur $H = 9,2$ cm. La partie inférieure est en caoutchouc afin d'y insérer par la suite l'aiguille d'une seringue à l'aide de laquelle nous introduisons l'air afin de générer la mousse. Le mouvement est contrôlé par un pot vibrant contrôlé par un GBF couplé à un amplificateur. L'ensemble du dispositif expérimental est représentée sur la figure 1 (a). Les expériences sont menées avec de l'eau, des mélanges eau-glycérol (50 %, 60 % et 80 % de glycérol en volume), du dodécane, du décanol ainsi qu'une solution moussante. Lors de l'étude sur les mousses, les cellules sont partiellement remplies d'une solution composée de 90 % d'eau, 5 % de glycérol et de 5 % de liquide vaisselle (volumiques). Le diamètre D des bulles est de l'ordre de 3 mm. Afin de réaliser une mousse monodisperse, nous avons utilisé un pousse-seringue à débit constant, $Q = 20 \mu\text{L} \cdot \text{min}^{-1}$, et une aiguille de 2,5 mm de diamètre.

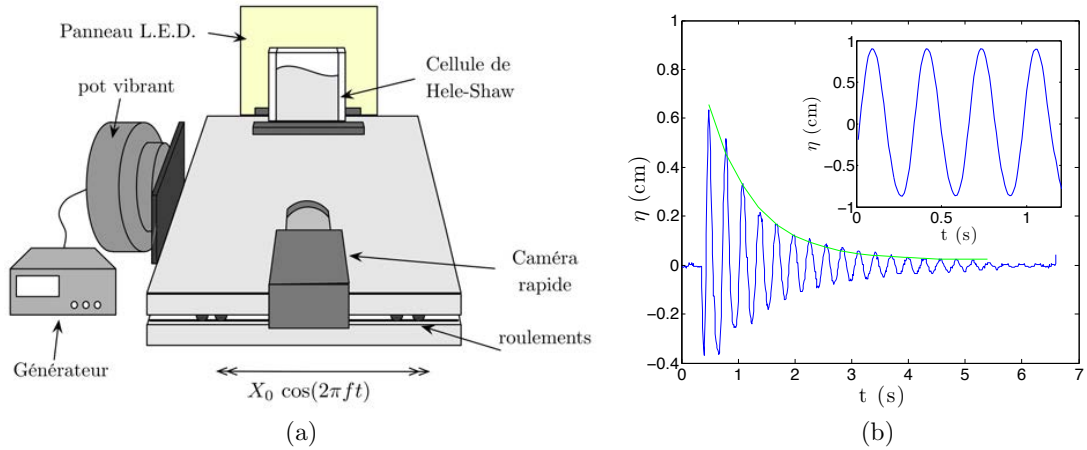


Figure 1. (a) Schéma du dispositif expérimental. (b) Évolution temporelle de l'interface mesurée à 0,5 cm de la paroi latérale après application d'une impulsion. La courbe verte correspond à une décroissance exponentielle $\eta_0 \exp(-t/\tau)$ où η_0 et $1/\tau$ sont des paramètres d'ajustement. L'encadré représente l'évolution de l'interface mesurée à 0,5 cm de la paroi latérale pour un mouvement sinusoïdal à la fréquence $f_1 = 3,125$ Hz. Les deux courbes ont été réalisées en utilisant de l'eau dans une cellule avec $w = 1,6$ cm et $L = 7$ cm.

Deux expériences caractéristiques nous permettent d'accéder aux principaux paramètres physiques de notre étude. La première, représenté sur la figure 1 (b), consiste à étudier la réponse du système à une impulsion. Nous déterminons ainsi l'évolution temporelle des interfaces liquide-mousse et mousse-air, la dissipation du système et obtenons ses fréquences propres. Le deuxième protocole expérimental consiste à imposer une excitation harmonique latérale à l'aide du pot vibrant à fréquence et amplitude d'excitation fixée (encadré de la figure 1 (b)). Cette deuxième expérience nous donne accès à l'évolution de l'amplitude en fonction des différents paramètres tels que la hauteur de liquide, la fréquence et l'amplitude d'oscillation du banc.

3 Ballotement d'un liquide newtonien

Le ballotement d'un liquide newtonien est un phénomène bien caractérisé dans la littérature [2]. L'analyse théorique de ce problème repose sur l'hypothèse d'un liquide non visqueux et d'un écoulement incompressible et irrotationnel. La pulsation propre d'ordre n du système, ω_n , vérifie

$$\omega_n^2 = \left(g k_n + \frac{\sigma}{\rho} k_n^3 \right) \tanh(k_n h), \quad (1)$$

où g est l'accélération de pesanteur, σ , ρ et h sont respectivement la tension superficielle, la masse volumique et la hauteur du liquide et $k_n = n\pi/L$.

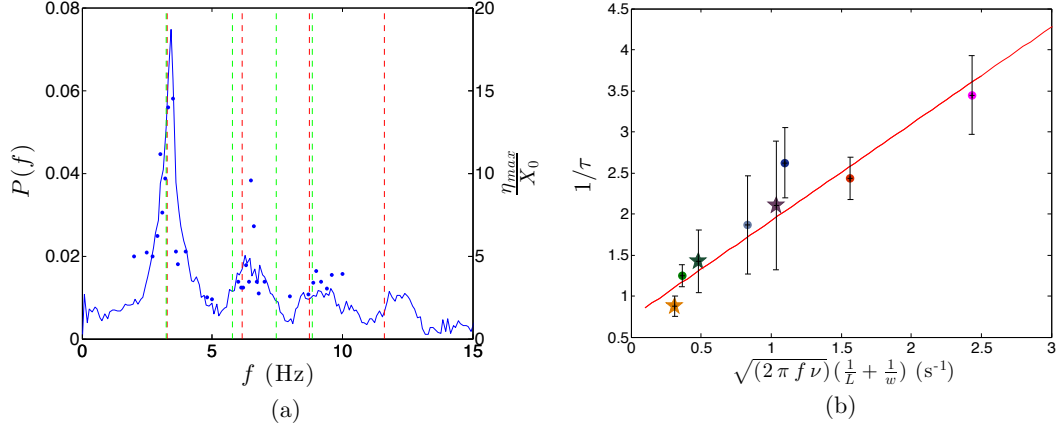


Figure 2. (a) Transformée temporelle obtenue à l'aide d'une excitation impulsionnelle (courbe bleue continue, axe de gauche), et amplitude maximale de ballotement pour une excitation harmonique à une fréquence donnée (points bleus, axe de droite). Les fréquences théoriques obtenues en négligeant la tension superficielle (ligne verte) et en la prenant en compte (ligne rouge) sont également reportées. (b) Évolution du coefficient d'amortissement $1/\tau$. Les points ronds correspondent à $w = 1,6$ cm, $f = 3,5$ Hz, et $\nu = 5,26$ mm² · s⁻¹ (gris), $\nu = 9,17$ mm² · s⁻¹ (bleu), $\nu = 18,6$ mm² · s⁻¹ (rouge), $\nu = 46,3$ mm² · s⁻¹ (rose), $\nu = 1,01$ mm² · s⁻¹ (vert), les étoiles correspondent $f = 3,4$ Hz, $\nu = 1,01$ mm² · s⁻¹, $w = 0,48$ cm (violet), $w = 1,1$ cm (vert) et $w = 1,9$ cm (orange). Pour l'ensemble des points : $h = 4$ cm.

Avant de considérer l'évolution du coefficient d'amortissement, nous avons étudié la réponse temporelle du signal pour les deux protocoles expérimentaux. Ces résultats sont reportés sur la figure 2(a). On remarque que les deux protocoles conduisent à des résultats comparables et en bon accord avec les fréquences de résonance théoriques. Sur la courbe obtenue à l'aide de l'analyse temporelle, nous observons que la première fréquence de résonance est celle dont la probabilité est la plus grande et donc celle qui est le moins amortie. Dans la suite de ce travail, nous avons donc négligé les autres fréquences de résonance et considéré uniquement la principale à la fréquence f_1 .

Nous nous sommes alors intéressés au coefficient d'amortissement $1/\tau$ de notre système en fonction des différents paramètres (w , μ et f). Celui-ci est défini comme $1/\tau = \langle |\dot{E}| \rangle / (2E)$ où $\langle |\dot{E}| \rangle$ représente la puissance dissipée et E l'énergie initiale injectée au système [9]. La notation $\langle \cdot \rangle$ signifie que la grandeur est moyennée sur une période de l'oscillation.

Expérimentalement, $1/\tau$ est déterminé à l'aide d'un ajustement exponentiel de l'enveloppe du signal correspondant à l'évolution de η en fonction du temps : $\eta_0 \exp(-t/\tau)$. Les coefficients d'amortissement $1/\tau$ sont représentés sur la figure 2(b) pour différentes viscosités, fréquences et largeurs de cellule, en fonction de $\sqrt{2\pi f\nu}(1/L + 1/w)$.

Afin d'estimer le coefficient d'amortissement, deux sources de dissipation d'énergie sont, a priori, à prendre en considération. L'une correspond aux forces visqueuses au sein du liquide :

$$\langle |\dot{E}_\ell| \rangle_1 = \frac{1}{2} \rho \nu \int_{\text{bulk}} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)^2 dV \sim \rho \nu (vk)^2 \frac{Lw}{k}, \quad (2)$$

où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique. L'autre correspond aux dissipations visqueuses qui ont lieu dans les couches de Stokes d'épaisseur $\delta = \sqrt{\nu/\omega}$ au voisinage des parois [9] :

$$\langle |\dot{E}_\ell| \rangle_2 = \frac{1}{2} \rho \nu \int_{\text{BL}} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)^2 dV \sim \rho \nu \left(\frac{v}{\delta}\right)^2 (L+w) \frac{\delta}{k}. \quad (3)$$

Dans nos conditions expérimentales, nous avons $\langle |\dot{E}_\ell| \rangle_1 \ll \langle |\dot{E}_\ell| \rangle_2$. L'énergie initiale injectée au système correspond à l'énergie cinétique initiale et est donnée par $E = \rho \int \mathbf{v}^2 dV/2 \sim \rho v^2 L w/(4k)$. Ce qui nous conduit finalement à

$$\frac{1}{\tau_\ell} \sim \sqrt{2\pi f \nu} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{w} \right). \quad (4)$$

On observe sur la figure 2 (b) que cette prédiction est en bon accord avec les mesures expérimentales pour différents liquides et épaisseurs de cellules. Ceci nous permet de confirmer que la dissipation dans les couches visqueuses est la principale source de dissipation de notre système.

4 Amortissement du ballotement par une mousse

Nous avons ensuite considéré l'effet de l'ajout d'une mousse bidimensionnelle au sommet du liquide [10]. En particulier, nous avons quantifié l'évolution de la réponse du fluide : l'amplitude d'oscillation η ou le coefficient d'amortissement $1/\tau$ en fonction du nombre de couches de bulles ajouté. Les expériences ont été réalisées avec une hauteur de solution moussante de $h = 4$ cm et des bulles de $D = 3$ mm de diamètre. Expérimentalement nous observons que, pour toutes les épaisseurs de mousse considérées, la fréquence du mode dominant f_1 reste inchangée. Pour un forçage harmonique à la fréquence de résonance f_1 et un déplacement latéral de $X_0 = 1$ mm, l'amplitude maximale de ballotement décroît significativement lorsque l'on augmente l'épaisseur de mousse (Fig. 3).

Nous avons également mesuré l'évolution de la vitesse locale des bulles en fonction de leur position pour une expérience où $\xi=13$, c'est-à-dire pour des valeurs de $1/\tau$ grandes. Lorsque la hauteur de mousse est suffisamment importante, typiquement $\xi > 5$, l'interface mousse-air reste quasiment immobile. La vitesse évolue alors selon $v_b(y, t) = v_0^{\max} \exp(-z/(\xi_c D)) \cos(\omega t)$ avec $\xi_c D = 16,8 \pm 1,8$ mm (Fig. 4 (a)).

Nous avons également quantifié sur la figure l'évolution du coefficient d'amortissement en fonction du nombre de couches de bulles, noté ξ , est représenté Fig. 4 (b). On remarque que ce coefficient tend exponentiellement vers un palier qui est atteint dès environ 5 à 8 couches de bulles. Ce résultat montre que l'ajout de quelques couches de bulles semble être suffisant pour dissiper très efficacement l'énergie du système et amortir l'amplitude de ballotement dans le cas d'une mousse 2D.

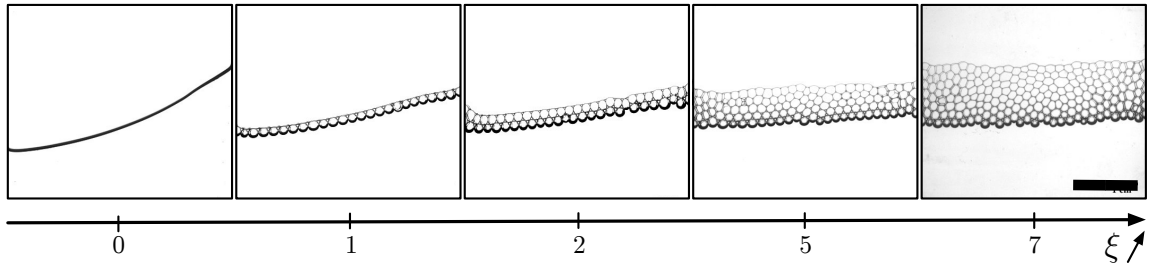


Figure 3. Évolution de l'interface à la fréquence de résonance $f_1 = 3,125$ Hz et pour la même amplitude d'oscillation, $X_0 = 0,1$ cm pour un nombre croissant de couches de bulles ξ . Les photographies correspondent au moment où les amplitudes sont maximales.

Pour séparer les contributions liées au liquide seul et à l'ajout de mousse, nous notons $1/\tau_\ell$ le coefficient d'amortissement associé au liquide seul et $1/\tau_f$ le coefficient d'amortissement lié à la mousse tels que $1/\tau = 1/\tau_\ell + 1/\tau_f$. Ainsi, la courbe expérimentale est correctement représentée par la fonction :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_\ell} + \frac{1}{\tau_f^\infty} \left[1 - \exp\left(-\frac{\xi}{\xi_c}\right) \right], \quad (5)$$

avec $1/\tau_\infty = 9 \pm 3$ s⁻¹, un palier $1/\tau_\ell + 1/\tau_f^\infty = 11 \pm 3$ s⁻¹ et $\xi_c = 5 \pm 2$. Le coefficient d'amortissement de la solution moussante seule, déterminée par cet ajustement, est $1/\tau_\ell \simeq 2$ s⁻¹. Cette valeur est compatible avec la valeur obtenue précédemment dans le cas de la solution moussante seule.

4.1 Modèle phénoménologique

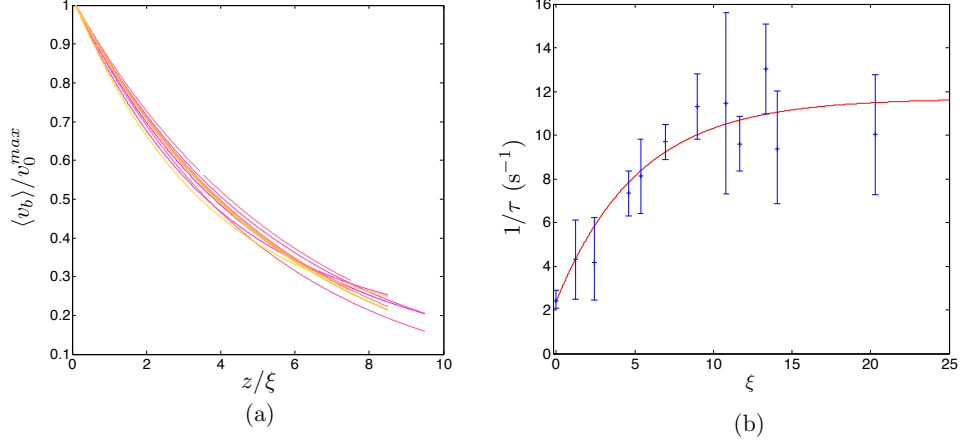


Figure 4. (a) Vitesse moyenne en fonction de la position verticale de la bulle z/ξ . Les différentes courbes correspondent à différentes abscisses x (évoluant par pas de 0,5 cm). (b) Évolution du coefficient d'amortissement $1/\tau$ en fonction du nombre de couches de bulles ξ pour $D = 3$ mm, $L = 7$ cm et $h = 4$ cm. Le point en $\xi = 0$ a été réalisé avec la solution moussante seule. La courbe en rouge correspond à l'ajustement $1/\tau = 1/\tau_\ell + 1/\tau_f^\infty (1 - \exp(-\xi/\xi_c))$.

Intéressons-nous maintenant à la mise au point d'un modèle phénoménologique expliquant l'évolution du coefficient d'amortissement due à la mousse $1/\tau_f$ en fonction de ξ . Ce modèle est basé sur l'hypothèse que la dissipation d'énergie dans la mousse repose sur les forces de friction entre les bords de Plateau et les parois. L'expression de la dissipation visqueuse de bords de Plateau sur les parois solides est $f_b = K \gamma_f \text{Ca}^{2/3}$, avec $\text{Ca} = \mu_f v_b / \gamma_f$ le nombre capillaire et K une constante qui dépend de la géométrie du bord de Plateau [11]. En notant $v_b(x, y, t)$, la vitesse d'une bulle située en (x, y) , la dissipation d'énergie de la mousse sur une période s'écrit

$$\langle |\dot{E}_f| \rangle = K' \sum \langle v_b^{5/3} \rangle, \quad (6)$$

où $K' = K \gamma_f^{1/3} \mu_f^{2/3}$. En utilisant l'expression de v_b trouvée précédemment et en supposant que pour une mousse de grande épaisseur la vitesse d'une bulle est indépendante de sa position horizontale, on peut écrire

$$\langle |\dot{E}_f| \rangle = K' \frac{L}{D} \int_0^{\xi D} \langle (v_0^{\max})^{5/3} |\cos(\omega t)|^{5/3} \rangle \exp\left(-\frac{5y}{3\xi_c D}\right) dy. \quad (7)$$

Ainsi, l'énergie totale dissipée par la mousse a pour ordre de grandeur :

$$\langle |\dot{E}_f| \rangle = \frac{3}{5} \xi_c L K' (v_0^{\max})^{5/3} \langle |\cos(\omega t)|^{5/3} \rangle \left[1 - \exp\left(-\frac{5\xi}{3\xi_c}\right) \right]. \quad (8)$$

L'énergie initiale injectée au système peut être considérée comme étant le maximum de l'énergie cinétique du liquide qui est atteint lorsque l'interface liquide-mousse est horizontale. Par conséquent, on a

$$E = \frac{1}{2} \rho \int (v_0^{\max})^2 dV = \frac{\rho w}{4} \frac{L^2}{\pi} (v_0^{\max})^2. \quad (9)$$

Finalement on obtient :

$$\frac{1}{\tau_f} = \frac{12\pi}{5} \frac{\xi_c K' \langle |\cos(\omega t)|^{5/3} \rangle}{\rho w L (v_0^{\max})^{1/3}} \left[1 - \exp\left(-\frac{5\xi}{3\xi_c}\right) \right]. \quad (10)$$

En reprenant la formule précédente, et en remplaçant v_0^{\max} par son expression obtenue expérimentalement, on peut se ramener à l'évolution de $1/\tau_f$. La loi phénoménologique est alors en accord satisfaisant avec nos mesures expérimentales (Fig. 4 (b)). Les différences observées peuvent s'expliquer par les cisaillements internes à la mousse. De plus, nous avons négligé les dissipations au bord des cellules ainsi que l'élargissement des bords de Plateau [9].

5 Conclusion

Dans cette étude, nous avons montré que l'addition d'une mousse liquide au-dessus d'un fluide augmente le coefficient d'amortissement et diminue l'amplitude de *sloshing*. Nous avons tout d'abord caractérisé le ballotement d'un fluide newtonien dans une cellule de Hele-Shaw et quantifié l'amplitude de la dissipation, principalement induite par frottement visqueux sur les parois extérieures. Puis, l'influence d'une mousse liquide d'épaisseur variable et bidimensionnelle a permis de montrer que les fréquences de résonance ne sont pas modifiées par la présence de mousse et que les effets d'amortissement sont significatifs dès 5 couches de bulles. Ces expériences ont pu être mises en regard d'un modèle phénoménologique décrivant la dissipation visqueuse induite par le mouvement des bords de Plateau contre les parois. Notre étude a permis de montrer qu'une couche finie de mousse peut être utilisée efficacement pour amortir le ballotement d'un fluide [12] mais d'autres paramètres restent à étudier afin d'augmenter l'effet d'amortissement comme les propriétés de rhéologie interfaciale des films de savon [13, 14] ou la rugosité des parois.

Références

1. P. McIVER, Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers filled to an arbitrary depth, *J. Fluid Mech.*, **201**, 243–257 (1989).
2. R. A. IBRAHIM, *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*, Cambridge University Press (2005).
3. A. HERCZYNSKI & P. D. WEIDMAN, Experiments on the periodic oscillation of free containers driven by liquid sloshing, *J. Fluid Mech.*, **693**, 216–242 (2012).
4. H. C. MAYER, R. KRECHETNIKOV, Walking with coffee: Why does it spill?, *Phys. Rev. E*, **85**, 046117 (2012).
5. M. RECLARI, M. DREYER, S. TISSOT, D. OBRESCHKOW, F. M. WURM & M. FARHAT, Surface wave dynamics in orbital shaken cylindrical containers, *Phys. Fluids*, **26**, 052104 (2014).
6. M. CHIBA & H. F. BAUER, Viscous oscillations in a circular cylindrical tank with elastic surface cover, *J. Sound Vib.*, **304**, 1–17 (2007).
7. D. LIU & P. LIN, Three-dimensional liquid sloshing in a tank with baffles, *Ocean Engineering*, **36**, 202–212 (2009).
8. J. CAPPELLO, A. SAURET, F. BOULOGNE, É. DRESSAIRE & H. A. STONE, Damping of liquid sloshing by foams: from everyday observations to liquid transport, *J. Vis.*, doi : 10.1007/s12650-014-0250-1 (2014).
9. A. BRONFORT & H. CAPS, Faraday instability at foam-water interface, *Phys. Rev. E*, **86**, 066313 (2012).
10. I. CANTAT, S. COHEN-ADDAD, F. ÉLIAS, F. GRANER, R. HÖHLER, O. PITOIS, F. ROUYER & A. SAINT-JALMES, *Les Mousses : Structure et Dynamique*, Belin (2010).
11. I. CANTAT, Liquid meniscus friction on a wet plate: Bubbles, lamellae, and foams, *Phys. Fluids*, **25**(3), 031303 (2013).
12. A. SAURET, F. BOULOGNE, J. CAPPELLO, É. DRESSAIRE & H. A. STONE, Damping of liquid sloshing by foams, *Phys. Fluids*, **27**, 022103 (2015).
13. É. DRESSAIRE, R. BEE, D. C. BELL, A. LIPS & H. A. STONE, Interfacial polygonal nanopatterning of stable microbubbles, *Science*, **320**, 1198–1201 (2008).
14. A. B. SUBRAMANIAM, M. ABKARIAN, L. MAHADEVAN & H. A. STONE, Colloid science: Non-spherical bubbles, *Nature*, **438**, 930–930 (2005).

Index

- Alima Roland, 25
Ambrosio Benjamin, 107
Averlant Étienne, 1
Aziz-Alaoui M. A., 107
- Bacri Jean-Claude, 55
Bai Yang, 7
Baylón-Fuentes Antonio, 13
Berhanu Michaël, 19
Bodo Bertrand, 25
Bordet Maxime, 31
Boulogne François, 137
- Cappello Jean, 137
Castillo-Castellanos Andrés, 37
Cazaubiel Annette, 19
Chaline Jennifer, 43
Chembo Yanne K., 13
Coudet Yves, 67
Crumeyrolle Olivier, 7
- Deike Luc, 19
Devaud Martin, 55
Dos Santos Serge, 43
Dressaire Émilie, 137
Dvorakova Zuzana, 43
- Essimbi Bernard, 25
- Falcon Éric, 19
Ferrand Jérémy, 49
Freyssingeas Éric, 49
- Gerbal Fabien, 55
- Hernandez Zapata Sergio, 61
Hocquet Thierry, 55
Hubert Maxime, 67
- Jacquot Maxime, 13
Jamin Timothée, 19
- Labousse Matthieu, 67
Larger Laurent, 13
Lassere Gaétan, 97
Lints Martin, 43
Lopez Sanchez Erick Javier, 61
- Lyonnet Florian, 55
- Mangiarotti Sylvain, 73, 79
Manneville Paul, 85
Márquez Bicky A., 13
Marquié Patrick, 25, 31, 91, 97
Martinenghi Romain, 13
Moisy Frédéric, 103
Morfu Savério, 25, 31, 91, 97
Mutabazi Innocent, 7
- Onorato Miguel, 119
- Panayotov Krassimir, 1
Paquier Anna, 103
Perrard Stéphane, 67
Phan Van Long Em, 107
Poryles Raphaël, 113
- Rabaud Marc, 103
Randoux Stéphane, 119
Raspa Veronica, 61
Raynaud Raphaël, 125
Remache Djamel, 43
Rolland Joran, 131
Rossi Maurice, 37
Ruiz Chavarria Gerardo, 61
- Sauret Alban, 137
Sergent Anne, 37
Stone Howard, 137
Suret Pierre, 119
- Tchofo-Dinda Patrice, 91
Tlidi Mustapha, 1
Tse Ve Koon Kevin, 91
- Udaltsov Vladimir S., 13
- Vandewalle Nicolas, 67
Vidal Valérie, 49, 113
- Walczak Pierre, 119
Wang Yuan, 55
- Zaldívar-Huerta Ignacio, 13

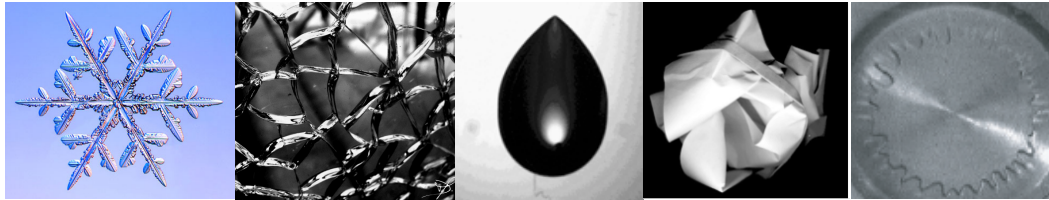
Annexes :

Programme du mini-colloque

Programme de la 18^e rencontre

Morphogenesis

Following the footsteps of Martine Ben Amar
Paris, March 17th 2015



Satellite meeting of the 18^e *Rencontre du Non Linéaire*, March 17th-19th 2015
Université Paris Diderot, amphithéâtre Buffon, 15 rue Hélène Brion, 75013 Paris

Program

- 08:45 - 09:00 — Arezki Boudaoud (Lyon) *Opening*
09:00 - 09:25 — Anne-Marie Cazabat (Paris) *Evaporating droplets*
09:25 - 09:50 — Yves Couder (Paris) *Experiments with history or memory effects*
09:50 - 10:15 — Linda Cummings (Newark) *Instabilities in downslope flow of nematic liquid crystal*

10:15 - 10:45 — Break

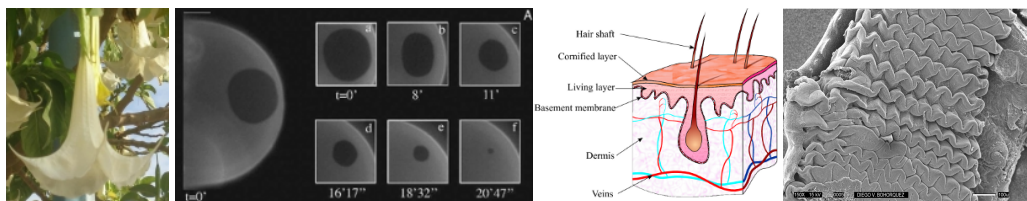
- 10:45 - 11:10 — Yves Pomeau (Tucson) *Theory of ice-skating*
11:10 - 11:35 — Elisabeth Bouchaud (Paris) *Fracture of a polymer gel: rate-dependent phenomena and large deformations disentangled*
11:35 - 12:00 — James R. Rice (Harvard) *Thermo-mechanics and hydrology at Antarctic ice stream margins*
12:00 - 12:25 — Martine Ben Amar (Paris) *T.B.A.*

12:25 - 14:00 — Buffet Lunch

- 14:00 - 14:25 — Gaetano Napoli (Lecce) *Discontinuous buckling of confined elastic thin films*
14:25 - 14:50 — Raymond Goldstein (Cambridge) *Instability of a Mobius strip minimal surface and a link with systolic geometry*
14:50 - 15:15 — Alain Goriely (Oxford) *Some brain mechanics: edema and damage propagation*

15:15 - 15:45 — Break

- 15:45 - 16:10 — Vincent Hakim (Paris) *Synaptic domains as diffusion-controlled structures*
16:10 - 16:35 — Pedro Patricio (Lisbon) *Viscoelastic models for cellular tissues*
16:35 - 17:00 — Michel Labouesse (Strasbourg) *Forces that change the shape of a multicellular embryo*
17:00 - 17:25 — Jacque Prost (Paris) *Reflexions on tissue modelling*
17:25 - 17:40 — Mokhtar Adda-Bedia (Paris) *Closing*



Organized by Arezki Boudaoud and Mokhtar Adda-Bedia

18^e Rencontre du Non-Linéaire

Université Paris Diderot, 18 – 19 mars 2015

Bienvenue à la 18^e Rencontre du Non-Linéaire 2015 qui aura lieu, pour la troisième année consécutive, à l'Université Paris Diderot, amphithéâtre Buffon, 15 rue Hélène Brion, Paris XIII^e.

Nous aurons 99 contributions se répartissant en 4 conférences invitées, 12 communications longues et 83 communications courtes.

Mercredi 18 mars 2015

09h30 - 10h15 : **Conférence invitée 1 (40 + 5 minutes)**
10h15 - 10h40 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 10 communications courtes
10h40 - 11h20 : **Pause café Posters (40 minutes)**
11h20 - 11h45 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 10 communications courtes
11h45 - 12h30 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues

12h30 - 14h00 : Pause déjeuner (ou Posters)

14h00 - 14h45 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues
14h45 - 15h50 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 26 communications courtes
15h50 - 16h50 : **Pause café Posters (60 minutes)**
16h50 - 17h35 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues
17h35 - 18h20 : **Conférence invitée 2 (40 + 5 minutes)**

Jeudi 19 mars 2015

09h30 - 10h15 : **Conférence invitée 3 (40 + 5 minutes)**
10h15 - 10h50 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 13 communications courtes
10h50 - 11h45 : **Pause café Posters (55 minutes)**
11h45 - 12h30 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues

12h30 - 14h00 : Pause déjeuner (ou Posters)

14h00 - 14h45 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues
14h45 - 15h45 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes)** - 24 communications courtes
15h45 - 16h45 : **Pause café Posters (60 minutes)**
16h45 - 17h30 : **Exposés longs (20 + 2 minutes)** - 2 communications longues
17h30 - 18h15 : **Conférence invitée 4 (40 + 5 minutes)**

Nous remercions l'Université Paris Diderot de mettre à notre disposition les locaux de la Rencontre. Nous remercions également le CNRS, l'Institut des Systèmes Complexes – Paris Ile-de-France, et le laboratoire Matière et Systèmes Complexes de subvenir aux frais de la Rencontre et des éditions des actes, ce qui la rend entièrement gratuite pour tous les participants. Cette année, nous sommes 153 inscrits au 03 mars 2015.

Le Comité d'Organisation des RNL 2015 :

E. Falcon (CNRS / Univ. Paris Diderot), M. Lefranc (Univ. Lille 1), F. Pétrélis (CNRS / ENS Paris) & C.T. Pham (Univ. Paris Sud)

Mercredi 18 mars 2015

09h30 - 10h15 : Conférence invitée par Thierry DAUXOIS (40 + 5 minutes)
Nonlinearity in the oceans: What lies beneath ?

10h15 - 10h40 : Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) - 10 communications courtes

[Un anneau pour les gouverner tous](#)

B. Filoux, M. Hubert, N. Vandewalle, présenté par B. Filoux

[Oscillations et fragmentation spontanées de bulles d'air remontant dans une solution de polymère confinée](#)

R. Poryles, V. Vidal, présenté par R. Poryles

[Approche pluridisciplinaire des écoulements multiphasiques en milieu poreux](#)

M. Serres, V. Vidal, R. Philippe, présenté par M. Serres

[Momentum based approximation of incompressible multiphase flows](#)

L. Cappanera, J.-L. Guermond, W. Herreman, C. Nore, présenté par L. Cappanera

[Effet du mouillage sur l'écoulement d'un fluide à travers un trou](#)

J. Ferrand, V. Vidal, É. Freyssingeas, présenté par J. Ferrand

[Elasto-capillary windlass : from spider webs to synthetic actuators](#)

H. Elettro, A. Antkowiak, S. Neukirch, F. Vollrath, présenté par H. Elettro

[Multiscale correlations in unstable plastic flow](#)

M. A. Lebyodkin, T. A. Lebedkina, présenté par M. Lebyodkin

[Influence de la rhéologie en grandes déformations sur les performances des adhésifs auto-collants](#)

R. Villey, B. Saintyves, C. Creton P.-P. Cortet, L. Vanel, S. Santucci, M.-J. Dalbe, D. J. Yarusso, M. Ciccotti, présenté par R. Villey

[Fragmentation des fronts de fracture en mode mixte I+III](#)

H. Henry, présenté par H. Henry

[Hierarchical wrinkling in permeable and confined bio-gels](#)

M. Leocmach, M. Nespoulous, S. Manneville, T. Gibaud, présenté par T. Gibaud

10h40 - 11h20 : Pause café Posters (40 minutes)

11h20 - 11h45 : Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) - 10 communications courtes

[Genèse de biofilms: des ondulations de contour à la focalisation de plis](#)

M. Ben Amar, M. Wu, présenté par M. Ben Amar

[Modeling the emergence of polarity patterns in meristemic auxin transport](#)

S. Grigolon, P. Sollich, O. C. Martin, présenté par S. Grigolon

[Numerical \(Aqueous\) Solutions: Diffusion under Chemical Constraints](#)

Y. Bouret, M. Argentina, C. Raufaste, J. Olivier, présenté par Y. Bouret

[Transmission active d'une impulsion dans un modèle de neurone](#)

S. Jacquir, N. Nguetcho Tchakoutio, A. Serge, R. Behdad, S. Binczak, V. Kazantsev, J.-M. Bilbault, présenté par S. Jacquir

[Dissolution réactive et convective : classification des effets des réactions chimiques](#)

V. Loodts, C. Thomas, L. Rongy, A. De Wit, présenté par V. Loodts

[Instabilité viscoélastique : analogie avec l'instabilité magnéto-rotationnelle](#)

Y. Bai, O. Crumeyrolle, I. Mutabazi, présenté par Y. Bai

[Dynamique neuromimétique dans un micropilier laser à absorbant saturable](#)

F. Selmi, R. Braive, G. Beaudoin, I. Sagnes, R. Kuszelewicz, S. Barbay, présenté par F. Selmi

[Multi-rythmicité dans un laser avec feedback retardé](#)

G. Friart, L. Weicker, T. Erneux, présenté par G. Friart

[Contrôle et génération de structures propagatives par filtrage de Fourier asymétrique](#)

E. Louvergneaux, V. Odent, S. Coulibaly, U. Bortolozzo, S. Residori, présenté par V. Odent

[Chimera states in laser delay dynamics](#)

L. Larger, B. Penkovsky, Y. Maistrenko, présenté par B. Penkovsky

11h45 - 12h30 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

[Effondrement d'une coque cylindrique remplie de grains](#)

E. Clément, G. Gutierrez, C. Colonello, J. Darias, P. Boltenhagen, R. Peralta-Fabi, F. Brau, présenté par E. Clément

[Scaling macroscopic aquatic locomotion](#)

M. Argentina, M. Gazzola, L. Mahadevan, présenté par M. Argentina

12h30 - 14h00 : Pause déjeuner (ou Posters)

14h00 - 14h45 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

[Comment naissent les vagues sous l'effet du vent?](#)

A. Paquier, F. Moisy, M. Rabaud, présenté par A. Paquier

[Intermittence en turbulence intégrable](#)

S. Randoux, P. Walczak, M. Onorato, P. Suret, présenté par S. Randoux

14h45 - 15h50 : Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) – 26 communications courtes

[Friction granulaire en présence de vibrations mécaniques](#)

H. Lastakowski, J.-C. Géminard, V. Vidal, présenté par H. Lastakowski

[Scénario dynamique de la liquéfaction d'un solide amorphe](#)

A. Pons, A. Amon, T. Darnige, J. Crassous, E. Clément, présenté par J. Crassous

[Compression de radeaux granulaires](#)

E. Jambon-Puillet, S. Protière, présenté par E. Jambon-Puillet

[Génération expérimentale de solitons de cut-off dans une ligne électrique non linéaire](#)

P. Marquié, K. Tse Ve Koon, P. Tchofo-Dinda, S. Morfu, présenté par P. Marquié

[Analyse topologique appliquée à deux cas de chaos faiblement dissipative : Lorenz-84 et cereal crops](#)

S. Mangiarotti, présenté par S. Mangiarotti

[Synchronisation dans des réseaux complexes d'équations de réaction-diffusion de type Fitzhugh-Nagumo](#)

V. L. E. Phan, B. Ambrosio, M. A. Aziz-Alaoui, présenté par V. L. E. Phan

[Structures localisées dans des VCSELs : expérience et contrôle par retour retardé](#)

E. Averlant, M. Tlidi, K. Panayotov, présenté par E. Averlant

[Brisure spontanée de symétrie dans deux nanolasers couplés](#)

F. Hamel, S. Haddadi, F. Raineri, P. Monnier, G. Beaudoin, I. Sagnes, J. A. Levenson, A. M. Yacomotti, présenté par A. M. Yacomotti

[Solitons dans un système neuromorphique optique avec rétroaction retardée](#)

B. Garbin, J. Javaloyes, G. Tissoni, S. Barland, présenté par B. Garbin

[Impact du bruit sur la dynamique des structures localisées dans un milieu Kerr non-instantané et non-local](#)

H. Louis, M. Tlidi, E. Louvergneaux, présenté par H. Louis

[Couple et nombre de rouleaux dans un écoulement de Taylor-Couette pour des fluides viscoélastiques](#)

B. Martínez-Arias, J. Peixinho, O. Crumeyrolle, I. Mutabazi, présenté par B. Martínez Arias

[La croissance de taches turbulentes dans l'écoulement de Couette plan](#)

M. Couliou, R. Monchaux, présenté par M. Couliou

[Simulations à haute résolution de champs aléatoires et implications sur la modélisation stochastique de la turbulence](#)

R. M. Pereira, L. Chevillard, présenté par R. M. Pereira

[Statistiques de formes de triangles advectés par un écoulement turbulent](#)

R. Guichardaz, A. Pumir, présenté par R. Guichardaz

[Réductions fluide des équations de Vlasov-Poisson](#)

M. Perin, C. Chandre, P. Morrison, E. Tassi, présenté par M. Perin

[Second order gyrokinetic Vlasov-Maxwell model: comparing numerical simulations and theory](#)

N. Tronko, A. Brizard, E. Sonnendruker, présenté par N. Tronko

[Instabilities in electromagnetically driven flows](#)

P. Rodriguez Imazio, C. Gissinger, S. Fauve, présenté par P. Rodriguez Imazio

[Study of turbulent 2.5D dynamos](#)

K. Seshasayanan, A. Alexakis, présenté par K. Seshasayanan

[Collision d'un tourbillon fluide annulaire sur une surface conique](#)

S. Hernandez Zapata, G. Ruiz Chavarria, V. Raspa, E. Javier Lopez Sanchez, présenté par S. Hernandez Zapata

[Etude numérique de la stabilité et des effets tridimensionnels de l'oscillateur salin](#)

G. Ruiz Chavarria, E. Javier Lopez Sanchez, S. Hernandez Zapata, présenté par G. Ruiz Chavarria

[Étude d'instabilité primaire et secondaire de fluides viscoélastiques saturant une couche poreuse horizontale chauffée par un flux constant](#)

A. Gueye, M.N. Ouarzazi, S. Hirita, G. Mompean, A.C. Béye, présenté par A. Gueye

[Transition vers l'écoulement chaotique induit par la stratification de la viscosité: Evolution non linéaire de l'amplitude](#)

S. A. Bahrani, A. Lefèvre, A. Esmael, C. Nouar, présenté par S. A. Bahrani

[Effet d'une perturbation haute fréquence sur la réponse du système de FitzHugh-Nagumo soumis à une excitation basse fréquence subliminale : simulation et expérimentation](#)

M. Bordet, S. Morfu, P. Marquié, présenté par M. Bordet

[Effets du bruit dans le système de Sine-Gordon](#)

B. Bodo, S. Morfu, P. Marquié, B. Essimbi, R. Alima, présenté par R. Alima

[Thermo-électricité de Green: observation et analyse de la réponse thermo-électrique de plantes](#)

C. Goupil, H. Ouerdane, A. Khamsing, Y. Apertet, F. Bouteau, S. Mancuso, R. Patiño, É. Herbert, P. Lecoeur, présenté par E. Herbert

[Imageurs du non-linéaire: de l'imagerie ultrasonore médicale au contrôle non-destructif industriel](#)

S. Dos Santos, Z. Dvorakova, J. Chaline, M. Lints, D. Remache, présenté par S. Dos Santos

15h50 - 16h50 : Pause café Posters (60 minutes)

16h50 - 17h35 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

[Influence d'une mousse liquide sur le ballotement d'un fluide](#)

A. Sauret, F. Boulogne, J. Cappello, E. Dressaire, H. A. Stone, présenté par A. Sauret

[Exact two-dimensionalization of low-magnetic-Reynolds-number flows subject to a strong magnetic field](#)

B. Gallet, C. R. Doering, présenté par B. Gallet

17h35 - 18h20 : Conférence invitée par David GERARD-VARET (40 + 5 minutes)

Analyse de quelques paradoxes issus de l'interaction fluide-solide

Jeudi 19 mars 2015

09h30 - 10h15 : **Conférence invitée par John DUDLEY (40 + 5 minutes)**

1000 years of light, 50 years of solitons – the remarkable role of optics in nonlinear physics

10h15 - 10h50 : **Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) – 13 communications courtes**

Intermittence et turbulence d'ondes de plaques

S. Chibbaro, C. Josserand, présenté par C. Josserand

Etude expérimentale des interactions à trois ondes des vagues capillaires

M. Berhanu, A. Cazaubiel, L. Deike, T. Jamin, E. Falcon, présenté par M. Berhanu

Résonances dans la turbulence d'ondes de gravité-capillarité

Q. Aubourg, N. Mordant, présenté par N. Mordant

Interaction entre turbulence hydrodynamique et ondes de surface

T. Jamin, M. Berhanu, E. Falcon, présenté par T. Jamin

La turbulence en rotation est-elle une turbulence d'ondes?

A. Campagne, B. Gallet, F. Moisy, P.-P. Cortet, présenté par A. Campagne

Cascade d'énergie dans les attracteurs d'ondes internes

C. Brouzet, E. Ermanyuk, S. Joubaud, T. Dauxois, présenté par C. Brouzet

Transversal stability of the bouncing ball on a concave surface

J.-Y. Chastaing, G. Pillet, N. Taberlet, J.-C. Géminard, présenté par J.-C. Géminard

Estimation of oil pressure using nonlinear fractional partial differential equations

B. Brito, C. Fuentes, F. Brambila, présenté par B. Brito Martinez

Dynamos stellaires : symétries et modulations

R. Raynaud, présenté par R. Raynaud

Analyse taille finie d'une crise de fluctuation dans l'écoulement de Couette plan transitionnel

J. Rolland, présenté par J. Rolland

Turbulent bands in a planar shear flow without walls

M. Chantry, L. S. Tuckerman, D. Barkley, présenté par M. Chantry

Etude expérimentale de neurones de Morris-Lecar (réalisation et couplage)

R. Behdad, S. Binczak, S. Jacquir, M. Rossé, J.-M. Bilbault, présenté par R. Behdad

La résonance cohérente : amélioration de la régularité de la réponse d'un système non linéaire par le bruit

S. Morfu, P. Marquié, G. Lassere, présenté par S. Morfu

10h50 - 11h45 : **Pause café Posters (55 minutes)**

11h45 - 12h30 : **Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues**

Dualité onde-corpuscule macroscopique : perte de déterminisme et émergence d'un comportement statistique par effet mémoire

M. Hubert, N. Vandewalle, présenté par M. Hubert

Etude expérimentale d'un thermostat hors-équilibre

J.-Y. Chastaing, J.-C. Géminard et A. Naert, présenté par J.-Y. Chastaing

12h30 - 14h00 : **Pause déjeuner (ou Posters)**

14h00 - 14h45 : **Exposés longs (20 + 2 minutes) - 4 communications longues**

L'instabilité de la valise à roulettes

G. Facchini, K. Sekimoto, S. Courrech du Pont, présenté par G. Facchini

De l'équation de Schrödinger non-linéaire à la physique statistique sur réseau

W. Ettoumi, J. Kasparian, J.-P. Wolf, présenté par W. Ettoumi

14h45 - 15h45 : Présentation des posters (2 + 0.5 minutes) – 24 communications courtes

Etude de la dynamique d'une diode laser soumise à un feedback à conjugaison de phase filtré

L. Weicker, T. Erneux, D. Wolfersberger, M. Sciamanna, présenté par L. Weicker

Solitons de phase dans un laser à semiconducteur

F. Gustave, L. Columbo, M. Brambilla, F. Prati, G. Tissoni, S. Barland, présenté par F. Gustave

Reservoir Computing ultra-rapide basé sur une dynamique non-linéaire électro-optique en phase

A. Baylón-Fuentes, R. Martinenghi, V. S. Udaltsov, M. Jacquot, Y. K. Chembo, L. Larger, présenté par A. Baylón-Fuentes

Ondes scélérates en turbulence intégrable

P. Walczak, S. Randoux, P. Suret, présenté par P. Walczak

Auto-organisation d'un dépôt induit par évaporation et effet Marangoni solutal

M. Dey, F. Doumenc, B. Guerrier, présenté par B. Guerrier

Radially forced liquid drops

A. Ebo Adou, L. S. Tuckerman, D. Juric, J. Chergui, S. Shin, présenté par A. Ebo Adou

Une instabilité capillaire en milieu confiné

L. Keiser, R. Herbaut, J. Bico, E. Reyssat, présenté par L. Keiser

Partial coalescence of soap bubbles

G. Pucci, D. M. Harris, J. W. M. Bush, présenté par G. Pucci

Éoliennes à pales flexibles

V. Cognet, S. Courrech Du Pont, B. Thiria, présenté par V. Cognet

Instabilités de membranes électro-actives

H. Bense, J. Bico, B. Roman, M. Trejo, B. Secordel, présenté par H. Bense

Compression-loose fibre media: continuum constitutive law and single crack case-study

O. Mahmood, B. Audoly, D. Rodney, S. Roux, présenté par O. Mahmood

Formation de motifs triangulaires dans les rubans élastiques sous tension et torsion

J. Chopin, A. Kudrolli, présenté par J. Chopin

Flambement de poutres minces hyperélastiques

C. Lestringant, B. Audoly, présenté par C. Lestringant

Convection thermique turbulente en présence de rugosités contrôlées : influence sur la couche limite et l'écoulement moyen

O. Liot, J. Salort, E. Rusaoüen, Q. Ehlinger, T. Coudarchet, R. du Puits, B. Castaing, F. Chillà, présenté par O. Liot

Turbulence in a gradual expansion circular pipe flow

K. Selvam, J. Peixinho, A. P. Willis, présenté par K. Selvam

Une expérience modèle de l'oscillation quasi-biennale

B. Semin, G. Facchini, F. Pétrélis, S. Fauve, présenté par B. Semin

Etude expérimentale de l'effet d'un tourbillon sur la propagation d'une onde plane

T. Humbert, B. Gallet, S. Aumaître, présenté par T. Humbert

Instabilities in helical vortex systems: linear analysis and nonlinear dynamics

C. Selçuk, I. Delbende, M. Rossi, présenté par C. Selçuk

Wavelength and width selection in confined Benard-Von Karman streets

L. Limat, P. Boniface, C.-T. Pham, présenté par L. Limat

Instabilités thermiques et hydrodynamiques des écoulements parallèles

Y. Requilé, M. N. Ouarzazi, S. Hirata, présenté par Y. Requilé

Polygonal symmetry breaking of jets, sheets and hydraulic jumps due to viscoelasticity

B. Néel, H. Lhuissier, L. Limat, présenté par H. Lhuissier

Gyrokineic turbulence cascade via predator-prey interactions between different scales

S. Kobayashi, O. Gürçan, présenté par S. Kobayashi

[Chaos lagrangien dans un écoulement de convection confiné 2D](#)

L. Oteski Y. Duguet, L. Pastur, présenté par L. Oteski

[Dynamique des systèmes à l'élasticité asymétrique et discontinue](#)

V. A. Yastrebov, présenté par V. Yastrebov

15h45 - 16h45 : Pause café Posters (60 minutes)

16h45 - 17h30 : Exposés longs (20 + 2 minutes) - 2 communications longues

[Instabilité magnéto-élastique : un nouveau modèle validé par de nouvelles expériences](#)

F. Gerbal, Y. Wang, F. Lyonnnet, J.-C. Bacri, T. Hocquet, M. Devaud, présenté par F. Gerbal

[Modéliser les grandes échelles dans les écoulements de paroi transitionnels](#)

P. Manneville, présenté par Paul Manneville

17h30 - 18h15 : Conférence invitée par Patrick H. DIAMOND (40 + 5 minutes)

[Pattern formation in plasmas: On why staircases are inevitable drift-Rossby turbulence](#)

18^e Rencontre du Non-Linéaire
Université Paris Diderot
Paris 2015

ISBN 978-2-9538596-4-5
EAN 9782953859645

Non-Linéaire Publications (NL Pub.)
Site universitaire du Madrillet — BP 12
78801 St-Étienne du Rouvray Cedex



**18^e Rencontre du Non Linéaire
Université Paris Diderot
Paris 2015**

ISBN 978-2-9538596-4-5
EAN 9782953859645

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/>