Localiser un îlot de stabilité perdu dans une mer chaotique, et inversement, à l'aide de la Dynamique Biaisée par les Lyapunov

Tanguy Laffargue & Julien Tailleur

Laboratoire Matière et Systèmes Complexes (CNRS UMR 7057), Université Paris Diderot, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75205 Paris Cedex 13, France

tanguy.laffargue@univ-paris-diderot.fr

La dynamique de certains systèmes physiques est gouvernée par des structures de chaoticité atypique, représentant un petit volume dans l'espace des phases. Par exemple, les résonances et les séparatrices jouent un rôle central dans la stabilité des systèmes planétaires [1]. L'étude des propriétés de transport des systèmes quasi-intégrables nécessite de s'intéresser à des couches chaotiques très minces, qui sont les structures responsables de la diffusion d'Arnold [2]. De même, des objets localisés comme les solitons et les modes de respiration chaotiques sont responsables du transport de l'énergie dans des systèmes non linéaires comme les condensats de Bose-Einstein et les molécules biologiques [3–5]. De façon similaire, le phénomène d'intermittence, qui est important dans les systèmes turbulents, semble être généré par des structures localisées spatialement qui apparaissent et disparaissent dans l'écoulement [6].

Ces structures, en plus d'être rares, sont généralement instables, ce qui complique leur mise en évidence. En dépit des progrès faits ces dernières années, la plupart des méthodes numériques pour localiser ces trajectoires rares sont uniquement applicables à des systèmes de faible dimension ou sont spécifiques à un modèle. La Dynamique Biaisée par les Lyapunov [7] est un algorithme Monte-Carlo qui permet d'échantillonner les trajectoires en fonction de leur spectre de Lyapunov, une observable qui mesure la sensibilité aux conditions initiales et donc la chaoticité. Je montrerai comment cet algorithme permet d'observer des trajectoires inaccessibles par des simulations directes, à la fois en haute et basse dimension, ouvrant ainsi la porte à des applications allant de la mécanique céleste à la physique statistique [8].

Au-delà de la détection de trajectoires atypiques, cet algorithme permet aussi de mesurer la pression topologique, une quantité centrale de la thermodynamique des trajectoires de Ruelle [9], dans des systèmes étendus spatialement. Cette observable, qui est l'analogue de l'énergie libre dans l'espace des trajectoires, fournit un cadre naturel pour étudier les transitions de phase dynamiques. J'illustrerai le calcul de la pression topologique sur une chaîne d'applications couplées [8].

Références

1. J. Laskar, "A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System", *Nature* **338**, 237 (1989).
2. V. I. Arnold , "Instability of dynamical systems with several degrees of freedom", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **156:1**, 9–12 (1964). English translation : *Sov. Mat. Dokl.* **5**, 581–585 (1964).
3. T. Cretegny, T. Dauxois, S. Ruffo & A. Torcini, "Localization and equipartition of energy in the β-FPU chain: Chaotic breathers", *Physica D* **121**, 109–126 (1997).
4. A. Trombettoni & A. Smerzi, "Discrete Solitons and Breathers with Dilute Bose-Einstein Condensates", *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2353–2356 (2001).
5. M. Peyrard, T. Dauxois, H. Hoyet & C. R. Willis, "Biomolecular dynamics of DNA: statistical mechanics and dynamical models", *Physica D* **68**, 104–115 (1993).
6. G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev, & A. Migdal, "Instantons and intermittency", *Phys. Rev. E* **54**, 4896–4907 (1996).
7. J. Tailleur & J. Kurchan, "Probing rare physical trajectories with Lyapunov weighted dynamics", *Nature Physics* **3**, 203–207 (2007).
8. T. Laffargue, K.-D. Nguyen Thu Lam, J. Kurchan & J. Tailleur, "Large deviations of Lyapunov exponents", *J. Phys. A* **46**, 254002 (2013).
9. D. Ruelle, *Thermodynamic formalism: the mathematical structure of equilibrium statistical mechanics*, Addison-Wesley (1978).