

É. Falcon, M. Lefranc
F. Pétrélis, C.-T. Pham
Éditeurs

Comptes-Rendus de la 17^e
Rencontre du Non-Linéaire
Paris 2014

Université Paris Diderot
Non-Linéaire Publications

17^e RENCONTRE DU NON-LINÉAIRE
 Université Paris Diderot, PARIS
 18–20 Mars 2014

Nous remercions vivement le GDR PHENIX, le GDR Turbulence, l'Institut des Systèmes Complexes-Paris Île-de-France (ISC-PIF), l'université Paris Diderot, le Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), pour leur soutien matériel et financier.

Le comité scientifique est composé de :

Médéric ARGENTINA INLN — Nice
 Sébastien AUMAÎTRE CEA — Saclay
 Christel CHANDRE CPT — Marseille
 Laurent CHEVILLARD Lab. de Physique — ENSL
 Özgür GÜRCAN LPP — École Polytechnique
 Jérôme HOEPPFNER IJLRA — UPMC
 Éric FALCON MSC — Paris Diderot
 Christophe FINOT ICB — Dijon
 François PÉTRÉLIS LPS — ENS
 Chi-Tuong PHAM LIMSI — Paris-Sud
 Stéphane RANDOUX PhLAM — Lille
 Laure SAINT-RAYMOND DMA — ENS

Les Rencontres annuelles du Non-Linéaire sont organisées par :

Éric FALCON MSC — Paris Diderot
 Marc LEFRANC PhLAM — Lille
 François PÉTRÉLIS LPS — ENS
 Chi-Tuong PHAM LIMSI — Paris-Sud

Le colloque *Dynamique et optique non linéaires, hommage à Pierre Glorieux* est organisé par :

Marc LEFRANC PhLAM — Lille
 Daniel HENNEQUIN PhLAM — Lille
 Stéphane RANDOUX PhLAM — Lille

Ces Comptes-Rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

Non-Linéaire Publications, Avenue de l'université, BP 12
 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Toutes les informations concernant les Rencontres sont publiées sur le serveur :

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/>

Renseignements :

rnl@nonlineaire.univ-lille1.fr

Table des matières

Pierre Glorieux, grand pionnier du non linéaire <i>Yves Pomeau avec l'aide de Martine Le Berre</i>	1
Écoulement viscoélastique de Couette-Taylor en analogie avec l'instabilité magnéto-rotationnelle <i>Yang Bai, Farid Toumache, Olivier Crumeyrolle, Innocent Mutabazi</i>	5
Stabilité absolue d'une allée de Bénard-von Kármán confinée engendrée par deux instabilités couplées de Kelvin-Helmholtz <i>Paul Boniface, Luc Lebon, Fabien Bouillet, Mathieu Receveur, Laurent Limat</i>	11
Étude systématique des transitions dans l'équation de Ginzburg-Landau stochastique par l'algorithme <i>adaptive multilevel splitting</i> <i>Freddy Bouchet, Joran Rolland, Éric Simonnet</i>	17
Dynamique non-linéaire des efflorescences du phytoplancton en milieu marin <i>Jonathan Derot, François G. Schmitt, Valérie Gentilhomme</i>	23
Transition doigt/fracture lors de l'ascension d'air dans un milieu granulaire confiné et saturé <i>Vincent De Zotti, Valérie Vidal</i>	29
Claquage élastocapillaire <i>Aurélie Fargette, Sébastien Neukirch, Arnaud Antkowiak</i>	35
Dynamique chaotique d'un rouleau de convection dans une couche de fluide verticale, confinée et différentiellement chauffée <i>Zhenlan Gao, Bérengère Podvin, Anne Sergent, Shihe Xin</i>	39
Vaporisation d'une nano-goutte encapsulée stimulée par ultrasons <i>Matthieu Guédra, François Coulouvrat</i>	45
Modèle phénoménologique pour la prédiction de spectres stationnaires et instationnaires de turbulence d'ondes de plaques <i>Thomas Humbert, Christophe Josserand, Olivier Cadot, Cyril Touzé</i>	51
Impact sur des suspensions granulaires denses : rôle clef du couplage entre dilatance de Reynolds et pression de pore <i>J. John Soundar Jerome, Yoël Forterre</i>	57
Heat transfer by Görtler vortices developed on a wall with finite conductivity <i>Lyes Kahouadji, Harunori Yoshikawa, Jorge Peixinho, Innocent Mutabazi</i>	63
Réarrangement polygonal d'un vortex à surface libre <i>Matthieu Labousse, Stéphane Perrard, John W. M. Bush, Laurent Limat</i>	69

Locating a regular needle in a chaotic haystack, and conversely, using Lyapunov Weighted Dynamics <i>Tanguy Laffargue, Julien Tailleur</i>	75
États « chimère » dans une dynamique à retard en longueur d’onde d’une diode laser accordable <i>Laurent Larger, Bogdan Penkovsky, Morgane Girardot-Poinsot, Yuri Maistrenko</i>	81
Supernova: explosion or implosion? <i>Martine Le Berre, Yves Pomeau, Pierre-Henri Chavanis, Bruno Denet</i>	87
Non-linear poro-elastic coupling in real and artificial branches and its possible link to plants mechano-perception <i>Jean-François Louf, Geoffroy Guéna, Olivier Pouliquen, Yoël Forterre, Éric Badel, Hervé Cochard, Bruno Mouliat</i>	93
Dynamique de fusion de billes de glace en écoulement turbulent <i>Nathanaël Machicoane, Julien Bonaventure, Romain Volk</i>	99
Transitions structurales dans un gaz granulaire magnétique <i>Simon Merminod, Michael Berhanu, Éric Falcon</i>	105
Instabilité du pont capillaire <i>Gounséti Paré, Jérôme Hoepffner</i>	111
La phyllotaxie : cristallographie sous rotation-dilatation et mode de croissance ou de détachement <i>Nicolas Rivier, Jean-François Sadoc, Jean Charvolin</i>	117
Observation directe de la formation de patterns dans des paquets d’électrons relativistes <i>É. Roussel, C. Évain, M. Le Parquier, C. Sz waj, S. Bielawski, M. Hosaka N. Yamamoto, Y. Takashima, T. Konomi, M. Adachi, H. Zen, S. Kimura, M. Katoh, J. Raasch, P. Thoma, A. Scheuring, K. Ilin, M. Siegel, L. Manceron, J.-B. Brubach, M.-A. Tordeux, J.-P. Ricaud, L. Cassinari, M. Labat, M.-E. Couprie, P. Roy</i>	123
Description gyrocinétique des modes de déchirement néoclassiques <i>Natalia Tronko, Alain Brizard, Howard Wilson</i>	129
Advection chaotique dans un électrolyte, générée par une densité de forces de Laplace <i>Gérard Vinsard, Stéphane Dufour, Esteban Saadjan</i>	135
Incoherent dispersive shocks in the spectral evolution of random waves <i>Gang Xu, Josselin Garnier, Stefano Trillo, Antonio Picozzi</i>	141
Instabilité de méandrage d’un filet liquide <i>Stéphanie Couvreur, Adrian Daerr, Jens Eggers, Laurent Limat</i>	147
Index	155

Pierre Glorieux, grand pionnier du non linéaire

Yves Pomeau¹ avec l'aide de Martine Le Berre²

¹ Department of Mathematics, University of Arizona, Tucson, AZ 85721, USA

² Institut des Sciences Moléculaires d'Orsay ISMO-CNRS, Université Paris-Sud, Bat. 210, 91405 Orsay Cedex, France

pomeau@lps.ens.fr

Même si cet exposé sera centré sur les contributions scientifiques de Pierre Glorieux, je dirai quelques mots de l'homme qui nous a quittés. Je ne me souviens pas bien de nos premières rencontres, juste que nous avons sympathisé lors d'une de ces fameuses conférences de Peyresc, peut-être vers 1995 ou un peu avant. À ce moment-là j'étais encore assez alerte pour faire là-bas le tour du Courradour, dans la même cordée (si je puis dire) que lui. Ce tour du Courradour se fait en deux-trois heures, dans un paysage grandiose avec souvent des vues de chamois. Mes courtes pattes avaient quelque peine à suivre les grandes enjambées de Pierre et j'ai encore à l'esprit la discussion que nous avons eue : moi lui disant que c'était évidemment facile pour lui d'être devant tout le monde, lui qui avait déjà dû entendre ça, me disant que certes il allait plus vite mais qu'il dépensait au kilomètre autant, sinon plus, d'énergie que moi, ayant à faire bouger de plus grands leviers, ce qui pourrait bien être vrai : les coureurs de fond ne sont pas spécialement grands, au contraire même.

La curiosité et l'intelligence de cet honnête homme étaient toujours en éveil ! D'autres que moi ont ou vont parler de son engagement dans le non linéaire. Comme moi et quelques autres, Il appréciait cette entreprise un peu folle du non linéaire, fondée sur la qualité scientifique et qui détonnait dans notre système de recherche publique corseté à l'extrême.

Pour mettre dans le bon cadre les contributions scientifiques marquantes de Pierre, il n'est sans doute pas inutile de revenir sur un aspect, souvent oublié ou négligé, le rôle de l'optique dans le non linéaire. Lorsque j'avais commencé à m'intéresser à ces questions, milieu des années 1970, il n'existait, je crois, qu'un seul bouquin de physique avec non linéaire dans le titre, c'était le livre de Bloembergen et Ducuing qui s'appelait justement *Nonlinear Optics*, un livre fort intéressant décrivant la propagation des rayons lumineux dans un milieu où la relation polarisation-champ électrique était développée en puissances du champ aux premiers ordres au-delà des effets linéaires, les seuls retenus par Fresnel il y a longtemps.

Pour compliquer les choses, Bloembergen et Ducuing considéraient des milieux cristallins anisotropes et non linéaires. Ouf ! J'avais été voir Jacques Ducuing, à l'époque jeune prof à Orsay, qui m'avait demandé des choses sur les effets non linéaires dans les équations elliptiques, ce qui était bien au-delà de mes modestes compétences. Ça ne m'avait quand même pas découragé d'approfondir la question, d'un point de vue assez différent de celui du bouquin de Bloembergen-Ducuing. Plus tard, j'ai retrouvé tout de même, et heureusement, l'optique non linéaire à travers les exposés de Pierre Glorieux et, je dois bien dire, dans des formulations plus accessibles pour moi que la question de Ducuing.

Je m'en voudrais de ne pas rappeler et même dire tout le bien que je pense du travail grâce auquel Pierre et son groupe ont fait irruption sur la scène nationale et internationale (les deux étant assez proches à l'époque) de la recherche dans le non linéaire. Il s'agit de la mise en évidence du doublement de période dans un laser CO₂ aux paramètres modulés élastiquement, publiée dans un article de *Physical Review Letters* en 1985 [1].

Bien que je ne sois pas spécialiste, la manip ne me semble pas simple. Elle utilise les techniques de l'époque, soit un laser CO₂ dont la cavité Perot-Fabry inclut un dispositif élasto-optique excité par une tension électrique modulée. Cette modulation apparaît comme un terme sinusoïdal en temps dans les équations du bilan laser, population d'atomes excités et intensité du champ EM dans la cavité. Pour bien expliquer l'impact de ce travail publié fin 1985, il faut rappeler que si à l'époque on connaissait le doublement de période, on n'avait qu'une très vague idée de sa justification précise dans une manip donnée. Les systèmes où ce doublement de période avait été identifié étaient des fluides en convection thermique (instabilité de Rayleigh-Bénard) dans des régimes où l'analyse — pratiquement — ne donnait

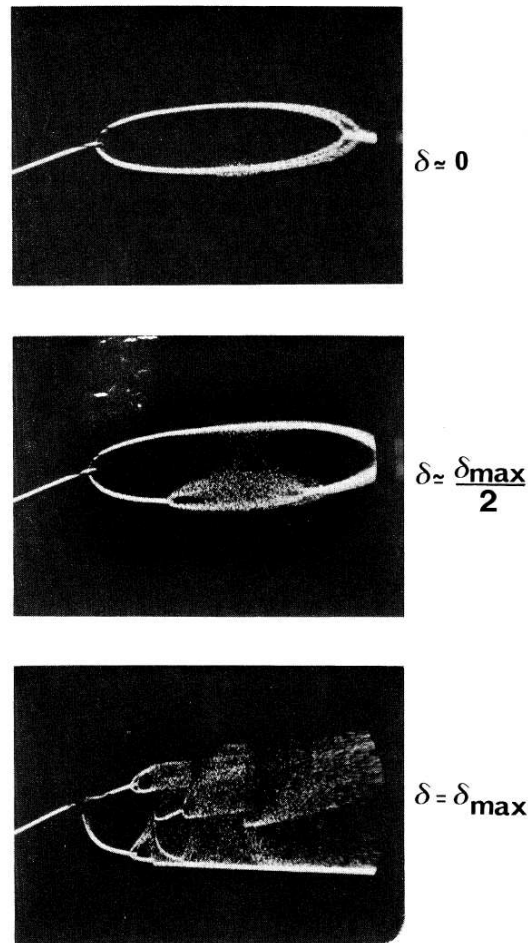


FIG. 4. Alteration of the bifurcation diagram due to laser detuning from the emission line center. $\delta = 0$ (tuned cavity) to $\delta_{\max} \approx 200$ MHz.

Figure 1. Figure tirée de l'article de T. Midavaine *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **55** (1985) [1].

pas accès quantitativement aux phénomènes observés, une situation assez frustrante d'ailleurs. Là, on avait — enfin dirais-je — un cas où tout était sous contrôle et où, grâce au ciel, tout ou presque marchait comme prévu! Manip superbe qui restera.

Un des aspects importants de cette manip est sa rapidité. À l'époque, comme je viens de le dire, le système où la bifurcation vers le chaos était étudiée était le plus souvent l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Elle avait de gros avantages : pas de pièce mobile, donc peu ou pas de vibrations et de gros inconvénients : tout était lent et les phénomènes compliqués étaient donc très difficiles à mettre en évidence. À ma connaissance, la première mise en évidence expérimentale de ce que l'on appelle une crise (que je vais définir tout de suite) est due à Pierre et ses collaborateurs, ceci excluant les démonstrations de type « ordinateur analogique » qui, en tant que preuve, ne vont guère au-delà de ce que montre l'ordinateur digital. C'est l'objet du *Physical Review Letters* de novembre 1986 [2] où est montrée de très belle façon une crise, c'est-à-dire la collision d'un attracteur avec le bassin d'attraction d'un autre attracteur. On voit bien dans les figures de l'article cette expansion brutale (lors d'une petite variation d'un paramètre de contrôle) de l'attracteur chaotique.

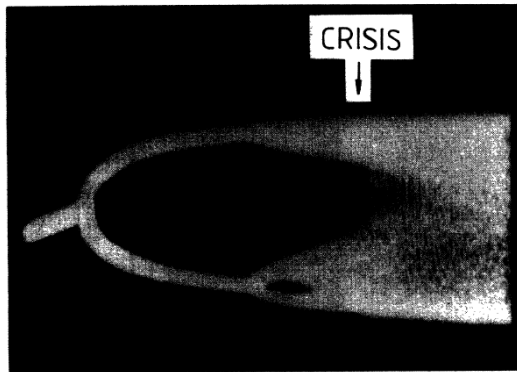


FIG. 1. Bifurcation diagram of the laser showing a period-doubling sequence to chaos and a crisis corresponding to an expansion between the two branches of the chaotic regime.

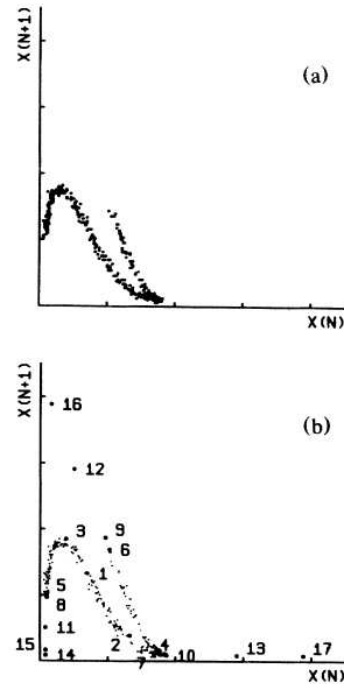


FIG. 5. Return maps of successive laser intensity maxima (I_n, I_{n+1}) (a) below and (b) above a crisis similar to that displayed in Fig. 2. The numbers indicate the chronology of the crisis and refer to the successive values of n . From points 3, 4, and 5, the system evolves on various limits of the "attractor." From point 9, it is well outside the attractor.

Figure 2. Figures tirées de l'article de D. Dangoisse *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) [2].

L'interprétation de cette crise se voit par l'apparition de nouvelles branches de l'application de premier retour, apparition qui se fait pour la valeur de « crise » du paramètre de bifurcation.

De telles branches sembleraient impliquer une multivaluation de l'application de premier retour, en principe interdite pour un système déterministe. Cette multivaluation n'est naturellement qu'un effet de la projection sur un axe 1D d'un attracteur étrange de dimension supérieure à 1. De telles figures auraient été bien difficiles, voire impossibles, à obtenir avec les systèmes bien plus lents de l'hydrodynamique.

Pour récapituler, ces belles expériences ont amené Pierre et son groupe sur la scène nationale et internationale du chaos, au moment où tout était possible et où nouvelles idées et concepts apparaissaient chaque jour ou presque. La suite de cette histoire qui me passionne toujours m'entraînerait trop loin.

Il me suffira de dire, peut-être pour les spécialistes ici présents, que cette suite, dont j'avais vu les premiers pas à Peyresc, concerne les structures transverses dans la manip de structures en antiphase l'une de l'autre, dont les résultats ont été publiés dans *Physical Review Letters* en 2007 [3]. Là, je vais tenter d'expliquer comment ça marche : imaginez une modulation en bandes alternées noires et blanches. Ces deux couleurs pourraient indiquer le plein et le creux de vagues bien régulières. Eh bien deux structures sont en antiphase lorsque les noirs de l'une sont juste en face des blancs de l'autre. En général, une telle juxtaposition avec opposition de phase ne se fera pas de façon spontanée. Au contraire dans la manip de Lille cette alternance se fait même mieux que de façon naturelle, c'est l'état « fondamental » du système, des modulations d'indice de réfraction se formant spontanément dans les deux photoréfractifs couplés. Ici, on voit atteinte une maîtrise dont les physiciens ont longtemps rêvé, celle d'instabilités avec un large éventail de possibilités, tout en étant complètement dominées.

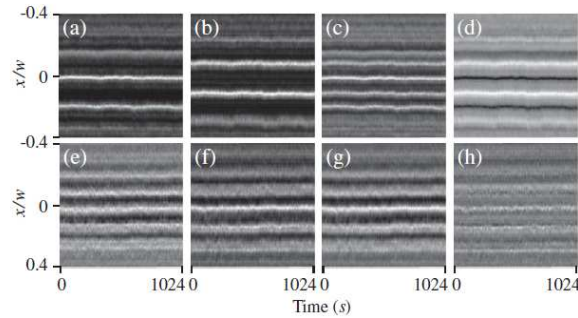


FIG. 2. Experimental roll spatiotemporal evolutions observed in slices 1 (a),(e) and 2 (b),(f) for negative (a)–(d) and positive (e)–(h) nonlinearity, respectively. (c),(g) [(d),(h)] correspond to the sum [difference] of the diagrams of the two slices 1 and 2. Parameters are $w = 1400 \mu\text{m}$, (a)–(d) $I = 1.25I_c$, $d = -12.5 \text{ mm}$ ($\sigma = -10.6$) and (e)–(h) $I = 1.1I_c$, $d = 13 \text{ mm}$ ($\sigma = 11$).

Figure 3. Figure tirée de l'article d'E. Louvergneaux *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **99** (2007) [3].

En opticien qu'il était, entre autres, Pierre cherchait et trouvait le montage pouvant mettre en évidence une idée physique nouvelle, originale. Il y parvenait grâce à ses vastes connaissances, à son intuition. Il nous laisse l'exemple et le modèle d'une recherche inventive, à la pointe de ce qui est compris et de ce qui est possible. Grand exemple pour les jeunes générations, dont je crois qu'il se préoccupait beaucoup, toujours sensible à maintenir l'équilibre entre ce qui est possible et ce qui est souhaitable, un équilibre souvent difficile à trouver dans notre système de recherche publique, système au fonctionnement duquel il a pris sa part sans rechigner.

Références

1. T. MIDAVAIN, D. DANGOISSE & P. GLORIEUX, Observation of chaos in a frequency-modulated CO₂ laser, *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 1989–1992 (1985).
2. D. DANGOISSE, P. GLORIEUX & D. HENNEQUIN, Laser chaotic attractors in crisis, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 2657–2660 (1986).
3. E. LOUVERGNEAUX, F. REGISTER & P. GLORIEUX, Spatiotemporal antiphase dynamics in coupled extended optical media, *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 263901 (2007).

Écoulement viscoélastique de Couette-Taylor en analogie avec l'instabilité magnétorotationnelle

Yang Bai, Farid Toumache, Olivier Crumeyrolle & Innocent Mutabazi

Laboratoire ondes et milieux complexes (LOMC), Rue Prony, 76058 Le Havre
yang.bai@etu.univ-lehavre.fr

Résumé. Ogilvie *et al.* ont proposé en 2003 d'utiliser des solutions de polymère comme analogue d'un fluide magnétique. Ils ont identifié, par une étude de stabilité linéaire, un nouveau mode d'instabilité qui serait analogue à l'instabilité magnétorotationnelle dans certains disques d'accrétion. Une seule étude expérimentale antérieure existe, menée par Boldyrev *et al.* [1]. Mais celle-ci s'écarte de la prédiction d'Ogilvie à la fois par les paramètres expérimentaux employés et de par certains des résultats. Nous étudions expérimentalement le cas des solutions aqueuses de polyoxyéthylène+polyéthylèneglycol en corotation différentielle et présentons de nouveaux résultats. Le mode critique observé est non-axisymétrique et se distingue bien de l'instabilité élastique. Nous présentons aussi les résultats de l'analyse de stabilité linéaire pour nos paramètres expérimentaux et comparons avec nos résultats expérimentaux.

Abstract. Ogilvie *et al.* have proposed in 2003 an analog between polymer solutions and magnetic fluids to explain the transport of angular momentum in an accretion disk. They then identified a new form of instability which is comparable to the magnetorotational instability in certain accretion disks. Up to now, only one experimental study of this possible analogy has been conducted by Boldyrev *et al.* [1]. But it deviates from the Ogilvie's prediction in both the use of experimental parameters and the results. We investigate experimentally the case of aqueous solutions of polyoxyethylene+polyethylene glycol in differential corotating Couette-Taylor system. The observed critical mode is non-axisymmetric as predicted by Ogilvie *et al.* and we have verified that it is distinct from the elastic instability. Besides we have analyzed the linear stability in conditions corresponding to our experiments, and compare to our experimental results.

1 Introduction

L'écoulement de Couette-Taylor est observé quand une couche de fluide est emprisonnée entre deux cylindres en rotation différentielle. Pour les faibles vitesses de rotation, l'écoulement est purement azimutal ; c'est l'écoulement de Couette circulaire. Dans le contexte de la théorie des écoulements non-visqueux, le critère dit de Rayleigh prédit que pour un tel écoulement, si le carré de la circulation de la vitesse est partout positif alors l'écoulement est stable. Or l'intérêt en astrophysique pour ce type d'écoulement a été perçu dès 1981 [2]. En particulier l'étude de l'influence de la rotation différentielle sur le transport du moment angulaire dans le contexte des disques d'accrétion a conduit à un grand intérêt [3–5] pour les études expérimentales portant sur les écoulements newtoniens de Couette-Taylor en rotation différentielle, tout particulièrement dans la situation stable du point de vue du critère de Rayleigh. En effet l'équilibre entre la gravitation, due à un objet central, et la force centrifuge, ressentie dans le disque en rotation, admet une solution dite Képlérienne pour laquelle le profil de vitesse purement azimutal vérifie ($v_\theta \propto r^{-\frac{1}{2}}$). On peut vérifier qu'un tel profil, corotatif mais qui présente une vitesse de rotation angulaire plus rapide pour le cylindre intérieur que pour le cylindre extérieur, est stable du point de vue du critère de Rayleigh. Indépendamment du rôle de la viscosité et de la turbulence tel qu'étudié dans cette approche newtonienne, l'étude des disques d'accrétion se porte aussi sur les effets magnétohydrodynamiques. En particulier l'instabilité magnétorotationnelle (MRI) [6] pourrait aussi jouer un rôle clef dans la dynamique de ces disques. Ceci demande de s'intéresser au problème du point de vue de la magnétohydrodynamique. Toutefois la réalisation d'expériences de Couette-Taylor avec des métaux liquides ou des plasmas présente des nombreux inconvénients.

Or Ogilvie *et al.* ont proposé d'utiliser des solutions de polymère comme analogue d'un fluide magnétique [7]. L'étirement des polymères se compare alors à l'étirement des lignes de champ magnétique. L'analogie se base sur le modèle viscoélastique d'Oldroyd-B pour lequel, en sus du bilan de quantité de mouvement où apparaît le nombre de Reynolds Re , il faut introduire une équation dite constitutive, qui régit le tenseur des contraintes polymériques et peut être réécrites comme suit (après adimensionnement) :

$$\frac{\partial T_p}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T_p - (\nabla \mathbf{U})^T \cdot T_p - T_p \cdot \nabla \mathbf{U} = -\frac{1}{Wi} (T_p - \frac{S}{Wi} I) \quad (1)$$

où Wi est le nombre de Weissenberg, analogue élastique d'un nombre de Reynolds et S le rapport de la contribution des polymère à la viscosité, η_p , sur la viscosité totale $\eta = \eta_s + \eta_p$ de la solution. Or le tenseur des contraintes magnétique de Maxwell vérifie, après réécriture, une équation de même membre gauche que (1) et présentant un membre droit qui disparaît si le Reynolds dit magnétique diverge. Il y a alors une analogie avec (1) si le nombre de Weissenberg Wi y diverge.

Au-delà de cette analogie pour les grandes valeurs des paramètres de contrôle, Ogilvie *et al.* ont aussi discuté l'analogie pour des valeurs intermédiaires [7] et démontré [7, 8] par analyse de stabilité linéaire que la rotation différentielle avec des conditions aux limites Képlériennes conduit à un nouveau mode d'instabilité viscoélastique, distincts des modes observés jusque-là, et qui peut être analogue à l'instabilité MRI.

Une seule étude expérimentale antérieure existe, menée par Boldyrev *et al.* [1]. Celle-ci s'écarte de [8] par les paramètres expérimentaux employés car le ratio $\eta_p/\eta_s \gg 1$ alors que [8] ne présente de résultats que pour ($\eta_p/\eta_s = 1$). Le caractère rhéofluidifiant des solutions les écarte du contexte du modèle d'Oldroyd-B, qui ne décrit pas la rhéofluidification. Certains des résultats de [1] sont en contradiction avec la nature attendue du motif, avec un mode critique axisymétrique alors que le nombre d'onde azimutal est prédit non nul par [8]. Les modes d'instabilité observés sont qualifiés d'élasto-rotationnels (ERI).

Aussi étudions-nous expérimentalement le cas des solutions de polyoxyéthylène de grande masse molaire dans un mélange newtonien fait d'eau et de polyéthylèneglycol de faible masse molaire. Ces solutions présentent une faible rhéofluidification, ce qui les rapproche du modèle d'Oldroyd-B. Les deux paramètres de contrôle que constituent les concentrations nous permettent d'explorer le plan (Re , Wi) depuis l'origine sur des lignes droites de pente différente. La cellule de Couette-Taylor employée présente un rapport des rayon intérieur sur extérieur $a/b = 0,8$ et un rapport d'aspect hauteur sur entrefer $H/d = 38$. La visualisation est réalisée à l'aide de Kalliroscope et d'une coupe laser dans le plan (r, z) .

Il est néanmoins difficile de comparer nos résultats avec ceux de la prédiction de [8], car ni le rapport des rayons ni le rapport de viscosité de nos expériences ne correspondent avec les paramètres de [8]. Aussi reprenons-nous l'analyse linéaire de la stabilité par la méthode de collocation de Tchebychev avec des conditions aux limites Képlériennes en utilisant nos paramètres expérimentaux.

2 Résultats expérimentaux préliminaires

Nous présentons des résultats préliminaires obtenus avec des solutions dont le ratio de viscosité η_p/η_s varie de 0,3 à 0,5. Si un seul cylindre tourne, nous retrouvons un mode critique typique des instabilités purement élastiques. Par contre en corotation différentielle avec des conditions aux limites Képlériennes nous observons bien un mode critique distinct du régime purement élastique. Nous présentons Fig. 1 (b) et (c) un mode de chaque type. On remarque que le nouveau mode, que nous qualifierons d'ERI en première approximation est bien non-axisymétrique et se distingue bien de l'instabilité élastique (EI). Il paraît en particulier plus régulier que ce dernier. Nous rapportons aussi Fig. 1 (d) (e) les spectres à deux dimensions pour les diagrammes spatio-temporels présentés Fig. 1 (b) et (c). On y observe que le spectre temporel pour le mode ERI présente une structure rappelant celle des spectres de modulation de fréquence. Au contraire, le mode EI possède un étalement spectral plus continu, ce qui confirme le caractère plus régulier du mode ERI.

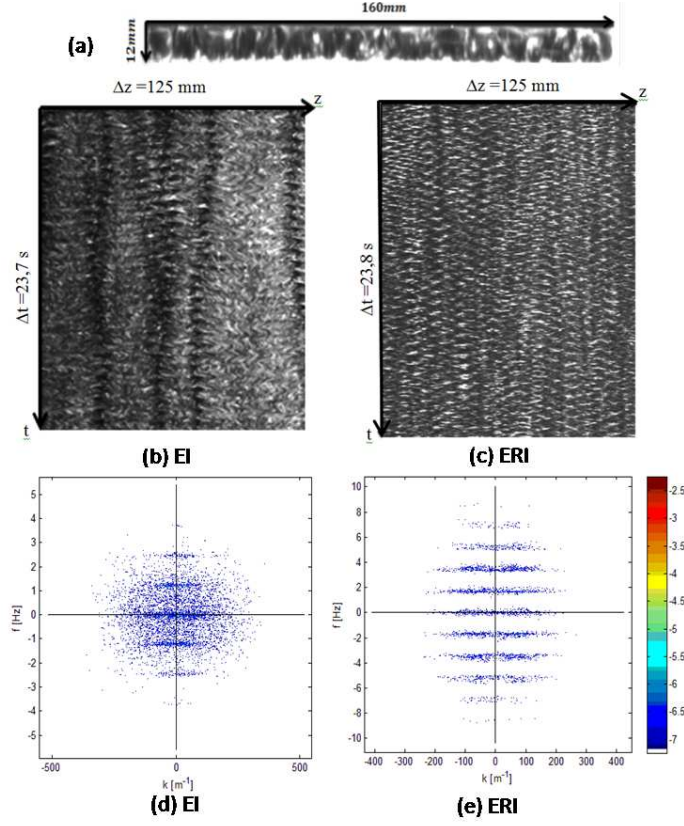


Figure 1. (a) Exemple de section (z, r) . Exemples de diagrammes spatio-temporel au seuil de l'instabilité. (b) Instabilité purement élastique (EI). (c) Instabilité élasto-rotationnelle (ERI). (d) Spectre 2D du DST au seuil de EI. (e) Spectre 2D du DST au seuil de ERI.

3 Résultats d'analyse linéaire

Nous présentons Fig. 2(a) le diagramme de stabilité viscoélastique par rapport aux Re et Wi avec les nombres d'ondes optimisés. La variation de couleur présente le taux de croissance d'une perturbation dont la partie en bleu foncé est la zone stable. La ligne blanche présente le seuil de l'instabilité. Nous présentons aussi en Fig. 2 (b–d) des motifs différents de l'instabilité pour des points différents dans le plan de (Re, Wi) . Parmi eux le motif de Fig. 2 (c) correspond au mode analogue à l'instabilité MRI présenté dans [8], cependant que les 2 autres sont de nouveaux modes d'instabilité.

4 Comparaison du seuil de l'instabilité

Nous établissons en Fig. 3(a) le diagramme de stabilité expérimental dans le plan (Re, Wi) et en Fig. 3(b) le seuil de l'instabilité obtenue de l'analyse linéaire. On remarque que ces deux résultats sont quantitativement et qualitativement incompatibles.

5 Discussions

Le mode ERI observé dans ce travail présente un nombre de Reynolds critique (Fig. 3 (a)) qui croît en même temps que le nombre de Weissenberg critique. Ceci se distingue des prédictions pour l'analogie avec

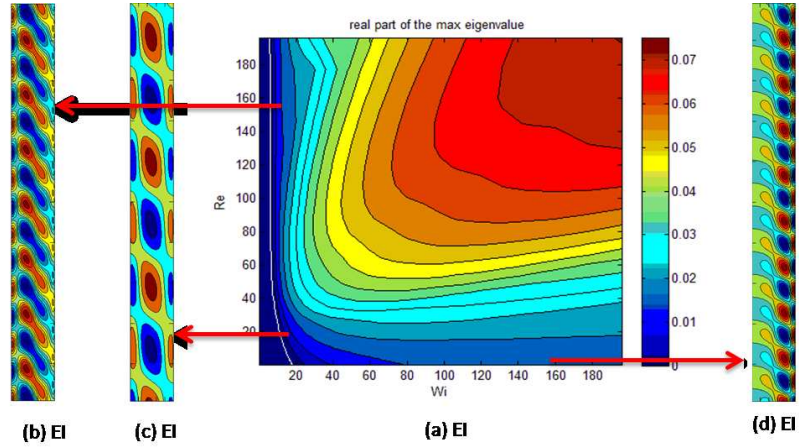


Figure 2. (a) Diagramme de stabilité pour un ratio de viscosité $\eta_p/\eta_s = 0,37$ et un rapport des rayons de 0,8. Les couleurs présentent différent taux de croissance et la ligne blanche présente le seuil de l'instabilité. (b) (c) (d) Motifs de l'instabilité figurés par la vorticité des vitesses radiale et verticale aux points indiqués par les flèches rouges.

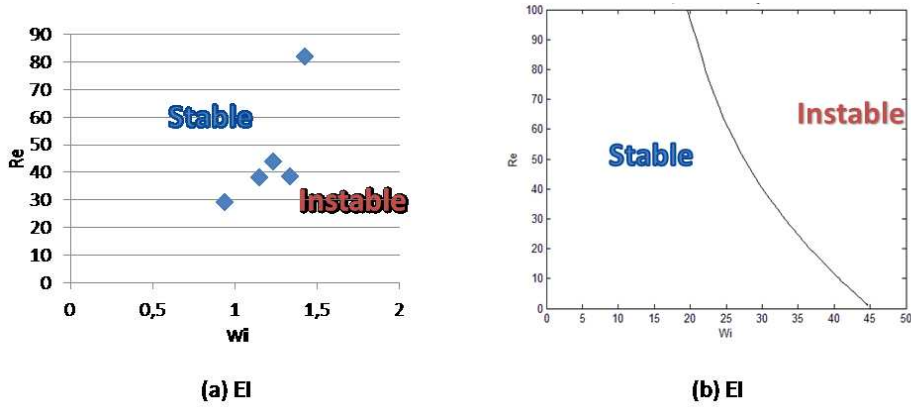


Figure 3. (a) Seuil de stabilité expérimental. (b) Prédiction du seuil de l'instabilité par l'analyse linéaire.

l'instabilité MRI où le nombre de Weissenberg critique diminue en augmentant le nombre de Reynolds. Cette différence pourrait être due à la variation du rapport de viscosité. On remarque aussi un facteur de 20   30 sur les valeurs de Wi critique. Ceci est probablement lié à la détermination expérimentale du nombre de Weissenberg. De nouvelles expériences sont en cours.

Références

1. S. BOLDYREV, D. HUYNH & V. PARIEV, Analog of astrophysical magnetorotational instability in a Couette-Taylor Flow of Polymer fluids, *Phys. Rev. E*, **80**, 066310 (2009).
2. Y. B. ZELDOVICH, On the friction of fluids between rotating cylinders, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **374**, 299–312 (1981).
3. H. JI, M. BURIN, E. SCHATMAN & J. GOODMAN, Hydrodynamic turbulence cannot transport angular momentum effectively in astrophysical disks, *Nature*, **444**, 343–346 (2006).
4. D. RICHARD & J.-P. ZAHN, Turbulence in differentially rotating flows. What can be learned from the Couette-Taylor experiment, *Astron. Astrophys.*, **347**, 734–738 (1999).

5. M. S. PAOLETTI, D. P. M. VAN GILS, B. DUBRULLE, C. SUN, D. LOHSE & D. P. LATHROP, Angular momentum transport and turbulence in laboratory models of Keplerian flows, *Astron. Astrophys.*, **547**, A64 (2012).
6. S. BALBUS & J. F. HAWLEY, A powerful local shear instability in weak magnetized disks: linear analysis, *Astrophys. J.*, **376**, 214–233 (1991).
7. G. I. OGILVIE & M. R. PROCTOR, On the relation between viscoelastic magnetohydrodynamical flows and their instabilities, *J. Fluid Mech.*, **476**, 389–409 (2003).
8. G. I. OGILVIE & A. T. POTTER, Magnetorotational-type Instability in Couette-Taylor Flow of a Viscoelastic Polymer Liquid, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 074503, (2008).

Stabilité absolue d'une allée de Bénard-von Kármán confinée engendrée par deux instabilités couplées de Kelvin-Helmholtz

Paul Boniface¹, Luc Lebon¹, Fabien Bouillet², Mathieu Receveur¹ & Laurent Limat¹

¹ Laboratoire Matière et Systèmes Complexes (MSC), UMR 7057 du CNRS, Université Paris Diderot, 10 rue Alice Domont et Léonie Duquet, 75013 Paris

² Saint-Gobain Recherche, 39 Quai Lucien Lefranc, 93300 Aubervilliers
pbonifac@gmail.com

Résumé. Nous avons étudié expérimentalement la formation d'allées de tourbillons de Bénard-von Kármán sur les côtés d'un tapis entraînant partiellement une couche d'eau par sa surface dans une cuve rectangulaire. Entre l'entraînement et la recirculation latérale, le fort cisaillement peut créer deux instabilités de type Kelvin-Helmholtz, de part et d'autre du tapis, pouvant sous certaines conditions se coupler et former une allée de vortex semblable à celles de Bénard-von Kármán, sans le forçage traditionnel par un obstacle placé dans l'écoulement. La stabilité de cette allée est modifiée par le confinement, en accord avec le calcul très ancien de Rosenhead, dont nous présentons une vérification expérimentale. Par ailleurs, contrairement à ce que l'on observe dans le cas d'une allée classique formée derrière un obstacle, la dynamique de l'instabilité s'effectue ici en régime « absolu » et non « convectif », selon la terminologie émergeant de la théorie des écoulements ouverts.

Abstract. We have experimentally investigated the development of Kelvin-Helmholtz vortices on each side of a belt moving at high speed at the free surface of a rectangular pool of water. The strong shear generated between the flow dragged by the belt and the recirculation can lead to a shear layer instability and vortex rows on each side of the belt. These rows can, eventually be coupled and form a vortex street, like a Bénard-von Kármán vortex street without the classical forcing of the wake behind an obstacle. The stability of these streets, observed experimentally, is in agreement with a theory developed by Rosenhead for vortex streets confined in a 2D-channel. Moreover, the instability generated here is absolute and not convective, unlike the classical Bénard-von Kármán vortex street drifting in the wake behind an obstacle.

1 Introduction

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz est une instabilité hydrodynamique qui apparaît à l'interface entre deux écoulements parallèles de vitesses différentes; des perturbations peuvent s'y développer et si les conditions le permettent, s'enrouler jusqu'à former des tourbillons. À l'origine, cette instabilité fut étudiée pour comprendre la génération d'ondes à la surface d'une étendue d'eau soumise à un vent suffisamment fort [1, 2]. Des travaux plus récents ont montré que dans le cas général, le phénomène est plus complexe [3], mais les mécanismes mis à jour ont pu servir de base à la compréhension de nombreux phénomènes similaires [4]. Au fil du temps, les mécanismes de cette instabilité ont été appliqués à des cas où la jonction entre les deux écoulements n'est plus une interface infiniment fine mais une couche d'épaisseur non nulle appelée couche de mélange [5].

Cette instabilité a été l'objet de très nombreuses études, mais très peu l'ont abordée dans des conditions dites « absolues », où elle croît plus vite qu'elle n'est convectée. De même, très peu d'études ont regardé quelles sont les conséquences d'un confinement latéral. Des travaux ont été effectués en géométrie circulaire confinée, dans les années 80 [6], où l'on pouvait observer un comportement d'instabilité plutôt « absolu ». Mais la géométrie circulaire impose une périodicité dans l'écoulement et cause une quantification. Nous nous sommes inspirés de ces expériences pour recréer ce phénomène dans une géométrie, cette fois rectangulaire. Nous voulions aussi voir ce qu'il se passe lorsque l'on couple deux rangées de vortex dans cette géométrie : peut-on former une allée de vortex stable ?

2 Montage expérimental

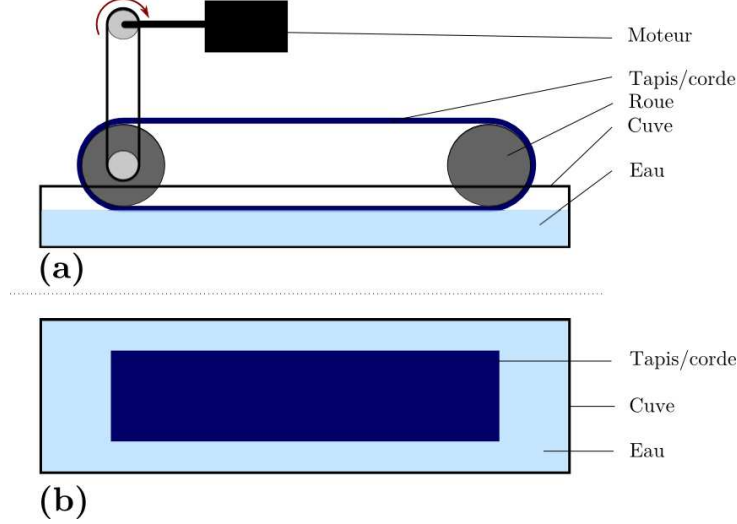


Figure 1. Schéma du montage expérimental. (a) Vue de côté. (b) Vue du dessus.

Pour étudier l'instabilité dans notre géométrie rectangulaire confinée, nous prenons une cuve en verre rectangulaire remplie d'eau. En zone centrale, le fluide est partiellement entraîné par sa surface au moyen d'un tapis ou d'une corde. La cuve est un milieu fermé, il y a ni entrée, ni sortie d'eau : tout entraînement provoque nécessairement une recirculation dans le sens inverse. On peut s'attendre à voir apparaître une instabilité de type Kelvin-Helmholtz entre le fluide entraîné au milieu de la cuve et sa recirculation sur les côtés. Un schéma de l'expérience est présenté sur la figure 1, les paramètres que nous avons pu explorer pour nos expériences sont listés sur la figure 2.

Paramètre	symbole	Valeurs expérimentales explorées
Demi-largeur de la zone d'entraînement	l_b	0,25 cm (corde), 5 cm, 25 cm (tapis)
Largeur de la surface libre	l_f	$< 35 \text{ cm} - l_b$
Demi-largeur de la cuve	$l_f + l_b$	$< 35 \text{ cm}$
Facteur de recouvrement	r	0,03 \rightarrow 0,06 (corde) 0,14 \rightarrow 1 (tapis)
Hauteur d'eau	h	1 cm \rightarrow 20 cm
Longueur de la cuve	L	2,00 m (tapis), 1,30 m (corde)
Longueur de la zone d'entraînement	L'	1,80 m (tapis), 1,15 m (corde)
Vitesse d'entraînement	V	$< 140 \text{ cm.s}^{-1}$
Viscosité cinématique de l'eau	ν	$\approx 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

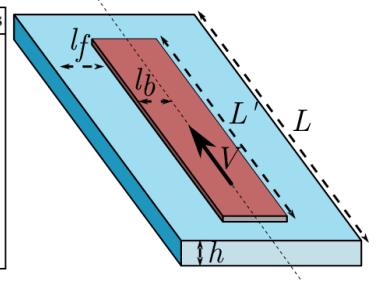


Figure 2. Définition des paramètres de l'expérience et valeurs explorées.

Dans cette figure, on introduit le facteur de recouvrement r qui est défini comme

$$r = \frac{l_b}{l_f + l_b}. \quad (1)$$

Pour observer et caractériser les écoulements, des petits traceurs isodenses sont disséminés dans l'eau, des sphères de polyamide (PSP) de 50 μm de diamètre. Leurs trajectoires sont visualisées dans des plans, à travers les parois transparentes de la cuve, grâce à une nappe laser. Pour cela on utilise la méthode dite de PIV (Particle Image Velocimetry).

3 Observations d'allées de vortex

3.1 Aux basses vitesses

Lorsque l'on met en marche le tapis dans la cuve, on peut observer trois types d'écoulements.

Aux faibles vitesses ($V \ll 10$ cm/s), dans nos expériences avec un tapis ($r > 0,14$) et dans la géométrie de nos expériences, nous n'observons pas l'écoulement avec recirculation sur les côtés attendu. La phase liquide est entraînée dans le sens du tapis sur toute sa surface latérale, et la recirculation se fait principalement par le fond, la forme caractéristique de l'écoulement est représenté sur la figure 3 (a). Dans ces conditions, nous ne pouvions observer l'instabilité recherchée.

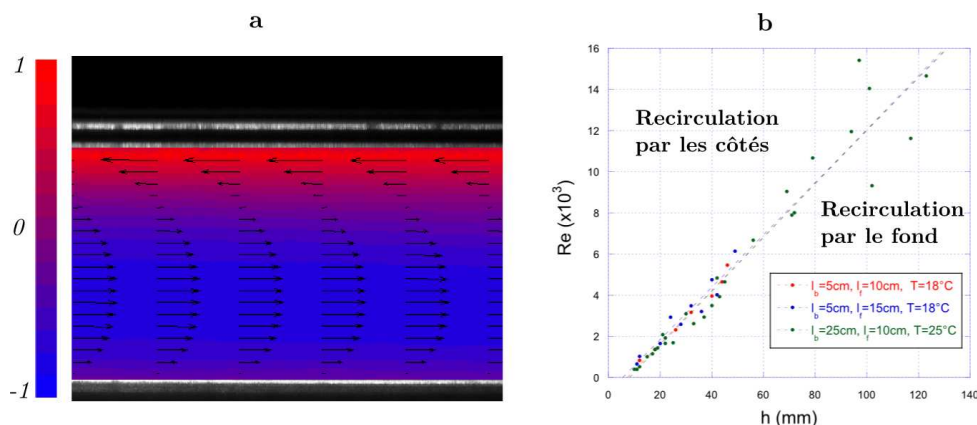


Figure 3. (a) Observation du champ de vitesse dans un plan vertical sous la surface libre, à une distance de 4 centimètres du bord tapis. $V = 3,5$ cm/s, $h = 2,9$ cm, $l_b = 25$ cm et $l_f = 10$ cm en moyennant sur 30 secondes. Les valeurs de la légende sont adimensionnées par rapport à la vitesse maximale observée. (b) Évolution du nombre de Reynolds ($\text{Re} = \frac{V^*h}{\nu}$) auquel se fait la transition écoulement basse vitesse/haute vitesse en fonction de h . Les températures indiquées sont des estimations réalistes, permettant de ramener les différentes mesures sur la même courbe via la variation de la viscosité.

En augmentant la vitesse du tapis, on finit par passer par une transition vers un autre écoulement où la recirculation sur fait bien par les côtés du tapis plutôt que par le fond; on note V^* la vitesse du tapis à cette transition. On trouve expérimentalement que la transition se fait à des valeurs de Reynolds $\text{Re} = \frac{V^*h}{\nu}$ qui dépendent de façon affine de la hauteur h et uniquement de ce paramètre (voir Figure 3 (b)). V^* suit donc empiriquement la relation

$$V^* = \nu \left(A - \frac{B}{h} \right), \quad (2)$$

avec $A \approx 1,3 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$ et $B \approx 950$.

3.2 Aux hautes vitesses

Lorsque $V > V^*$ on a un écoulement où le liquide est entraîné par le tapis au milieu et la recirculation se fait principalement sur les côtés. De chaque côté du tapis, le cisaillement est fort et des vortex se forment. Selon la géométrie, on peut observer deux types de comportement.

Pour un recouvrement est suffisamment faible ($r < 0,6$) et la hauteur d'eau pas trop élevée ($h < 4,5$ cm), les rangées de tourbillons qui se créent de part et d'autre du tapis se couplent et forment une allée de tourbillons bidimensionnelle stable qui occupe toute la cuve; on peut voir un exemple expérimental

d'une telle allée sur la figure 4 (b). On a bien dans ce cas un comportement d'instabilité « absolue », qui croît plus vite dans tout le domaine d'étude qu'elle n'est convectée, ce qui distingue notre expérience des travaux de Biancofiore *et al.* où la convection domine [7]. L'allée se déplace généralement lentement, à des vitesses infimes devant V , toujours vers l'amont du tapis. Toutefois, aux plus faibles recouvrements il est fréquent que cette vitesse s'annule dans le référentiel du laboratoire. Expérimentalement, l'immobilité était occasionnelle dans le cas $r = 0,14$ avec le tapis : deux expériences parfaitement identiques pouvaient donner aléatoirement soit une allée immobile, soit une allée en mouvement. Par contre, toutes les expériences faites avec la corde ($r < 0,06$) ont donné systématiquement des allées de vortex stationnaires et immobiles, comme on peut le voir sur la figure 4 c.

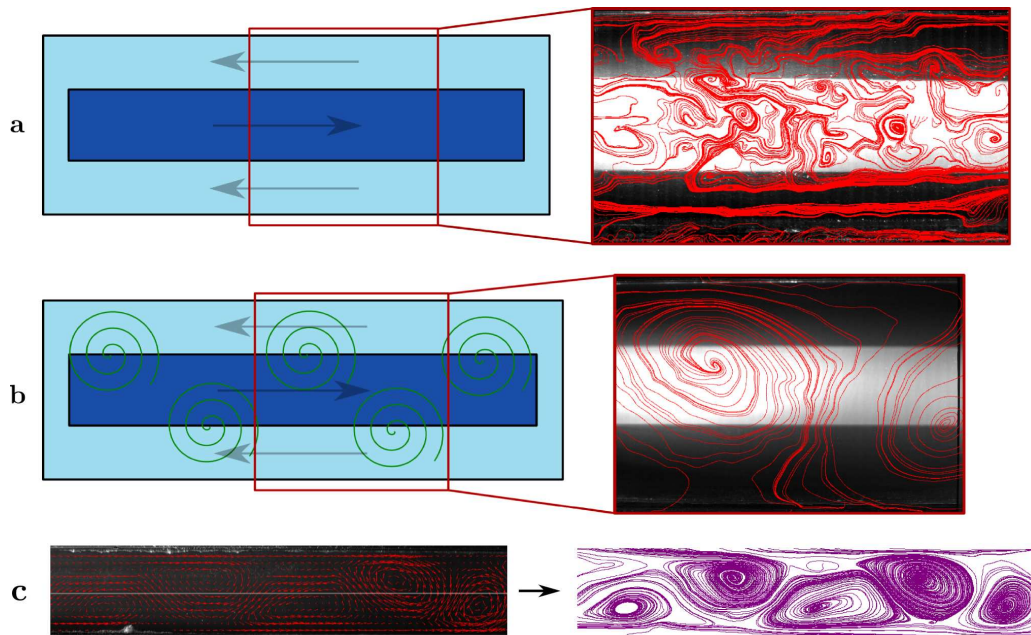


Figure 4. Observations de lignes de courant instantanées dans un plan horizontal à mi-hauteur sous le tapis à haute vitesse. (a) Instabilité non couplée, aspect turbulent ($V = 35$ cm/s, $h = 4,8$ cm, $r = 0,42$). (b) Instabilité couplée, formation d'une allée de vortex stable ($V = 35$ cm/s, $h = 2,8$ cm, $r = 0,35$). (c) Lignes de courant d'une allée de vortex immobile et stationnaire générée avec la corde, moyennée sur 30 s. ($V = 35$ cm/s, $h = 1,8$ cm, $r = 0,06$).

De façon générale, on observe une très forte variabilité des caractéristiques de ces allées (largeur, période, vitesse). Au cours d'une même expérience, sans que l'on ne change aucun paramètre, elles peuvent varier aléatoirement du simple au triple. À première vue, cette variabilité est impressionnante, mais nous verrons plus loin qu'elle semble respecter certaines lois. Si l'on augmente le recouvrement au delà de $r > 0,6$, alors les rangées de vortex n'arrivent plus à se coupler et on n'observe plus de structure de vortex stables. Le comportement devient alors essentiellement turbulent comme on peut le voir sur la figure 4 (a). De même, si l'on augmente la hauteur d'eau au delà de $h = 4,5$ cm, l'allée de vortex a du mal à maintenir sa bidimensionnalité et l'on observe à nouveau un état d'apparence instationnaire et turbulent, sans formation de structures stables. Expérimentalement, on constate que pour retrouver les allées, il faut alors des vitesses de tapis plus hautes et un recouvrement plus faible que ce qui était nécessaire à $h < 4,5$ cm.

L'ensemble des comportements observés avec le tapis sont résumés sur les diagrammes de phase de la figure 5. En abscisses est porté le facteur de recouvrement r , en ordonnées la vitesse adimensionnée $V_{\text{adim}} = \frac{V}{V^*}$.

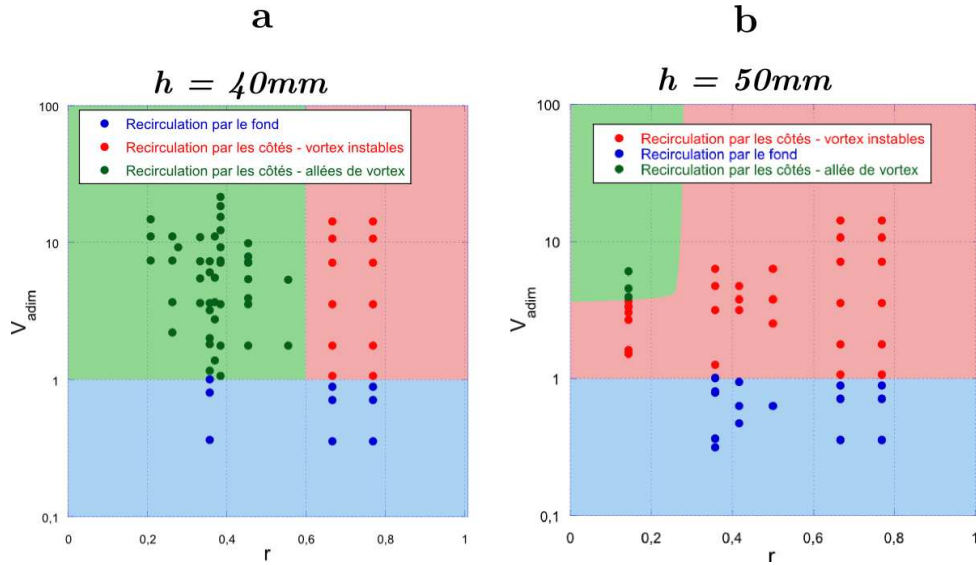


Figure 5. (a) Diagramme de phase (r, V_{adim}) pour $h = 40 \text{ mm}$, valable pour tout $h < 45 \text{ mm}$ avec notre tapis $l_b = 5 \text{ cm}$. (b) Le même diagramme pour $h = 50 \text{ mm}$. Chaque point est expérimental.

4 Stabilité des allées de vortex

Pour modéliser les allées de vortex étudiées expérimentalement par Bénard en 1908 [8] qui se forment derrière les obstacles dans un écoulement parallèle, von Kármán élabore au début du XX^{e} siècle un premier modèle théorique inviscide, bidimensionnel et sur un plan non borné [9]. En étudiant la stabilité linéaire d'un tel système, il trouve qu'une allée peut être stable si et seulement si ses vortex sont disposés régulièrement, en quinconce, de telle sorte que sa largeur a et sa période b répondent à la relation

$$\frac{a}{b} \approx 0,281. \quad (3)$$

Reprenant ces calculs mais en plaçant cette fois l'allée de vortex dans un canal de largeur finie c , comme on peut le voir sur la figure 6 (a), Rosenhead [10] trouve que la présence ce confinement peut avoir un effet stabilisant sur les allées. Il établit analytiquement le diagramme de stabilité reproduit sur la figure 6 (b) : l'allée de vortex n'est plus linéairement stable que pour une seule valeur unique du rapport $\frac{a}{b}$ mais pour toutes les valeurs qui sont sur la courbe et le domaine hachuré du diagramme. Nous avons comparé les mesures de a et b que nous avons obtenues expérimentalement au graphe de stabilité, comme on peut le voir sur la figure 6 (c). Toutes nos mesures, malgré leur très grande variabilité, sont dans la zone de stabilité prédite par Rosenhead. On trouve ainsi une des premières vérifications expérimentales de ce modèle, pourtant vieux de 80 ans.

5 Conclusion et perspectives

Nous avons donc recréé une allée de vortex qui possède des propriétés proches de celles de Bénard-von Kármán, en régime absolu et confiné, vérifiant assez bien la loi de stabilité prédite par Rosenhead en 1929. L'influence du recouvrement, de la viscosité et de la géométrie sur les propriétés de ces allées est encore à étudier largement : notamment pour mieux comprendre l'évolution quantitative du diagramme de phase présenté à la figure 5, ou mieux comprendre pourquoi certaines valeurs de a et de b sont plus sélectionnées que d'autres dans la zone de stabilité. L'étrange écoulement constaté à basse vitesse, et la raison de sa transition à un Reynolds qui ne semble dépendre que de la hauteur d'eau est aussi toujours à l'étude.

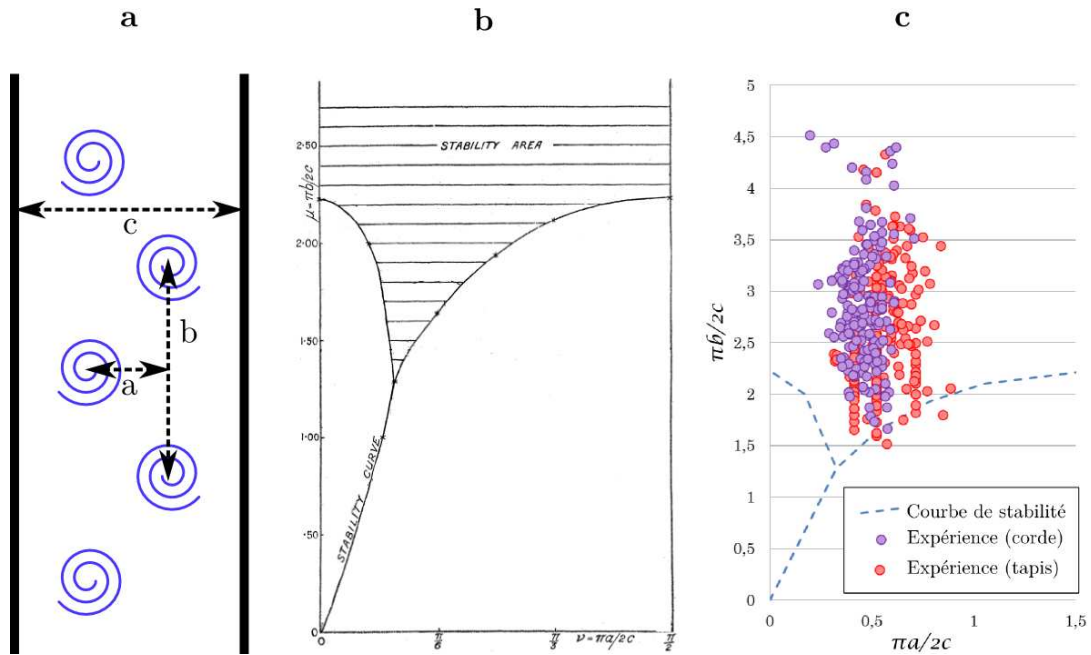


Figure 6. (a) Géométrie d'une allée de vortex, définition des grandeurs a , b et c . (b) Diagramme de stabilité trouvé par Rosenhead. (c) - Nos relevés expérimentaux, reportés dans le diagramme de stabilité de Rosenhead représenté en (b).

Nous remercions C. Arratia, F. Gallaire, E. Wesfreid, L. S. Tuckerman, P. Gondret, M. Rabaud, C.-T. Pham et Y. Fraigneau pour leur aide et les discussions stimulantes que nous avons eues.

Références

1. H. V. HELMHOLTZ, On discontinuous movements of fluids, *Phil. Mag.*, **36**, 337–346 (1868).
2. LORD KELVIN, Hydrokinetic solutions and observations, *Phil. Mag.*, **42**, 362–377 (1871).
3. J. W. MILES, On the generation of surface waves by shear flows part 3. Kelvin-Helmholtz instability, *J. Fluid Mech.*, **6**, 583–598 (1959).
4. R. A. GERWIN, Stability of the interface between two fluids in relative motion, *Rev. Mod. Phys.*, **40**, 652–658 (1968).
5. LORD RAYLEIGH, On the stability, or instability, of certain fluid motions, *Proc. London Math. Soc.*, **2**, 57 (1880).
6. M. RABAUD & Y. COUDER, A shear-flow instability in a circular geometry, *J. Fluid Mech.*, **136**, 291–319 (1983).
7. L. BIANCOFIORE, F. GALLAIRE & R. PASQUETTI, Influence of confinement on a two-dimensional wakes, *J. Fluid Mech.*, **688**, 297–320 (2011).
8. H. BÉNARD, Formation de centres de giration à l'arrière d'un centre en mouvement, *C. R. Acad. Sc. (Paris)*, **147**, 839–842 (1908).
9. T. VON KÁRMÁN & H. RUBACH, On the mechanism of resistance in fluids, *Phys. Z.*, **13**, 49 (1912).
10. L. ROSENHEAD, The Kármán street of vortices in a channel of finite breadth, *Phil. Trans. R. Soc. London*, **228**, 275–328 (1929).

Étude systématique des transitions dans l'équation de Ginzburg–Landau stochastique par l'algorithme *adaptive multilevel splitting*

Freddy Bouchet¹, Joran Rolland² & Éric Simonnet²

¹ Laboratoire de Physique, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46, allée d'Italie, 69007

² Institut du Non linéaire de Nice, UMR 7335, 1361 route des Lucioles, 06560 Valbonne
joran.rolland@inln.cnrs.fr

Résumé. Ce compte-rendu décrit l'étude des trajectoires réactives entre les deux états métastables de l'équation de Ginzburg–Landau stochastique. La distribution complète des trajectoires réactives est calculée en utilisant un algorithme de mutation/sélection appelé algorithme de branchement aléatoire multi-niveau adaptatif (Adaptive Multilevel Splitting algorithm, AMS). L'espace des phases de l'équation aux dérivées partielles stochastique, et par conséquent, les chemins possibles, est paramétré par la taille du domaine. Dans la limite de faible bruit, il apparaît un excellent accord entre le résultat de l'AMS et des prédictions de Grandes Déviations. Ces prédictions sont en accord en ce qui concerne le type de chemin choisi, présentant un seul front, le temps de premier passage moyen et la probabilité de passage. De plus, des arguments simples permettent de déterminer le comportement de la durée moyenne des trajectoires réactives ainsi que la limite de validité des résultats de grandes déviations, lorsque la taille du domaine est grande et/ou le bruit important. En dehors des limites où les prédictions sont valides, l'AMS permet toujours de déterminer les propriétés de trajectoires réactives.

1 Introduction

Les transitions entre états métastables se manifestent dès qu'une source de bruit est présente dans un système ayant plusieurs positions d'équilibre. Elles présentent un intérêt tout particulier lorsqu'elles se produisent dans des systèmes à grand nombre de degrés de liberté, comme par exemple, les équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS) issues entre autres de la mécanique des fluides. Afin de tester les approches d'étude de ces EDPS, on étudie un système simple mais riche, l'équation de Ginzburg–Landau Stochastique qui apparaît dans de nombreux domaines de la physique, allant des transitions de phase (où elle est parfois dite équation d'Allen-Cahn) aux sciences du climat (où elle est appelée équation de Chafee-Infante).

Une fois adimensionnée, avec des conditions de bord de Dirichlet, elle s'écrit :

$$\partial_t A = \partial_x^2 A + (A - A^3) + \sqrt{\frac{2}{\beta}} \eta, \quad A(0) = A(L) = 0, \quad \langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \delta(t - t') \delta(x - x'), \quad (1)$$

avec L la taille du système, η un bruit blanc en temps et en espace et β l'inverse de la température. Une grande partie de sa simplicité provient du fait qu'elle dérive d'un potentiel :

$$\partial_t A = -\frac{\delta V}{\delta A} + \sqrt{\frac{2}{\beta}} \eta, \quad V = \int_0^L dx \left(-\frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{4} A^4 + \frac{1}{2} (\partial_x A)^2 \right), \quad (2)$$

ce qui simplifie l'étude de l'espace des phases et de la mesure invariante. On peut en particulier montrer que les deux états métastables sont $A_0^\pm \simeq \pm 1$ et qu'ils sont séparés par $2n+1$ points cols si $n\pi \leq L < (n+1)\pi$. Ces points cols sont $A = 0$ et des paires de solutions A_k à k fronts, $1 \leq k \leq n$ [2] (voir Figure 1 (a)).

Différentes approches ont été utilisées pour étudier les transitions entre les deux états en présence de bruit. Une application du Principe de Freidlin–Wentzell de grandes déviations dans des domaines de taille finie a conduit à la minimisation de l'action correspondante pour une durée de trajectoire fixée [3].

Cependant, cela ne présente aucune assurance quant au fait que les instantons calculés reproduisent les trajectoires réactives à grand β . Dans l'autre limite, $L \rightarrow \infty$, il a été proposé que les trajectoires réactives correspondaient à une marche aléatoire des fronts [9, 11].

Pour étudier les trajectoires réactives pour l'ensemble des valeurs de β, L et mettre en perspective les prédictions théoriques et leurs limites de validité on utilise un algorithme de mutation/sélection, l'Adaptive Multilevel Splitting. Il permet de calculer la distribution des trajectoires réactives en simulant N dynamiques parallèles du système, appelées clones, de manière itérative : en supprimant les trajectoires allant le moins loin et en les rebranchant sur des trajectoires allant plus loin [1, 6, 8]. Le compte-rendu de l'application de cet algorithme à l'équation de Ginzburg–Landau Stochastique est organisé comme suit : On présente d'abord les méthodes d'étude, quelles soient théoriques (Section 2.1) ou numériques (Section 2.2). On présente ensuite les résultats de l'étude numérique, d'abord de manière qualitative (Section 3.1) puis en regard des prédictions analytiques (Section 3.2). On discute finalement ces résultats dans la conclusion (Section 4)

2 Traiter la métastabilité

Dans cette section, on décrit les méthodes pour déterminer les trajectoires réactives. Une trajectoire réactive est une trajectoire qui part d'un voisinage \mathcal{A} (par exemple une hypersurface \mathcal{C} ou une condition initiale) et atteint l'ensemble \mathcal{B} sans revenir dans \mathcal{A} (Fig. 2 (a)). On les distingue des premiers passages qui sont des trajectoires partant de \mathcal{A} puis atteignant \mathcal{B} après un certain nombre d'excursions et de retours possibles dans \mathcal{A} .

2.1 Approche théorique

On peut traiter de manière analytique les deux limites $\ll \beta \rightarrow \infty \gg$ et $\ll \beta \rightarrow 0 \gg$. On énonce ici les démarches et principaux résultats auxquels elles mènent, ainsi que le sens qu'il faut donner à ces deux limites.

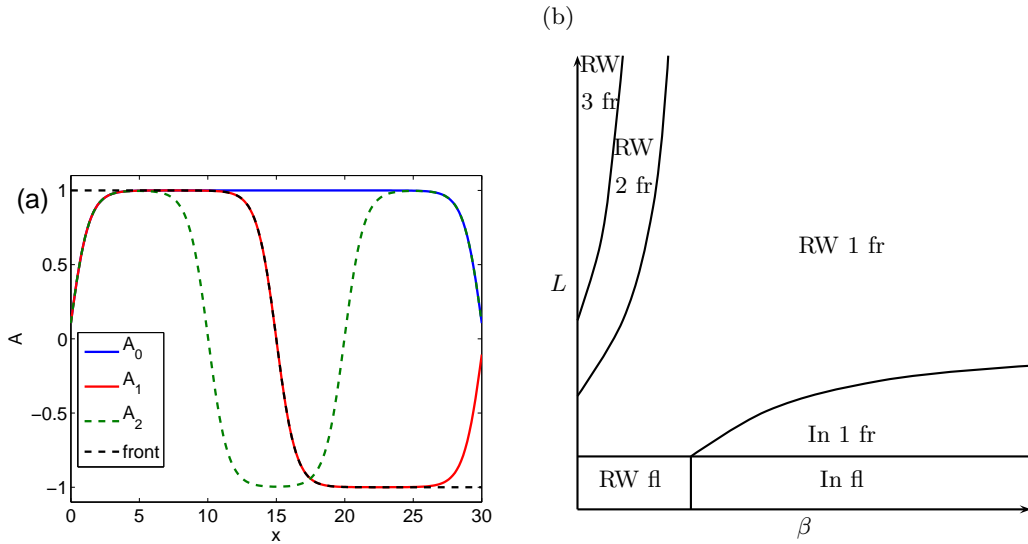


Figure 1. (a) Minima du potentiel et points cols calculés par une méthode de Newton, on ajoute une approximation analytique du point col A_1 . (b) Schéma de principe des trajectoires réactives possibles. RW : marche aléatoire, In : instanton type trajectory ; fl : retournement, trajectoire sans front, 1, 2, 3... ; fr : trajectoire avec 1, 2, 3... front(s).

La limite la plus classique est $\beta \rightarrow \infty$, en effet, dans ce cas, on peut déduire la trajectoire la plus probable $A(t)$, dite instanton, ainsi que la probabilité de l'observer α du principe de Freidlin–Wentzell de

grandes déviations [7] :

$$A(t) = \arg \min_{B,T} \underbrace{\int_{-T}^T dt \left(\partial_t B + \frac{\delta V}{\delta A}(B) \right)^2}_{S(B)}, P(A) \simeq \exp \left(-\frac{\beta S(A)}{2} \right). \quad (3)$$

On prend garde au fait que le minimum de l'action correspondante S n'est atteint que dans la limite $T \rightarrow \infty$ [10] et que les minimisations à durée de trajectoire fixées ne correspondent qu'à des cas particuliers [3, 9]. Dans le cas d'une dynamique dérivant d'un potentiel V , le résultat se simplifie grandement : l'instanton passe par le col le plus bas de V , A_s , A correspond à une montée au col puis une relaxation déterministe, et la probabilité de passage est donnée par la différence de potentiel entre A_0 et A_s :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} A(t) = A_0^+, A(0) = A_s, \lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = A_0^- \\ \partial_t A(t) = +\frac{\delta V}{\delta A} \Leftrightarrow t < 0, \partial_t A(t) = -\frac{\delta V}{\delta A} \Leftrightarrow t > 0, \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha}{\beta} = -\underbrace{(V(A_s) - V(A_0))}_{\Delta V}. \quad (4)$$

Pour $L \lesssim 6$, $A_s = 0$ et $L \gtrsim 6$, $A_s = A_1$ (Fig. 1 (b)) : cela nous indique que les trajectoires les plus probables dans la limite du bruit tendant vers 0 sont soit des retournements globaux, soit l'apparition d'un front à un bord, puis son déplacement vers l'autre bord. Cela nous indique de plus les points cols à prendre en compte lorsque l'on calcule le temps de premier passage moyen par la théorie d'Eyring–Kramers [5].

La trajectoire passe un temps $\tau \propto \ln(\beta)$ au voisinage du point col. Le préfacteur est typiquement donné par la plus grande valeur propre positive du Hessien de V : λ . On peut montrer qu'il croît comme $\lambda \propto \exp(L/\sqrt{2})$.

Les théories de Freidlin–Wentzell et d'Eyring–Kramers sont des théories de point col et cessent d'être valides lorsque l'approximation du col n'est plus bonne, soit typiquement quand $\lambda\beta \simeq 1$. Cela donne une limite dans le plan β, L au delà de laquelle ne plus s'attendre à des trajectoires réactives de type instanton (Fig. 1 (b)). Dans l'autre limite, $L/\ln(\beta) \rightarrow \infty$, les trajectoires correspondent sensiblement à des marches aléatoires pour lesquelles le potentiel se fait peu sentir. Dans ce cas, en prenant en compte le coût en potentiel pour la création de n fronts et l'ensemble des configurations pour la position des fronts, on peut montrer qu'une trajectoire à n front est la plus probable si :

$$L \exp(-\beta \Delta V) - 1 \leq n \leq L \exp(-\beta \Delta V). \quad (5)$$

Cela permet de compléter le diagramme de phase (Fig. 1 (b)). L'utilisation de l'approximation analytique de A_1 (Fig. 1) permet d'estimer $\Delta V = 2\sqrt{2}/3 + \mathcal{O}(\exp(-L))$.

2.2 Approche Numérique : Adaptive Multilevel Splitting

On commence par résumer le principe de l'algorithme. Des descriptions détaillées et des études de convergence peuvent être trouvées dans la littérature [1, 4, 6, 8]. On utilise une application vers \mathbb{R} , ϕ , dite coordonnée réactionnelle, qui repère la distance relative d'un champ A par rapport aux deux minima métastables. Dans cette étude, on peut en utiliser deux, une dite linéaire, ϕ_l , et une autre que l'on qualifie de norme ϕ_n :

$$\phi_l = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\int dx A(x)}{\int dx A_0^+(x)} \right), \phi_n = \phi_l + \left| \frac{\frac{1}{L} \int dx A A_1}{\sqrt{\frac{1}{L} \int dx A_1^2}} \right|. \quad (6)$$

La coordonnée réactionnelle ϕ varie continuellement de 0 à 1 de A_0^+ à A_0^- .

L'algorithme calcule N trajectoires réactives et la probabilité de passage associée comme suit (cf. Fig. 2 (b)) :

- On commence par réaliser N dynamiques stochastiques indépendantes du modèle, $A^n(t)$, en l'occurrence l'équation de Ginzburg–Landau, partant de \mathcal{A} , jusqu'à ce qu'elles atteignent \mathcal{C} puis, soit retournent dans \mathcal{A} , soit atteignent \mathcal{B} . On fixe le nombre d'itérations à $k = 1$.

- À chaque étape k , la trajectoire qui atteint le plus petit $\phi_{\max}^n = \max_t \phi(A^n(t)) = l_k$ est supprimée, une autre trajectoire $m \neq n$ est tirée de manière uniforme parmi les $N - 1$ bonnes trajectoires. Puisque le temps est discrétisé avec un pas dt , $\phi(A^m)$ franchit pour la première fois l_k au temps t_i , tel que $\phi(A^m(t_i)) < l_k < \phi(A^m(t_i + dt))$. On pose $A^n(t) = A^m(t), \forall t \leq t_i + dt$. La trajectoire A_n évolue ensuite selon une dynamique stochastique indépendante des autres jusqu'à ce qu'elle atteigne soit \mathcal{A} soit \mathcal{B} . On pose $k = k + 1$.
- L'algorithme s'arrête à l'étape $k + 1$ telle que $l_{k+1} \geq 1$. Cela signifie que N trajectoires partant \mathcal{A} et partant de \mathcal{B} ont été générées.

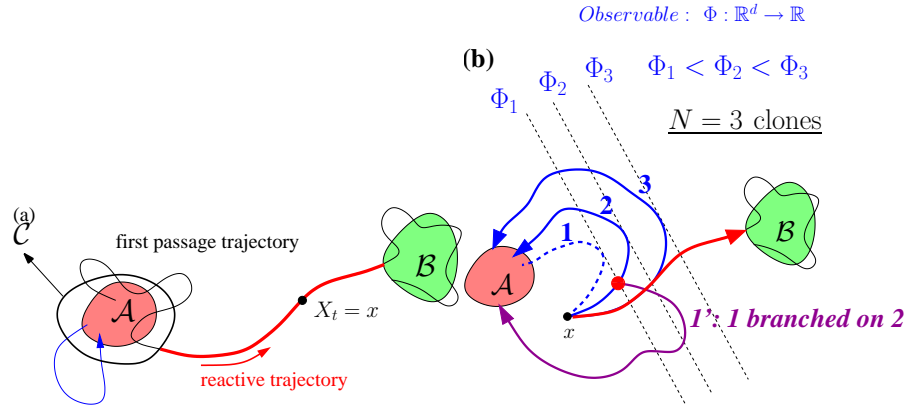


Figure 2. (a) Schéma de principe des trajectoires réactives et premiers passages entre deux ensembles \mathcal{A} et \mathcal{B} . (b) Schéma de principe de l'AMS.

De manière heuristique, on peut montrer que la quantité $\hat{\alpha} = (1 - 1/N)^k$ est un bon estimateur de la probabilité d'atteindre \mathcal{B} avant \mathcal{A} , partant de \mathcal{C} [1, 6, 8]. On prend garde au fait que k et donc $\hat{\alpha}$ sont des variables aléatoires, qui donnent des valeurs différentes à chaque réalisation indépendante de l'algorithme. Les propriétés statistiques de k et de $\hat{\alpha}$ dépendent très fortement du nombre de clones N et du bon choix de la coordonnée réactionnelle. Ces deux quantités sont aussi centrales pour la bonne convergence du calcul que le pas d'espace dx ou le pas de temps dt [1, 4, 6, 8]. Dans le meilleur des cas, pour N grand et β pas trop petit, il est possible d'établir un théorème central limite qui montre que les fluctuations de k et $\hat{\alpha}$ sont gaussiennes, et en particulier la variance de $\sqrt{N}(\hat{\alpha} - \alpha)$ est égale à $-\alpha^2 \log \alpha$. L'estimateur $\hat{\alpha}$ possède en général un biais tendant vers 0 en $1/N$.

3 Résultats numériques

3.1 Types de trajectoires

À l'aide de diagrammes spatio-temporels des trajectoires réactives calculées (Fig. 3), on peut facilement caractériser les propriétés des trajectoires prédites. Ainsi pour de très grandes valeurs de β , on reproduit les instantons « retournement » pour $L \lesssim 6$ (Fig. 3 (a)) et à un front pour $L \gtrsim 6$ (Fig. 3 (b)). Dans l'autre limite, on observe des trajectoires à plusieurs fronts qui suivent une marche aléatoire (Fig. 1 (c)). On note que pour ces paramètres, on ne se trouve pas encore dans la zone où les trajectoires à plus d'un front sont les plus probables, moins de la moitié de la distribution de trajectoires (les plus rapides et les plus longues) contiennent plus d'un front.

3.2 Limite $\ln(\beta)/L \rightarrow \infty$

Dans cette limite, on peut illustrer les résultats analytiques. On présente ici le calcul de la probabilité de passage (Fig. 4 (a)) et des durées moyennes de trajectoires réactives (Fig. 4 (b)). Le calcul des temps

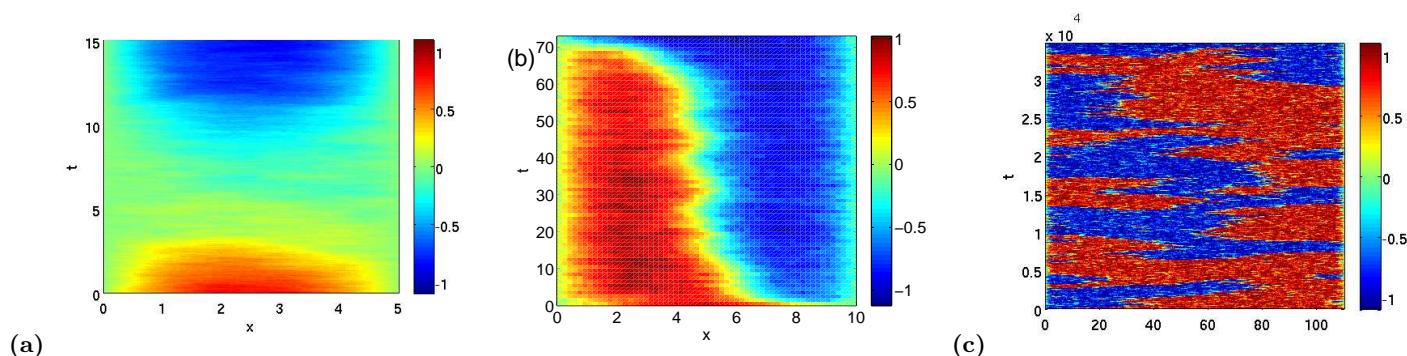


Figure 3. (a) Retournement global dans un domaine de taille $L = 5$ pour $\beta = 300$. (b) Trajectoire à un front dans un domaine de taille $L = 10$ pour $\beta = 150$. (c) Longue marche aléatoire de fronts dans un domaine de taille $L = 110$ pour $\beta = 7$.

de premier passage moyen sont cohérents avec les prédictions analytiques. On note que lorsque β est suffisamment important, on rejoint la limite de décroissance exponentielle de la probabilité de passage. Un ajustement linéaire montre une pente légèrement inférieure à 1, ce qui est quantitativement cohérent avec les estimations analytique de $\Delta V \simeq 2\sqrt{2}/3$ dans la limite L grand. Ce résultat se retrouve pour toute la gamme de taille pour laquelle le col A_1 est le plus bas.

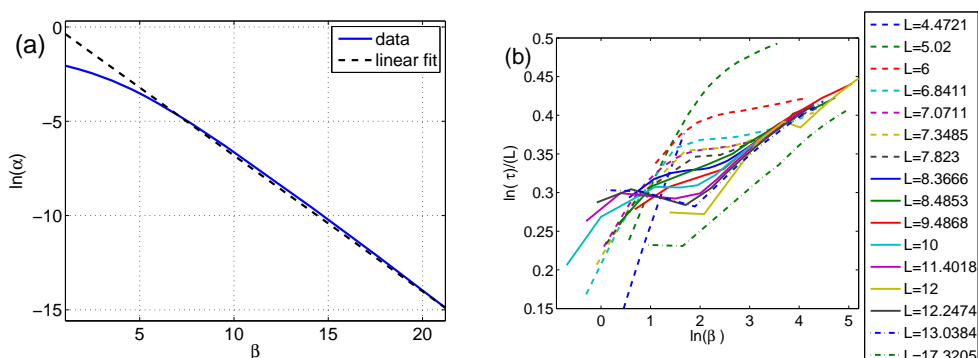


Figure 4. (a) Exemple de $\ln(\alpha)$ fonction de β avec l'ajustement correspondant. (b) Logarithme de la durée moyenne des trajectoires réactives remise à l'échelle en fonction du logarithme de β .

Dans la limite β grand, on peut vérifier la loi d'échelle de la durée moyenne des trajectoires réactives $\tau \propto \ln(\beta) \exp(L/\sqrt{2})$. Tracer τ en fonction de $\ln(\beta)$ permet de vérifier le scaling de τ en fonction de β . Tracer $\ln(\tau)/L$ en fonction de β pour une large gamme de tailles permet de vérifier la loi d'échelle en L (Fig. 4) : les données tombent sur une courbe maîtresse à grand β .

4 Discussion

Ce compte-rendu présente le calcul des trajectoires réactives entre les deux positions métastables de l'équation de Ginzburg–Landau Stochastique. En étendant des résultats précédents sur l'application du Principe de Freidlin–Wentzell de grandes déviations au calcul d'instantons et de la probabilité d'observer une trajectoire réactive, on peut faire des prédictions réalistes sur le comportement à faible bruit de cette EDPS. On peut de plus placer la limite « faible bruit » dans l'espace des paramètre et déterminer le comportement des trajectoires réactives (multiplication du nombre des fronts) lorsque l'on dépasse cette limite.

La principale nouveauté consiste en l'application d'un algorithme de calcul de trajectoires réactives, Adaptive Multilevel Splitting, pour calculer numériquement ces trajectoires, en particulier dans les régimes de taille ou d'amplitude de bruit où les prédictions théoriques ne sont pas valides. Dans la gamme de paramètres où elles sont valides, le calcul numérique permet de vérifier les prédictions.

Le succès de l'application de l'algorithme à un système très accessible à la théorie, mais malgré tout très riche, encourage l'étude de systèmes plus généraux, notamment les systèmes non-gradients issus de la turbulence par exemple et moins accessibles à la théorie. Les systèmes modèles de métastabilité d'écoulements géophysiques en font partie. Des exemples typiques sont les modèles de transitions entre circulation thermique et circulation saline dans l'Atlantique nord, modélisée par une équation de Cahn–Hilliard, aux modèles de circulation océanique moyenne latitude poussés par les vents, décrits par l'équation d'Euler Stochastique. Ce dernier cas présente bien plus de difficultés théoriques que les systèmes de type gradient.

Références

1. F. CÉROU, A. GUYADER, T. LELIÈVRE & F. MALRIEU, On the Length of one-dimensional reactive paths, *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, **10**, 359–389 (2013).
2. W. G. FARIS & G. JONA-LASINIO, Large fluctuations for a nonlinear heat equation with noise, *J. Phys. A*, **15**, 3025–3055 (1982).
3. REN W. E. & E. VANDEN-EIJDEN, Minimum action method for the study of rare events, *Comm. Pure Appl. Math.*, **57**, 1–20 (2004).
4. É. SIMONNET, Combinatorial analysis of the adaptive last particle method, Soumis à *Stat. Comput.* (2013); J. ROLLAND, *Numerical convergence study of the computation of reactive trajectories by adaptive multilevel splitting* (2013).
5. P. HÄNGGI, P. TALKNER & M. BORKOVEC, Reaction-rate : fifty years after Kramers, *Rev. Mod. Phys.*, **62**, 251–342 (1990).
6. F. CÉROU, A. GUYADER, T. LELIÈVRE & D. POMMIER, A multiple replica approach to simulate reactive trajectories, *J. Chem. Phys.*, **134**, 054108 (2011).
7. H. TOUCHETTE, The large deviation approach to statistical mechanics, *Phys. Rep.*, **478**, 1–69 (2009).
8. F. CÉROU, A. GUYADER, Adaptive multilevel splitting for rare event analysis, *Stoch. Anal. Appl.*, **25**, 417–443 (2007).
9. H. C. FOGEDBY, J. HERTZ & A. SVANE, Wall propagation and nucleation in a metastable two-level system, *Phys. Rev. E*, **70**, 031105 (2004).
10. WAN X. & ZHOU W. E., Study of the noise-induced transition and the exploration of the phase space for the Kuramoto-Sivashinsky equation using the minimum action method, *Nonlinearity*, **23**, 475–493 (2010).
11. S. BRASSESCO, P. BUTTÀ, A. DE MASI & E. PRESUTTI, Interface fluctuations and coupling in the D=1 Ginzburg-Landau Equation with Noise, *J. Theoret. Probab.*, **11**, 25–80 (1998).
12. G. L. EYINK, Statistical hydrodynamics of the thermohaline circulation in a two-dimensional model, *Tellus*, **57**, 100–115 (2005).

Dynamique non-linéaire des efflorescences du phytoplancton en milieu marin

Jonathan Derot^{1,2}, François G. Schmitt² & Valérie Gentilhomme³

¹ Université du Littoral Côte d'Opale, Laboratoire d'Océanologie et de Géosciences, UMR LOG 8187, 32 av. Foch, 62930 Wimereux

² CNRS, Laboratoire d'Océanologie et de Géosciences, UMR LOG 8187, 28 av. Foch, 62930 Wimereux

³ Université de Lille 1, Laboratoire d'Océanologie et de Géosciences, UMR LOG 8187, 28 av. Foch, 62930 Wimereux

jonathan.derot@univ-lille1.fr

Résumé. Fortement influencé par la température et demandant de la lumière pour sa croissance, le développement du phytoplancton (plancton végétal) a une forte composante saisonnière. L'objectif de notre étude est ici d'analyser la dynamique non-linéaire et multi-échelle du phytoplancton en milieu côtier. La base de données utilisée dans cette étude provient d'un système automatisé en point fixe, appelé MAREL Carnot, géré par IFREMER. Ce système, localisé à la sortie de la rade du port de Boulogne-sur-Mer, enregistre plus de 15 paramètres physico-chimiques avec une périodicité de 20 minutes. Nous utilisons ici les données enregistrées entre 2004 et 2011.

Différents résultats sont obtenus concernant la dynamique et les statistiques des efflorescences. D'un côté, la fonction de densité de probabilités (PDF) réalisée sur l'ensemble des données de fluorescence obéit à une loi de puissance de pente -2 . En considérant les PDF année par année, on met en évidence une relation de la pente hyperbolique avec les températures moyennes annuelles. En ce qui concerne la dynamique, nous utilisons la méthode EMD (*Empirical Mode Decomposition*) pour estimer des spectres de puissance et étudier la dynamique multi-échelle via des lois d'échelle. On met en évidence des relations entre les pentes issues de ces spectres et la fluorescence. La méthode EMD est également utilisée pour mettre en évidence les fortes oscillations existant en période de *bloom*.

Abstract. Phytoplankton (vegetal plankton) plays an important role in aquatic ecosystems, and also in the carbon dynamics. Strongly influenced by the temperature and requiring light for growth, its development has a strong seasonal component. In the Eastern English Channel, phytoplankton blooms take place every year in spring. The aim of our study is to analyze the nonlinear and multiscale dynamics of phytoplankton in these coastal waters. The database used in this study comes from a fixed point automated system, called MAREL Carnot, managed by IFREMER. This system, located at the exit of the harbor of Boulogne-sur-Mer, records more than 15 physico-chemical parameters with an interval of 20 minutes. We use here recorded data between 2004 and 2011.

Different results are obtained on the dynamics and statistics of blooms. On the one hand, the probability density function (PDF) estimated on all fluorescence data obeys a power law with a slope of -2 . Viewing PDF year-by-year, it highlights a relationship between the hyperbolic slope and the average annual temperatures. As regards the dynamics, we use the EMD method (Empirical Mode Decomposition) to estimate power spectra, and study the multi-scale dynamics via scaling laws. We highlight a relationship between the slopes of these spectra and fluorescence. The EMD method is also used to show the strong oscillations occurring during blooms.

1 Introduction

Le phytoplancton joue un rôle important dans l'écosystème aquatique et aussi dans la dynamique du carbone. Fortement influencé par la température et demandant de la lumière pour sa croissance, son développement a une forte composante saisonnière. En Manche orientale, des efflorescences (« *blooms* ») de phytoplancton ont lieu tous les ans au printemps. Les données de phytoplancton, comme d'autres données d'abondance en écologie [1, 2], présentent de très fortes fluctuations multi-échelles, avec une dynamique non-linéaire très marquée. Le but principal de cette étude est d'avoir une meilleure compréhension

de la dynamique de fluorescence et de l'impact que peuvent induire les températures sur cette dernière. L'utilisation de bases de données « hautes fréquences » enregistrées à point fixe permet ce type d'approche [3–7]. Ci-dessous, nous présenterons la base de données, puis nous considérons la densité de probabilité des données et enfin nous utiliserons la méthode EMD pour effectuer des analyses spectrales, étudier la dynamique à multi-échelles et les oscillations présentes dans le milieu.

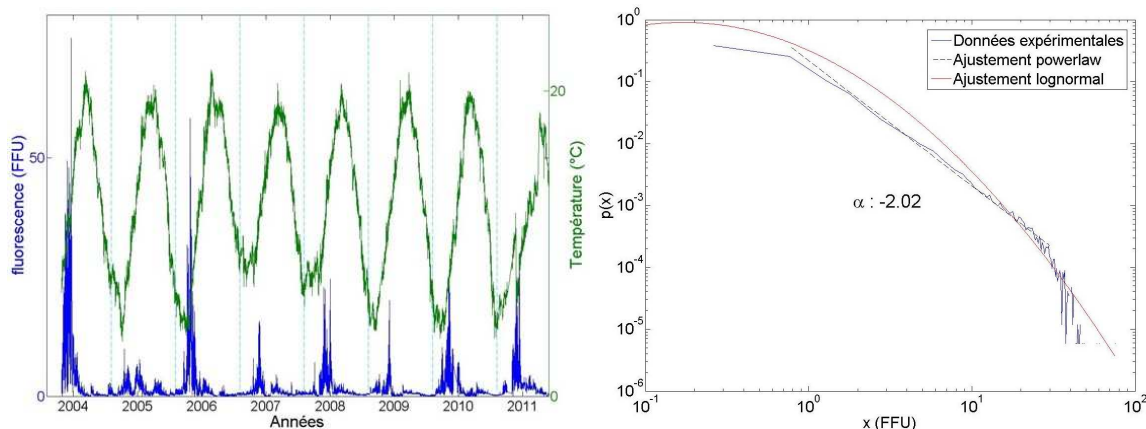


Figure 1. (a) Données brutes provenant de MAREL Carnot entre 2004 et 2011 : les données de fluorescence en FFU et les données de températures. Les lignes pointillées séparent les années. (b) Représentation log-log de la PDF des données de fluorescence entre 2004 et 2011, avec un ajustement lognormal et un ajustement en loi de puissance avec une pente de 2,02.

2 Présentation des données et leur densité de probabilité

La balise MAREL Carnot est située à la sortie de la rade du port de Boulogne-sur-Mer en Manche orientale. Par son implantation, cette zone d'étude est donc assujettie à des forçages physiques très importants car la Manche est soumise à un régime mégalidal [8]. Elle est aussi soumise à des forçages anthropiques car Boulogne-sur-Mer est un important port de pêche. MAREL Carnot est capable d'enregistrer plus de 15 paramètres physico-chimiques avec une périodicité de 20 minutes et a été mise en service au début de l'année 2004. Quel que soit le marnage, les enregistrements sont toujours effectués à une profondeur de $-1,5$ m car les capteurs du dispositif sont installés sur un flotteur coulissant dans un tube. Dans cette étude, nous nous intéresserons uniquement aux données de fluorescence et de température, dont on peut voir une représentation en Figure 1 (a). Notons que certains problèmes inhérents au système automatisé en point fixe (défaillances techniques, périodes de maintenance, vandalisme, encrassement biologique...) font que le pourcentage d'acquisition n'est pas de 100%. Pour la température et la fluorescence, les pourcentages d'acquisition sont respectivement de 80,36% et 87,88%. Pour plus de détails techniques, voir [9, 10]. La PDF de l'ensemble des données de fluorescence est représentée en Figure 1 (b) en log-log, avec un ajustement en loi de puissance et un ajustement lognormal. L'ajustement en loi de puissance de la forme :

$$p(x) \approx x^{-\alpha} \quad (1)$$

avec $\alpha = 2$, est le plus proche des données. Le modèle lognormal est assez populaire en écologie pour l'abondance d'espèces depuis de nombreuses années, à tel point que la validité de ce modèle est souvent implicitement admise, lorsque les données d'abondance sont log-transformées avant de faire des tests statistiques reposant sur des statistiques gaussiennes. Le résultat ici montre que ce modèle n'est pas adapté pour le phytoplancton et que cette hypothèse n'est donc pas correcte. Il serait intéressant de pouvoir comparer ces résultats avec d'autres bases de données pour en vérifier l'universalité.

Pour mettre en évidence les variations interannuelle de la PDF, nous avons estimé les PDF pour chaque année entre 2004 et 2011 (Figure 2). On constate qu'un ajustement en loi de puissance peut être proposé à chaque fois, avec souvent pour les valeurs les plus extrêmes une décroissance plus rapide, de type exponentiel. À l'exception de l'année 2005 où cet ajustement n'est pas très bon, la loi de puissance est malgré tout valide sur une gamme de valeurs assez étendue. Cet exposant caractérise une structuration : plus la pente est faible, plus les fortes valeurs seront relativement présentes. La figure 3 (a) représente l'abondance moyenne en fluorescence en fonction de la valeur de la pente de la PDF : on constate qu'une forte abondance est associée à une pente faible et une importante structuration du bloom. Inversement, une faible abondance est associée à une pente forte et une structuration du bloom moins importante. Nous n'avons pas constaté de relation visible entre l'abondance en sels nutritifs et cette pente ; par contre l'influence de la température hivernale sur le bloom printanier de l'année suivante est illustrée en figure 3 (b) : on constate une relation entre cette température et l'amplitude du bloom : les hivers plus rigoureux ont tendance à être suivis, le printemps suivant, par un bloom plus marqué, comme proposé par [11, 12].

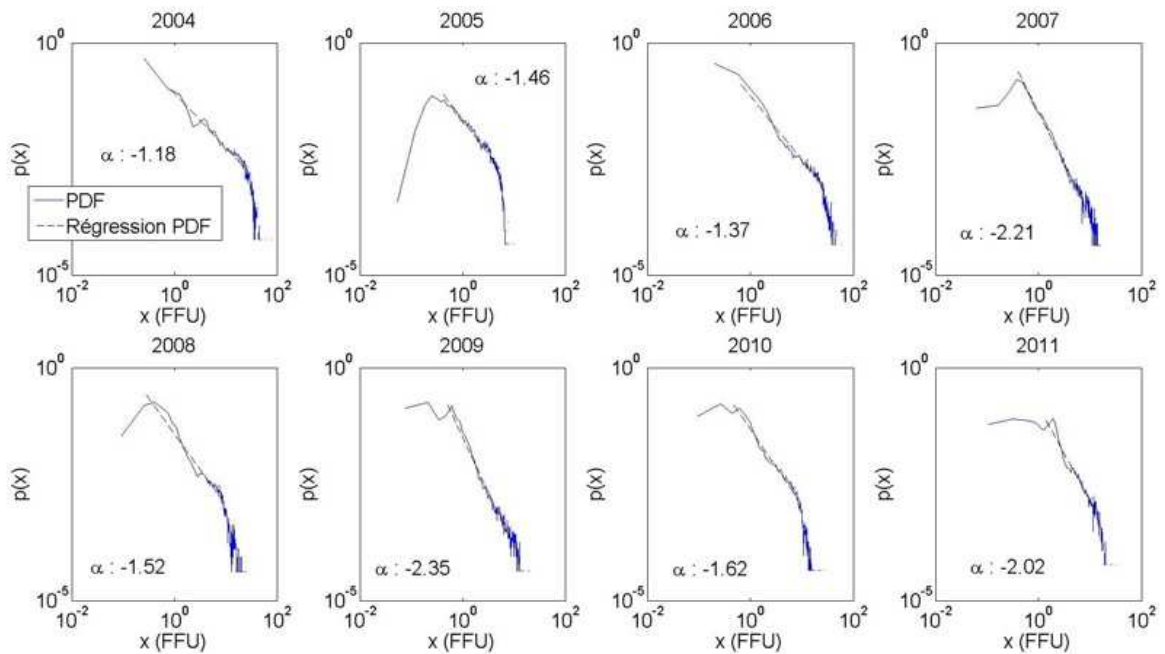


Figure 2. PDF année par année entre 2004 et 2011, pour les données de fluorescence. En pointillés, les ajustements en loi de puissance avec les coefficients associés.

3 Analyses spectrales et oscillations via la décomposition modale empirique

Dans cette section, nous nous intéressons à la dynamique de la série de fluorescence. La méthode intitulée décomposition modale empirique ou EMD (*Empirical Mode Decomposition*) est utilisée pour analyser les séries temporelles non stationnaires et non-linéaires. Cette méthode a été proposée en 1998 par Norden Huang [13] et permet de décomposer une série temporelle en une somme de séries temporelles appelée « modes », chacun ayant une fréquence caractéristique. La méthode a été appliquée aux données brutes de fluorescence et de température entre 2004 et 2011. La décomposition est faite de manière itérative, en considérant à chaque étape le signal comme étant la somme d'une composante basse fréquence et d'une composante haute fréquence. À la fin de la décomposition, la méthode exprime une

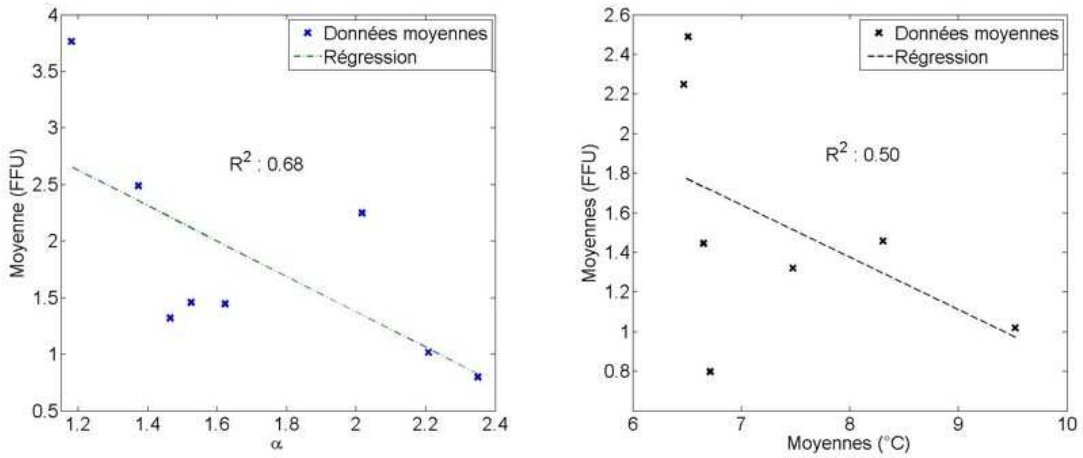


Figure 3. Moyenne annuelle de la fluorescence en fonction de la pente de la loi de puissance ajustant la PDF (gauche) et en fonction de la température hivernale précédant le bloom printanier (droite).

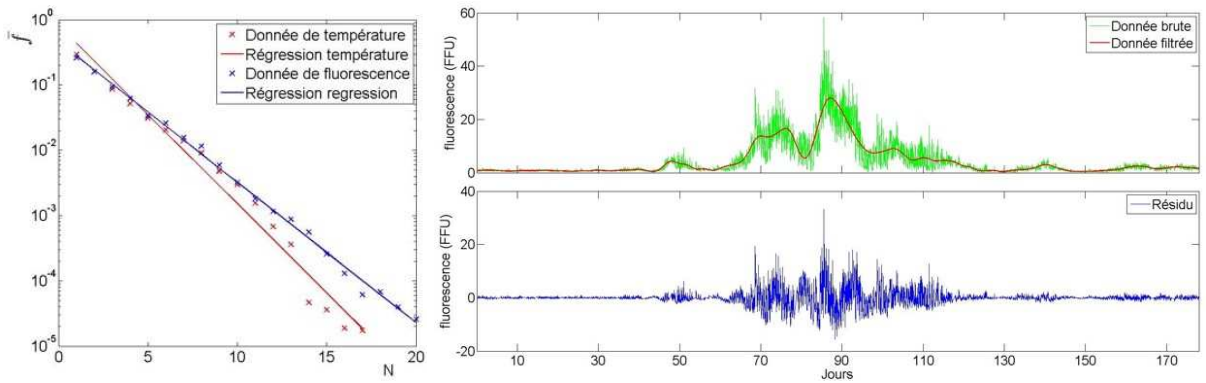


Figure 4. (gauche) La fréquence moyenne de chaque mode, en fonction du mode N , pour la série de température et de fluorescence. (droite) Représentation du bloom de l'année 2006, avec un filtrage basse fréquence obtenu à partir de la méthode EMD, en ne conservant que les modes de 12 à 20 inclus (en haut) et en montrant la somme des modes de 1 à 11 pour la partie haute fréquence (en bas).

série temporelle $x(t)$ comme la somme d'un nombre fini de modes $C_i(t)$ et d'un résidu final $r_n(t)$ [13] :

$$x(t) = \sum_{i=1}^N C_i(t) + r_n(t). \quad (2)$$

Pour la fluorescence, la série est décomposée en 20 modes et le mode 21 représente le résidu. Si l'on somme tous les 20 modes plus le résidu, on retombe exactement sur la série de fluorescence brute entre 2004 et 2011. La fréquence moyenne de chaque mode est représentée en fonction du numéro du mode N en Figure 4 (a). On constate une répartition quasi-dyadique : la fréquence moyenne décroît exponentiellement (donc l'échelle augmente) lorsque le numéro de mode croît. On choisit un filtrage au mode 12, correspondant à une échelle temporelle de 5,07 jours. La figure 5 (b) illustre ce filtrage : le bloom de l'année 2006 est représenté, avec un filtrage basse fréquence obtenu en conservant les modes de 12 à 20 inclus, plus le résidu. La partie haute fréquence est représentée en dessous, obtenue en sommant les modes de 1 à 11 inclus. Cette méthode peut être utilisée d'un côté pour détecter le bloom et de l'autre, pour caractériser les

fortes fluctuations existant pendant le bloom, qui peuvent s'apparenter aux oscillations obtenues pendant un tremblement de terre : de fortes oscillations caractérisant un phénomène critique hors équilibre.

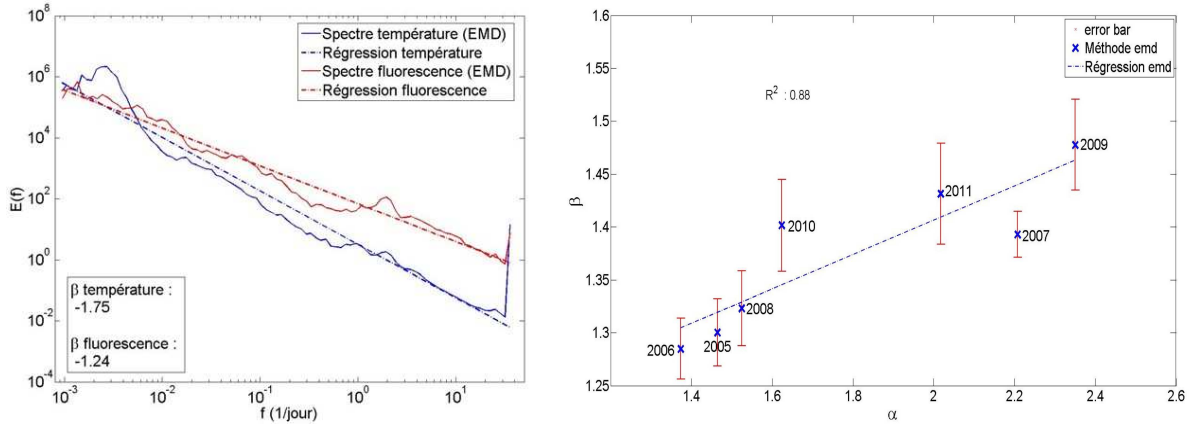


Figure 5. (gauche) Pente spectrale des données de température et de fluorescence, estimées à partir de la méthode EMD. (droite) Représentation de la pente spectrale de la fluorescence pendant les hivers pré-blooms, estimée par la méthode EMD, en fonction de la pente de la PDF hyperbolique des données de fluorescence au cours de l'année suivante.

Nous utilisons également la méthode EMD pour le calcul spectral [14–16], celle-ci fonctionnant même pour des séries temporelles avec un pas de temps non régulier (nous avons de nombreuses valeurs manquantes). Les analyses spectrales effectuées sur les deux séries sont représentées en Figure 5 (a); on constate des lois d'échelle, avec des exposants différents, proche de $5/3$ pour la température et proche de $1,2$ pour la fluorescence, montrant que l'activité biologique de la fluorescence se traduit par des lois d'échelle différentes d'un scalaire passif turbulent.

Nous considérons également la relation entre la pente spectrale des données de fluorescence pendant les hivers météorologiques, année par année. Ici, l'hiver météorologique ne correspond pas à l'hiver défini par le calendrier, mais il s'agit d'un hiver qui regroupe les 3 mois en moyenne les plus froids de l'année, c.-à-d. décembre, janvier et février. Le choix de cette définition de l'hiver est motivé par la volonté de voir l'impact des températures extrêmes dans la limite basse sur la dynamique de fluorescence. La figure 5 (b) met en relation les pentes spectrales β des hivers pré-blooms avec les pentes issues des PDF de fluorescences pour chaque année. Pour plus de lisibilité, nous avons aussi référencé chaque année et implémenté des barres d'erreurs basées sur la déviation standard, entre les données spectrales et leurs droites de régression. On constate que plus les pentes spectrales augmentent, plus les pentes des PDF ont tendance à augmenter et inversement. On pourrait ainsi supposer qu'il y a un lien entre la dynamique et les statistiques, entre les températures les plus froides de l'année et la dynamique du bloom du printemps suivant.

Si ces différents résultats se confirment, grâce aux futurs enregistrements de MAREL Carnot, nous pourrions potentiellement arriver à disposer d'un outil permettant de faire des prédictions sur la dynamique et la structuration du bloom à une échelle de trois mois.

Remerciements. Nous remercions IFREMER pour les données MAREL, en particulier Alain Lefebvre et Michel Répécaud. Le code EMD en Matlab utilisé ici a été écrit par Dr Gabriel Rilling et Pr. Patrick Flandrin du laboratoire de Physique, CNRS & ENS Lyon et est disponible ici : <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>. Il a été adapté par Yongxiang Huang de l'Université de Shanghai.

Références

1. A. BLARER & M. DOEBELI, Resonance effects and outbreaks in ecological time series, *Ecol. Lett.*, **2**, 167–177 (1999).
2. M. E. RITCHIE, *Scale, heterogeneity, and the structure and diversity of ecological communities*, Princeton University Press (2009).
3. T. D. DICKEY, The emergence of concurrent high resolution physical and bio-optical measurements in the upper ocean and their applications, *Rev. Geophys.*, **29**, 383–413 (1991).
4. T. D. DICKEY, R. H. DOUGLASS, D. MANOV, D. BOGUCKI, P. C. WALTER & P. PETRELIS, An experiment in two way communication with a multivariable moored system in coastal waters, *J. Atmos. Oceanic Tech.*, **10**, 637–644 (1993).
5. F. P. CHAVEZ, J. T. PENNINGTON, R. HERLIEN, H. JANNASCH, G. THURMOND & G. E. FRIEDERICH, Moorings and drifters for real-time interdisciplinary oceanography, *J. Atmos. Oceanic Tech.*, **14**, 1199–1211 (1997).
6. G. C. CHANG & T. D. DICKEY, Optical and physical variability on timescales from minutes to the seasonal cycle on the New England shelf: July 1996 to June 1997, *J. Geophys. Res.*, **106**, 9435–9453 (2001).
7. S. B. ZONGO & F. G. SCHMITT, Scaling properties of pH fluctuations in coastal waters, *Nonlinear Proc. Geophys.*, **18**, 829–839 (2011).
8. J. C. DAUVIN, The main characteristics, problems and prospects for Western European coastal seas, *Marine Pollut. Bull.*, **57**, 22–40 (2008).
9. J. P. BERTHOME, Marel : un réseau automatisé de veille pour l’environnement littoral, *Équinoxe*, **47–48**, 34–35 (1994).
10. P. WOERTHER, Marel, Mesures Automatisées en Réseau pour l’Environnement Littoral, *L’eau, l’Industrie, les Nuisances*, **217**, 67–71 (1998).
11. F. GOMEZ & S. SOUISSI, The impact of the 2003 summer heat wave and the 2005 late cold wave on the phytoplankton in the north-eastern English Channel, *C. R. Biol.*, **331**, 678–685 (2008).
12. D. DEVREKER, S. SOUISSI, J. C. MOLINERO, D. BEYREND-DUR, F. GOMEZ & J. FORGET-LERAY, Tidal and annual variability of the population structure of *Eurytemora affinis* in the middle part of the Seine Estuary during 2005, *Est. Coast. Shelf Sci.*, **89**, 245–255 (2010).
13. N. E. HUANG, Z. SHEN, S. R. LONG, M. C. WU, H. H. SHIH, Q. ZHENG & H. H. LIU, The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **454**, 903–995 (1998).
14. N. E. HUANG, Z. SHEN & S. R. LONG, A new view of nonlinear water waves: The Hilbert Spectrum 1, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **31**, 417–457 (1999).
15. Y. HUANG, F. G. SCHMITT, Z. LU & Y. LIU, An amplitude-frequency study of turbulent scaling intermittency using Hilbert spectral analysis, *Europhys. Lett.*, **84**, 40010 (2008).
16. F. G. SCHMITT, Y. HUANG, Z. LU, Y. LIU & N. FERNANDEZ, Analysis of turbulent fluctuations and their intermittency properties in the surf zone using empirical mode decomposition, *J. Mar. Syst.*, **77**, 473–481 (2009).

Transition doigt/fracture lors de l'ascension d'air dans un milieu granulaire confiné et saturé

Vincent De Zotti & Valérie Vidal

Laboratoire de Physique, Université de Lyon, École Normale Supérieure de Lyon - CNRS
46 Allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France
valerie.vidal@ens-lyon.fr

Résumé. Nous avons mis en évidence l'existence d'une transition lors de la remontée de l'air dans un milieu granulaire saturé en eau, confiné dans une cellule de Hele-Shaw verticale et non contraint en surface. En régime stationnaire, au centre d'une zone fluide qui a été décrite dans des travaux précédents, on observe la remontée d'un doigt d'air, qui reste connecté au point d'injection en base de la cellule. À partir d'une certaine hauteur, le doigt ralentit et marque une phase d'arrêt, suivie par la fracturation rapide de la couche de grains au-dessus du doigt. Nous trouvons expérimentalement une dépendance linéaire de la hauteur du doigt à la transition en fonction du débit d'air injecté, qui peut être retrouvée par un modèle simple, sans paramètre ajustable.

Abstract. We report the existence of a transition during air ascent in a granular medium immersed in water, confined into a vertical Hele-Shaw cell and with a free surface. In stationary regime, a fluidized zone is formed, as described in previous works; at its center, an air finger develops upward, still connected to the injection point at the bottom of the cell. At a given height, the finger slows down and stops, followed by a quick fracture of the remaining granular layer above. The linear dependency of the finger height at the transition as a function of the air flow-rate, observed experimentally, can be explained by a simple model without any ajustable parameters.

1 Introduction

L'invasion d'un fluide dans un milieu granulaire saturé par un autre fluide est un processus à la base de nombreux phénomènes naturels ou industriels, incluant l'émission d'hydrocarbures au fond des océans [1], les complexes hydrothermaux [2], la récupération du pétrole [3], la décontamination des sols [4] ou la séquestration du CO_2 [5]. La dynamique de ces systèmes triphasiques est complexe, a fortiori si le milieu granulaire est non-contraint, et donc déformable au passage du fluide injecté. De nombreux travaux dans la littérature ont ainsi rapporté différents régimes d'invasion, en fonction du débit ou de la pression du fluide injecté, de la compacité de la suspension ou du lit granulaire non-cohésif, de la géométrie de confinement, etc. : invasion capillaire, digitation visqueuse pour des cellules horizontales [6–8], auxquelles se rajoutent une fluidification du milieu et la formation de canaux stables ou instables pour des géométries verticales [9]. Dans les deux cas, il est intéressant de noter que dans une certaine gamme de paramètres, on observe une transition entre le déplacement du fluide injecté dans le milieu saturé qui se comporte comme un fluide visqueux, et la fracturation de ce dernier qui présente alors un comportement de type solide [10–13]. Cette transition, observée dans des cellules de Hele-Shaw horizontales, a lieu lorsqu'on augmente le débit du fluide injecté ou la concentration de la suspension. Des travaux précédents ont montré qu'en injectant de l'air ponctuellement en base d'une couche de grains immergée, dans une cellule de Hele-Shaw verticale, on observait la formation d'une zone fluide aux temps longs [14–16]. En régime stationnaire, dans cette zone fluide, nous montrons ici que l'on a une transition spontanée entre la remontée d'un doigt d'air et la fracture de la couche de grains.

2 Dispositif expérimental

2.1 Description de l'expérience

Le principe de l'expérience est représenté en Figure 1 (a). Une cellule de Hele-Shaw verticale (hauteur 30 cm, largeur 40 cm, gap $e = 3$ mm) contient une couche de grains (hauteur initiale h_0) immergée

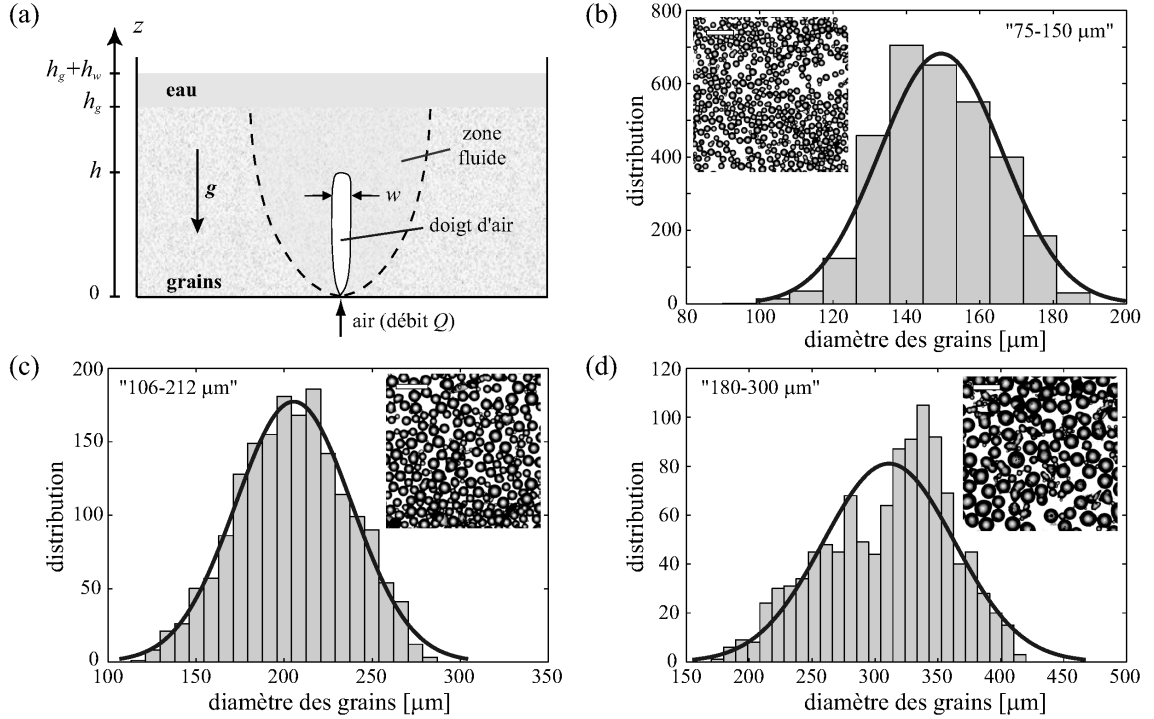


Figure 1. (a) Dispositif expérimental : de l'air est injecté à débit constant Q en base d'une couche de grains immergés dans l'eau, confinée dans une cellule de Hele-Shaw verticale. En régime stationnaire, une zone fluide de forme parabolique se forme (voir texte). On s'intéresse à la dynamique du doigt d'air (hauteur h , largeur w) qui remonte dans cette zone. (b, c, d) Distribution de taille des grains mesurée pour les trois échantillons utilisés (b) 75–150 μm , (c) 106–212 μm et (d) 180–300 μm annoncés par le fabricant. En insert, image des grains (barre horizontale = 1 mm).

dans de l'eau (hauteur h_w au-dessus du lit de grains). De l'air est injecté en base de la cellule par un contrôleur de débit (Bronkhorst, Mass-Stream Series D-5111, débit Q de 0,17 à 1,74 mL/s), via un orifice de diamètre interne $d_{\text{nozz}} = 1$ mm. Dans toutes les expériences, la hauteur d'eau au-dessus du lit de grains est faible ($h_w \sim 2$ cm) pour éviter l'advection des grains dans l'eau et la formation d'un cratère à la surface libre des grains [17]. Dans l'ensemble des expériences effectuées, la hauteur totale du lit de grains h_g varie peu lors de la remontée de l'air, et on supposera par la suite $h_g \simeq h_0$. Le système est éclairé par un plan lumineux (Just NormLicht, Classic Line) assurant un éclairage homogène. La dynamique de l'air remontant dans le milieu granulaire immergé est étudiée par visualisation directe (webcam Logitech C600, 2Mpix, 24 img/s) placée à 20 cm environ de la cellule expérimentale.

2.2 Milieu granulaire utilisé

Les grains sont des billes de verre sphériques (Wheelabrator) de masse volumique moyenne $\rho_g \simeq 2,31 \times 10^3$ kg/m³. Trois échantillons ont été utilisés, de diamètre annoncé par le fabricant 75–150 μm , 106–212 μm et 180–300 μm . La distribution de taille des billes de verre est mesurée à l'aide d'un microscope (Wild Makroskop M420, Heerburg avec objectif Leica Makro-zoom 1-5). On trouve pour les trois échantillons une distribution gaussienne (Figures 1 (b, c, d), qui nous donne les diamètres suivants, considérés dans la suite de l'étude : $d = 149 \pm 17$ μm , 205 ± 33 μm and 311 ± 52 μm . Il est à noter que les diamètres mesurés sont systématiquement plus importants que ceux annoncés.

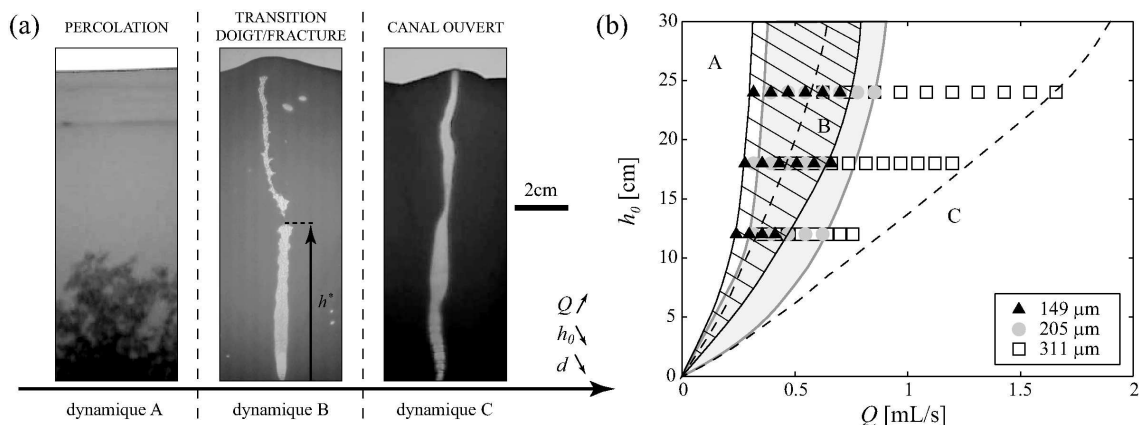


Figure 2. (a) Différents régimes d'ascension de l'air dans la couche de grains [$d = 311 \mu\text{m}$, $h_0 = 12 \text{ cm}$ et $Q = 0,1, 0,7$ et $1,5 \text{ mL/s}$ de gauche à droite]. (b) Diagramme des régimes en fonction des deux paramètres h_0 et Q , pour les trois échantillons de grains [A=percolation / B=transition doigt/fracture / C=canal ouvert]. Seuls sont représentés les points expérimentaux pour lesquels on observe la transition doigt/fracture (régime B). Ils occupent un espace limité par les lignes noires (zone hachurée), les lignes grises (zone grise) ou les lignes pointillées (grains de diamètre moyen $d = 149, 205$ et $311 \mu\text{m}$, respectivement). Les lignes sont de simples guides pour l'oeil.

2.3 Différentes dynamiques d'ascension

Lorsque l'on fait varier les trois paramètres contrôlables du système d (diamètre des grains), h_0 hauteur initiale du lit granulaire et Q (débit d'air injecté), on observe trois différents régimes d'ascension de l'air dans le milieu en régime stationnaire (Figure 2 (a)). À d et h_0 fixés, pour des débits Q faibles, l'air percole à travers le milieu granulaire sans déplacer les grains de manière significative [dynamique A] ; pour de forts débits, un doigt d'air de type Saffman-Taylor [18] remonte jusqu'en surface, puis forme un canal ouvert par lequel l'air s'échappe continûment, et qui peut rester stable sur des temps longs (typiquement plusieurs minutes) [dynamique C]. Pour des débits intermédiaires, on observe une dynamique plus complexe : un doigt d'air se développe, remonte dans le milieu, ralentit puis marque une phase d'arrêt (hauteur h^* , Fig. 2 (a)). La pression dans le doigt continuant d'augmenter (injection d'air à débit constant), l'air va ensuite fracturer soudainement la couche supérieure de grains ($h > h^*$). Cette deuxième étape est très rapide par rapport à la remontée du doigt. L'air s'échappant brusquement, la pression chute, le passage reliant le point d'injection à la surface se referme et le processus recommence. À débit Q et d (resp. h_0) fixés, on observe successivement les dynamiques A, B, et C lorsque l'on diminue h_0 (resp. d).

La figure 2 (b) résume le diagramme des régimes associé à ces observations. Pour chaque échantillon de grains, on a reporté dans l'espace des paramètres (Q, h_0) les points expérimentaux pour lesquels on observe une transition doigt / fracture (dynamique B). Ces points occupent une région de l'espace limitée par les lignes noires (zone hachurée), les lignes grises (zone grise) ou les lignes pointillées pour les grains de diamètre moyen $d = 149, 205$ et $311 \mu\text{m}$, respectivement. Cette région devient de plus en plus grande lorsque l'on augmente h_0 , Q ou d . Dans la suite de l'article, nous caractérisons expérimentalement cette transition doigt/fracture.

3 Analyse de la transition doigt d'air / fracture

Aux temps longs, des travaux précédents ont montré l'existence d'une zone fluide centrée sur le point d'injection de l'air, et dont la forme parabolique est indépendante du débit Q en régime stationnaire [14]. C'est dans cette zone fluide que nous avons observé et quantifié la transition doigt/fracture, en se basant sur l'analyse de plus de 700 vidéos, pour trois hauteurs initiales du lit de grains ($h_0 = 12, 18$ et 24 cm), trois tailles de grains ($d = 149 \pm 17 \mu\text{m}$, $205 \pm 33 \mu\text{m}$ et $311 \pm 52 \mu\text{m}$) et une variation du débit Q dans la gamme où l'on observe cette transition (dynamique B, figure 2 (b)).

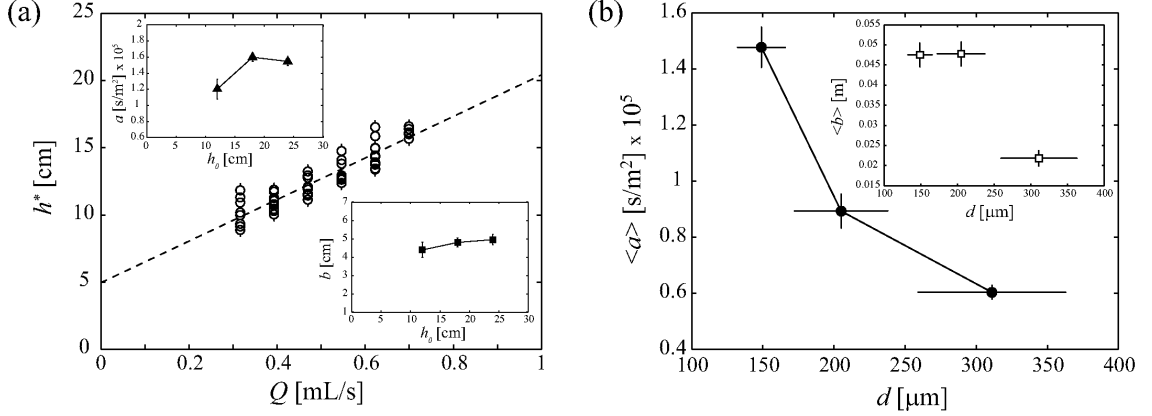


Figure 3. (a) Hauteur de la transition doigt/fracture, h^* , en fonction du débit [$d = 149 \mu\text{m}$, $h_g = 24 \text{ cm}$]. On observe une dépendance linéaire, $h^* = aQ + b$. *Insert* : pente a (*haut*) et ordonnée à l'origine b (*bas*) en fonction de la hauteur initiale h_0 de la couche de grains). a et b ne semblent pas dépendre de manière significative de h_0 . (b) Pente $\langle a \rangle$ et ordonnée à l'origine $\langle b \rangle$ (*insert*) moyennées sur les trois hauteurs initiales explorées [$h_0 = 12, 18$ et 24 cm], en fonction de la taille des grains d .

3.1 Hauteur h^* de la transition

À débit fixé, la hauteur maximale h^* atteinte par le doigt d'air avant de fracturer la couche de grains est reproductible d'une remontée d'air à l'autre. La figure 3 (a) montre que pour (h_0, d) fixés, h^* varie linéairement avec le débit : $h^* = aQ + b$, où a et b ne semblent pas dépendre de h_0 de manière significative (Figure 3 (a), inserts). Les paramètres a et b , en revanche, diminuent lorsque la taille des grains augmente (Figure 3 (b)).

3.2 Viscosité effective du mélange eau/grains

Afin de modéliser le problème, il est nécessaire de connaître la viscosité effective du mélange eau/grains dans la zone fluide. Les modèles classiques pour estimer la rhéologie d'une suspension (e.g. Einstein, 1906 [19], Batchelor, 1967 [20] ou Krieger-Dougherty, 1959 [21]) ne sont valables que pour de faibles fractions volumiques (de $\phi < 3 \%$ [19] à $\phi < 40 \%$ [21]). Nous utilisons ici le modèle semi-empirique de Zarraga *et al.* (2000) [22], qui prédit la viscosité de suspensions denses jusqu'à des fractions volumiques de $\phi \simeq 60 \%$ [23] :

$$\eta = \eta_s \frac{e^{-2,34\phi}}{(1 - \phi/\phi_{\max})^3} \quad (1)$$

avec η_s la viscosité dynamique du fluide environnant et $\phi_{\max} = 62 \%$ (correspondant à l'empilement aléatoire de sphères versées dans un récipient, « *poured random packing* »). Dans la zone fluide, nous prenons $\phi \simeq 56 \%$ (« *very loose random packing* »), et $\eta_s = \eta_w = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ la viscosité de l'eau, ce qui donne une viscosité effective de l'ordre de $0,3 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Dans la suite du problème, nous considérons la zone fluide comme un milieu homogène, de densité effective $\rho = \phi\rho_g + (1 - \phi)\rho_w \simeq 1730 \text{ kg/m}^3$ (avec $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ la densité de l'eau) et de viscosité effective $\eta \simeq 0,3 \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

3.3 Estimation de la limite de fracturation

On écrit la loi de Darcy généralisée, qui donne la vitesse \mathbf{v} d'avancée du doigt en fonction du gradient de pression ∇P entre le doigt et la surface et les forces volumiques \mathbf{f}_V (gravité) :

$$\mathbf{v} = -\frac{e^2}{12\eta} (\nabla P - \mathbf{f}_V) \Rightarrow v = \alpha \left[\left(\frac{P_{\text{top}} - P_0}{h_g - h} \right) - \rho g \right] \quad (2)$$

avec e le gap de la cellule de Hele-Shaw, (η, ρ) la viscosité dynamique effective et la densité moyenne du mélange eau/grains dans la zone fluide, respectivement (cf. Section 3.2), P_{top} la pression dans la partie supérieure du doigt, P_0 la pression atmosphérique (on néglige ici la hauteur d'eau au-dessus du lit de grains), h_g la hauteur totale du lit de grains ($\simeq h_0$), h la hauteur du doigt et $\alpha = e^2/12\eta \simeq 2,5 \times 10^{-6}$ u.SI.

On suppose d'autre part un écoulement de Poiseuille dans le doigt, qui permet de relier le débit volumique Q (fixé dans chaque expérience) à la différence de pression entre la partie supérieure du doigt, P_{top} , et la pression P_{down} au niveau du point d'injection :

$$Q = \frac{we^3}{12\eta_{\text{air}}} \left(\frac{P_{\text{down}} - P_{\text{top}}}{h} \right) \quad (3)$$

où w et h sont la largeur et la hauteur du doigt, respectivement, et $\eta_{\text{air}} = 1,8 \times 10^{-5}$ Pa · s la viscosité dynamique de l'air. Expérimentalement, on observe que la largeur du doigt varie peu lors de sa croissance, et son ordre de grandeur ($w \simeq 1$ cm) varie peu d'une expérience à l'autre. On introduit le paramètre $\beta = we^3/12\eta_{\text{air}} \simeq 1,2 \times 10^{-6}$ u.SI. La pression au niveau du point d'injection peut s'estimer comme :

$$P_{\text{down}} = P_0 + \rho gh_g + \frac{4\gamma}{d_{\text{nozz}}} \quad (4)$$

où $d_{\text{nozz}} = 1$ mm est le diamètre de l'injecteur. En combinant les équations (2-4), on obtient :

$$v = \frac{\alpha}{h_g - h} \left(\rho gh + \frac{4\gamma}{d_{\text{nozz}}} - \frac{hQ}{\beta} \right) \quad (5)$$

reliant la vitesse v de remontée du doigt à sa hauteur h . Le critère de fracturation est le suivant : si $v \geq v_s$ (vitesse seuil), le front d'avancée du doigt devient plus rapide que le réarrangement des grains dans la zone fluide (typiquement la vitesse de Stokes, $v_{\text{St}} = d^2g\Delta\rho/18\eta_w \simeq 7$ mm/s, avec $\Delta\rho = \rho_g - \rho_w = 1300$ kg/m³). Le doigt va alors compacter rapidement la couche qui le sépare de la surface (on néglige ici la distance de compaction) et marque une phase d'arrêt. Sa pression augmente alors, jusqu'à dépasser la valeur critique qui lui permet de fracturer la couche sus-jacente. En considérant que $Q/\beta \ll (v_s/\alpha + \rho g)$ et en effectuant un développement limité, on obtient la hauteur de fracturation h^* :

$$h^* = \frac{(v_s/\alpha)h_g - 4\gamma/d_{\text{nozz}}}{v_s/\alpha + \rho g} \left(1 + \frac{Q}{(v_s/\alpha + \rho g)\beta} \right) = a_m Q + b_m \quad (6)$$

On retrouve la dépendance linéaire observé expérimentalement (Fig. 3(a)). En prenant $v_s = 2v_{\text{St}}$, $d = 150$ μm et $Q = 0,5$ mL/s, on trouve, sans paramètre ajustable, une hauteur typique de fracturation $h^* \simeq 9,3$ cm, comparable à celle observée dans les expériences (Fig. 3(a)). L'ordonnée à l'origine, $b_m \simeq 9,2$ cm, a le bon ordre de grandeur, mais la pente théorique, $a_m \simeq 2,5$ s · m⁻², est beaucoup plus faible que celle observée expérimentalement. Une estimation pour différentes tailles de grains montre que a_m décroît en fonction de d , en accord avec l'expérience (Fig. 3(b)), contrairement à b_m dont le modèle prédit une augmentation en fonction de d , en désaccord avec les résultats expérimentaux (Figure 3(b), insert).

4 Conclusion

Une transition doigt/fracture a été observée lors de la remontée d'air dans un milieu granulaire immergé confiné dans une cellule de Hele-Shaw dans une certaine gamme de débit d'injection (fixé dans les expériences). Dans cette gamme, on montre que la hauteur de fracturation, h^* , dépend linéairement du débit : $h^* = aQ + b$. Ce comportement est reproduit par un modèle simple, sans paramètre ajustable, prenant en compte la loi de Darcy généralisée pour la vitesse d'avancée du front, et un écoulement de Poiseuille dans le doigt d'air. Il prédit le bon ordre de grandeur de la hauteur de fracturation. La pente de la tendance linéaire, cependant, présente un écart de plusieurs ordres de grandeurs entre le modèle et les expériences. D'autre part, la dépendance des paramètres a et b en fonction de la taille des grains n'est pas entièrement reproduite par le modèle.

Les limitations de ce modèle simple sont nombreuses. En particulier, on observe dans la plupart des expériences que lors de la remontée du doigt d'air, la bulle précédente n'est pas encore entièrement évacuée de la couche de grains au-dessus. Il est probable qu'elle joue un rôle non négligeable dans la dynamique du système. D'autre part, il serait intéressant de décrire entièrement la dynamique de remontée du doigt. Un modèle plus complexe, avec une résolution numérique, est pour cela nécessaire.

Références

1. K. R. NEWMAN *et al.*, Active methane venting observed at giant pockmarks along the U.S. mid-Atlantic shelf break, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **267**, 341–352 (2008).
2. H. SVENSEN, B. JAMTVEIT, S. PLANKE & L. CHEVALLIER, Structure and evolution of hydrothermal vent complexes in the Karoo basin, South Africa, *J. Geol. Soc.*, **163**, 671–682 (2006).
3. L. W. LAKE, Enhanced oil recovery, *Society of Petroleum Engineers*, 550 pp. (2010).
4. J. W. PETERSON, M. J. DEBOER & K. L. LAKE, A laboratory simulation of toluene cleanup by air sparging of water-saturated sands, *J. Hazard. Mater.*, **72**, 167–178 (2000).
5. J. K. ECCLES & L. PRATSON, Global CO₂ storage potential of self-sealing marine sedimentary strata, *Geophys. Res. Lett.*, **39**, L19604 (2012).
6. Ø. JOHNSEN, R. TOUSSAINT, K. J. MÅLØY, E. G. FLEKKØY & J. SCHMITTBUHL, Coupled air/granular flow in a linear Hele-Shaw cell, *Phys. Rev. E*, **77**, 011301 (2008).
7. B. SANDNES, E. G. FLEKKØY, H. A. KNUDSEN, K. J. MÅLØY & H. SEE, Patterns and flow in frictional fluid dynamics, *Nat. Commun.*, **2**, 288 (2011).
8. R. HOLTZMAN, M. L. SZULCZEWSKI & R. JUANES, Capillary fracturing in granular media, *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 264504 (2012).
9. X.-Z. KONG, W. KINZELBACH & F. STAUFFER, Morphodynamics during air injection into water-saturated movable spherical granulates, *Chem. Eng. Sci.*, **65**, 4652–4660 (2010).
10. E. LEMAIRE, P. LEVITZ, G. DACCORD & H. VAN DAMME, From viscous fingering to viscoelastic fracturing in colloidal fluids, *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 2009–2012 (1991).
11. C. CHEVALIER, A. LINDNER, M. LEROUX & E. CLÉMENT, Morphodynamics during air injection into a confined granular suspension, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **158**, 63–72 (2009).
12. R. HOLTZMAN & R. JUANES, Crossover from fingering to fracturing in deformable disordered media, *Phys. Rev. E*, **82**, 046305 (2010).
13. S. MORA & M. MANNA, Saffman-Taylor instability of viscoelastic fluids: From viscous fingering to elastic fractures, *Phys. Rev. E*, **81**, 026305 (2010).
14. G. VARAS, V. VIDAL & J.-C. GÉMINARD, Venting dynamics of an immersed granular layer, *Phys. Rev. E*, **83**, 011302 (2011).
15. G. VARAS, V. VIDAL & J.-C. GÉMINARD, Morphology of air invasion in an immersed granular layer, *Phys. Rev. E*, **83**, 0061302 (2011).
16. G. VARAS, J.-C. GÉMINARD & V. VIDAL, Air invasion in a granular layer immersed in a fluid: morphology and dynamics, *Gran. Matt.*, **15**, 801–810 (2013).
17. G. VARAS, V. VIDAL & J.-C. GÉMINARD, Dynamics of crater formations in immersed granular materials, *Phys. Rev. E*, **79**, 021301 (2009).
18. P. G. SAFFMAN & G. TAYLOR, The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **245**, 312–329 (1958).
19. A. EINSTEIN, Zur Theorie der Brownschen Bewegung, *Ann. Phys.*, **324**, 371–381 (1906).
20. G. K. BATCHELOR, Effect of Brownian motion on bulk stress in a suspension of spherical particles, *J. Fluid Mech.*, **83**, 97–117 (1977).
21. I. M. KRIEGER & T. J. DOUGHERTY, A mechanism for non-Newtonian flow in suspensions of rigid spheres, *Trans. Soc. Rheol.*, **III**, 137–152 (1959).
22. I. E. ZARRAGA, D. A. HILL & D. T. LEIGHTON, The characterization of the total stress of concentrated suspensions of noncolloidal spheres in Newtonian fluids, *J. Rheol.*, **44**, 185–220 (2000).
23. C. BONNOIT, T. DARNIGE, E. CLÉMENT & A. LINDNER, Inclined plane rheometry of a dense granular suspensions, *J. Rheol.* **54**, 65–79 (2010).

Claquage élastocapillaire

Aurélie Fargette^{1,2,3}, Sébastien Neukirch^{2,3} & Arnaud Antkowiak^{2,3}

¹ Département de Physique, École Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France

² CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France

³ UPMC Université Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France

sebastien.neukirch@upmc.fr

Résumé. Le phénomène de claquage est une instabilité où une arche élastique flambée saute d'une configuration d'équilibre en Λ à une configuration d'équilibre en V . L'arche bistable est utilisée comme interrupteur ou vanne dans de nombreux micro-systèmes électriques ou mécaniques. Comme pour les autres systèmes bi-stables se pose le problème de l'actionnement : comment déclencher le passage d'une configuration à l'autre (passage d'un col dans le paysage énergétique) ? Nous avons montré que l'on pouvait actionner l'arche au moyen de couples de force (tension de surface et pression de Laplace) créés par la présence d'une goutte le long de l'arche. De plus, nous avons montré que ce système bistable pourrait servir de détecteur d'humidité en hydrophilisant une zone précise sur une des faces de l'arche. L'humidité excessive provoque la nucléation d'une goutte qui, une fois suffisamment grande, est à même de faire claquer l'arche, le claquage étant ainsi un signal d'une humidité trop forte.

Abstract. We report on the capillary-induced snapping of soft elastic beams. A drop is gently deposited on a thin buckled polymer strip and triggers an elastocapillary snap-through instability. We investigate both theoretically and experimentally this phenomenon.

1 Introduction

Une coque sphérique ou un arc élastique peut supporter des charges transverses importantes avant de céder. Pour des structures minces une charge trop importante provoquera un effondrement du dôme ou de l'arche : le claquage. Le claquage [1] est a priori une instabilité qui est évitée lors du dimensionnement des structures mais récemment ce phénomène a été mis à profit pour actionner des systèmes bi-stables [2]. D'autre part plusieurs phénomènes naturels font intervenir le claquage de poutre, plaques ou coques : capture de proie par la plante carnivore dionée [3], éjection rapide de spores [4], pièges aquatiques [5].

2 Claquage sec

Une poutre sous chargement longitudinal répond d'abord en compression. Ce n'est que lorsque le chargement dépasse un certain seuil que les déformations de flexion apparaissent : c'est le flambage. Si l'on augmente encore la charge, le déplacement transverse Y augmente et la poutre adopte une forme d'équilibre en arche, en Λ . On fixe alors le déplacement axial Δ et l'on introduit maintenant une force tranchante en milieu de poutre, dirigée vers le bas, voir Figure 1. Lorsque la force tranchante dépasse un certain seuil la poutre claque et adopte une forme d'arche inversée, en V . Si maintenant la force tranchante est placée au tiers de la poutre, on mesure une force maximum significativement réduite par rapport au cas précédent, voir Figure 2. En effet le seuil de stabilité pour la force tranchante dépend du point précis où la force est appliquée, voir Figure 3.

Les expériences sont réalisées avec des poutres de PDMS (Sylgard 184 Elastomer). L'épaisseur est vérifiée à l'aide d'un profilomètre : $h = 30 \mu\text{m}$. Le module de Young est mesuré avec un essai en traction sur une machine Shimadzu : $E = 1,50 \pm 0.05 \text{ MPa}$. Nous avons utilisé deux tailles de poutres données en Table 1.

#	L (mm)	w (mm)	h (μm)	L_{eg} (mm)	Δ/L
S1	5	1,07	68,3	3,83	0,95
S2	3,5	0,98	33,7	2,39	0,90

Table 1. Géométrie des poutres utilisées lors des expériences. La longueur élasto-gravitaire est définie comme $L_{\text{eg}} = (EI/\lambda g)^{1/3}$, où EI est la rigidité de flexion et λ la masse linéique. C'est la longueur que doit avoir une poutre pour être sensiblement fléchi sous son poids propre.

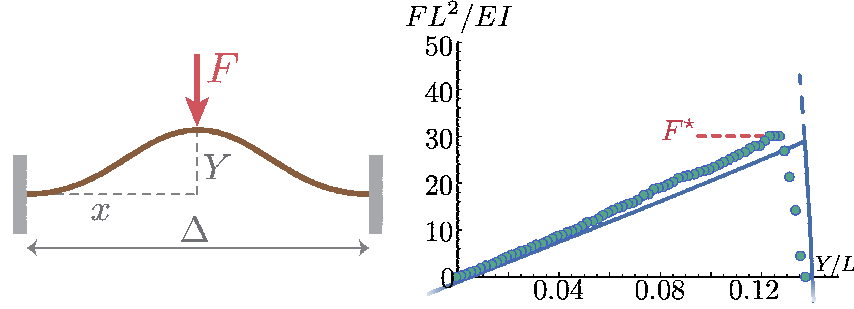


Figure 1. Claquage par force tranchante F . (À droite) Poutre encastree, flambée dans le plan, avec un déplacement axial imposé $\Delta = 0,95L$. On indente verticalement le système : Y est progressivement réduit et on mesure F . L'indentation se fait en milieu de poutre : $x/\Delta = 1/2$. (À gauche) Comparaison entre expérience et calcul. On mesure $F^* = 55 \mu\text{N}$.

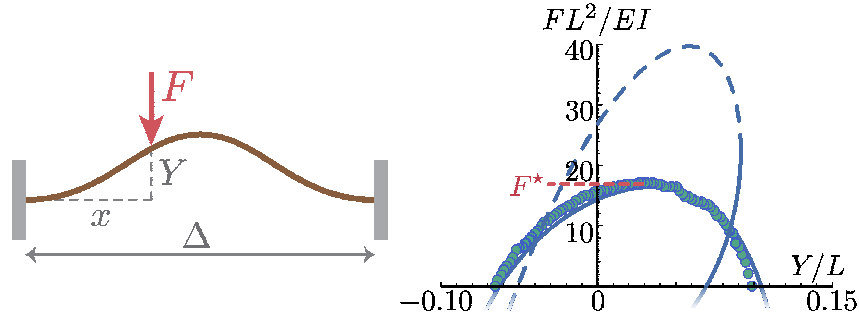


Figure 2. Claquage par force tranchante F . (À droite) Poutre encastree, flambée dans le plan, avec un déplacement axial imposé $\Delta = 0,95L$, mais indentée en $x/\Delta = 1/3$. (À gauche) Comparaison entre expérience et calcul. On voit que la valeur de F^* est significativement réduite par rapport au cas de la figure 1.

3 Claquage mouillé

Nous remplaçons maintenant la force tranchante par une goutte d'eau. Nous déposons des gouttes de tailles croissantes sur la face supérieure d'une poutre flambée en Λ , voir Figure 4. La hauteur de l'arche est mesurée et reportée en fonction du poids de la goutte. Lorsque le volume de la goutte augmente la hauteur Y de l'arche décroît, jusqu'à atteindre une limite pour laquelle le système cède et claque vers une configuration en V. Nous remarquons que, toutes choses étant égales, par ailleurs le poids de la goutte nécessaire pour faire claque le système est plus de moitié moindre comparé à la force tranchante critique mesurée sur l'expérience de claquage sec de la Section 2.

Nous répétons maintenant l'expérience mais plaçons la goutte sur la face inférieure d'une poutre fléchie en Λ . De la même manière nous augmentons le volume de la goutte jusqu'à obtenir le claquage. Nous remarquons que le poids de goutte nécessaire au claquage est bien plus important que la force tranchante nécessaire au claquage en configuration sèche, voir Figure 4. Nous en déduisons que les forces capillaires

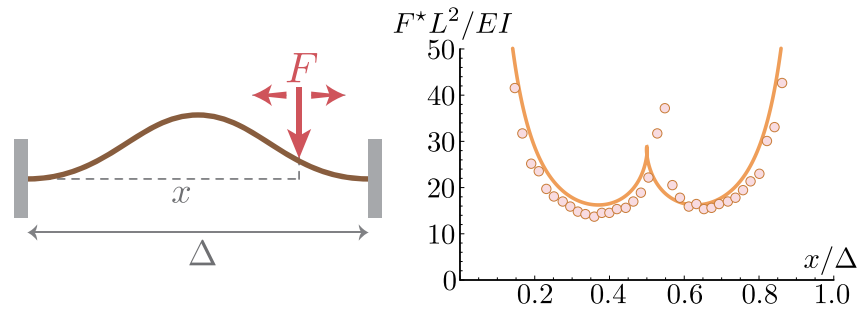


Figure 3. Évolution du seuil de claquage F^* en fonction du placement de la force tranchante. Il ressort deux positions symétriques préférentielles où la force seuil est minimale $x/\Delta \simeq 0,37$ et $0,63$.

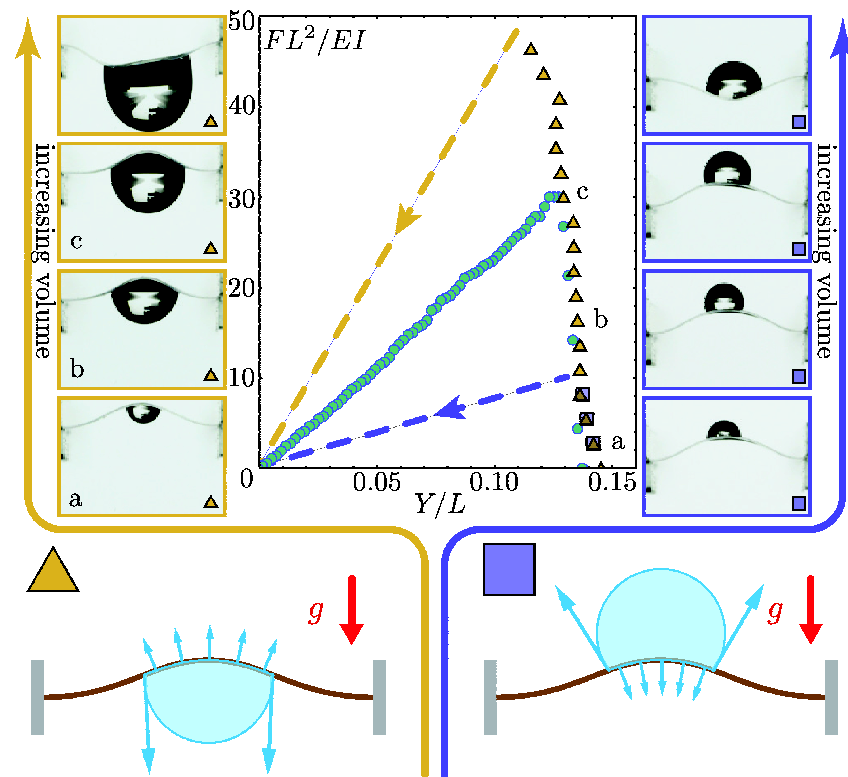


Figure 4. Influence de la capillarité sur le diagramme de bifurcation de la figure 1. Des gouttes de tailles croissantes sont déposées en dessous (triangles jaunes) ou au dessus (carrés bleus) d'une poutre de type S1, flambée vers le haut avec $\Delta = 0,95 L$. Lorsque le poids de liquide adimensionné FL^2/EI croît, la déflexion Y/L décroît, jusqu'à un point où le système claque vers le bas. À titre de comparaison les données de la figure 1 sont aussi tracées (ronds bleu clair).

exercées par la goutte sur la poutre doivent être prises en compte lors du calcul d'équilibre et stabilité du système.

Pour montrer l'importance de ces forces capillaires, nous réalisons une expérience avec une bulle de savon. Dans ce cas le poids de la bulle est assez faible et le claquage ne sera possible que grâce à l'effet composé de la pression de Laplace et de la tension de surface. Nous utilisons une lamelle métallique de clinquant de longueur $L \simeq 24$ cm et largeur 8 cm. La lamelle est flambée en position haute, avec

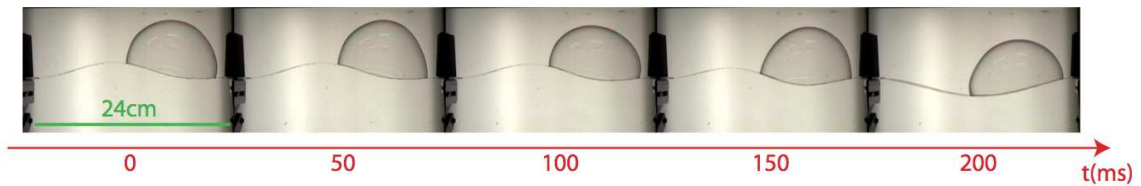


Figure 5. Claquage d'une lamelle de clinquant par bulle de savon.

$\Delta/L = 0,02$. Une bulle de savon d'une dizaine de centimètre est posée sur le cliquant, voir Figure 5. Le claquage se produit en quelques dixièmes de seconde.

4 Conclusions

Nous avons montré que les forces capillaires peuvent aider ou gêner le claquage d'une poutre par force tranchante : pour une arche en Λ , une goutte placée sur la face supérieure (respectivement inférieure) d'une poutre induira le claquage vers le bas pour des poids de liquide bien inférieurs (respectivement supérieurs) à la force tranchante nécessaire au claquage en configuration sèche. Ce rôle des forces capillaires qui devient prépondérant aux petites échelles amène la question suivante : est-il possible qu'une goutte déposée sur la face inférieure d'une arche en V induise un claquage du système vers le haut ?

Références

1. S. P. TIMOSHENKO, Buckling of flat curved bars and slightly curved plates, *J. Appl. Mech.*, **2**, 17–20 (1935).
2. W. K. SCHOMBURG *et al.*, Design optimization of bistable microdiaphragm valves, *Sensors Actuat. A-Phys.*, **64**, 259–264 (1998).
3. Y. FORTERRE, J. M. SKOTHEIM, J. DUMAIS & L. MAHADEVAN, How the venus flytrap snaps, *Nature*, **433**, 421–425 (2005).
4. X. NOBLIN, N. O. ROJAS, J. WESTBROOK, C. LLORENS, M. ARGENTINA & J. DUMAIS, The fern sporangium: A unique catapult, *Science*, **335**, 1322 (2012).
5. O. VINCENT, C. WEISSKOPF, S. POPPINGA, T. MASSELTHER, T. SPECK, M. JOYEUX, C. QUILLIET & P. MARMOTTANT, Ultra-fast underwater suction traps, *Proc. R. Soc. Lond. B*, **278**, 2909–2914 (2011).

Dynamique chaotique d'un rouleau de convection dans une couche de fluide verticale, confinée et différentiellement chauffée

Zhenlan Gao^{1,2,3}, Bérengère Podvin¹, Anne Sergent^{1,2} & Shihe Xin⁴

¹ CNRS, LIMSI, UPR3251, BP 133, 91403, Orsay Cedex, France

² Université Pierre et Marie Curie - Paris 06, 4 Place Jussieu, 75252 Paris, Cedex 05, France

³ Arts et Métiers ParisTech, 2 Boulevard du Ronceray, 49035 Angers Cedex 01, France

⁴ CETHIL, INSA de Lyon, 69621 Villeurbanne Cedex, France

`gao@limsi.fr`

Résumé. Le comportement chaotique d'un rouleau de convection dans une couche de fluide verticale, confinée, et différentiellement chauffée est présenté. Le chaos temporel est atteint par une séquence de doublements de période. Pour un nombre de Rayleigh élevé, on observe une intermittence induite par crise. Un modèle à trois équations est proposé pour représenter certains aspects de la dynamique du rouleau de convection.

Abstract. The chaotic behavior of a single convection roll in a highly confined, vertical, differentially heated fluid layer is studied in the present work. The chaos occurs through a sequence of period-doubling bifurcations. At higher Rayleigh numbers, a crisis-induced intermittency is observed. A three-equation model is proposed in order to capture some aspects of the convection roll dynamics.

1 Introduction

Natural convection between two vertical differentially heated plates is considered as a prototype for many industrial applications, such as the doubled-panel window or the plate heat exchangers. Depending on the applications, the transition to turbulence is either to be promoted or delayed. In the present study, we consider the instabilities onset and chaotic behavior of the flow, when the Rayleigh number Ra is increased. The flow is characterised by cat's eye-like convection rolls when Ra is above the critical Rayleigh number $Ra_c = 5708$. At higher Ra , these convection rolls are found to be connected by oblique vorticity braids in the case of a transversely confined domain [1, 2]. In this work we focus on the dynamics of a single convection roll by considering a small periodic domain, using direct numerical simulation (DNS) [3]. Following [9], we derive a low-order model to capture the main dynamics of the flow.

2 Physical model and numerical methods

The flow of air between two infinite vertical plates maintained at different temperatures is considered as in Fig. 1 (a). The distance between the plates is D , and the periodic dimensions of the plates are L_z and L_y respectively. The temperature difference between the two plates is ΔT . The direction x is normal to the plates, the transverse direction is y , and the gravity g is opposite to the vertical direction z . The fluid properties of air, such as kinetic viscosity ν , thermal diffusivity κ , thermal expansion coefficient β , are constant. Four nondimensional parameters characterizing the flow are the Prandtl number $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$, the Rayleigh number based on the width of the gap between the two plates $Ra = \frac{g\beta\Delta TD^3}{\nu\kappa}$, and the transverse and vertical aspect ratio $A_y = L_y/D$ and $A_z = L_z/D$, respectively. Only the Rayleigh number is varied in the present study. The Prandtl number of air is fixed to 0.71. The transverse aspect ratio is set to be $A_y = 1$, the vertical aspect ratio is set to $A_z = 2.5$, which corresponds to the critical wavelength $\lambda_{zc} = 2.513$ obtained by the stability analysis [1].

2.1 Equations of motion

The flow is governed by the Navier-Stokes equations within the Boussinesq approximation. Here t denotes time, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ is the velocity vector, p is the pressure, θ is the temperature. The nondimensionalized equations are:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \text{Pr} \cdot \text{Ra}^{-1/2} \Delta \mathbf{u} + \text{Pr} \theta \mathbf{z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \text{Ra}^{-1/2} \Delta \theta \quad (3)$$

with Dirichlet boundary conditions at the plates $\mathbf{u}(0, y, z, t) = \mathbf{u}(1, y, z, t) = 0$; $\theta(0, y, z, t) = 0.5$; $\theta(1, y, z, t) = -0.5$ and periodic conditions in the y and z directions.

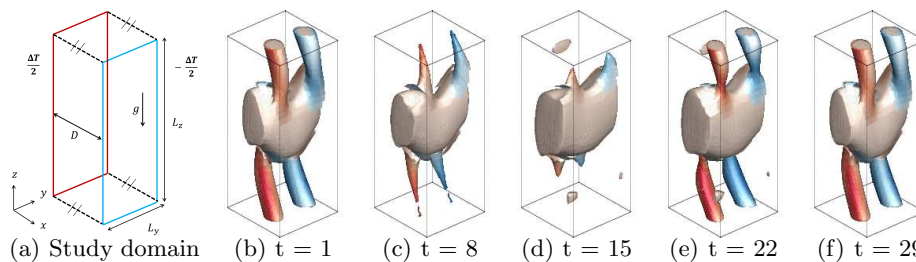


Figure 1. (a) Study domain. (b)–(f) Q-criterion visualization of flow structure at selected times spanning one oscillation period at $\text{Ra} = 11500$, $Q = 0.1$ colored with vorticity Ω_x .

2.2 Numerical methods

A spectral code [3] developed at LIMSI is used to carry out the simulations. The spatial domain is discretized by the Chebyshev-Fourier collocation method. The projection-correction method is used to enforce the incompressibility of the flow. The equations are integrated in time with a second-order mixed explicit-implicit scheme. A Chebyshev discretization with 40 modes is applied in the direction x , while the Fourier discretization is used in the transverse and vertical directions. 30 Fourier modes are used in the transverse direction y for $A_y = 1$, while 60 Fourier modes are used in the vertical direction z for $A_z = 2.5$. Convergence of the spatial discretization has been established [1]. We run our simulations by following a branch of stable solutions. An instantaneous flow realization in the periodic regime at $\text{Ra} = 11300$ is taken as the initial condition for the first run. For each following run, the Rayleigh number is increased by a small increment ΔRa of 2. At each Ra , the data is sampled when the asymptotic regime has been reached, i.e. after long time numerical integrations (about 10^4 nondimensional time units). A solution in this asymptotic regime is then used as the initial condition for the simulation at the next higher Ra .

3 DNS results

3.1 Periodic regime

As reported in [1], the flow becomes 2D steady then 3D steady through two supercritical pitchfork bifurcations at $\text{Ra} = 5708$ and $\text{Ra} = 9980$. The flow structure consists of a primary roll deformed in its transverse direction, with two counter-rotating braids of oblique vorticity originating from the roll [1]. Then via a Hopf bifurcation at $\text{Ra} = 11270$, the flow becomes time-dependent. The roll and braids grow and shrink alternatively and periodically as shown in Fig. 1 (b)–(f), where the periodic exchanges of energy and enstrophy between the primary roll and braids take place. The time period of the oscillation $T_{\text{osc}}^{\text{DNS}}$ is about 28 convective units.

Spatial 2D Fourier analysis can provide a useful description of the flow. For example the vertical velocity can be expressed as $w(x, y, z, t) = \sum_{lk} \hat{w}_{lk}(x, t) \exp(2i\pi(\frac{ly}{A_y} + \frac{kz}{A_z}))$. The first Fourier modes \hat{w}_{lk} of the vertical velocity on the plane at $x = 0.0381$ are represented in Fig. 2 for l, k equal to 0 or 1. We checked that these results did not depend on the distance of the plane to the wall. It confirms that the energy is concentrated in the mean mode \hat{w}_{00} , then in the first Fourier mode in each direction \hat{w}_{01} and \hat{w}_{10} . All other modes represent less than 8% energy of mode \hat{w}_{10} . This suggests that the dynamics is restricted to a limited number of degrees of freedom and could be approximated with a low order model (see Section 4).

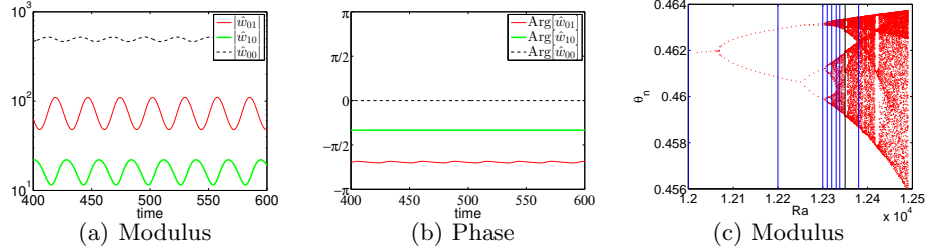


Figure 2. (a)–(b) Temporal evolutions of Fourier modes \hat{w}_{lk} obtained by the Fourier transform of the vertical velocity w distribution on an arbitrarily chosen vertical plane at $x = 0.0381$, $Ra = 11500$. (c) Bifurcation diagram obtained by using the local maxima θ_n of the temperature timeseries at the point (0.038 0.097 0.983).

3.2 Period-doubling cascade

As the Rayleigh number increases, a sequence of period-doubling bifurcations is observed, which leads the flow to a temporally chaotic regime [1]. A bifurcation diagram of Fig. 2 (c) is constructed from local maxima θ_n of the temperature timeseries at the point (0.038 0.097 0.983). With a linear extrapolation, we estimated the local critical Rayleigh numbers for each period-doubling bifurcation, from which we calculated the Feigenbaum constants (Table 1). Some agreement with the theoretical value $\delta = 4.66920161\dots$ is observed [4]. Using the theoretical Feigenbaum number, the chaotic regime is estimated to be reached around $Ra \sim 12320$. For higher Rayleigh numbers, the chaos continues to develop as shown in the bifurcation diagram (Fig. 2 (c)). Several periodic windows are also observed. For example, a large “period-6 windows” is observed at $Ra = 12350$ in Fig. 2 (c). We used the computation technique proposed by Benettin *et al.* [5] to calculate the largest Lyapunov exponent. As shown in Fig. 3 (a), the largest Lyapunov exponent is found to be positive for $Ra \geq 12360$, which suggests that temporal chaos has been reached. The flow still follows the basic oscillation displayed in the periodic regime, but the maximum roll and braid amplitudes vary from one cycle to the other, as is evidenced in Fig. 3 (b)–(d).

Bifurcations	Local critical	Estimated Feigenbaum constant
$2^i \rightarrow 2^{i+1}$	$Ra_{2^i \rightarrow 2^{i+1}}$	$\tilde{\delta}$
0–1	11270	
1–2	12068.09	
2–4	12258.42	4.193
4–8	12305.76	4.020
8–16	12316.72	4.321

Table 1. Summary of period-doubling bifurcations.

3.3 Crisis-induced intermittency

The bifurcation diagram for the range $Ra \in [12400, 12600]$ is represented in Fig. 3 (e). At $Ra = 12546$, a new set of local maxima abruptly appears on the top-right corner. This is the sign of another type of crisis [6]. Fig. 4 (a) shows that the phase of the first Fourier mode \hat{w}_{01} for $Ra = 12600$ intermittently

experiences a shift of π . The time between phase switches appears to be random, but decreases with the Rayleigh number. A description of the flow structure is given by streamlines plots in Fig. 4 (b–c): the roll randomly switches between two vertical positions separated by a distance equal to half the wavelength of the coherent structure. The switch of flow structures suggests the existence of a heteroclinic connection between two chaotic attractors, which are located on the $O(2) \times O(2)$ invariant torus of chaotic solutions. Structurally stable heteroclinic connections between fixed points or periodic solutions have been shown to exist in the systems with $O(2)$ symmetry [7, 8]. Such connections are typically associated with a 1 : 2 or 0 : 1 : 2 resonance. It is not clear if such resonances are present here. Moreover, we are not aware of theoretical results for heteroclinic connections between two strange attractors. At $Ra = [13000, 13100]$ and $[14200, 14500]$, two periodic “windows” regimes are observed. The periodic orbits correspond to both a modulation and a shift of the roll and braids. The time scale τ characterizing the average time length during which the convection roll remains at a fixed location obeys the power law $\tau \sim (Ra - Ra_{ci})^{-\gamma}$ with a value of $\gamma \sim 0.78$ (see Fig. 4 (d)). As pointed out in [6], for one-dimensional maps with quadratic maxima, the critical crisis exponent γ is strictly equal to $\frac{1}{2}$, while for higher-dimensional maps, γ is larger than $\frac{1}{2}$. It suggests that our system has a fractal dimension larger than 1. The largest Lyapunov exponent λ_1 in the intermittency regime (Fig. 3 (a)) shows an increase by a factor of 10 between the chaotic and intermittent regimes, which corresponds to the modification of the flow associated with the roll shift.

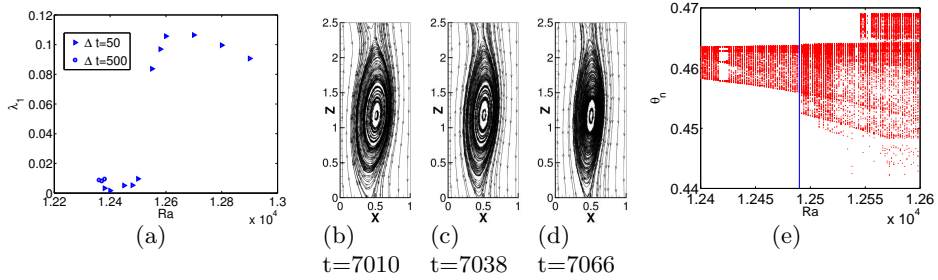


Figure 3. (a) The largest Lyapunov exponent λ_1 at different Rayleigh numbers. (b)–(d) Flow streamlines at three instants separated by a basic oscillation period $T_{osc}^{DNS} = 28$ at $Ra = 12380$ on the vertical planes $y = 0.5$. (e) Bifurcation diagram obtained by using the local peaks θ_n of the timeseries at the point $(0.038, 0.097, 0.983)$. Note: the vertical line in the figure corresponds to the largest Rayleigh number in Fig 2 (c).

4 Lower-order model

4.1 Model for the periodic regime

In the periodic regime (Section 3.1), the plot of Fourier modes in Fig. 2 (a) shows that the intensities of the braids and the roll fluctuate in quasi-phase opposition. The phase of the roll mode (Fig. 2 (b)) is not exactly constant, which shows that the rolls lightly oscillates around a fixed position. Timeseries of the different physical variables show that all the components associated with a given Fourier mode oscillate in phase. Based on these observations and in the spirit of [9], we propose a three equation model to represent the flow behavior, which reads as

$$\dot{a}_{01} = B_1(\langle a_{00} \rangle - a_{00})a_{01} \quad (4)$$

$$\dot{a}_{10} = B_2(\langle a_{00} \rangle - a_{00})a_{10} \quad (5)$$

$$\dot{a}_{00} = 2B_1(|a_{01}|^2 - \langle |a_{01}|^2 \rangle) + 2B_2(|a_{10}|^2 - \langle |a_{10}|^2 \rangle) \quad (6)$$

where $\langle a_{00} \rangle$, $\langle |a_{01}|^2 \rangle$, $\langle |a_{10}|^2 \rangle$ are constants extracted from the DNS. The details of model derivation can be found in [10]. At $Ra = 11500$, using the coefficients in Table 2, the model yields a characteristic period of T about 28 convective units, in agreement with DNS. Figure shows the time series from the DNS and the model integrated from the same initial condition. The agreement between the model and the simulation is quite good for the modes \hat{w}_{00} and \hat{w}_{01} . The less energetic mode \hat{w}_{10} is not quite as well reproduced, which is likely to be an effect of truncation.

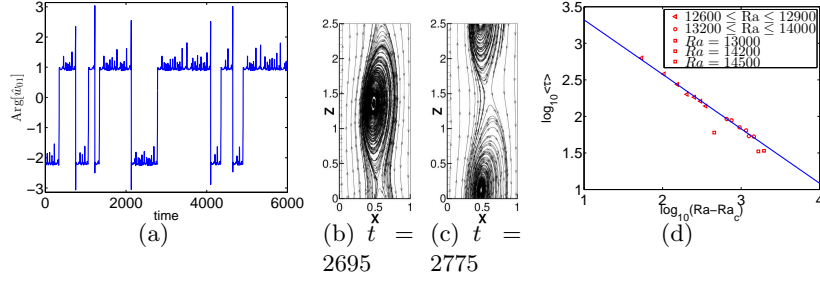


Figure 4. (a) Phase of the temporal evolution of the Fourier mode \hat{w}_{01} calculated on the vertical plane $x = 0.0381$, $\text{Ra} = 12600$. (b)–(c) Flow streamlines at different instants on the plane $y = 0.5$. (d) $\log_{10}\langle\tau\rangle$ vs $\log_{10}(\text{Ra} - \text{Ra}_c)$. The slope of the straight line gives $\gamma \approx 0.78$.

Ra	11500	12500	12800
$T_{\text{osc}}^{\text{DNS}}$	28	28	28
$(\langle \hat{w}_{01} \rangle, \hat{w}_{01} _{\text{min}}, \hat{w}_{01} _{\text{max}})$	(88, 55, 127)	(88, 1.7, 204)	(88, 0, 210)
$(\langle \hat{w}_{11} \rangle, \hat{w}_{11} _{\text{min}}, \hat{w}_{11} _{\text{max}})$	(48, 34, 61)	(48, 0.93, 92)	(48, 0, 100)
$(\langle \hat{w}_{00} \rangle, \hat{w}_{00} _{\text{min}}, \hat{w}_{00} _{\text{max}})$	(818, 757, 882)	(837, 680, 1033)	(845, 665, 1050)
(B_1, B_2)	$(1.2 \times 10^{-3}, -0.9 \times 10^{-3})$	$(1.3 \times 10^{-3}, -1.1 \times 10^{-3})$	$(1.2 \times 10^{-3}, -1.1 \times 10^{-3})$

Table 2. Statistics of the vertical velocity w in the simulation and values of the model coefficients at different Rayleigh numbers.

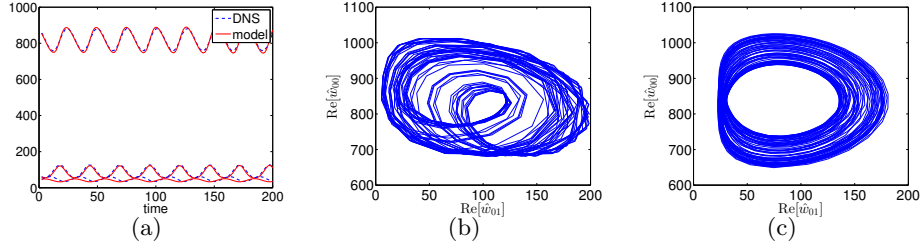


Figure 5. (a) Comparison between the model and the simulation at $\text{Ra} = 11500$: from top to bottom, $|\hat{w}_{00}|$, $|\hat{w}_{01}|$, $|\hat{w}_{10}|$. (b)–(c) Velocity Fourier modes on the plane $x = 0.5$ at $\text{Ra} = 12500$: (b) DNS, (c) model with $\beta = 0.5$, $T' = 25$.

4.2 Modeling the chaotic regime

In the chaotic regime, nonlinear interaction involving modes excluded from the truncation are expected to influence the dynamics of the low-order model. The dominant mode outside the truncation is found to be pure vertical mode \hat{w}_{02} . We therefore simply model the influence of higher-order modes by introducing a periodic perturbation of amplitude β in the evolution equation of the vertical mode \hat{w}_{01} . Owing to the strong transverse confinement, we did not perturb the transverse mode \hat{w}_{10} , so that only equation (4) was modified as follows:

$$\dot{a}_{01} = (\mu_1 - B_1 a_{00})a_{01} + \beta \sin(2\pi t/T'). \quad (7)$$

The frequency of the perturbation $1/T'$ was chosen to be close to that of the oscillation ($T' = 25$). For the typical value $\beta = 0.5$, a modulation of the amplitudes was observed, as is evidenced by the phase portraits in Fig. 5(b–c).

4.3 Modeling intermittency

As Rayleigh number is increased, more and more modes, which were originally excluded from the truncated model (4)–(6), impact the three dominant modes in a complex manner, as a result of nonlinear interaction of the modes. We model the nonlinear interaction of modes by adding a random noise (a

Gaussian perturbation) to the vertical mode \hat{w}_{01} in (4). The perturbation is solely applied to the vertical mode \hat{w}_{01} , with an amplitude larger than 5% of the mean roll amplitude, then the intermittency can appear in the system as shown in Fig. 6.

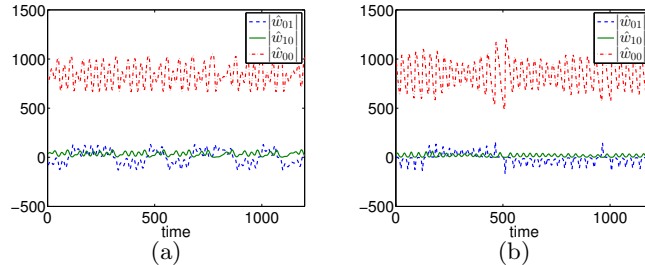


Figure 6. Real part of the Fourier modes \hat{w}_{01} , \hat{w}_{10} , \hat{w}_{00} at $Ra = 12800$: (a) DNS; (b) model with Gaussian noise of 5% amplitude.

5 Conclusion

The chaotic behavior of a single convection roll in highly confined, vertical, differentially heated fluid layer is studied. The flow becomes temporally chaotic through a sequence of period-doubling bifurcations. A bifurcation diagram is constructed from the temperature timeseries of a point in the flow, which represents some similitude to the one-dimensional map, for example, periodic windows, interior crisis. The largest Lyapunov exponent is found to be positive. At higher Ra , a crisis-induced intermittency is observed, whereby the structure makes random excursions between two vertical positions separated by half a wavelength. The mean intermittency period between the excursions scales as $(Ra - Ra_c)^{0.78}$ over a range of Ra . Two periodic windows corresponding to stable orbits were identified within the intermittent regime. The temporal behavior of the roll can be captured by a three equation model, which are based on the three principal Fourier modes. The model predicts the limit cycles which are close to the ones observed in DNS. By adding a periodic perturbation to account for higher-order modes, the model can mimic the chaotic behavior of the roll. Alternatively, intermittency can be obtained by introducing a relatively high amplitude random perturbation to the system. The model displays excursions in phase space corresponding to the roll shift occurring in the DNS. The present study shows that the confined configuration favors the supercritical bifurcations. Only a single convection roll can exhibit some complex chaotic behaviors. With the knowledge of a single roll dynamics, we plan to study the route to chaos and turbulent convection of a vertical, differentially heated fluid layer in an extended configuration.

Acknowledgements We are indebted to Pr. Paul Manneville for many helpful discussions. Some of the computations were carried out on the super-cluster in IDRIS-CNRS (Project DARI0326).

References

1. Z. GAO *et al.*, *Phys. Rev. E.*, **88**, 023010 (2013).
2. S. RANDRIANIFAHANANA, *Rapport de Master 1, Université Paris 6* (2013).
3. S. XIN *et al.*, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **40**, 981–998 (2002).
4. M. J. FEIGENBAUM, *Los Alamos Sciences*, **1**, 4–27 (1980).
5. G. BENETTIN *et al.*, *Meccanica*, **15**, 9–30 (1980).
6. C. GREBOGI. *et al.*, *Phys. Rev. A*, **36**, 5365–5380 (1987).
7. I. MELBOURNE *et al.*, *Proc. R. Soc. Edinb. A*, **113** 315–345 (1989).
8. D. ARMBRUSTER *et al.*, *Physica D*, **29**, 257–282 (1987)
9. T. R. SMITH *et al.*, *J. Fluid Mech.*, **538**, 71–110 (2005).
10. Z. GAO *et al.*, Chaotic dynamics of a convection roll in a highly confined, vertical, differentially heated fluid layer, submitted to *Phys. Fluids*.

Vaporisation d'une nano-goutte encapsulée stimulée par ultrasons

Matthieu Guédra¹ & François Coulouvrat¹

Sorbonne Universités, UPMC Université Paris 06, CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France
matthieu.guedra@dalembert.upmc.fr

Résumé. Les nanoparticules à cœur liquide sont développées comme Agents Thérapeutiques pour l'imagerie médicale et la délivrance ciblée de médicaments. Contrairement aux Agents de Contraste Ultrasonores (ACU) classiques à cœur gazeux, ces particules ont un rayon suffisamment faible leur permettant de traverser la barrière endothéliale des vaisseaux sanguins résultant de l'angiogenèse tumorale et peuvent se fixer directement sur les cellules cancéreuses. Leur cœur liquide et la présence d'une coque (généralement en polymère) en font également des particules plus stables et d'une durée de vie plus importante que les ACU micrométriques classiques. Néanmoins, ces nanoparticules ne sont pas des corps résonants (en particulier dans les gammes de fréquences utilisées en échographie ultrasonore) et ne peuvent donc pas être directement utilisées comme Agents de Contraste ou Thérapeutiques. La vaporisation stimulée par ultrasons est un procédé utilisé pour rendre ces agents nanométriques plus échogènes via un changement de phase liquide-vapeur. Elle implique l'exposition des nanoparticules à un champ acoustique à haute intensité et met en jeu des couplages importants entre les transferts de chaleur dans les différents milieux et le mouvement radial non-linéaire des interfaces. Nous proposons une modélisation de ce problème dans laquelle nous considérons que le site de nucléation (germe) est déjà présent dans le système : le cœur de la particule est constitué d'une couche liquide renfermant une bulle de vapeur. Le mouvement de l'interface liquide-vapeur est décrit par une équation de Rayleigh-Plesset modifiée qui tient compte du flux de masse dû à l'évaporation/condensation du cœur [1]. Le mouvement radial de la coque sphérique séparant les milieux fluides intérieur et extérieur est intégré en adoptant une démarche comparable à celle retenue par Church dans ses travaux [2]. Des simulations sont réalisées pour des nanoparticules utilisées en imagerie ultrasonore [3, 4] et constituées d'une goutte de per-fluoro-pentane (PFP) entourée d'une coque en polymère type acide poly lactique-co-glycolique (PLGA). Une attention particulière sera portée sur l'analyse de l'influence du confinement par la coque en polymère. La perméabilité de la coque pourra également être discutée (diffusion du cœur dans le liquide extérieur : libération de principe actif), ainsi que les conditions de sa rupture lorsque celle-ci devient suffisamment fine. [Projet NABUCCO – Plan Cancer 2009-2013].

Abstract. Nanoparticles with a liquid core are developed as Therapeutical Agents for medical imaging and targeted drug delivery. Instead of classical gas-filled Ultrasound Contrast Agents (UCA), the radius of these particles is smaller than the endothelial gap of blood vessels due to tumoral angiogenesis, and they can therefore directly accumulate on tumoral cells. The liquid core and the shell (generally a polymer) make them more stable and with a longer lifetime than the classical UCA of micrometric size. However, these nanoparticles do not resonate (in particular in the frequency range used for medical imaging) and cannot be used as Therapeutical or Contrast Agents in their initial state. Ultrasound can thus be used to induce a liquid-vapor phase change of the core in order to make the particle more echogeneous. The nanoparticles must be exposed to high intensity acoustic field and this process naturally involves important coupling between heat transfer and the nonlinear radial motion of the interfaces. We propose a modelling of this problem for which we consider that the vapor nucleus is already present in the system, so that the core of the particle is composed of a vapor bubble surrounded by a liquid layer. The motion of the liquid-vapor interface is described by a modified Rayleigh-Plesset equation which takes into account the mass flux across the interface due to evaporation/condensation process [1]. The radial motion of the spherical shell which separates inner and outer liquids is integrated following the same approach as the one adopted by Church in his work [2]. Numerical simulations are provided for nanoparticles used in medical imaging [3, 4] and made of a droplet of per-fluoro-pentane (PFP) surrounded by a polymeric shell. We will particularly focus on the analysis of the effect of the encapsulation by the shell on the growth of the inner bubble. Some other points could be discussed, such as the permeability of the shell (diffusion of the core in the outer liquid for drug delivery) or rupture conditions when the shell becomes sufficiently thin. [NABUCCO Project – Plan Cancer 2009-2013].

1 Introduction

Les Agents de Contraste Ultrasonores (ACU) utilisés en imagerie médicale permettent d'augmenter le contraste acoustique entre le sang et les tissus [5]. Les ACU commercialisés et utilisés à l'heure actuelle sont constitués d'une bulle d'air ou de gaz per-fluoro-carboné (d'un diamètre de l'ordre de la dizaine de micromètres), stabilisée par une coque empêchant la dissolution, la rupture ou l'agrégation des particules lors de leur passage dans le système sanguin. La coque est réalisée à partir de matériaux biocompatibles, généralement des lipides, des protéines dénaturées (albumine) ou des polymères (par exemple, acide poly-lactide-co-glycolide) [6]. Le principe de l'échographie ultrasonore repose sur la différence d'impédance acoustique qui existe entre les ACU gazeux et leur milieu d'immersion (sang, tissus) dont le comportement acoustique est proche de celui d'un fluide incompressible (eau). Lorsqu'ils sont excités par une onde acoustique, les ACU résonnent à une fréquence particulière qui dépend de leur diamètre et des propriétés élastiques du gaz. Le champ acoustique rétrodiffusé dû aux oscillations radiales de la particule est d'autant plus intense que le contraste de compressibilité entre l'ACU et son milieu d'immersion est important. L'utilisation de telles particules comme Agents Thérapeutiques constitue également une alternative aux techniques actuelles d'administration de substances chimiothérapeutiques et repose sur leur capacité à traverser la barrière endothéliale pour se fixer directement sur les cellules cancéreuses. Cependant, les vaisseaux tumoraux présentant un espace intercellulaire de l'ordre de quelques centaines de nanomètres, les ACU micrométriques actuellement utilisés en échographie ne peuvent pas traverser la barrière endothéliale et sont donc contraints à rester dans le vaisseau sanguin. Pour pallier ce problème, de nombreux travaux se penchent à présent sur l'étude d'agents nanométriques à cœur liquide (per-fluoro-pentane, per-fluoro-octyl bromide) [3, 7]. La présence d'un cœur liquide et d'une coque épaisse (généralement un polymère) en fait des particules beaucoup plus stables et d'une durée de vie plus longue que les ACU standards (gazeux), améliorant ainsi leur efficacité pour le transport de principe actif. Les nano-agents ne sont pas des corps résonants à l'état liquide (en particulier dans les gammes de fréquences utilisées en acoustique médicale) : il est donc indispensable de vaporiser le cœur pour pouvoir les utiliser comme Agents de Contraste ou Thérapeutiques [7]. La focalisation d'une onde acoustique de fort niveau constitue un moyen de déclencher le changement de phase en créant une dépression localisée. La technique ADV (Acoustic Droplet Vaporization) a l'avantage d'être parfaitement non-intrusive et assez peu coûteuse.

La modélisation de la vaporisation passe par l'étude de la réponse non-linéaire de la bulle soumise à un champ acoustique extérieur. La dynamique des bulles de vapeur est un problème ancien qui a fait l'objet de nombreux travaux [8, 9]. Les oscillations d'une bulle de vapeur en espace libre sont décrites par le modèle de Hao & Prosperetti [1]. Récemment, Schpak et coll. [10] ont complété ce modèle en y ajoutant la présence d'un gaz mélangé à la phase vapeur dans la bulle. Leurs simulations numériques ont notamment mis en évidence le rôle important de ce gaz lors des phases d'effondrement de la bulle (condensation totale). Dans ce travail, nous étendons la théorie des bulles de vapeur au cas d'une bulle en espace confiné par une coque élastique.

2 Théorie

Considérons le problème illustré en figure 1. À l'interface $r = R$ se produit un changement de phase liquide/vapeur qui se traduit par l'existence d'un flux de masse J à travers l'interface :

$$J \equiv \rho_i [v_i(R) - \dot{R}] = \rho_v [v_v(R) - \dot{R}], \quad (1)$$

où ρ_i et ρ_v sont les masses volumiques du liquide intérieur et de la vapeur et où v_i et v_v sont les vitesses correspondantes. Notons que J est défini positif pour une phase de condensation et négatif pour une phase d'évaporation. Le processus d'évaporation/condensation est donc accompagné d'une discontinuité des champs de vitesse à l'interface ; néanmoins, il est généralement raisonnable de considérer la masse volumique du liquide très grande devant celle de la vapeur ($\rho_v \ll \rho_i$) et de négliger l'expansion thermique dans le liquide, de sorte que l'on puisse faire l'approximation $v_i(R) \simeq \dot{R}$.

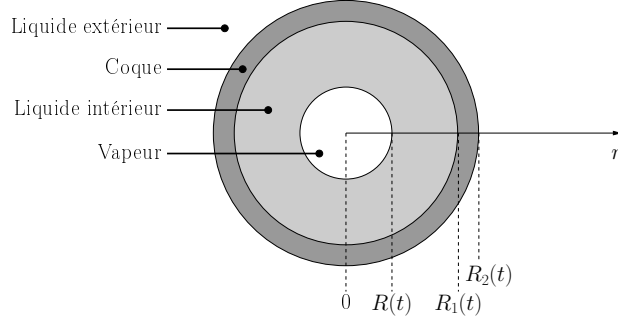


Figure 1. Représentation schématique du problème.

Supposons maintenant que le liquide intérieur est entouré d'une coque solide élastique de rayons interne R_1 et externe R_2 (cf. Fig. 1), elle-même immergée dans un liquide extérieur. Afin de simplifier le problème, les milieux liquides et solide sont supposés incompressibles. L'intégration de l'équation de conservation de la masse conduit naturellement à l'expression classique du champ de vitesse dans les différentes couches sous la forme :

$$v_m(r, t) = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2}, \quad (2)$$

où $m = i, c, e$ représente respectivement les milieux intérieur, coque et extérieur. Rappelons que dans l'expression (2), nous avons fait usage de l'approximation $v_i(R) \simeq \dot{R}$. L'expression mathématique du champ de vitesse conduit également à l'établissement des relations d'incompressibilité classiques :

$$R^2 \dot{R} = R_1^2 \dot{R}_1 = R_2^2 \dot{R}_2. \quad (3)$$

En usant de l'expression (2) pour le champ de vitesse, l'intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans les trois milieux denses conduit aux équations suivantes :

$$\rho_i \left[\left(R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right) - \left(R_1 \ddot{R}_1 + \frac{3}{2} \dot{R}_1^2 \right) \right] = p_i(R) - p_i(R_1), \quad (4a)$$

$$\rho_c \left[\left(R_1 \ddot{R}_1 + \frac{3}{2} \dot{R}_1^2 \right) - \left(R_2 \ddot{R}_2 + \frac{3}{2} \dot{R}_2^2 \right) \right] = \sigma_{rr}^c(R_2) - \sigma_{rr}^c(R_1) + \int_{R_1}^{R_2} \frac{2(\sigma_{rr}^c - \sigma_{\theta\theta}^c)}{r} dr, \quad (4b)$$

$$\rho_e \left(R_2 \ddot{R}_2 + \frac{3}{2} \dot{R}_2^2 \right) = p_e(R_2) - p_\infty, \quad (4c)$$

où ρ_m est la masse volumique du milieu m et $p_m(a)$ est la pression dans le fluide m à l'interface $r = a$. Dans l'équation (4b), σ_{rr}^c et $\sigma_{\theta\theta}^c$ représentent les contraintes radiale et tangentielle dans la coque. Dans la suite, on supposera que la coque présente une rhéologie visco-élastique de type Kelvin-Voigt, de sorte que sa loi de comportement est entièrement définie par un module élastique G^c et une viscosité de cisaillement η^c . L'équation (4c) est l'équation de Rayleigh-Plesset qui traduit le mouvement de l'interface extérieure en réponse à la pression p_∞ dans le liquide loin de la particule. Remarquons que la combinaison des équations (4b) et (4c) conduit à une forme équivalente à celle utilisée dans le modèle de Church (cf. Éq. (3) dans [2]).

Aux équations (4) sont associées les conditions de continuité du flux de quantité de mouvement aux différentes interfaces :

$$-p_e(R_2) - 4\eta^e \frac{\dot{R}_2}{R_2} = \sigma_{rr}^c(R_2), \quad (5a)$$

$$\sigma_{rr}^c(R_1) = -p_i(R_1) - 4\eta^i \frac{\dot{R}_1}{R_1}, \quad (5b)$$

$$p_v(R) = p_i(R) + 4\eta^i \frac{\dot{R}}{R} + \frac{2\sigma}{R} + J \left(v_i(R) - \dot{R} \right), \quad (5c)$$

qui tiennent compte des viscosités de cisaillement η^i et η^e des liquides intérieur et extérieur et de la tension de surface σ à l'interface liquide/vapeur. Notons que le dernier terme de l'équation (5c) est nul du fait de l'approximation $v_i(R) \simeq \dot{R}$.

Finalement, en explicitant le comportement rhéologique de la coque, la combinaison des équations (4) et (5), compte tenu des relations d'incompressibilité (3), conduit à l'équation du mouvement pour l'interface liquide/vapeur :

$$\begin{aligned} & \rho_i R \ddot{R} \left(1 + \frac{\rho_c - \rho_i}{\rho_i} \frac{R}{R_1} + \frac{\rho_e - \rho_c}{\rho_i} \frac{R}{R_2} \right) + \rho_i \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 + \frac{\rho_c - \rho_i}{\rho_i} \frac{R}{R_1} \frac{4R_1^3 - R^3}{3R_1^3} + \frac{\rho_e - \rho_c}{\rho_i} \frac{R}{R_2} \frac{4R_2^3 - R^3}{3R_2^3} \right) \\ & = p_v(R) - p_\infty - \frac{2\sigma}{R} - \frac{2\sigma_1}{R_1} - \frac{2\sigma_2}{R_2} - 4 \frac{\dot{R}}{R} \left(\eta^e \frac{R^3}{R_2^3} + \eta^c \frac{R^3 (R_2^3 - R_1^3)}{R_1^3 R_2^3} + \eta^i \frac{R_1^3 - R^3}{R_1^3} \right) \\ & \quad - \frac{4}{3} G^c \left(1 - \frac{R_{10}^3}{R_1^3} \right) \times \left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^3} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

avec R_{10} le rayon statique interne de la coque.

La pression p_v dans la bulle est supposée uniforme en régime de grande longueur d'onde. Pour un changement de phase se faisant à l'équilibre thermodynamique, elle est liée à la température T_Σ à la surface par la relation de Clausius-Clapeyron :

$$\frac{dp_v}{dT_\Sigma} = \frac{L}{r_v T_\Sigma} \frac{p_v}{T_\Sigma}, \quad (7)$$

où L est la chaleur latente de vaporisation et r_v est la constante spécifique de la vapeur considérée comme un gaz parfait.

L'évolution de la température de surface $T_\Sigma(t)$ est régie par la continuité du flux d'énergie à l'interface, faisant intervenir les flux de chaleur par conduction dans les milieux liquide et vapeur et le flux de masse généré par le changement de phase. L'expression du champ de vitesse v_v est établie dans [1] et le flux de chaleur dans la bulle est simplifié en régime quasi-isotherme, du fait que l'on puisse généralement considérer le rayon de la bulle comme très petit en regard de la longueur caractéristique de diffusion thermique dans la phase vapeur. Par suite, en usant de la relation de Clausius-Clapeyron (7), la continuité du flux d'énergie à l'interface conduit à une équation différentielle pour la température de surface :

$$\frac{R}{3} p_v \frac{\dot{T}_\Sigma}{T_\Sigma} \left[\frac{\gamma_v}{\gamma_v - 1} - \frac{L}{r_v T_\Sigma} \left(\frac{L}{r_v T_\Sigma} - 2 \right) \right] + \frac{L}{r_v T_\Sigma} p_v \dot{R} - K^i \frac{\partial T_i}{\partial r} \Big|_{r=R} + 4\eta^i R \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = 0, \quad (8)$$

où K^i est la conductivité thermique du liquide et $\gamma_v = c_p^v/c_v^v$ est le coefficient polytropique de la vapeur.

Cette relation implique évidemment de connaître le flux de chaleur par conduction du côté liquide. Celui-ci est déterminé en résolvant numériquement l'équation de la chaleur dans le liquide intérieur :

$$\rho_i c_v^i \left(\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{R_1^2 \dot{R}_1}{r^2} \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) = \frac{K^i}{r^2} \frac{1}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + 8\eta^i \frac{R_1^4 \dot{R}_1^2}{r^6}. \quad (9)$$

En introduisant le changement de variable

$$y = \frac{R_1 - r}{h}, \quad (10)$$

avec $h = R_1 - R$ l'épaisseur de la couche de liquide intérieur, l'équation (9) est réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial t} &= \frac{D_T^i}{h^2} \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} - \frac{2h}{R_1 - yh} \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) - \frac{1}{h} \left(\dot{R}_1 \left[1 - \left(\frac{1}{1 - yh/R_1} \right)^2 \right] - yh \dot{h} \right) \frac{\partial T_i}{\partial y} \\ &+ \frac{8\eta^i}{\rho_i c_v^i} \left(\frac{\dot{R}_1}{R_1} \right)^2 \frac{1}{(1 - yh/R_1)^6}. \end{aligned} \quad (11)$$

Le changement de variable y permet de fixer les bornes mobiles du domaine physique. À l'équation (11) sont associées les conditions aux limites suivantes :

$$T_i(y = 1, t) = T_\Sigma(t), \quad (12a)$$

$$T_i(y = 0, t) = T_\infty. \quad (12b)$$

Notons que la condition (12b) implique que la coque ainsi que le fluide extérieur restent à température ambiante lors de la croissance/décroissance de la bulle interne. Cette hypothèse est vérifiée aussi longtemps que l'épaisseur de la couche occupée par le fluide intérieur reste grande en regard de la longueur de diffusion thermique dans le fluide, les échanges de chaleur restant alors suffisamment localisés au niveau de l'interface liquide/vapeur. Cette hypothèse est largement satisfaite au début de la vaporisation lorsque la bulle de vapeur occupe très peu d'espace dans le cœur ; elle mérite néanmoins d'être contrôlée à mesure que le volume occupé par la vapeur augmente.

3 Simulations numériques

Les équations (3), (6), (8) et (11) constituent un système dynamique non-linéaire résolu par une méthode de Runge-Kutta. Pour l'équation de la chaleur (11), le domaine y est discrétisé et les dérivées spatiales aux premier et second ordre sont calculées à partir d'approximations aux différences finies centrées d'ordre 2. Les simulations numériques sont réalisées pour une bulle de vapeur de rayon initial $R(t = 0) = 500$ nm. Le rayon interne de la particule est $R_1(t = 0) = 5$ μm et la coque est supposée très fine, $R_2(t = 0) - R_1(t = 0) = 10$ nm. Le système physique étudié correspond à un cœur de PFP liquide en équilibre avec sa phase vapeur. La coque est caractérisée par sa masse volumique $\rho_c = 1350$ kg/m³ et son module de cisaillement $G^c = 10$ MPa. Le liquide extérieur est de l'eau. Pour simplifier l'analyse des résultats, les viscosités des différents milieux sont négligées, $\eta^i = \eta^c = \eta^e = 0$. Sous l'effet d'un champ acoustique incident, la pression à l'infini est exprimée par $p_\infty = p_0 - p_a \sin(\omega t)$, où $p_0 = 1$ atm est la pression atmosphérique, p_a est l'amplitude de pression acoustique et ω est la pulsation des oscillations. À l'instant initial, le système est supposé être à température ambiante $T_\infty = 37$ °C, soit 8 °C au-dessus de la température de saturation du PFP à pression atmosphérique, $T_{\text{sat}}(p_0) = 29$ °C.

La figure 2 présente des résultats de simulation pour une amplitude de pression acoustique $p_a = 4$ atm. En l'absence de coque, la croissance de la bulle n'est pas limitée et son rayon augmente à l'infini, comme le montre la courbe noire sur la figure 2 (a). On peut notamment observer que dans ce cas, le flux de masse J à l'interface liquide/vapeur, cf. Fig. 2 (b), converge vers une valeur négative, confirmant l'établissement d'un régime d'évaporation. Le confinement par la coque limite le volume de liquide disponible pour l'évaporation et agit comme un processus de saturation sur la croissance de la bulle de vapeur. À mesure que le volume de liquide interne diminue, la croissance de la bulle est ralentie et les oscillations du flux de masse peuvent être stabilisées autour de zéro. Dans ce cas, les phases d'évaporation et de condensation s'équilibrent et le rayon de la bulle oscille autour d'une valeur finie. En revanche, lorsque le volume initial du liquide devient trop faible, il se produit alors un régime de condensation totale conduisant à un effondrement de la bulle.

4 Conclusion

Un modèle a été développé pour la description de la dynamique d'une bulle de vapeur dans un liquide confiné par une coque élastique, soumise à un champ acoustique. Sous réserve d'hypothèses propres à la taille réduite de la particule (grande longueur d'onde, régime quasi-isotherme...), les équations de conservation sont réduites à un système dynamique non-linéaire régissant le mouvement des interfaces et la température à la surface de la bulle. Le champ de température dans le liquide entourant la bulle est obtenu à partir d'une discrétisation de l'équation de la chaleur et d'approximations aux différences finies. Les simulations numériques peuvent être comparées à un modèle précédent décrivant les oscillations d'une bulle de vapeur en espace libre [1]. Elles permettent de mettre en évidence le rôle du confinement sur la

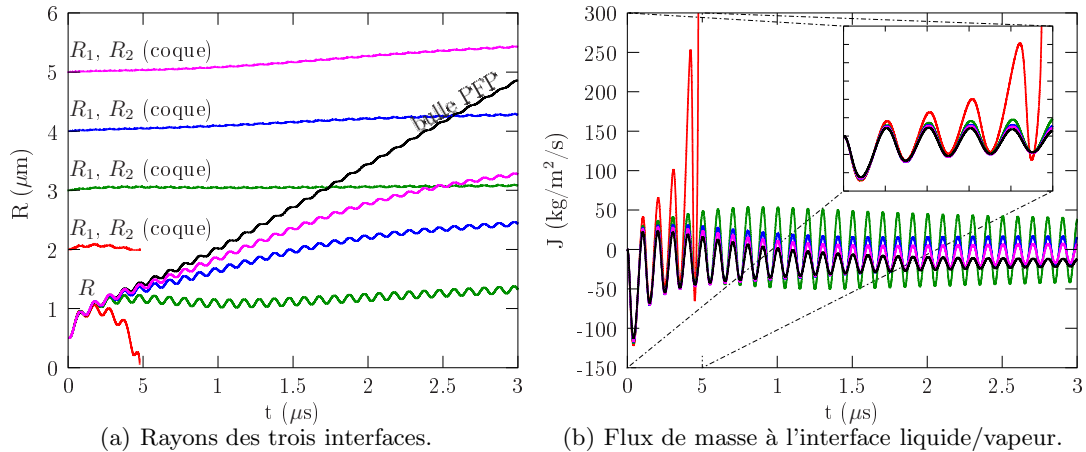


Figure 2. Dynamique de la bulle de PFP en fonction de la taille initiale de la coque : $R_1(t = 0) = 2 \mu\text{m}$ (rouge), $3 \mu\text{m}$ (vert), $4 \mu\text{m}$ (bleu) et $5 \mu\text{m}$ (magenta). Les courbes en noir présentent les résultats obtenus pour une bulle de PFP dans son liquide infini [1].

croissance de la bulle, agissant comme un processus de saturation pouvant conduire à une stabilisation des oscillations et parfois à un effondrement de la bulle en régime de condensation totale. Ces résultats doivent être confirmés, à court terme, par d'autres simulations numériques et, à moyen terme, par des mesures acoustiques en champ rétro-diffusé. Une perspective à court terme consiste également à intégrer l'effet d'un gaz non-condensable dans notre modèle, gaz dont le rôle a récemment été mis en évidence grâce à des simulations numériques [10]. Enfin, ce modèle pourra être complété par l'ajout d'autres effets comme la compressibilité et la rhéologie de la coque élastique.

Références

1. Y. HAO & A. PROSPERETTI, The dynamics of vapor bubbles in acoustic pressure fields, *Phys. Fluids*, **11**, 2008–2019 (1999).
2. C. C. CHURCH, The effects of an elastic solid surface layer on the radial pulsations of gas bubbles, *J. Acoust. Soc. Am.*, **97**, 1510–1521 (1995).
3. E. PISANI, N. TSAPIS, J. PARIS, V. NICOLAS, L. CATTEL & E. FATTAL, Polymeric nano/microcapsules of liquid perfluorocarbons for ultrasonic imaging: physical characterization, *Langmuir*, **22**, 4397–4402 (2006).
4. N. REZNIK, R. WILLIAMS & P. N. BURNS, Investigation of vaporized submicron perfluorocarbon droplets as an ultrasound contrast agent, *Ultrasound Med. Biol.*, **37**, 1271–1279 (2011).
5. B. B. GOLDBERG, J. S. RAICHLIN & F. FORSBERG, *Ultrasound contrast agents: basic principles and clinical applications* Martin Dunitz, London (2001).
6. E. STRIDE & M. EDIRISINGHE, Novel microbubble preparation technologies, *Soft Matter*, **4**, 2350–2359 (2008).
7. N. DESHPANDE, A. NEEDLES & J. K. WILLMANN, Molecular ultrasound imaging: current status and future directions, *Clin. Radiol.*, **65**, 567–581 (2010).
8. T. WANG, Effects of evaporation and diffusion on an oscillating bubble, *Phys. Fluids*, **17**, 1121–1126 (1974).
9. R. I. NIGMATULIN, N. S. KHABEEV & F. B. NAGIEV, Dynamics, heat and mass transfer of vapour-gas bubbles in a liquid, *Int. J. Heat Mass Tran.*, **24**, 1033–1044 (1981).
10. O. SHPAK, L. STRICKER, M. VERSLUIS & D. LOHSE, The role of gas in ultrasonically driven vapor bubble growth, *Phys. Med. Biol.*, **58**, 2523 (2013).

Modèle phénoménologique pour la prédiction de spectres stationnaires et instationnaires de turbulence d'ondes de plaques

Thomas Humbert^{1,2}, Christophe Josserand¹, Olivier Cadot² & Cyril Touzé²

¹ Institut D'Alembert, UMR 7190 CNRS-UPMC, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

² Unité de Mécanique (UME), ENSTA ParisTech, 828 Bd des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex, France
thomas.humbert.box@gmail.com

Résumé. La théorie de la turbulence d'ondes a pour but de décrire le comportement à long terme de systèmes faiblement non-linéaires hors équilibre. Pour les plaques minces en vibration, ce formalisme permet de prédire un spectre de Kolmogorov-Zakharov avec un flux d'énergie des échelles d'injection à celles de dissipation. Dans cette contribution, une équation phénoménologique pour le spectre d'énergie est établie depuis les solutions générales (Rayleigh-Jeans et Kolmogorov-Zakharov) de l'équation cinétique. Cette équation modèle est alors utilisée pour établir les solutions autosimilaires du système dans le cadre de la turbulence instationnaire.

Abstract. Wave turbulence theory aims at describing the long time behavior of weakly non-linear, out-of-equilibrium systems. For thin vibrating plates, the framework allows predicting a Kolmogorov-Zakharov spectrum with an energy flux from the injection to the dissipative scales. In this contribution, a phenomenological equation for the energy spectrum is established from the general solutions (Rayleigh-Jeans and Kolmogorov-Zakharov) of the kinetic equation. This model equation is then used in order to establish the self-similar solutions of the system in the case of non-stationary turbulence.

1 Introduction

La théorie de la turbulence d'ondes (ou turbulence faible) (TTO) a pour but de décrire le comportement à long terme de systèmes faiblement non-linéaires où l'énergie est échangée par les différentes échelles [1–3]. Sous des hypothèses classiques (dispersivité, existence d'une fenêtre de transparence dans laquelle la dynamique est supposée conservative) et par analogie avec la turbulence hydrodynamique [1], des spectres de Kolmogorov-Zakharov (KZ) sont prédits en plus des spectres de Rayleigh-Jeans associés à l'équipartition des quantités conservées. Le spectre de turbulence d'ondes pour les plaques élastiques en vibration a été déduit théoriquement dans [4] en utilisant le modèle de Föppl-von Kármán (FvK) pour des plaques minces à non-linéarités géométriques vibrant à amplitude modérée. Deux expériences indépendantes mises en oeuvre peu après [5, 6] n'ont pas retrouvé ces spectres prédits théoriquement et numériquement. Récemment, une étude expérimentale et numérique portant sur l'effet de l'amortissement sur les propriétés turbulentes de la dynamique des plaques minces a établi clairement que les différences entre expériences et théorie provenaient en grande partie de la dissipation [7].

En cherchant un moyen de modéliser théoriquement et dans un cadre proche des conditions expérimentales ce dernier résultat, l'idée d'utiliser un modèle de type phénoménologique est apparue assez rapidement comme intéressante, celle-ci ayant déjà été employée dans diverses applications de la TTO, fournissant un cadre propice à l'étude de dynamiques instationnaires [8, 9]. Ces modèles *ad hoc* sont construits en cherchant une équation qui admet les spectres de Rayleigh-Jeans et de Kolmogorov-Zakharov comme solutions stationnaires. Le but de cette étude est donc d'étudier un tel modèle phénoménologique dans le cas des vibrations de plaques minces élastiques.

Cette contribution se restreint au cadre conservatif et est organisée de la façon suivante : on montre tout d'abord comment établir l'équation phénoménologique. Dans un second temps, le cas d'une turbulence à injection constante est présenté et le comportement du front de cascade jusqu'à l'obtention d'un régime stationnaire est étudié. Le cas de la turbulence en déclin est finalement traité en recherchant la présence de solutions autosimilaires évoquées par [1] et observées récemment dans des simulations directes des équations de Föppl-von Kármán [10].

2 Équation modèle

L'analyse théorique considère la dynamique dans le cadre des équations de Föppl-von Kármán. Pour une plaque mince d'épaisseur h , de coefficient de Poisson ν , de densité ρ et de module d'Young E , celles-ci s'écrivent [11]

$$\rho h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 \zeta + \mathcal{L}(\chi, \zeta), \quad (1)$$

$$\Delta^2 \chi = -\frac{Eh}{2} \mathcal{L}(\zeta, \zeta), \quad (2)$$

où ζ est le déplacement transverse et χ la fonction d'Airy. L'opérateur \mathcal{L} est bilinéaire symétrique et s'exprime en coordonnées cartésiennes comme : $\mathcal{L}(f, g) = f_{xx}g_{yy} + f_{yy}g_{xx} - 2f_{xy}g_{xy}$. L'application complète de la TTO aux équations de von Kármán pour les plaques minces a été réalisée dans [4]. Les deux solutions de l'équation cinétique sont alors :

- la solution d'équilibre de Rayleigh-Jeans (RJ) où chaque mode possède la même énergie. Le spectre de puissance de la vitesse E_ω vérifie également $\partial_t E_\omega = 0$;
- la solution de Kolmogorov-Zakharov (KZ) pour laquelle un flux d'énergie ε est transféré le long de la cascade jusqu'à la pulsation de coupure ω_c où il est dissipé. D'après [4], ce spectre d'énergie s'écrit

$$E_\omega \propto \varepsilon^{\frac{1}{3}} \log^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right). \quad (3)$$

En dérivant l'équation (3) par rapport à ω , il vient que $\omega E_\omega^2 \partial_\omega E_\omega$ est égal à une constante. En dérivant une seconde fois par rapport à ω et en cherchant une équation acceptant les deux solutions mentionnées précédemment, l'équation modèle suivante peut être écrite :

$$\partial_t E_\omega = \partial_\omega (\omega E_\omega^2 \partial_\omega E_\omega). \quad (4)$$

Le flux d'énergie ε associé à cette équation est

$$\varepsilon = -\omega E_\omega^2 E'_\omega, \quad (5)$$

où E'_ω est la dérivée de E_ω par rapport à ω . Par une analyse dimensionnelle de l'équation (5), la dépendance théorique du spectre d'énergie par rapport au flux d'énergie [4] est retrouvée :

$$E_\omega \propto \varepsilon^{1/3}. \quad (6)$$

On cherche maintenant, en simulant l'équation (4), à retrouver le spectre de Kolmogorov-Zakharov dans le régime stationnaire. Pour cela, l'injection d'énergie a lieu à flux constant afin de se rapprocher du cadre expérimental d'un forçage harmonique.

3 Premier cas : injection à flux constant

3.1 Spectres instationnaires et stationnaires

Afin de simuler numériquement l'équation (4), une méthode par volumes finis est utilisée. Le flux est calculé à chaque maille et la valeur du spectre d'énergie E_ω est définie au centre de ces mêmes mailles. En procédant de la sorte, il est simple de fixer un flux ε constant au cours du temps en $\omega = 0$. Une simulation typique consiste en 2048 points dans la direction ω et plus d'un million de pas de temps.

La figure 1 montre dans ce cadre le spectre d'énergie à différents instants et suggère que la cascade avance des grandes aux petites échelles en suivant un processus autosimilaire. De plus, la pulsation caractéristique du spectre définie ici par

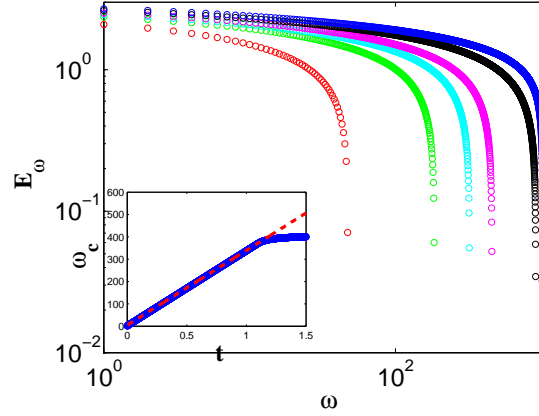


Figure 1. Spectre d'énergie E_ω en fonction de la pulsation ω pour des temps croissants de gauche à droite et un flux $\varepsilon = 1$. Figure insérée : pulsation caractéristique ω_c en fonction du temps, pointillés rouges : $\omega_c \propto t$.

$$\omega_c = \frac{\int_0^\infty E_\omega \omega d\omega}{\int_0^\infty E_\omega d\omega} \quad (7)$$

présente clairement un comportement linéaire en fonction du temps. Une très forte dissipation a été implémentée (voir équation (15)) à partir de $\omega = 10^3$ de telle sorte que lorsque le front atteint cette échelle, le système devient rapidement stationnaire et la pulsation de coupure reste constante. Cette dissipation permet de recréer le cadre théorique de la turbulence d'ondes.

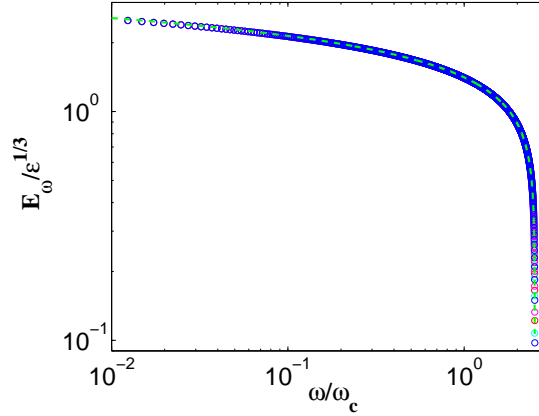


Figure 2. Spectre d'énergie E_ω divisé par $\varepsilon^{1/3}$ en fonction de la pulsation adimensionnée ω/ω_c pour des flux $\varepsilon = 0,5, 1, 2, 5$. Pointillés verts : spectre de Kolmogorov-Zakharov $E_\omega \propto \log(\frac{\omega}{\omega_c})^{1/3}$.

Comme cela peut être remarqué dans la figure 2, un accord parfait avec le spectre de Kolmogorov-Zakharov est alors observé. Cette même figure présente la mise à l'échelle classique du spectre par $\varepsilon^{1/3}$ pour des flux $\varepsilon = 0,5, 1, 2, 5$ et montre la validité de cette loi d'échelle pour nos données. Le comportement typique des spectres d'énergie des plaques en vibration dans le régime stationnaire est donc correctement décrit par l'équation phénoménologique (4).

3.2 Analyse en variables autosimilaires

Analysons désormais les solutions autosimilaires admises par l'équation phénoménologique (4) en cherchant une solution de la forme

$$E_\omega = t^\alpha g\left(\frac{\omega}{t^\beta}\right). \quad (8)$$

avec α et β deux inconnues réelles et g une fonction à déterminer. En injectant l'équation (8) dans l'équation (4), il vient que α et β doivent remplir la condition suivante :

$$2\alpha = \beta - 1. \quad (9)$$

Si l'on suppose maintenant qu'en injectant un flux constant d'énergie il en résulte que l'énergie totale du système croît linéairement avec le temps, l'égalité

$$\int_0^{+\infty} E_\omega d\omega = At \quad (10)$$

où A est une constante mène à une seconde relation $\alpha + \beta = 1$. On trouve donc $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, de telle sorte que les solutions autosimilaires doivent être nécessairement de la forme

$$E_\omega = g\left(\frac{\omega}{t}\right), \quad (11)$$

ce qui montre que les solutions autosimilaires de l'équation (4) doivent avoir une fréquence de coupure croissant linéairement avec le temps.

Afin de déterminer la forme de cette fonction g , introduisons dans l'équation (4) une variable autosimilaire notée $\zeta = \ln(\omega/t)$. La solution recherchée est alors également la solution de l'équation :

$$(h^2 h')' + e^\zeta h' = 0 \quad (12)$$

où il a été posé $h(\zeta) = g(\omega/t)$, h' dénotant désormais la dérivée de la fonction h par rapport à la variable autosimilaire ζ . L'équation (12) ne présentant pas de solutions analytiques, elle est donc vue comme une équation aux dérivées ordinaires et est résolue par une méthode de Runge-Kutta pour des conditions initiales propageant un flux similaire à celui des simulations temporelles. La figure 3 compare les deux solutions, montrant un accord certain entre elles.

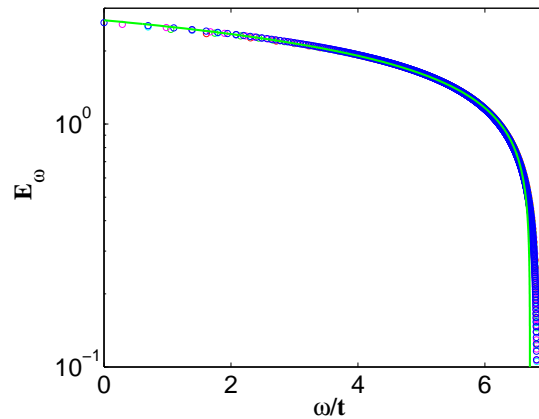


Figure 3. Symboles : Spectre d'énergie $E_\omega(\frac{\omega}{t})$ à divers instants pour $\epsilon = 1$. Ligne verte : solution de l'équation (12) pour le même flux.

La turbulence instationnaire de plaques a été étudiée numériquement dans [10] avec un schéma aux différences finies conservant exactement l'énergie de l'équation de FvK, montrant un front de cascade se propageant vers les hautes fréquences et laissant dans son sillage un spectre autosimilaire. Quand la plaque est excitée de façon continue en un point par une force harmonique, le front de la cascade évolue linéairement avec le temps. Ces comportements sont parfaitement retrouvés dans la présente étude, montrant la capacité du modèle phénoménologique à déterminer, à l'aide d'une équation simple, des caractéristiques complexes du régime turbulent.

Les auteurs de la référence [10] considèrent également le cas de la turbulence libre, observant un front de cascade évoluant en $t^{1/3}$. Cette situation est ci-dessous mise en œuvre via l'utilisation de l'équation phénoménologique.

4 Turbulence libre

4.1 Analyse en variables autosimilaires

La turbulence libre considère l'étude de la propagation d'une condition initiale en l'absence de forçage et voit alors la propagation d'un front vers les petites échelles. La quantité initiale d'énergie étant conservée, l'amplitude du spectre décroît parallèlement à la propagation du front au cours du temps. Considérons une quantité initiale d'énergie K , elle vérifie l'égalité suivante vis-à-vis de l'énergie totale du système :

$$\int_0^{+\infty} E_\omega d\omega = K. \quad (13)$$

Dans ce cas, la seconde relation sur les inconnues α et β devient $\alpha = -\beta$ de sorte que l'on trouve $\alpha = -1/3$ et $\beta = 1/3$. Les solutions autosimilaires pour le spectre d'énergie E_ω s'écrivent alors :

$$E_\omega = t^{-1/3} g\left(\frac{\omega}{t^{1/3}}\right). \quad (14)$$

4.2 Simulations temporelles

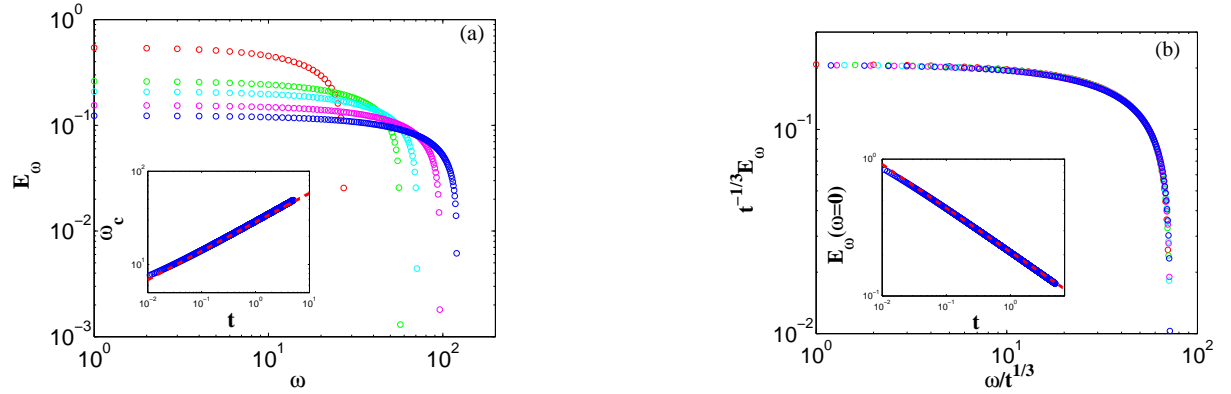


Figure 4. (a) Spectre d'énergie E_ω en fonction de la pulsation ω pour (de haut en bas) $t = 0, 1, 2, 3, 4$ s. Figure insérée : pulsation caractéristique ω_c en fonction du temps, pointillés rouges : $\omega_c \propto t^{1/3}$. (b) Fonction d'autosimilarité $g(\frac{\omega}{t^{1/3}})$ pour les mêmes données. Figure insérée : $E_\omega(\omega = 0)$ en fonction du temps, pointillés rouges : $E_\omega(0) \propto t^{-1/3}$.

Pour étudier cette situation par simulation temporelle, la dissipation aux hautes fréquences est supprimée et le forçage est arrêté après une seconde, instant servant d'origine des temps. Cette dernière condition s'applique facilement en fixant à zéro la valeur du flux en $\omega = 0$.

La figure 4 (a) montre l'évolution de la quantité initiale d'énergie (en rouge) en fonction du temps. Les deux figures insérées décrivent l'évolution de la pulsation caractéristique et de l'amplitude du spectre en $\omega = 0$ en fonction du temps, décrivant un comportement respectivement en $t^{1/3}$ et en $t^{-1/3}$. Ces deux observations de même que la mise à l'échelle finale présentée en Figure 4 (b) corroborent la dérivation en variables autosimilaires donnée par l'équation (14).

5 Conclusions et perspectives

Un modèle phénoménologique construit à partir des deux solutions de l'équation cinétique de turbulence d'ondes pour les plaques minces a été présenté et appliqué au cas de la turbulence instationnaire dans deux situations : la turbulence libre et une turbulence excitée par un flux constant d'énergie au cours du temps. En simulant numériquement l'équation phénoménologique, un comportement autosimilaire a été remarqué dans les deux cas et justifié dans un second temps par une analyse en variables autosimilaires. On notera qu'il a été vérifié que ces solutions sont également des solutions de l'équation cinétique.

Ces deux exemples montrent la capacité de notre modèle à capturer des éléments fondamentaux de la dynamique des plaques minces élastiques et une comparaison avec des simulations instationnaires directes de l'équation de FvK présentées dans [11] nous permettront de valider définitivement le travail présenté ici. La perspective la plus intéressante vient cependant de la possibilité d'introduire directement un terme d'amortissement dans l'équation (4) en écrivant

$$\partial_t E_\omega = \partial_\omega (\omega E_\omega^2 E'_\omega) - \gamma_\omega E_\omega \quad (15)$$

où γ_ω peut être une loi d'amortissement quelconque. En utilisant les données expérimentales de [7] montrant l'influence de la dissipation sur la forme de la cascade d'énergie, la capacité du modèle à capturer la dynamique non conservative du système sera évaluée. Cela permettrait alors de posséder un modèle hérité de la turbulence d'ondes mais plus simple d'utilisation et autorisant une comparaison adéquate avec la situation expérimentale.

Références

1. V. E. ZAKHAROV, V. S. LVOV & G. FALKOVITSCH, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence*, Springer (1992).
2. A. NEWELL & R. BENNO, Wave turbulence, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **43**, 59–78 (2011).
3. S. NAZARENKO, *Wave turbulence*, Springer (2011).
4. G. DÜRING, C. JOSSERAND & S. RICA, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 025503 (2006).
5. N. MORDANT, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 234505 (2008).
6. A. BOUDAUD, O. CADOT, B. ODILLE & C. TOUZÉ, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 234504 (2008).
7. T. HUMBERT, O. CADOT, G. DÜRING, C. JOSSERAND, S. RICA & C. TOUZÉ, *Europhys. Lett.*, **102**, 30002 (2013).
8. G. FALKOVITCH & A. SHAFARENKO, *J. Nonlinear Sci.*, **1**, 457 (1991).
9. C. CONNAUGHTON, A. NEWELL & Y. POMEAU, *Physica D*, **184**, 64 (2003).
10. M. DUCCESCHI, O. CADOT, C. TOUZÉ & S. BILBAO, submitted to *Physica D* (2013).
11. L. D. LANDAU & E. M. LIFSHITZ, *Theory of Elasticity*, Pergamon Press, New York (1959).

Impact sur des suspensions granulaires denses : rôle clef du couplage entre dilatance de Reynolds et pression de pore

J. John Soundar Jerome^{1,2} & Yoël Forterre²

¹ Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre, CNRS UMR-7342, Aix-Marseille Université, Marseille

² Institut Universitaires des Systèmes Thermiques et Industriels, CNRS UMR-7343, Aix-Marseille Université, Marseille

joseph@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. Nous étudions l'impact d'une sphère rigide sur une suspension granulaire dense composée de billes macroscopiques plongées dans un fluide visqueux. Deux comportements très différents sont observés selon la fraction volumique initiale de l'empilement. Pour un empilement initialement lâche ($\phi < \phi_c$), la sphère coule dans la suspension comme dans un liquide, donnant lieu à une cavité qui collapse en formant un jet de suspension. À l'inverse, pour un empilement initialement dense ($\phi > \phi_c$), la sphère est stoppée dès qu'elle touche la suspension, comme si elle heurtait un solide. En mesurant la pression du liquide interstitiel entre les grains (pression de pore), nous montrons que cette transition entre un comportement « liquide » et « solide » provient du couplage entre la dilatance du milieu lors de l'impact (dilatance de Reynolds) et la pression de pore. Un modèle diphasique couplant dilatance de Reynolds et loi de Darcy permet de modéliser ce mécanisme et prédit des lois d'échelle en accord avec les mesures expérimentales. Ces résultats montrent que des effets de type rhéo-épaississants dans les suspensions denses peuvent provenir d'un couplage transitoire entre les grains et le fluide suspendant et non de la rhéologie intrinsèque du milieu.

Abstract. We investigate the impact of a freely-falling rigid sphere onto a dense granular suspension made of non-buoyant glass beads mixed in a viscous liquid. Two very different behaviors are observed depending on the initial packing fraction of the suspension. For loose packing ($\phi < \phi_c$), the ball sinks in the suspension as in a liquid, giving rise to a collapsing cavity and a central jet as observed with fine powders in air. By contrast, for dense packing ($\phi > \phi_c$), the ball stops as soon as it hits the surface. By measuring the pressure of the interstitial liquid between the grains (pore pressure), we show that this liquid-solid transition comes from the coupling between the dilatancy of the medium (Reynolds dilatancy) and the pore pressure during the impact. A two-phase model incorporating Reynolds dilatancy and Darcy law supports this mechanism and predicts scaling laws in agreement with the experimental observations. These results show that shear-thickening-like phenomena in dense suspensions can arise from transient grain-fluid coupling rather than from the intrinsic rheology of the material.

1 Introduction

L'impact d'un objet solide sur un milieu granulaire a fait l'objet de nombreuses études ces dix dernières années, motivées par la question de la rhéologie de ce matériau intermédiaire entre solide-liquide et par les applications en astrophysique et balistique [1]. Une phénoménologie très riche est observée selon les situations. Dans les milieux granulaires secs, l'impact donne naissance à une couronne d'éjecta et à la formation d'un cratère permanent [2–5]. Dans les poudres fines dans l'air, il s'accompagne de la formation d'une cavité et d'un jet de grande hauteur [6–9]. Ces études ont mis en évidence l'importance de la compressibilité de l'air ou de la fraction volumique initiale de l'empilement [10]. Cependant, la question des mécanismes physiques responsables de ces comportements et des paramètres qui contrôlent leur transition n'est pas encore bien élucidée. Récemment, des études d'impact sur des suspensions rhéo-épaississantes (maïzena) ont encore enrichi la gamme des observations. Dans ce cas, l'impact peut s'accompagner d'une solidification transitoire du milieu, voire de la formation de fracture [11, 12]. Une question ouverte est dans quelle mesure ces observations sont liées au caractère rhéo-épaississant du milieu ou génériques pour les suspensions denses.

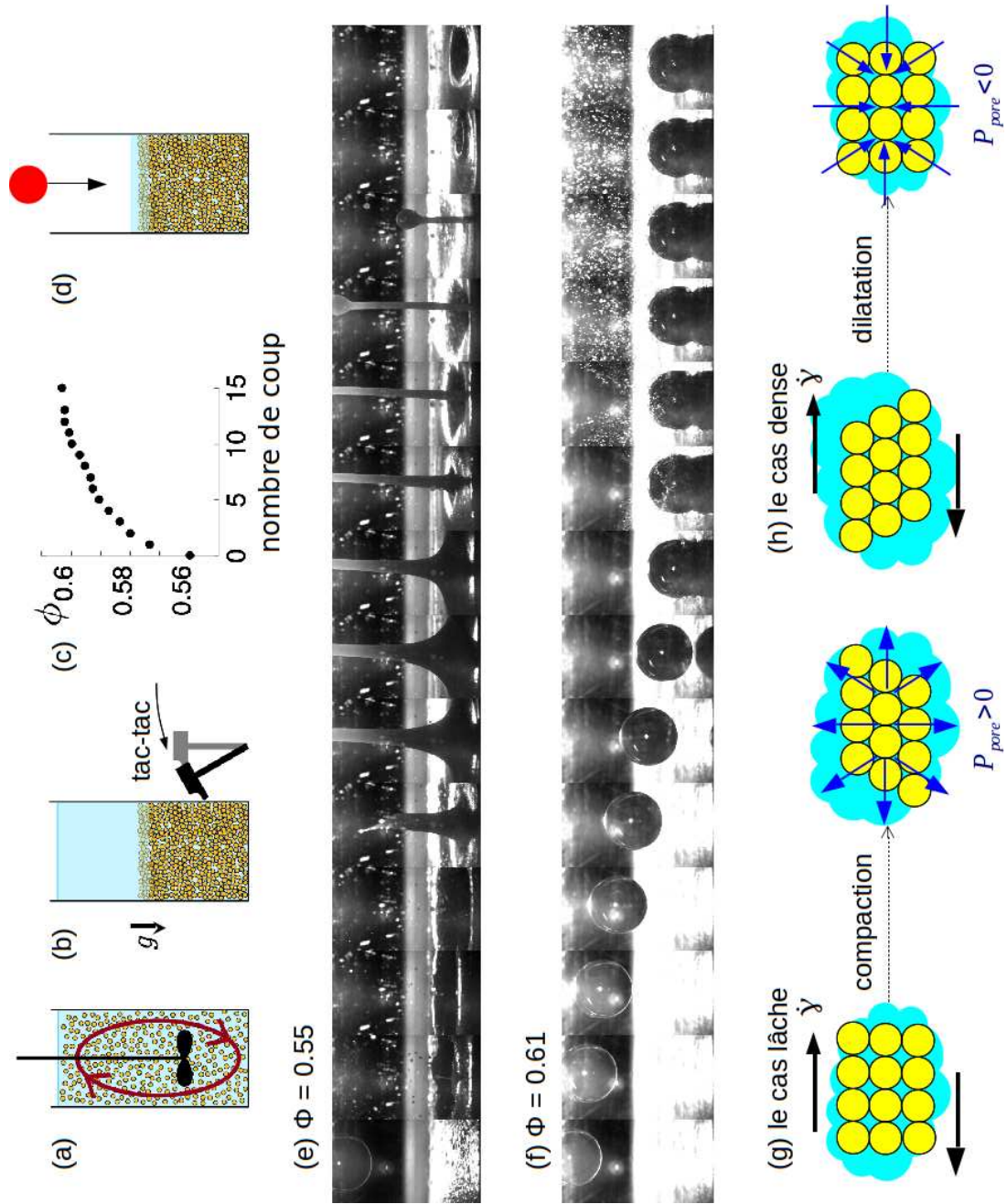


Figure 1. (a)–(d) Préparation de la suspension granulaire permettant le contrôle de sa fraction volumique initiale. (e, f) Séquence dynamique de l’impact d’une sphère de diamètre $D = 2,5$ cm et de vitesse initiale $V_0 = 3$ m/s sur une suspension initialement (e) lâche $\phi_0 = 0,55$ ou (f) dense $\phi_0 = 0,61$. (g, h) Illustration du couplage entre dilataance de Reynolds et pression de pore dans une suspension granulaire cisaillée.

Pour clarifier ces différentes questions, nous avons choisi d'étudier l'impact d'un objet rigide dans une suspension granulaire modèle, composée de particules sphériques non-Browniennes plongées dans un liquide visqueux. La rhéologie de ce système est connue [13] et les seuls paramètres sont la taille des grains, la viscosité du liquide interstitiel et la fraction volumique initiale de l'empilement. Est-il possible, avec ce système simple, d'unifier la grande variété de phénomènes observés lorsqu'un objet solide entre en collision avec un milieu granulaire ou une suspension complexe ?

2 Expérience

Pour préparer la suspension granulaire, nous procédons comme suit. Un ensemble de billes de verre monodisperses (densité $\rho_p = 2500 \text{ kg/m}^3$, diamètre $d = 50 \text{ }\mu\text{m}$ – 1mm) est plongé dans une cuve ($10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$) contenant un liquide de viscosité η (eau, huile silicone). Les particules sont ensuite mises en suspension avec un agitateur jusqu'à obtenir un mélange homogène et diluée (Figure 1 (a)). L'agitateur est alors brutalement retiré et les particules sédimentent au fond de la cuve sous leur propre poids. L'empilement alors obtenu est lâche et correspond à une fraction volumique $\phi \approx 0,55$. Pour obtenir des fractions volumiques initiales ϕ_0 plus élevées, le milieu est compacté en tapant sur la cuve de façon contrôlée (Figure 1 (c)). L'excès de liquide est ensuite retirée de la cuve, en gardant une mince couche de liquide au-dessus des grains afin que ceux-ci restent toujours immergés et qu'il n'y ait pas d'effets de tension de surface dans le problème. On peut alors réaliser l'expérience d'impact, en envoyant sous son propre poids une sphère rigide (diamètre $D = 2,5 \text{ cm}$, densité $\rho_s = 2500 \text{ kg/m}^3$) sur la suspension avec une vitesse $V_0 = \sqrt{2gh}$, où h est la hauteur de lâcher (Figure 1 (d)).

Les figures 1 (d) et 1 (f) présentent la dynamique d'impact observée avec une caméra rapide (3000–40000 images/s) dans le cas d'un empilement initialement lâche ($\phi = 0,55$, Fig. 1 (d)) ou dense ($\phi = 0,61$, Fig. 1 (f)). Dans le cas lâche, nous observons que la sphère s'enfonce complètement dans la suspension comme dans un liquide, sans être freinée. Il se forme une cavité qui, lorsqu'elle se referme, produit un jet vertical similaire à celui observé lors de l'impact dans les poudres fines [6, 10]. Le comportement est entièrement différent dans le cas dense. Dans ce cas, la sphère est stoppée immédiatement dès qu'elle touche la suspension, comme si elle heurtait un solide. Ce comportement rappelle la rigidification induite par impact observée dans les suspensions rhéo-épaississantes de maïzena [11].

Comment expliquer cette transition violente entre un comportement « liquide » et « solide » alors que la fraction volumique de l'empilement ne varie que de quelques pourcents ? Une propriété importante des milieux granulaires est la dilatance de Reynolds [14]. Pour se déformer, un milieu granulaire doit se dilater si sa fraction volumique est au-dessus d'une fraction critique ϕ_c et, à l'inverse, se compacter si sa fraction volumique est plus faible que ϕ_c . Lorsque la bille entre en collision avec un empilement lâche ($\phi < \phi_c$), le milieu granulaire se compacte donc (Figure 1 (g)). Mais les grains étant immergés, cette compaction implique un écoulement de liquide vers l'extérieur de l'empilement, et donc la création d'une pression de pore positive dans le liquide. Cette pression de pore peut contrebalancer le poids des grains et supprimer les contacts granulaires : le milieu se comporte alors comme un liquide. À l'inverse, si l'empilement est initialement dense, l'impact de la bille entraîne une dilatation du milieu granulaire et donc un écoulement vers l'intérieur de l'empilement. Il se crée alors une pression de pore négative, qui augmente la pression granulaire entre les grains et donc augmente la rigidité du milieu (Figure 1 (g)).

Pour valider ce mécanisme, nous avons effectué des mesures dynamiques de pression de pore durant l'impact. Un micro-tube métallique de diamètre 3 mm muni d'une fine grille à son extrémité est placé dans la suspension sous l'impact et connecté à l'autre bout à une chambre étanche contenant un hydrophone calibré (Figure 2 (a)). Les figures 2 (b) et 2 (c) présentent les mesures de pression de pore dans le cas lâche (b) et dense (c). On constate que la pression de pore induite par l'impact est bien positive dans le cas lâche et négative dans le cas dense. L'ordre de grandeur de la pression de pore (10 kPa) est suffisant pour, soit mettre en suspension l'ensemble de l'empilement ($\Delta\rho gH \sim 1,5 \text{ kPa}$ avec $H \sim 10 \text{ cm}$ et $\Delta\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$), soit plaquer les grains entre eux et rigidifier le milieu (l'inertie de la bille due à l'impact est $\rho_s V^2 \sim 10 \text{ kPa}$). Ces mesures suggèrent que c'est bien la pression de pore (et son changement de signe selon la fraction initiale du milieu) qui est responsable du comportement « liquide » ou « solide » de la suspension lors de l'impact.

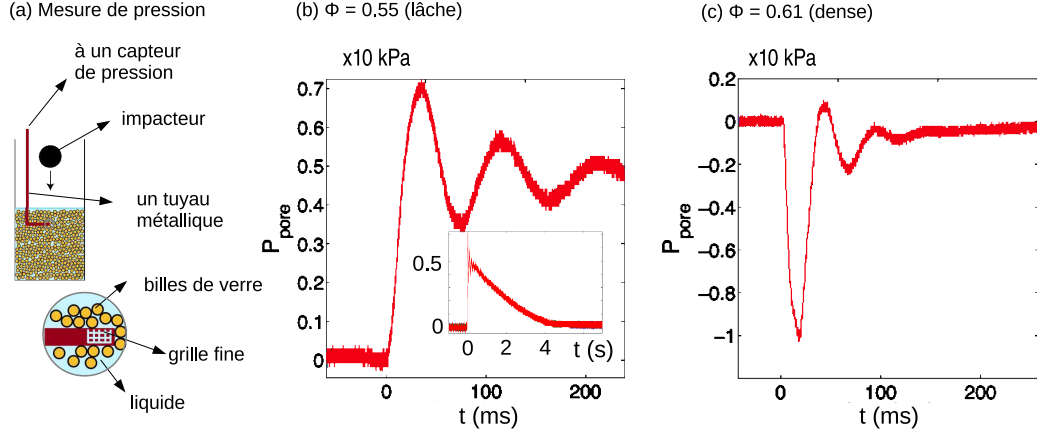


Figure 2. (a) Schéma du dispositif de mesure de la pression de pore lors de l'impact. (b, c) Évolution temporelle de la pression de pore dans le cas (b) lâche et (c) dense.

3 Modélisation

Afin de modéliser le mécanisme précédent et prédire la dynamique d'impact, nous devons coupler le phénomène de dilatance de Reynolds dans les milieux granulaires avec l'écoulement d'un fluide visqueux dans un milieu poreux. Le modèle le plus simple reliant l'évolution de la fraction volumique et la déformation lors de la mise en mouvement d'un milieu granulaire est donnée par la relation cinématique suivante [15, 16] :

$$\frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dt} = -|\dot{\gamma}| \tan \psi = -\mathcal{A} |\dot{\gamma}| (\phi - \phi_c), \quad (1)$$

où $\dot{\gamma}$ est le taux de cisaillement et ψ est l'angle de dilatance [14] supposé proportionnel à l'écart $\Delta\phi = \phi - \phi_c$ (\mathcal{A} est une constante numérique d'ordre unité). La loi de dilatance (1) indique qu'un milieu granulaire initialement lâche ($\phi < \phi_c$) se compacte lorsqu'il est cisailé (la fraction volumique augmente), tandis qu'il se dilate si le milieu est initialement dense ($\phi > \phi_c$).

Pour décrire l'écoulement dans le milieu poreux en réaction à la déformation de la matrice granulaire, nous écrivons la loi de Darcy comme [17] :

$$\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_g = -\frac{\kappa}{\eta_f(1-\phi)} \nabla P_{\text{pore}}, \quad (2)$$

où \mathbf{V}_f et \mathbf{V}_g représentent les champs de vitesse du fluide et des grains, P_{pore} est la pression de pore, $\kappa \propto d^2$ est la perméabilité de la matrice granulaire et η_f est la viscosité du fluide. En combinant la loi de Darcy (2) avec les équations de la conservation de masse pour la phase granulaire et la phase fluide [16], et en utilisant la loi de dilatance (1), nous obtenons :

$$\nabla^2 P_{\text{pore}} = \frac{\eta_f}{\kappa} \mathcal{A} |\dot{\gamma}| (\phi - \phi_c) \quad \text{soit} \quad P_{\text{pore}} \sim -\frac{\eta_f}{\kappa} \mathcal{A} (\phi - \phi_c) VL, \quad (3)$$

où V est la vitesse typique des grains et L est l'extension spatiale typique du champ de déformation de l'empilement autour de la sphère impactante. L'équation (3) couple la dilatance de Reynolds et la loi de Darcy. Le terme de gauche lié au cisaillement du milieu granulaire joue le rôle de terme source pour la pression de pore. Il change de signe selon que le milieu est initialement lâche ou dense.

Maintenant que nous avons une expression pour la pression de pore en fonction de la vitesse d'impact, nous pouvons estimer la dynamique d'impact en écrivant le principe fondamental de la dynamique pour la sphère :

$$\rho_s \frac{4}{3} \pi (D/2)^3 \frac{d^2 \delta}{dt^2} = -\pi a^2 \sigma, \quad (4)$$

où δ est l'enfoncement, $a = \delta D$ est le rayon de la zone de contact et σ est la contrainte verticale que la suspension applique sur la sphère (Figure 3) (nous négligeons ici le poids de la sphère car nous nous plaçons à grand nombre de Froude). Nous nous intéressons par la suite au cas dense ($\Delta\phi > 0$). La contrainte totale σ exercée par la suspension est essentiellement donnée par la contrainte granulaire liée au contact entre grains. Elle vérifie donc une loi de friction, $\sigma = -\mu P_g$, où P_g est la pression sur les grains. Pour des grandes valeurs de pression de pore $P_g \sim -P_{\text{pore}}$. En utilisant l'expression (3) de la pression de pore et en supposant $L \sim a$, on trouve finalement :

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = -\lambda(\phi - \phi_c)\delta^{3/2}\frac{d\delta}{dt}, \quad (5)$$

où $\lambda \sim \eta_f/\rho_s\kappa D^{3/2}$.

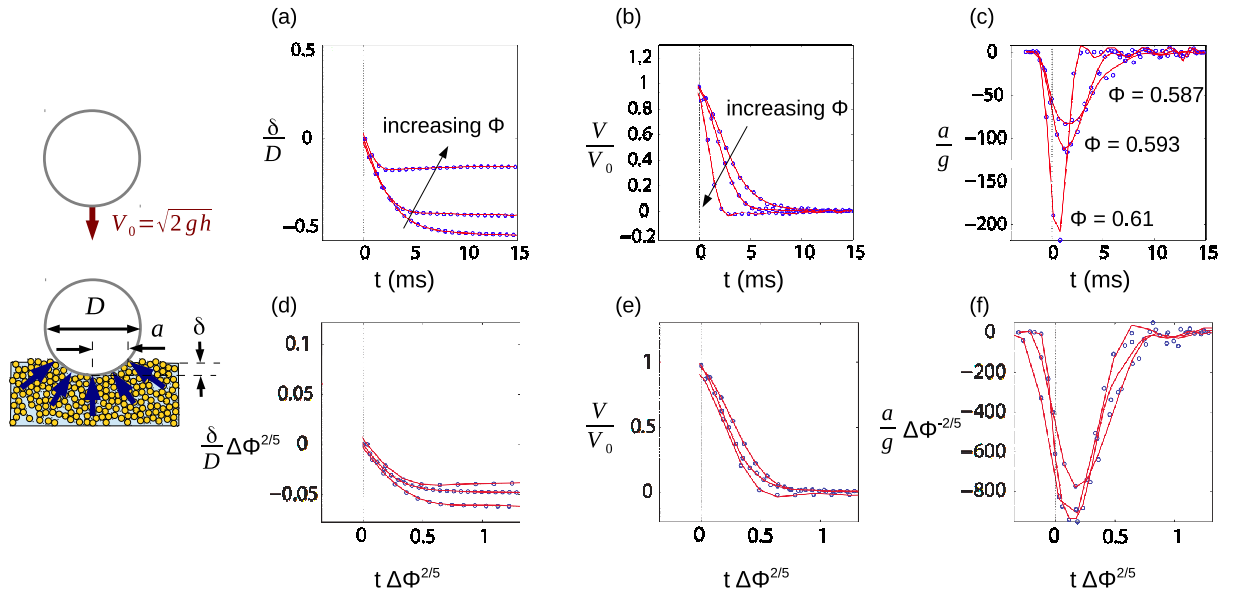


Figure 3. (haut) Variation temporelle de (a) l'enfoncement δ/D (b) la vitesse V/V_0 et (c) l'accélération a/g de l'impacteur en fonction de la fraction volumique initiale, $\phi = 0,587, 0,593$ et $0,61$. (bas) Les mêmes variables normalisées par rapport à $\Delta\phi$ comme indiqué par le modèle diphasique.

Les figures 3 (a–c) présentent des mesures expérimentales de la dynamique de pénétration de la sphère pour 3 valeurs de fraction volumique initiale au-dessus de ϕ_c . On constate que la décélération augmente fortement avec $\Delta\phi$, pour atteindre $200 g$ pour le milieu le plus compact. Notre modèle (5) prédit cette dynamique et permet de rassembler les courbes expérimentales en donnant les lois d'échelle pour le temps d'arrêt et l'enfoncement maximale en fonction des paramètres du problème (Figures 3 (d–f)).

4 Conclusion

Nous avons étudié l'impact d'une sphère rigide sur une suspension dense de billes de verre dans un fluide visqueux. Deux comportements très différents sont observés selon la fraction volumique initiale de l'empilement : (i) pour un empilement initialement lâche, la sphère coule dans la suspension comme dans un liquide et l'on observe la formation d'un jet analogue à celui observé dans les poudres dans l'air ; (ii) pour un empilement initialement dense, la sphère est stoppée dès qu'elle touche la suspension comme si elle heurtait un solide. En mesurant la pression du liquide interstitiel entre les grains lors de l'impact (*pression de pore*), nous avons montré que cette transition entre un comportement « liquide » et

« solide » provient du couplage entre la dilatance du milieu (dilatance de Reynolds) et la pression de pore, lors de l'impact. Un milieu dense se dilate quand il se déforme, ce qui génère une pression de pore négative qui rigidifie transitoirement le squelette granulaire. À l'inverse, un milieu lâche se contracte en se déformant, ce qui génère une pression de pore positive qui supprime les contacts entre grains et liquéfie le milieu. Un modèle diphasique couplant la dilatance de Reynolds et la loi de Darcy permet de modéliser ce mécanisme et prédit des lois d'échelle pour la pression de pore et la pénétration de l'objet dans le milieu en accord avec les mesures expérimentales. Ces résultats montrent que des effets de type rhéo-épaississant peuvent apparaître transitoirement dans les suspensions granulaires en raison de couplage solide/fluide, et non de la rhéologie intrinsèque du milieu [18].

Références

1. J. C. RUIZ-SUÀREZ, Penetration of projectiles into granular targets, *Rep. Prog. Phys.*, **76**, 066601 (2013).
2. A. M. WALSH, K. E. HOLLOWAY, P. HABDAS & J. R. DE BRUYN, Morphology and scaling of impact craters in granular media, *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 104301 (2003).
3. S. YAMAMOTO, K. WADA, N. OKABE & T. MATSUI, Transient crater growth in granular targets: An experimental study of low velocity impacts into glass sphere targets, *Icarus*, **183**, 215–224 (2006).
4. S. DEBEUF, P. GONDRET & M. RABAUD, Dynamics of grain ejection by sphere impact on a granular bed, *Phys. Rev. E*, **79**, 041306 (2009).
5. J. MARSTON, E. LI & S. THORODDSEN, Evolution of fluid-like granular ejecta generated by sphere impact, *J. Fluid Mech.*, **704**, 5 (2012).
6. S. THORODDSEN & A. Q. SHEN, Granular jets, *Phys. Fluids*, **13**, 4 (2001).
7. D. LOHSE, R. RAUHÉ, R. BERGMANN & D. VAN DER MEER, Granular physics: creating a dry variety of quicksand, *Nature*, **432**, 689–690 (2004).
8. J. R. ROYER, E. I. CORWIN, A. FLIOR, M.-L. CORDERO, M. L. RIVERS, P. J. ENG & H. M. JAEGER, Formation of granular jets observed by high-speed X-ray radiography, *Nature Phys.*, **1**, 164–167 (2005).
9. G. CABALLERO, R. BERGMANN, D. VAN DER MEER, A. PROSPERETTI & D. LOHSE, Role of air in granular jet formation, *Physical review letters*, **99**, 018001 (2007).
10. J. R. ROYER, B. CONYERS, E. I. CORWIN, P. J. ENG & H. M. JAEGER, The role of interstitial gas in determining the impact response of granular beds, *Europhys. Lett.*, **93**, 28008 (2011).
11. S. R. WAITUKAITIS & H. JAEGER, Impact-activated solidification of dense suspensions via dynamic jamming fronts, *Nature*, **487**, 205–209 (2012).
12. M. ROCHÉ, E. MYFTIU, M. C. JOHNSTON, P. KIM & H. A. STONE, Dynamic fracture of nonglassy suspensions, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 148304 (2013).
13. F. BOYER, E. GUAZZELLI & O. POULIQUEN, Unifying suspension and granular rheology, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 188301 (2011).
14. O. REYNOLDS, On the dilatancy of media composed of rigid particles, with experimental illustrations, *Phil. Mag.*, **20**, 469–481 (1885).
15. S. ROUX & F. RADJAI, Texture-dependent rigid-plastic behavior, in *Physics of dry granular media*, pp. 229–236, Springer (1998).
16. B. ANDRÉOTTI, Y. FORTERRE & O. POULIQUEN, *Les Milieux granulaires : entre fluide et solide*, EDP Sciences (2011).
17. H. DARCY, *Les Fontaines publiques de la ville de Dijon*, V. Dalmont, Paris (1856).
18. Y. FORTERRE, J. JOHN SOUNDAR JEROME & N. VANDENBERGHE, Impact in dense granular suspensions: crucial role of dilatancy and pore pressure feedback, *Bull. Am. Phys. Soc.*, **58** (2013).

Heat transfer by Görtler vortices developed on a wall with finite conductivity

Lyes Kahouadji¹, Harunori Yoshikawa², Jorge Peixinho¹ & Innocent Mutabazi¹

¹ Laboratoire Ondes et Milieux Complexes, CNRS & Université du Havre, 76600 Le Havre, France

² Laboratoire J. A. Dieudonné, CNRS & Université Sophia Antipolis, 06100 Nice, France

lyes.kahouadji@univ-lehavre.fr

Résumé. Les tourbillons de Görtler apparaissent lors d'un écoulement de couche limite au-dessus d'une plaque concave et sont le résultat d'une instabilité centrifuge. Ils ont une influence importante sur le transfert thermique. Le but de cette étude est de modéliser l'augmentation de transfert de chaleur due à ces tourbillons, à l'aide d'une analyse faiblement non-linéaire. Des simulations de l'écoulement de base couplées avec des perturbations spatiales, du premier et du second ordre, produisent cette augmentation du transfert thermique à la paroi en fonction (i) du nombre de Prandtl, (ii) de l'épaisseur adimensionnelle de la paroi et (iii) du rapport de conductivité thermique entre la paroi et le fluide.

Abstract. Görtler vortices are streamline vortices that appear in a flow over a concave wall as a result of centrifugal instability. They have a strong influence on the heat transfer. The purpose of this study is to model the heat transfer enhancement by those vortices using a weakly nonlinear analysis. Computations of basic state coupled with spatial first and second order perturbations provide this heat transfer enhancement at the fluid-wall interface, as a function of the Prandtl number, the dimensionless wall thickness and the thermal conductivity ratio between the wall and the fluid.

1 Introduction

Flows over concave surfaces appear in many applications, *e.g.* air flow over airfoils or turbine blades, water flow in hydroelectric dams, or oil flow in curved pipelines. Most of the time, the fluid flow and the wall are at different temperatures. Consequently, it is useful to model this heat transfer.

The isothermal flow over curved wall has been investigated since 1942 by Görtler [4]. The boundary layer over a concave wall experiences a centrifugal instability resulting in counter-rotating streamwise vortices. Görtler proposed a criterion taking into account the centrifugal force for points of inflection in order to predict the instability. Later, several experiments confirmed the existence of these centrifugal vortices [8, 10].

From a theoretical and numerical point of view, many ideas were discussed using parallel and non-parallel assumptions [1–3] that lead to stability diagrams in the form of Görtler versus wave numbers. Following the linear theory of Floryan and Saric [2] in order to get the critical parameters of streamwise vortices, we extend it taking into account heat transfer and finite wall thickness.

Several experiments found a significant heat transfer enhancement in the presence of these vortices. Liu and Lee [5] and Smith and Haj-Hariri [9] proposed that oscillatory components set up some sort of pressure gradient which changes the mean temperature and velocity profiles, producing an overall increase in heat transfer. They demonstrated that streamwise vortices enhance the heat transfer at the wall as a result of weakly nonlinear analysis of the problem. Here we extend the analysis taking into account the heat conduction in the wall and the effect of the Prandtl number.

2 Problem Formulation

A global illustration of this study is shown in Figure 1. The energy equation is dissociated from the momentum and the continuity equations, by neglecting the buoyancy force, so no natural convection occurs in this study. The heat transfer is involved using a thermal conduction equation inside the thick

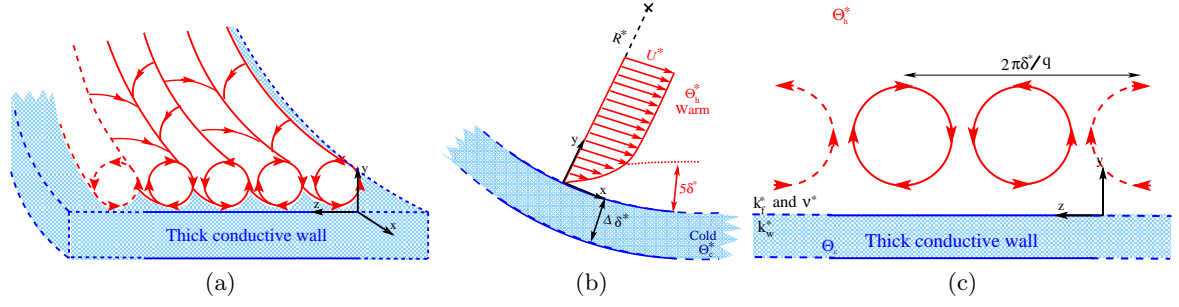


Figure 1. (a) Görtler vortices above a thick conductive concave wall. (b) Side view of the base flow. (c) Cross-section view of the co-rotating vortices.

conductive wall and a thermal advection-diffusion transfer in the fluid motion. The flow characteristics are considered as being a superposition of basic state, the classical Blasius boundary layer flow (see Figure 1 (b)), with a perturbed flow that leads to periodic co-rotating Görtler vortices [4] (see Figure 1 (c)). The Blasius boundary layer for the base state is justified by the fact that the flow develops over and along of a concave surface with a large constant radius of curvature, R^* , in its streamwise direction. The fluid is assumed to be incompressible and Newtonian with uniform density ρ^* and kinematic viscosity ν^* . Here the asterisk $*$ indicates dimensional variables. Referring to Bottaro and Luchini [1], the equations of the flow motion are first of all expressed in the cylindrical representation of Navier-Stokes equations (r^*, θ^*, z^*) and then recasting them in a cartesian-like coordinates by the introduction of (x^*, y^*, z^*) , where $x^* = R^* \theta^*$, $y^* = R^* - r^*$ and $z^* = -z^*$, which are the streamwise, the wall-normal and the spanwise coordinates, respectively. The sign changing for z^* is such that the new coordinate system remains right handed and also been absorbed by the suitable redefinition of the velocities in this new coordinate system: $\mathbf{u}^* = (u^*, v^*, w^*)$. The equations of motion are taken as dimensionless using L^* as a typical characteristic length along the streamwise direction so that $x^* = L^* x$ and $\delta^* = \sqrt{\nu^* L^* / U_\infty^*}$ as the characteristic length for the wall-normal and spanwise directions $y^* = \delta^* y$ and $z^* = \delta^* z$. Moreover, U_∞^* is chosen to be the typical value for the free stream velocity and $U_\infty^* \delta^* / L^*$ as the typical velocity scale for both spanwise and vertical velocities. The stationary equations of motion using the dimensionless velocity $\mathbf{u} = (u, v, w)$ and pressure p are then:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla v + G^2 u^2 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla w = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{cases} \quad (1)$$

where $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^t$ denotes the gradient vectorial operator. G refers to the Görtler number, which is defined as $G = \text{Re} \sqrt{\delta^* / R^*}$. Here, $\text{Re} = U_\infty^* \delta^* / \nu^*$ denotes the Reynolds number. In order to complete the system of equations (1), the velocity is required to satisfy the impermeability condition on the wall ($u = v = w = 0$ at $y = 0$) and asymptote to its free stream far above the wall ($u = 1$ and $v = w = 0$ at $y \rightarrow \infty$).

The main objective of this paper is the heat transfer modeling at the fluid-wall interface taking into account the discontinuity of the thermal conductivity between the fluid (k_f^*) and the thick wall (k_w^*). Here, the heat transfer from a warm flow over a cold thick wall is considered. Hence a heat convection-diffusion equation is applied for the fluid and a heat conduction equation is applied for the thick wall. The temperature is nondimensionalized using $\Theta(y) = (\Theta^* - \Theta_c^*) / (\Theta_h^* - \Theta_c^*)$ where Θ is the dimensionless temperature, Θ_c^* is the cold temperature and Θ_h^* is the hot temperature as shown in Figure

1. The governing equations for the temperature are:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) & y > 0 \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0 & -\Delta < y < 0 \end{cases} \quad (2)$$

where Pr denotes the Prandtl number defined as ν^*/α^* with $\alpha = c_p^* k_f^*/\rho^*$, where α^* , k_f^* and c_p^* are the thermal diffusivity, thermal conductivity and heat capacity at constant pressure respectively. Δ refers to the dimensionless thickness of the wall scaled by δ^* . Boundary conditions lead to $\Theta = 0$ at $y = -\Delta$ and $\Theta = 1$ when $y \rightarrow \infty$. Moreover, the temperature and the heat flux are continuous at the wall-fluid interface: $y = 0$ leading to $(\partial\Theta/\partial y)_{y=0^+} = K(\partial\Theta/\partial y)_{y=0^-}$ where $K = k_w^*/k_f^*$ denotes the thermal conductivity ratio between the wall and the fluid.

3 Results

The above equations (1) and (2) with the respective boundary conditions are solved using a perturbation approach wherein the flow field is decomposed into a basic state and a disturbance field in the form of Görtler vortices (streamwise, counter-rotating vortices). This perturbation approach was used by Floryan and Saric [2, 3] and also by Smith and Haj-Hariri [9]. All the physical quantities \mathbf{u} , p and Θ are expanded in a perturbation series using a term of a small amplitude parameter, ϵ , with a following decomposition:

$$\phi = \bar{\phi}(x, y) + \epsilon \phi_1(x, y, z) + \epsilon^2 [\phi_{22}(x, y, z) + \phi_{20}(x, y)] + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (3)$$

where

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, z) &= \hat{\phi}_1(y) \exp(\beta x + iqz) + cc, \\ \phi_{22}(x, y, z) &= \hat{\phi}_{22}(y) \exp(2\beta x + 2iqz) + cc, \\ \phi_{20}(x, y, z) &= \hat{\phi}_{20}(y) \exp(2\beta x) + cc, \end{aligned}$$

and cc are complex conjugates.

3.1 Base flow

The basic state $\bar{\phi}(x, y) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}, \bar{\Theta})$ is assumed to be independent of the spanwise direction z . Incorporating $\bar{\phi}(x, y)$ in (1) and (2) leads to the *Blasius* boundary layer profile. The basic flow remains also independent of the position x . However, the temperature profile of both the wall and the fluid depends on the three control parameters K , Δ and Pr. The variation with Pr involves variations of temperature further in the fluid than in the wall. However, the variation of the wall thickness Δ will involve variations of temperature more in the wall comparing to the fluid. Finally, the variation of K involves temperature variations in both the wall and the fluid. Figure 2 (a) shows the streamwise velocity \bar{u} represented by circles dots for fixed values of $(\text{Pr}, \Delta) = (0.72, 2)$. The increasing of K , which makes the wall more conductive comparing to the fluid, decreases the temperature at the fluid-wall interface. Moreover, for the three values of $K = 0.1, 1$ and 10 , the temperature $\bar{\Theta}(K)$ in both fluid and solid are very distinct. When $K \rightarrow \infty$, the profile for $\bar{\Theta}$ superposes the Blasius velocity profile \bar{u} .

Figure 2 (b) focuses on the heat transfer at the fluid-wall interface \bar{Q}_0 for several values of K , Δ and two values of Pr. It appears, through the figure 2 (b), that situations of maximum energy transfer correspond to small values of Δ , and situations of minimum heat transfer correspond to very large values of Δ . The maximum values of the heat transfer \bar{Q}_0 seem to depend only on the Prandtl number. $\bar{Q}_{0\text{max}}$ is observed for very small value of Δ and very large value of K can be expressed analytically by:

$$\bar{Q}_{0\text{max}} \simeq f(0)'' \times \text{Pr}^{1/3}.$$

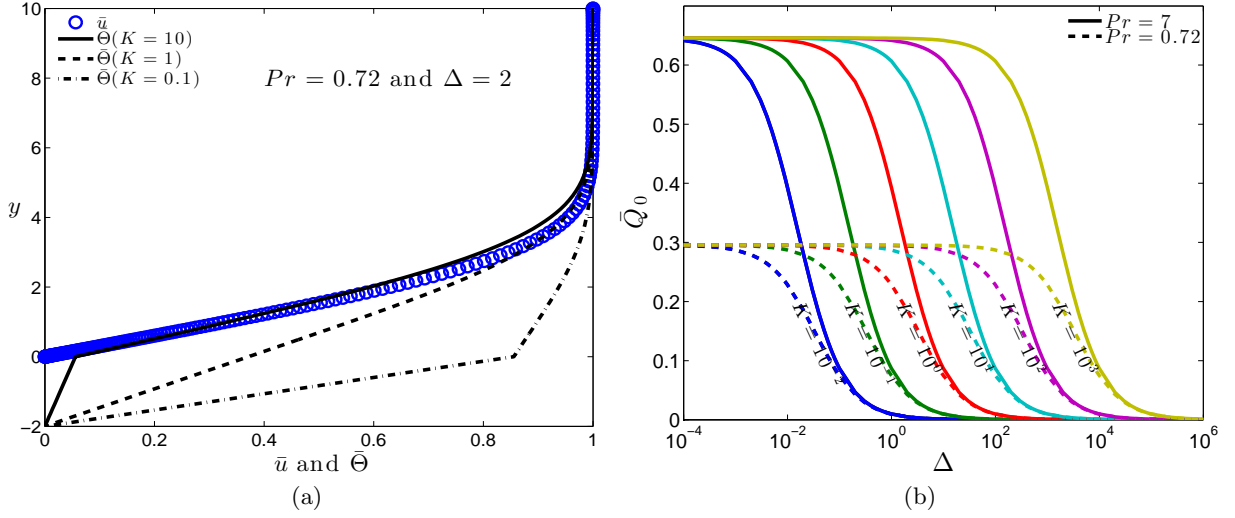


Figure 2. (a) Basic velocity and temperature profiles highlighting the influence of the thermal conductivity ratio K . (b) Heat transfer as a function of Δ , K and Pr .

3.2 Linear and weakly nonlinear analysis

The equations of motion are linearized up to the first and second order of ϵ by using a normal-mode solution which is written by letting the disturbance quantities in (1) take the form of (3). Here, β denotes the spatial growth rate, which are assumed real, and q the spanwise wave number. At the first order of ϵ , we provide the linear stability analysis as the resulting equations form a generalized eigenvalue problem $\beta M \hat{\phi}_1 = L \hat{\phi}_1$. M and L are linear operators. It is well known, at this level of $\mathcal{O}(\epsilon)$, that the sign of β informs on the flow stability: linearly stable flow for $\beta < 0$, linearly unstable for $\beta > 0$ and neutral for $\beta = 0$.

Figure 3 (a) presents the calculated eigenvalues data by showing the iso-values of β . This results was given before by Floryan [3]. The eigenvalue problem admits a neutral stability curve that flattens in the limit of small wave number q . The weakly nonlinear interactions are captured in the $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ terms. However, there is only a span-independent component ϕ_{20} which is responsible for the enhancement of the basic heat transfer \bar{Q}_0 . The reason is that both Q_1 and Q_{22} vanish in the spanwise direction z because of their periodicity in this direction. That is why only the terms without spanwise dependence are retained for the heat transfer enhancement. The total heat transfer is written then $Q \simeq \bar{Q}_0 + \epsilon^2 Q_{20}$ and leads to a second order Nusselt number, Nu :

$$Nu \simeq \frac{Q}{\bar{Q}_0} \simeq 1 + \epsilon^2 \frac{Q_{20}}{\bar{Q}_0}. \quad (4)$$

Figure 3 (b) represents $Q_{20}/\bar{Q}_0 = Nu - 1/\epsilon^2$ as a function of Δ and $K = 0.1, 1, 10$ and 100 . Analogous to the heat transfer given in the base state, the heat transfer due to the vortices behaves as \bar{Q}_0 . That is to say, Q_{20}/\bar{Q}_0 reaches its maximum for very small values of Δ or large values of K . Finally, Figure 3 (c) represents the total temperature field up to second order of perturbation $\theta = \bar{\theta} + \epsilon \theta_1 + \epsilon^2 (\theta_{20} + \theta_{22})$ where fluctuations of temperature are observed at the fluid-wall interface.

Fixing ϵ , the Görtler vortices can be reconstructed as shown in Figure 3 together with the temperature field in the fluid and the wall. The vortices are responsible of temperature oscillation in the wall. The velocity field clearly highlights vortices taking the form of mushrooms as observed before in experimental [8, 10] and numerical [5, 6] investigations.

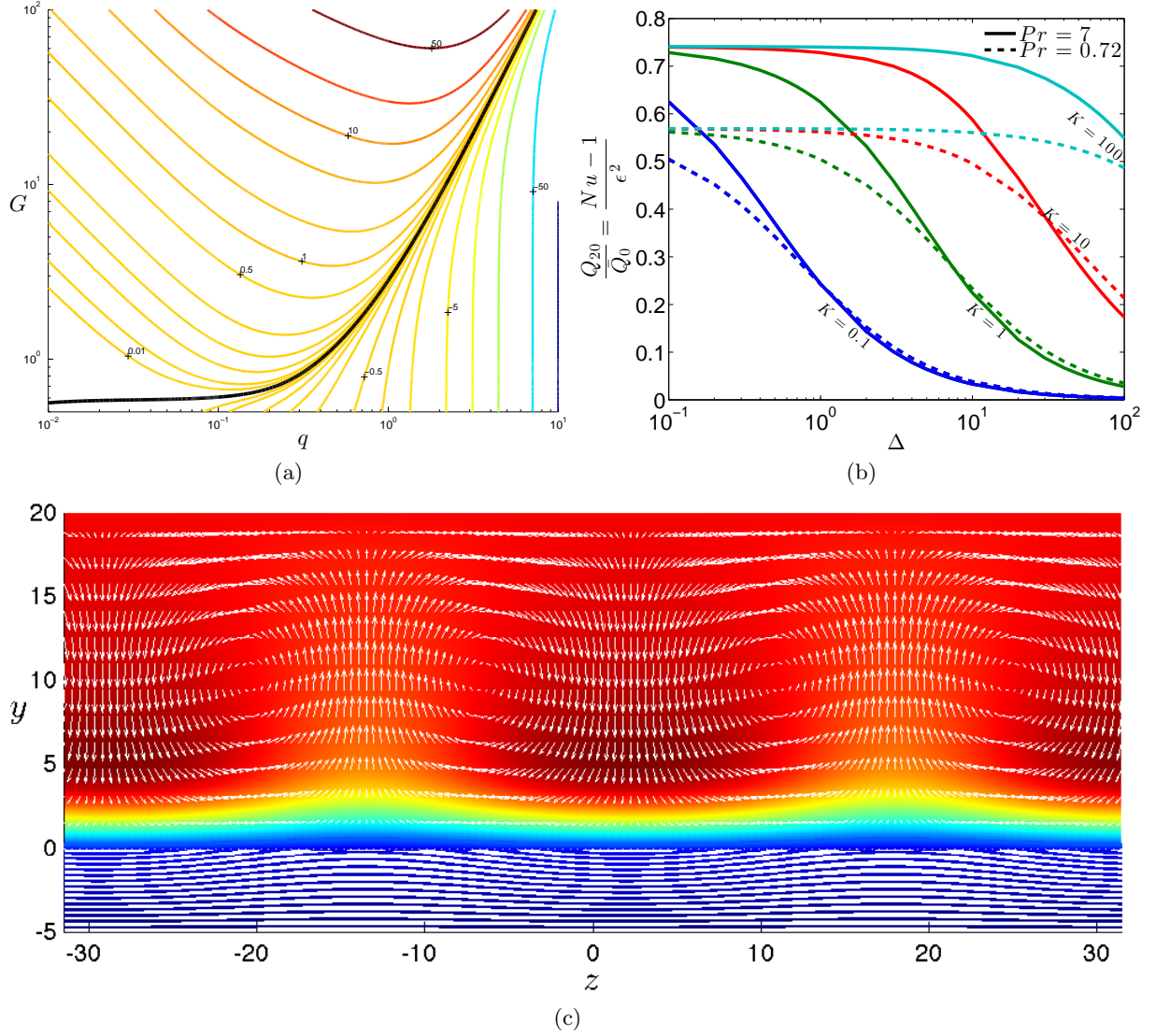


Figure 3. (a) Iso-values of the spatial growth rate, β , as a function of the Görtler number, G , and the spanwise wave number q . (b) Heat transfer due to Görtler vortices as a function of dimensionless wall thickness, Δ , and for several values of K and Pr . (c) Temperature and velocity fields in the cross-section, isothermal (blue) lines of temperature in the wall ($y < 0$), temperature (color) and velocity vector (white arrows) in the fluid for $G = 1$, $q = 0.2$, $K = 10$, $Pr = 0.72$, $\Delta = 5$ and for an arbitrary value of $\epsilon = 0.2$.

4 Conclusion and perspective

This article discussed the heat transfer due to Görtler vortices using a weakly nonlinear analysis. The base state taking into account the thermal conductivity is given as a function of the thermal conductivity ratio. It has an influence on the temperature field in both the fluid and the solid. The heat transfer at the fluid-wall interface reaches its maximum for small values of Δ , *i.e.* thin concave wall, or large value K , *i.e.* wall thermal conductivity larger than that of the fluid. The Nusselt number is normalized by an arbitrary amplitude, ϵ . As a perspective, ϵ could be determined by the Ginzburg-Landau amplitude equation.

Acknowledgments

This work was financially supported by the National Research Agency (ANR) through the program “Investissements d’Avenir” (ANR-10-LabX 09-01), LABEX EMC3.

References

1. A. BOTTARO & P. LUCHINI, The linear stability of Görtler vortices revisited, in *Mathematical Modeling and Simulation in Hydrodynamic Stability*, 1–14 (1996).
2. J. M. FLORYAN & W. S. SARIC, Wavelength selection and growth of Görtler vortices, *AIAA J.*, **22**, 1529 (1984).
3. J. M. FLORYAN, On the Görtler instability of boundary layers, *Prog. Aerosp. Sci.*, **28**, 235 (1991).
4. H. GÖRTLER, On the three dimensional instability of laminar boundary layers on concave walls, *NACA Tech. Memo.*, 1335 (1942).
5. J. T. LIU & K. LEE, Heat transfer in a strongly nonlinear spatially developing longitudinal vorticity system, *Phys. Fluids*, **7**, 559 (1995).
6. V. MALATESTA, L. F. SOUZA & J. T. LIU, Influence of Görtler vortices spanwise wavelength on heat transfer rates, *Comp. Ther. Sci.*, **5**, 389 (2013).
7. L. MOMAYEZ, P. DUPONT & H. PEERHOSSAINI, Effects of vortex organization on heat transfer enhancement by Görtler instability, *Int. J. Ther. Sci.*, **43**, 753 (2004).
8. H. PEERHOSSAINI & J. WESFREID, On the inner structure of streamwise Görtler rolls, *Int. J. Heat Fluid Flow*, **9**, 12 (1988).
9. S. T. SMITH & H. HAJ-HARIRI, Görtler vortices and heat transfer: A weakly nonlinear analysis, *Phys. Fluids*, **5**, 2815 (1993).
10. R. TOÉ, A. AJAKH & H. PEERHOSSAINI, Heat transfer enhancement by Görtler instability, *Int. J. Heat Fluid Flow*, **23**(2), 194 (2002).

Réarrangement polygonal d'un vortex à surface libre

Matthieu Labousse¹, Stéphane Perrard², John W. M. Bush³ & Laurent Limat²

¹ Institut Langevin, ESPCI ParisTech, 1 rue Jussieu, 75005 Paris, France, EU

² Laboratoire Matière et Systèmes Complexes, Université Paris Diderot, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet 75013 Paris, France, EU

³ Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, 77 Massachusetts Ave, Cambridge, MA 02139, USA

matthieu.labousse@espci.org, stephane.perrard@univ-paris-diderot.fr

Résumé. Un tore liquide en caléfaction est instable et son bord intérieur présente des motifs polygonaux. On s'intéresse à la stabilité d'une telle structure; un vortex torique à surface libre. Une étude de stabilité linéaire permet de rendre compte du nombre de côtés du polygone. Un calcul prenant en compte des ordres plus élevés permet même de déduire la forme des motifs.

Abstract. A liquid torus levitated by Leidenfrost effect is unstable to azimuthal disturbances and polygonal forms are observed. We investigate the stability of such a structure; a toroidal vortex with a free surface. A linear stability analysis predicts the most unstable mode and a higher order expansion gives insight into the final polygonal forms.

1 Introduction

Un fluide peut localiser sa vorticité dans des structures filamenteuses. La structure la plus simple est le vortex rectiligne infini   cœur rigide éventuellement considéré comme une singularité à mesure que son rayon tend vers zéro. Ce type de structure peut naturellement interagir avec d'autres types d'écoulement, s'apparier avec un vortex voisin ou interagir avec son image dans un mur solide. Dans le cas d'une structure tridimensionnelle de type « anneau » de vortex, il peut y avoir interaction du vortex sur lui même via son propre champ de vitesse. Les vortex de type « ronds de fumées » ont donné lieu à de nombreuses études de stabilité [1–3].

Que se passe-t-il dans le cas d'un vortex confiné par une surface libre? Une telle situation peut se rencontrer lorsqu'un écoulement engendre localement un vortex torique isolé du reste du liquide par une ligne de courant séparatrice. Des expériences de laboratoire réalisées avec un ressaut hydraulique avec bord ont mis en évidence ce type de structure [4–6]. L'immersion dans un écoulement extérieur empêche tout de même de distinguer nettement la limite entre la zone de vorticité non nulle et le reste du fluide.

Une configuration expérimentale permet tout de même d'étudier le cas d'un vortex entièrement confiné par une surface libre. Pour cela, un support de forme torique est chauffé à plus de 200 degrés.   cette température, de l'eau distillée déposée sur le support solide lévite sur son propre lit de vapeur et est alors isolée de tout contact solide. La géométrie torique permet aussi d'évacuer la vapeur par les bords du tore et d'éviter que l'expulsion du gaz ne vienne briser le liquide en de multiples gouttelettes. Sous l'action conjointe de la convection thermique de type Marangoni et de l'entraînement du liquide par l'évacuation de la vapeur sous la goutte, la section du tore se met en rotation sur elle-même, formant alors un vortex torique. Après la mise en mouvement du fluide, le bord interne du tore se déstabilise et donne naissance à un motif de forme polygonale, en rotation dans le référentiel du laboratoire [7] (voir figures 1A et B). Un vortex torique à surface libre semble donc instable et on se propose ici d'en donner une explication théorique. Le modèle est en bon accord avec les résultats obtenus et le mécanisme d'instabilité pourrait être généralisable à tout écoulement de type vortex torique, dès qu'il subit l'effet d'un confinement, même partiel, par une interface.

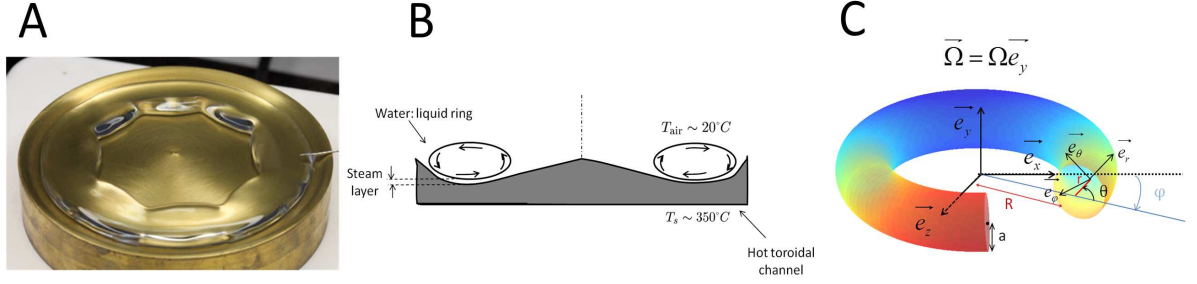


Figure 1. A : Photographie d'un tore en lévitation sur son propre film de vapeur. L'écoulement en vortex toroïdal se déstabilise avec formation d'un polygone sur le bord intérieur [7]. B : Schéma en vue de côté de l'expérience. Un vortex à surface libre est maintenu par un support très chaud incurvé. C : L'étude théorique associée est réalisée dans un référentiel torique (r, θ, φ) . Celui ci est décrit par ses deux rayons principaux a et R avec $a < R$.

2 Sélection du nombre de facettes

Suivant les dimensions du tore, des polygones allant de 3 à 12 côtés ont été observés [7]. On se propose ici d'en donner une explication théorique. Pour ce faire, il est commode de sonder la stabilité d'un état de base à une perturbation de faible amplitude. Considérons un tore de liquide à surface libre de section circulaire, où les rayons principaux sont notés a et R avec $a \ll R$ (voir figure 1C). On impose un vortex poloïdal et l'on note ω son intensité. La densité du liquide est notée ρ , sa viscosité ν , sa tension de surface γ . On s'affranchira en première approximation des effets visqueux en raison de leur faiblesse relative vis-à-vis des termes inertiels ($\text{Re} \sim 10^2$). L'étude de stabilité est réalisée dans un référentiel torique dont les principales caractéristiques (r, θ, φ) sont indiquées sur le schéma de principe 1C.

L'équilibre mécanique de l'édifice ne peut être assuré par les seuls effets de tension de surface. Ces derniers tendent à minimiser l'interface et favorisent la forme sphérique plutôt que torique. Expérimentalement, le tore en caléfaction est confiné par la gravité dans le fond de la rigole, ce qui revient à appliquer des contraintes géométriques sur la position des interfaces. La prise en compte de telles forces de surface se redistribuant en volume est *a priori* un processus complexe et spécifique à chaque mode de confinement. Ce problème a été contourné en ajoutant une force centrifuge *ad hoc* $F_\Omega = -m\Omega^2(R + a \cos(\theta))$ afin d'empêcher l'effondrement du tore vers une forme sphérique.

La section circulaire du tore impose en outre des conditions de pression aux interfaces que le champ de pression doit satisfaire. Cette contrainte sur le champ de pression peut être modélisée par une force fictive plus simple à traiter analytiquement. Cette force additionnelle permet de vérifier les conditions de pression aux limites notamment vis-à-vis de la courbure azimutale $C_\varphi(\theta) = \cos\theta/(R + a \cos\theta)$ pour un tore de section circulaire. Tous calculs faits (voir [8] pour détails), le champ de pression $P(r, \theta)$ s'écrit sous la forme :

$$P(r, \theta) = P_0 + \frac{\rho\omega^2}{2} (r^2 - a^2) + \rho\Omega^2 \left(R(x - a) + \frac{1}{2}(r^2 - a^2) \cos\theta \right) \cos\theta + \gamma \left(\frac{1}{a} + \frac{\cos\theta}{R + a \cos\theta} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{a}{R}\right). \quad (1)$$

De gauche à droite, on reconnaîtra les contributions respectives de la pression atmosphérique P_0 , des termes inertiels et enfin de la tension de surface. Le champ vitesse correspond à la rotation du tore sur lui-même et s'écrit donc :

$$\mathbf{v} = \frac{\omega r}{R + a \cos\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (2)$$

où le terme en $1/(R + a \cos\theta)$ constitue un facteur correctif imposé par la géométrie torique.

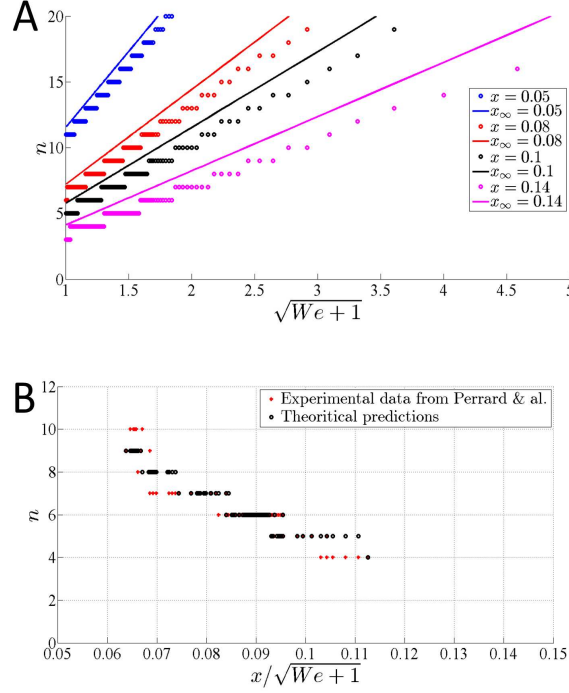


Figure 2. A : Comparaison entre la prédiction théorique et le régime asymptotique cylindrique, $nx_\infty = \sqrt{(We+1)/3}$ [10]. B : Comparaison des prédictions théoriques avec les données expérimentales. Le nombre de côtés n est tracé en fonction d'un paramètre dimensionné $x/\sqrt{We+1}$ où $x = a/R$ est le rapport d'aspect du tore et $We = \rho\omega^2 a^3/\gamma$ est le nombre de Weber.

Afin de sonder la stabilité d'un tel édifice, on le perturbe de manière infinitésimale tel que

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \mathbf{v} + \begin{bmatrix} \epsilon_r(r) \\ \epsilon_\theta(r) \\ (R + a \cos \theta) \epsilon_\varphi(r) \end{bmatrix} \frac{e^{\sigma t} e^{in\varphi}}{R + a \cos \theta}, \\ P_{\text{total}} = P + \tilde{p} = P + \tilde{p}_0 e^{\sigma t} e^{in\varphi} \end{cases} \quad (3)$$

n désignant le mode de l'instabilité se propageant sur un périmètre et σ son taux de croissance. Un calcul détaillé par Labousse et Bush [8] a montré que le taux de croissance σ satisfait aux ordres dominants :

$$\sigma^2 \left(1 + 4K \frac{\omega^2}{\sigma^2}\right)^{1/2} = \frac{nx}{1-x} \frac{I_1(nx)}{I_0(nx)} \left[1 - \frac{x}{We}(1-x) + \frac{1}{We} \left(1 - \left(\frac{x}{1-x} + \frac{(nx)^2}{(1-x)^2}\right)\right)\right] + \mathcal{O}(x^3) \quad (4)$$

où K désigne un préfacteur géométrique calculé dans [8]. Le nombre de Weber $We = \rho\omega^2 a^3/\gamma$ compare les effets inertiels à ceux de la tension de surface. À ce stade, il convient de remarquer deux régimes asymptotiques intéressants. Lorsque les effets de tension de surface dominant ($We \ll 1$), le problème se ramène simplement à une instabilité de type Rayleigh-Plateau et l'on peut montrer que le mode le plus instable vérifie $na/R \sim 1$. A contrario, lorsque les effets inertiels s'imposent ($We \gg 1$), le mode au plus fort taux de croissance évolue comme $na \sim R\sqrt{We}$. La figure 2A montre la résolution numérique de la recherche du mode le plus instable. On compare le calcul au résultat dans le cas cylindrique $C_\varphi \rightarrow 0$ vers lequel on converge à mesure que le rapport d'aspect a/R tend vers 0 (à volume fixé) [9, 10] et pour lequel on aurait

$$ka = nx_\infty = \left(\frac{We+1}{3}\right)^{1/2} \quad (5)$$

où k désigne le nombre d'onde le plus instable. Les résultats de l'application de ce modèle au tore en caléfaction [7] sont affichés sur la figure 2B et montrent un bon accord entre les prédictions théoriques et les données expérimentales. Cette analyse en perturbation ne donne cependant pas d'information sur la forme finale obtenue.

3 Forme des polygones

Pour décrire la forme des ondes observées, un calcul perturbatif linéaire est insuffisant, il faut alors tenir compte au moins des premiers termes non linéaires. Un calcul de ce type mené par Martens *et al.* [11] a permis de décrire théoriquement la forme que prennent les ressauts hydrauliques polygonaux. Nous présentons ici une approche complémentaire basée sur l'asymétrie entre l'intérieur et l'extérieur du tore pour décrire le cas en caléfaction. La brisure de symétrie mélange deux effets distincts. Comme schématisée sur la figure 1 et formalisée par l'équation (2), la conservation locale de la masse impose une vitesse de circulation plus importante à proximité du bord intérieur ($\theta = \pi$) que sur le bord extérieur ($\theta = 0$). Par ailleurs, la courbure $C = 1/a + \cos\theta/(R + a\cos\theta)$ du tore impose sa propre asymétrie intérieur/extérieur : une déformation vers l'intérieur ζ va donc amplifier cette asymétrie. On note ζ le pincement variqueux local du tore de fluide. En écrivant un bilan de quantité de mouvement sur une tranche de fluide, l'évolution temporelle de la quantité de fluide déplacé suit alors :

$$\rho s \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \simeq -\frac{\gamma}{R} + \frac{\gamma}{R} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \gamma \frac{\zeta}{a^2} - \alpha \frac{\rho}{2} (u_\pi^2 - u_0^2). \quad (6)$$

Les forces exercées sur l'interface se répartissent ainsi entre effet de tension de surface et réponse inertielle du vortex vis-à-vis d'une compression variqueuse. L'intensité de cette réponse peut dépendre des détails de la géométrie, ce que l'on intègre dans un pré-facteur sans dimension α . La relation de conservation de Bernoulli sur une ligne de courant reliant l'intérieur et l'extérieur du tore impose que

$$\gamma \left(\frac{1}{a} + C_\varphi(\pi) \right) + \frac{\rho}{2} v_\pi^2 = \gamma \left(\frac{1}{a} + C_\varphi(0) \right) + \frac{\rho}{2} v_0^2. \quad (7)$$

Dans le cas de faible pincement ζ , il est possible de reformuler cette expression sous la forme

$$\frac{\rho}{2} (v_\pi^2 - v_0^2) \simeq \frac{\gamma}{R} \left(1 + 2x^2 \left(1 - \frac{\zeta}{a} \right)^2 \right) + \mathcal{O}(\zeta^3) \quad (8)$$

ce qui conduit à une équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = A_1 \zeta - A_2 \zeta^2 \quad (9)$$

où A_1 et A_2 correspondent à des facteurs détaillés dans [7]. w désigne la vitesse angulaire à laquelle se propage la déformation de l'interface. Dans le référentiel tournant $\zeta(\varphi - wt)$, l'équation se ramène donc à une équation d'amplitude de type Korteweg-de Vries. On prévoit donc l'existence de structures localisées

$$\zeta - \zeta_{\max} = \frac{A}{\cosh^2(2\pi \Delta\varphi/n)} \quad (10)$$

avec une dépendance entre l'argument et l'amplitude $2\pi \Delta\varphi/n \sim \sqrt{A}$. Cela permet de tracer une courbe maîtresse théorique commune. La figure 3 compare cette prédiction théorique avec les relevés de profils expérimentaux et confirme un excellent accord.

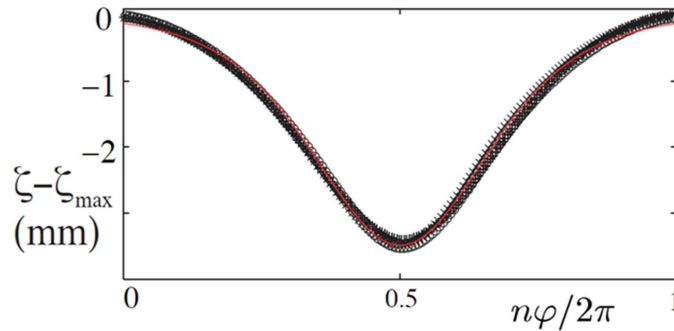


Figure 3. Profils adimensionnés de la déformation au voisinage d'un coin du polygone. La courbe rouge présente une solution de l'équation de KdV de type soliton en cosech^2 [7].

4 Conclusion

Le présent article s'est attaché à poser un cadre général pour étudier l'instabilité d'un vortex confiné par une surface libre, ici un tore liquide. Les effets combinés de la tension de surface et des termes inertiels permettent de prévoir qu'une telle structure est instable et d'en déduire la longueur d'onde associée. Ces deux effets concourent également à déterminer la forme des polygones obtenus. Les effets inertiels sont instables vis-à-vis de faibles perturbations, mais permettent néanmoins la saturation de l'instabilité lorsque la variation de section devient importante. Cette circulation en vortex joue ainsi un rôle essentiel dans la génération d'une telle instabilité. En leur absence, aucune brisure de symétrie azimutale n'est observée, ce qui rejoint les conclusions d'autres cas expérimentaux similaires [4–6]. Par ce biais, ce système permet de générer spontanément des structures ondulatoires localisées et constitue à ce titre un système modèle original pour étudier la propagation d'ondes non linéaires de type soliton [12].

Ce travail a été financé par la National Science Foundation via la bourse No. DMS-0907955, par la Société des amis de l'ESPCI ParisTech et l'ANR FreeFlow.

Références

1. T. MAXWORTHY, The structure and stability of vortex rings, *J. Fluid Mech.*, **51**, 15–32 (1972).
2. P. SAFFMAN, The number of waves on unstable vortex rings, *J. Fluid Mech.*, **84**, 625–639 (1978).
3. S. E. WIDNALL & C. Y. TSAI, The Instability of the thin vortex ring of constant vorticity, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **287**, 273–305 (1977).
4. C. ELLEGAARD, A. E. HANSEN, A. HAANING, K. HANSEN, A. MARCUSSEN, T. BOHR, J. LUNDBEK HANSEN & S. WATANABE, Creating corners in kitchen sinks, *Nature*, **392**, 767–768 (1998).
5. J. W. M. BUSH, J. M. ARISTOFF & A. E. HOSOI, An experimental investigation of the stability of the circular hydraulic jump, *J. Fluid Mech.*, **558**, 33–52 (2006).
6. M. LABOUSSE & J. W. M. BUSH, The hydraulic bump: The surface signature of a plunging jet, *Phys. Fluids*, **25**, 094104 (2013).
7. S. PERRARD, Y. COUDER, E. FORT & L. LIMAT, Leidenfrost levitated liquid tori, *Europhys. Lett.*, **100**, 54006 (2012).
8. M. LABOUSSE & J. W. M. BUSH, Polygonal instabilities on interfacial vorticities, en préparation pour *Europhys. Lett.*
9. L. M. HOCKING & D. H. MICHAEL, The stability of a column of rotating liquid, *Mathematika*, **6**, 25–32 (1959).

10. T. J. PEDLEY, The stability of rotating flows with a cylindrical free surface, *J. Fluid Mech.*, **30**, 127–147, (1967).
11. E. A. MARTENS, S. WATANABE & T. BOHR, Model for polygonal hydraulic jumps, *Phys. Rev. E*, **85**, (2012).
12. S. PERRARD, L. DEIKE, C. DUCHÊNE & C.-T. PHAM, Capillary soliton on a levitated cylinder, en préparation pour *Phys. Rev. Lett.*

Locating a regular needle in a chaotic haystack, and conversely, using Lyapunov Weighted Dynamics

Tanguy Laffargue & Julien Tailleur

Laboratoire Matière et Systèmes Complexes (CNRS UMR 7057), Université Paris Diderot, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75205 Paris Cedex 13, France
tanguy.laffargue@univ-paris-diderot.fr

Résumé. La dynamique de certains systèmes physiques est gouvernée par des structures de chaotité atypique. Ces structures, qui représentent un faible volume dans l'espace des phases, sont difficiles à localiser. Nous présentons dans cet article un algorithme, la dynamique biaisée par les Lyapunov, permettant de les mettre en évidence.

Abstract. In many physical systems, dynamics is ruled by structures of atypical chaoticity. These structures may occupy a very small volume in phase space and can thus be very difficult to locate numerically. In this article, we review an algorithm, the Lyapunov Weighted Dynamics, which efficiently reveals trajectories of atypical chaoticity.

1 Introduction

Structures of atypical chaoticity, although rare, can play an important role in many physical systems. For instance, resonances and separatrices play a crucial part in determining stability of planetary systems [1, 2]. Similarly, to study the global diffusion mechanism in almost-integrable systems, we need to focus on extremely thin chaotic layers which are responsible for Arnold diffusion [3–5]. Likewise, unstable objects like solitons and chaotic breathers [6] are responsible for the energy transport in Bose-Einstein condensates [7] and in biological molecules [8].

Those structures are usually not only rare but also unstable, which makes them even harder to find. Despite the progress made in the last few years, most numerical methods to locate those structures are restricted to low-dimensional systems or are model-specific. The Lyapunov Weighted Dynamics is a Monte Carlo algorithm which samples trajectories according to their Lyapunov spectrum, an observable measuring the sensitivity to initial conditions and hence chaoticity. In this article, we review this algorithm and show how it can be used to reveal rare trajectories, impossible to find with direct simulations, in both low and high dimensions, opening the door to applications going from celestial mechanics to statistical physics.

2 The Lyapunov spectrum, a large deviation problem

For a dynamical system defined by trajectories of D -dimensional variables $\mathbf{x}(t)$, consider two infinitely close points $\mathbf{x}(0)$ and $\mathbf{x}(0) + \mathbf{u}(0)$. The distance $|\mathbf{u}(t)|$ between them typically grows as

$$|\mathbf{u}(t)| \equiv |\mathbf{u}(0)| e^{t\lambda_1(t)} \quad (1)$$

where $\lambda_1(t)$ is called the largest finite-time Lyapunov exponent (at time t). It measures the sensitivity of the dynamical system to an initial perturbation in the vicinity of $\mathbf{x}(0)$. Similarly, we can consider $k + 1$ nearby points defining k noncollinear vectors $\mathbf{u}_i(0)$, with $i \in \{1, \dots, k\}$, and look at how the area $V_k(t) \equiv |\mathbf{u}_1(t) \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_k(t)|$ evolves. In general, for $k \leq D$, it grows as

$$V_k(t) \approx e^{t[\lambda_1(t) + \dots + \lambda_k(t)]} \quad (2)$$

with $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq \dots \geq \lambda_k(t)$. These are the k largest (finite-time) Lyapunov exponents. Under general assumptions, the D Lyapunov exponents converge as t goes to infinity to finite values, yielding the so-called Lyapunov spectrum. In the following, in order to facilitate the comprehension, we will focus on the largest one, λ_1 , that we simply call λ , but everything said below can be generalized to the entire Lyapunov spectrum.

The Lyapunov exponent $\lambda(t)$ can fluctuate between two trajectories: it does not take a unique value, and is distributed according to a distribution $P(\lambda, t)$, giving the probability density to observe a trajectory $x(t)$ with an exponent λ . In the large time limit, this pdf typically obeys a large deviation principle [9]

$$P(\lambda, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\approx} e^{-ts(\lambda)} \quad \text{with} \quad s(\lambda) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1). \quad (3)$$

$P(\lambda, t)$ thus becomes sharper and sharper as time increases and concentrates around a typical value λ^* , which satisfies $s'(\lambda^*) = 0$. This is why direct simulations of long trajectories are not efficient to isolate trajectories with atypical value of λ : when $\lambda - \lambda^* \sim \mathcal{O}(1)$, then $s(\lambda) \sim \mathcal{O}(1)$ and one needs an exponentially large number of independent random samples ($\sim e^{ts(\lambda)}$) to observe with probability one a trajectory with an exponent λ .

3 Thermodynamic formalism

Brute-force sampling imposes flat measure on the trajectory space by giving the same weight to all trajectories. On the contrary, collecting trajectories with a given λ resembles the construction of the microcanonical ensemble in equilibrium statistical physics, where one tries to collect all configurations of given energy E . This is a notoriously difficult problem; it is usually simpler to fix the mean value of the energy, by introducing a conjugate parameter, the temperature β : this is the construction of the canonical ensemble. We will follow a similar strategy here: rather than collecting all trajectories of exponent λ , we introduce a conjugate parameter α and define the canonical weights:

$$P_\alpha(\lambda, t) \equiv \frac{1}{Z(\alpha, t)} P(\lambda, t) e^{\alpha \lambda t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\approx} e^{t[\alpha \lambda - s(\lambda) - \mu(\alpha)]} \quad (4)$$

where $Z(\alpha, t) \equiv \langle e^{\alpha \lambda t} \rangle$ is the (dynamical) partition function (or in, a more mathematical language, the moment-generating function). With those new weights, the new typical Lyapunov exponent λ_α^* satisfies $s'(\lambda_\alpha^*) = \alpha$. The conjugate parameter α acts like a temperature for chaoticity: positive α favors trajectories with large Lyapunov exponents, hence chaos, whereas negative α favors trajectories with small Lyapunov exponents, and thus promotes stability. Furthermore, in the canonical ensemble, all the macroscopic (static) properties can be extracted from the partition function or from the free energy. Here also, we can define a dynamical free energy $\mu(\alpha)$ by

$$Z(\alpha, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\approx} e^{t\mu(\alpha)}. \quad (5)$$

It relates to the dynamical entropy by a Legendre-Fenchel transform:

$$\mu(\alpha) = \sup_{\lambda} [\alpha \lambda - s(\lambda)]. \quad (6)$$

In a more mathematical language, μ is the cumulant-generating function. The analogy with equilibrium statistical physics is summarized in table 1.

4 Lyapunov Weighted Dynamics

The parameter α has no evident physical meaning, it is thus not obvious how the biased weights (4) can be realized: we do not have thermostat for chaoticity in a lab. Lyapunov Weighted Dynamics (LWD) is a population Monte Carlo algorithm, inspired by Diffusion Monte Carlo algorithm and similar,

Variable	Equilibrium statistical physics	Dynamical system
Macrostate	$\rho = \frac{E}{V}$	λ
Volume	V	t
Entropy	$s(\rho) \underset{V \rightarrow \infty}{=} \frac{k}{V} \ln \Omega(E, V)$	$s(\lambda) \underset{t \rightarrow \infty}{=} -\frac{1}{t} \ln P(\lambda, t)$
Inverse temperature	β	$-\alpha$
Partition function	$Z(\beta, V) = \langle e^{-\beta E} \rangle$	$Z(\alpha, t) = \langle e^{\alpha \lambda t} \rangle$
Free energy	$f(\beta) \underset{V \rightarrow \infty}{=} -\frac{1}{\beta V} \ln Z(\beta, V)$	$\mu(\alpha) \underset{t \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{t} \ln Z(\alpha, t)$

Table 1. Thermodynamic formalism for dynamical systems. Differences in prefactors and signs are due to historical reasons: equilibrium statistical physics was constructed to explain thermodynamics and has to take into account previous definitions (temperature, entropy, free energy) whereas thermodynamic formalism was born in the dynamical system community [10, 11] and remained closer to the probability theory language.

in spirit, to the “go with the winners” algorithms [12], which aims at fulfilling this role [13]. The key idea is to evolve a population of copies of the system, called clones, and to copy and kill them in a controlled way.

We consider N_c clones (\mathbf{x}, \mathbf{u}) of the dynamical system $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ and a time increment dt . At every time step $t_n = n dt$:

- each copy evolves with the dynamics $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ and $\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u}$;
- for each clone j , we compute $s_j(t) = \frac{|\mathbf{u}(t+dt)|}{|\mathbf{u}(t)|} \simeq e^{\lambda dt}$;
- each clone j is then replaced, on average, by $s_j(t)^\alpha$ copies.

Roughly speaking, at time t , one clone has yielded $e^{\alpha \lambda t}$ copies. If the initial population was large enough, the ratio between the total number of clones at time t and the initial number of clone yields

$$\frac{N_c(t)}{N_c(0)} \simeq \langle e^{\alpha \lambda t} \rangle \approx e^{t\mu(\alpha)}. \quad (7)$$

It thus gives access to the partition function and to the free energy. Two important tricks are used: to maintain the population almost constant, we use $w_j = N_c s_j / \sum_j s_j$ instead of s_j for calculating the cloning rate and, to prevent degeneracy of clones and enhance the quality of sampling, a small noise, with appropriate properties (energy conservation, momentum conservation, etc.), is added to the dynamics.

A simple way to understand why this algorithm works is to think about it as an evolution problem. Cloning plays the role of reproduction, noise the one of mutation and dependence on λ of the cloning rate the one of selection. The convergence of the algorithm is then assured by a sort of “selection pressure” and changing α is equivalent to modify the fitness landscape.

This algorithm can be generalized to sample the fluctuations of the k first Lyapunov exponents, by considering one chaotic temperature α_i for each Lyapunov exponent λ_i and using Gram-Schmidt orthonormalization procedure. For technical details and numerical implementations, see [14].

5 Normally hyperbolic invariant manifold

Normally hyperbolic invariant manifolds (NHIMs) with p unstable directions are manifolds invariant under the dynamics and whose normal directions have the structure of saddles, with exactly p unstable directions. If we consider the LWD with $\alpha = 1$, we see that the cloning rate exactly compensates the volume contractions and expansions induced by time evolution for trajectories evacuating from saddles with one unstable direction [15]. Then the cloning stabilizes the unstable manifold of NHIMs with one unstable direction and the algorithm populates it uniformly. Similarly, taking $\alpha_i = 1$ for i in $\{1, \dots, k\}$ stabilizes the unstable manifold of NHIMs with k unstable directions.

We can illustrate this property on a simple example: two double well potentials. This system has four degrees of freedom and the Hamiltonian is given by

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1,2} \left[\frac{p_i^2}{2} + \frac{(q_i^2 - 1)^2}{4} \right]. \quad (8)$$

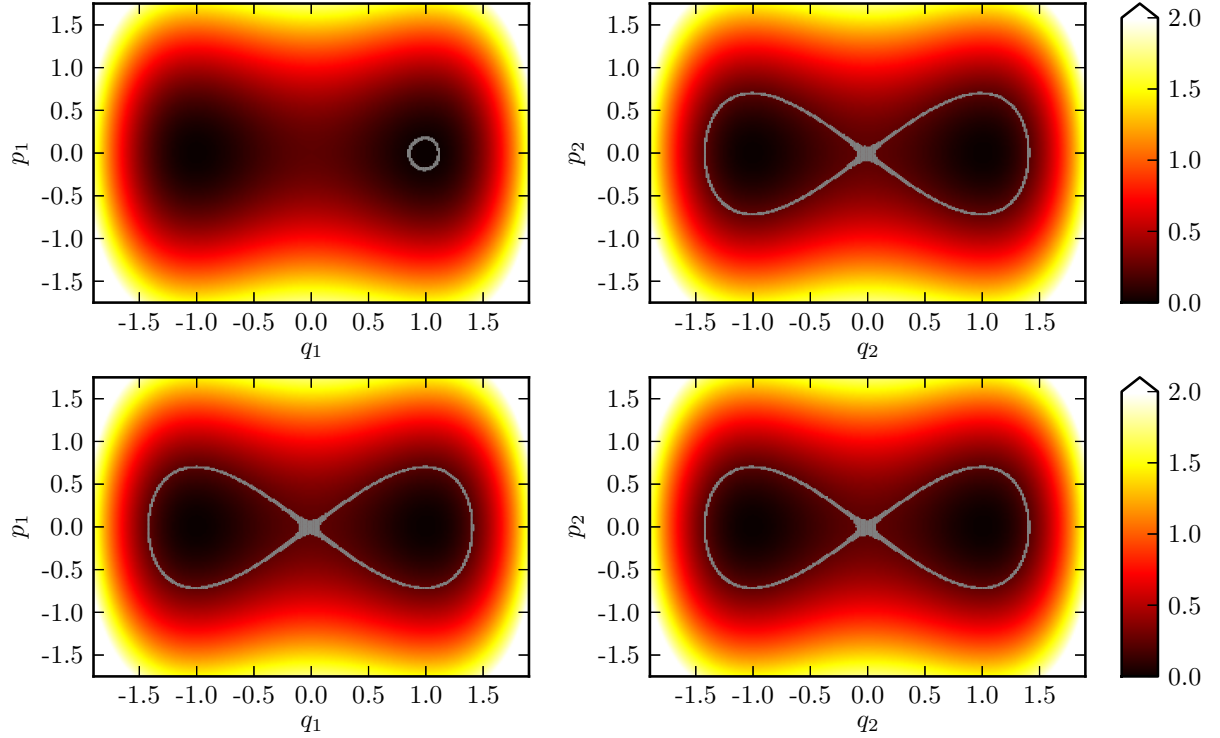


Figure 1. Trajectories of 5,000 clones using LWD for the system defined in (8) for $t \geq 250$. The variance of the noise is decreased from 2×10^{-3} to 2×10^{-5} at $t = 60$, and then to 2×10^{-7} at $t = 120$. The clones are in gray and the color code corresponds to the energy H . **Top:** $\alpha_1 = 1$ and $\alpha_{i \geq 2} = 0$. **Bottom:** $\alpha_{1,2} = 1$ and $\alpha_{3,4} = 0$.

This system has two saddle points, defined respectively by $q_1 = p_1 = 0$ and $q_2 = p_2 = 0$, and, once a Gaussian white noise is added to momenta, its steady-state measure is the flat measure. It has two NHIMs with one unstable direction, corresponding to the Cartesian products between the flat measure over one double well and the saddle point of the other double well. It also has one NHIM with two unstable directions, corresponding to the Cartesian product of the two saddle points. We can see on figure 1 that the LWD with $\alpha_1 = 1$ isolates the unstable manifold of one NHIM with one unstable direction and that the LWD with $\alpha_{1,2} = 1$ isolates the unstable manifold of the NHIM with two unstable directions.

6 A spatially extended system: the Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou chain

This algorithm can be applied to spatially extended systems, like the β -FPU chain defined by the Hamiltonian

$$H = \sum_{i=1}^L \left[\frac{p_i^2}{2} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + \beta \frac{(x_{i+1} - x_i)^4}{4} \right] \quad (9)$$

with periodic boundary conditions $x_{L+1} = x_1$. This describes a chain of L particles coupled with anharmonic springs. At equilibrium, the typical configuration is a superposition of short-lived solitons,

short-lived chaotic breathers [6] and thermal fluctuations (phonons). When applying the LWD with $\alpha < 0$, we isolate a gas of solitons whereas with $\alpha > 0$ we stabilize chaotic breathers. These three cases are illustrated on figure 2. In [13], fixed boundary conditions were used to isolate solitons, because otherwise the system can put all its energy in a rotation of its center of mass. Here, thanks to a noise which conserves total impulsion, we were able to use periodic boundary conditions.

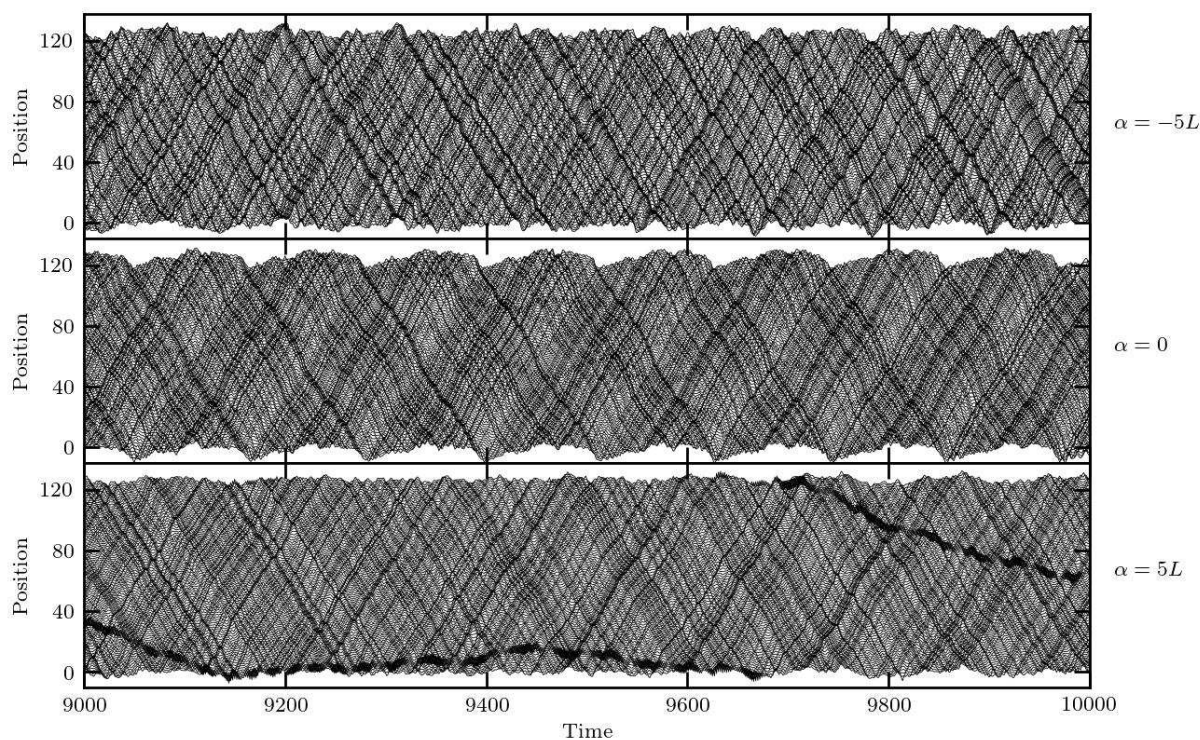


Figure 2. Configuration of one clone of the LWD for the β -FPU chain with $\beta = 0.1$, $L = 128$, 200 clones and $H = L$. **Top:** Gas of solitons. **Middle:** Equilibrium. **Bottom:** Chaotic breathers.

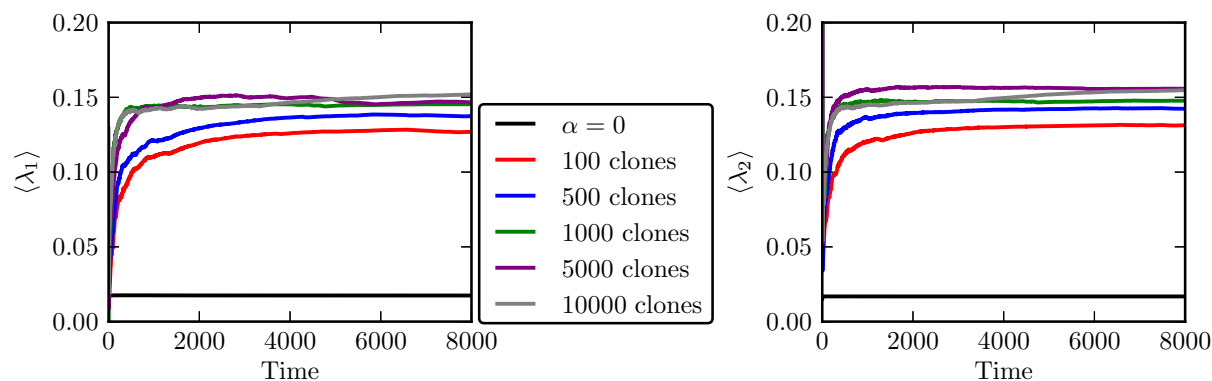


Figure 3. Mean value of the two largest Lyapunov exponents over all the clones and over 5 runs, using LWD for the β -FPU chain with $\beta = 0.1$, $L = 100$, $H = L$, $\alpha_{i \neq 2} = 0$ and $\alpha_2 = 5L$.

Biasing the k -th Lyapunov exponent with a positive α_k reveals really rare trajectories with k non-merging breathers [14]. We see on figure 3 that, for given $\{\alpha_i\}$, the finite-time Lyapunov exponents seem to converge to finite values λ_α as time and number of clones increase. This is important because λ_α can be used to compute the dynamical free energy thanks to thermodynamics integration

$$\mu(\alpha) = \int_0^\alpha \lambda_{\alpha'} d\alpha' \quad (10)$$

which, compared to direct measurement using $Z(\alpha)$, yields much better (smoother) averages.

7 Conclusion

We have seen two applications of this algorithm: the stabilization of the unstable manifold of NHIMs in a simple dynamical system and the detection of localized chaotic breathers in a spatially extended system. In the latter case, we have shown that the measure of the first derivative of the dynamical free energy can be achieved, which opens the way to future studies of dynamical phase transitions in these systems. This algorithm has also been applied elsewhere to localize the Arnold web [13] and to study the stability of Lagrange points L4 and L5 in the restricted three-body problem [14].

References

1. J. LASKAR, A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System, *Nature*, **338**, 237–238 (1989).
2. N. MURRAY & M. HOLMAN, The Origin of Chaos in the Outer Solar System, *Science*, **283**, 1877–1881 (1999); The role of chaotic resonances in the Solar System, *Nature*, **410**, 773–779 (2001).
3. V. I. ARNOLD, Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **156:1**, 9-12 (1964). English translation: *Sov. Mat. Dokl.*, **5**, 581–585 (1964).
4. C. FROESCHLÉ, M. GUZZO & E. LEGA, Graphical Evolution of the Arnold Web: From Order to Chaos, *Science*, **289**, 2108–2110 (2000).
5. A. SEIBERT, S. DENISOV, A. V. PONOMAREV & P. HÄNGGI, Mapping the Arnold web with a graphic processing unit, *Chaos*, **21**, 043123 (2011).
6. T. CRETEGNY, T. DAUXOIS, S. RUFFO & A. TORCINI, Localization and equipartition of energy in the β -FPU chain: Chaotic breathers, *Physica D*, **121**, 109–126 (1997).
7. A. TROMBETTONI & A. SMERZI, Discrete Solitons and Breathers with Dilute Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 2353-2356 (2001).
8. M. PEYRARD, T. DAUXOIS, H. HOYET & C. R. WILLIS, Biomolecular dynamics of DNA: statistical mechanics and dynamical models, *Physica D*, **68**, 104–115 (1993).
9. H. TOUCHETTE, The large deviation approach to statistical mechanics, *Physics Reports*, **478**, 1–69 (2009).
10. D. RUELE, *Thermodynamic formalism: the mathematical structure of equilibrium statistical mechanics*, Addison-Wesley (1978).
11. P. GRASSBERGER, R. BADI & A. POLITI, Scaling laws for invariant measures on hyperbolic and nonhyperbolic attractors, *J. Stat. Phys.*, **51**, 135–178 (1988).
12. P. GRASSBERGER, Go with the winners: A general Monte Carlo strategy, *Comput. Phys. Commun.*, **147**, 64–70 (2002).
13. J. TAILLEUR & J. KURCHAN, Probing rare physical trajectories with Lyapunov weighted dynamics, *Nature Physics*, **3**, 203–207 (2007).
14. T. LAFFARGUE, K.-D. NGUYEN THU LAM, J. KURCHAN & J. TAILLEUR, Large deviations of Lyapunov exponents, *J. Phys. A*, **46**, 254002 (2013).
15. J. TAILLEUR, S. TANASE-NICOLA & J. KURCHAN, Kramers Equation and Supersymmetry, *J. Stat. Phys.*, **122**, 577–595 (2006).

États « chimère » dans une dynamique à retard en longueur d'onde d'une diode laser accordable

Laurent Larger¹, Bogdan Penkovsky¹, Morgane Girardot-Poinsot¹ & Yuri Maistrenko²

¹ FEMTO-ST / dépt. d'Optique Pierre-Michel Duffieux, UMR CNRS 6174, Université de Franche-Comté, 16 Route de Gray, 25030 Besançon Cedex, France

² Institute of Mathematics and Center for Medical and Biotechnical Research, NAS of Ukraine, Tereshchenkivska Str. 3, 01601 Kyiv, Ukraine

llarger@univ-fcomte.fr

Résumé. Les états chimères sont des solutions particulières dans les systèmes dynamiques complexes, typiquement des réseaux d'oscillateurs couplés. Ces solutions se caractérisent par la formation de « *clusters* » à l'intérieur du réseau, les oscillateurs de chaque cluster adoptant un type particulier de comportement. Ces chimères apparaissent comme une juxtaposition globalement stable de groupes d'oscillateurs aux comportements homogènes au sein d'un cluster, mais incongruents entre clusters. Nous présentons l'étude expérimentale numérique et théorique de tels états chimères « virtuels », observés dans une classe particulière de systèmes dynamiques complexes modélisés par une équation intégral-différentielle à non linéarité retardée. La mise en œuvre expérimentale a été conduite à l'aide d'un oscillateur à retard optoélectronique impliquant une diode laser accordable en longueur d'onde.

Abstract. Chimera states are exotic solutions arising in complex dynamics, typically in networks of coupled oscillators. They are characterized by a cluster arrangement within the network, each cluster being identified by a particular behavior of all of its individual oscillators. Chimera appear as the occurrence of stable neighboring groups of oscillators, the oscillator motion within a cluster being uniform within one cluster, but incongruent between clusters. We report the experimental, numerical and theoretical observations of such virtual Chimera states in a particular class of nonlinear dynamical system modeled by a nonlinear delayed integro-differential equation. The corresponding experimental setup involves an optoelectronic delay oscillator in which the dynamical variable is the wavelength of a tunable laser diode.

1 Introduction

Les états chimères des réseaux complexes d'oscillateurs couplés ont été mis en évidence pour la première fois numériquement en 2002 [1] et ont ensuite connu un intérêt croissant dans la communauté scientifique [2]. Ils sont typiquement observés dans des configurations de couplage non local, c'est-à-dire lors d'interactions allant au-delà des plus proches voisins. Deux paramètres de bifurcation sont généralement utilisés pour mettre en évidence les domaines d'existence de ces chimères, le coefficient de couplage, et la distance de couplage [3]. L'intérêt pour ce thème de recherche s'est encore amplifié en 2012, avec les premières observations expérimentales de ces chimères, en optique (patterns transverses dans un faisceau lumineux [4]), en chimie (dans un réacteur avec catalysation lumineuse [5]), en mécanique (avec des réseaux de métronomes répartis sur des supports couplés mécaniquement [6]). Plus récemment encore, ce même phénomène a même été identifié pour la première fois dans des dynamiques sans variable spatiale (chimères « virtuelles »), les dynamiques non linéaires à retard [7], dynamiques qui possèdent cependant une analogie avec les équations aux dérivées partielles connue depuis longtemps [8].

C'est dans ce dernier contexte que se situent ces travaux, avec une version optique de la réalisation expérimentale de [7] faisant intervenir une dynamique à retard électronique en modulation de fréquence (FM) [9]. Nous proposons également une discussion sur le domaine de stabilité en fonction des paramètres temporels de la dynamique à retard.

2 Expérience et modélisation

Parmi les différents systèmes dynamiques bien connus pour posséder un modèle d'équation différentielle à retard, l'optique en possède un en particulier qui a permis entre autre de proposer les premiers oscillateurs optiques ou optoélectroniques présentant des comportements chaotiques [10,11]. C'est sur la base de ces concepts physiques qu'a été proposé dans un contexte applicatif (cryptographie optique par chaos [12]), un oscillateur optoélectronique non linéaire à retard produisant des dynamiques complexes dans les fluctuations en longueur d'onde d'une diode laser accordable. Nous reprenons dans notre expérience décrite ci-dessous, les concepts de cet oscillateur en longueur d'onde, en adaptant ses propriétés de manière à pouvoir obtenir des chimères « virtuelles » comme décrites dans [7].

2.1 Oscillateur non linéaire à retard en longueur d'onde

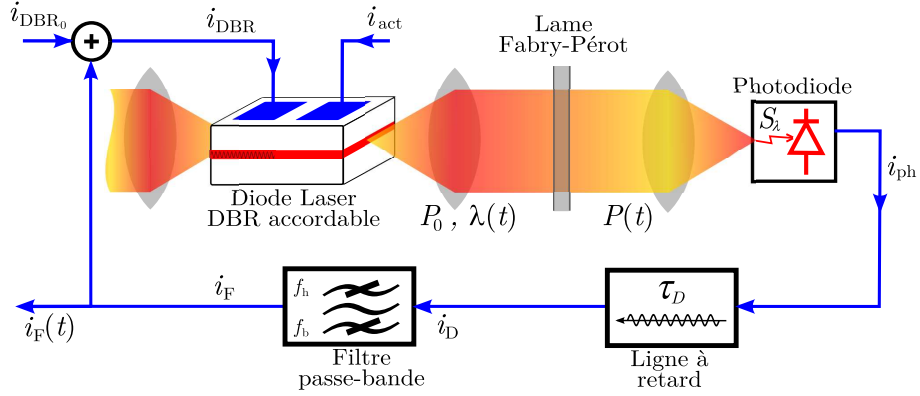


Figure 1. Oscillateur non linéaire à retard en longueur d'onde.

Le schéma-bloc du montage expérimental est représenté à la figure 1. Il correspond à un oscillateur en boucle comprenant les éléments suivants :

- une diode laser double électrode accordable en longueur d'onde, qui permet de disposer d'un faisceau lumineux monochromatique de puissance P_0 , et dont la longueur d'onde $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$ est proportionnelle à un courant d'injection i_{DBR} , de manière continue sur une plage $\Delta\lambda \simeq 1$ nm (avec $\lambda_c \simeq 1550$ nm) :

$$\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda = \lambda_c + S_{\text{DL}} \cdot i_{\text{DBR}} ; \quad (1)$$

- une lame de verre (indice $n = 1,5$, épaisseur $e = 5$ mm) Fabry-Pérot à finesse très modérée (miroir de coefficient de réflexion $R \simeq 50$ %), dont le rôle est de fournir la non linéarité de la dynamique, au travers de sa fonction de transfert entre la puissance de sortie $P(t)$ et la longueur d'onde d'entrée $\lambda(t) = \lambda_c + \delta\lambda(t)$. L'intervalle spectral libre (ISL = $c/(ne)$) est choisi pour être plus petit que la plage d'accordabilité continue du laser (ISL < $\Delta\lambda$)

$$f_{\text{NL}}(x) = \frac{A}{1 + m \cdot \sin^2(x + \Phi_0)} = \frac{P}{P_0} \quad \text{avec} \quad x = \frac{-2\pi ne}{\lambda_0^2} \delta\lambda \quad \text{et} \quad \Phi_0 = \frac{2\pi ne}{\lambda_0} . \quad (2)$$

Une particularité essentielle de cette transformation non linéaire pour l'observation de chimères virtuelles, consiste en l'asymétrie entre les minima et maxima de la fonction d'Airy du Fabry-Pérot. En effet, avec une fonction de transfert issue d'un interféromètre à 2 ondes [11, 12], la fonction \sin^2 obtenue est parfaitement symétrique à ce niveau, et ne permet pas d'avoir des clusters « incongruents ». Il est important de noter aussi que le paramètre Φ_0 , simplement ajusté par un

offset de courant i_{DBR_0} tel que $\lambda_0 = \lambda_c + S_{\text{DL}} \cdot i_{\text{DBR}_0}$, permet de choisir le point de fonctionnement de la non linéarité autour duquel se développe la dynamique. Les paramètres A et m sont ceux classiquement définis pour une lame Fabry-Pérot, $A = (1 - R)^{-1} \simeq 2$ et $m = 4R/(1 - R)^2 \simeq 8$ pour $R \simeq 50\%$.

- une photodiode permettant de convertir, de manière linéaire, les fluctuations d'intensité lumineuse en fluctuation d'amplitude électrique (i.e. un photo-courant),

$$i_{\text{ph}} = S_{\lambda} \cdot P ; \quad (3)$$

- une ligne à retard électronique, réalisée par une mémoire FIFO (first in first out, de profondeur mémoire N), qui permet un réglage précis de la valeur du retard temporel via une fréquence d'horloge f_{CLK} qui rythme le décalage d'un élément mémoire lors de la traversée de celle-ci par le signal à retarder :

$$i_{\text{D}}(t) = i_{\text{ph}}(t - \tau_{\text{D}}) \quad \text{avec} \quad \tau_{\text{D}} = N/f_{\text{CLK}} ; \quad (4)$$

- un filtre électronique représentatif du filtrage de Fourier effectué par la partie électronique de l'oscillateur. Dans le domaine de Fourier, ce filtre est décrit par un passe-bande de gain H_0 , de fréquence de coupure haute $f_{\text{h}} = (2\pi\tau)^{-1}$, et une fréquence de coupure basse $f_{\text{b}} = (2\pi\theta)^{-1}$:

$$H(\omega) = \frac{(i\omega\theta) H_0}{(1 + i\omega\theta)(1 + i\omega\tau)} = \frac{I_{\text{F}}(\omega)}{I_{\text{D}}(\omega)} . \quad (5)$$

Les règles de passage entre les domaines de Fourier et le domaine temporel pour ce filtre linéaire nous permettent alors de décrire l'équation différentielle vérifiée par la sortie du filtre $i_{\text{F}}(t)$, en fonction de son entrée $i_{\text{D}}(t)$:

$$\frac{1}{\theta} \cdot \int_{t_0}^t i_{\text{F}}(\xi) \, d\xi + \left(1 + \frac{\tau}{\theta}\right) \cdot i_{\text{F}}(t) + \tau \cdot \frac{di_{\text{F}}}{dt}(t) = i_{\text{D}}(t). \quad (6)$$

- enfin, un additionneur permet de définir le courant de commande de la longueur d'onde effectivement appliqué à l'électrode d'accord de la diode laser,

$$i_{\text{DBR}}(t) = i_{\text{DBR}_0} + i_{\text{F}}(t). \quad (7)$$

2.2 Modèle dynamique normalisé

La dynamique de l'ensemble de l'oscillateur non linéaire à retard en longueur d'onde, peut maintenant être déduite à partir de la description de chacun des éléments constitutifs de la boucle d'oscillation par les équations physiques (1–7). À des fins de simulation numérique ou de développement analytique, il est souvent pertinent de fournir l'équation d'évolution de notre oscillateur avec des variables normalisées. Une normalisation naturelle de la variable dynamique est celle donnée par l'argument sans dimension x intervenant dans la fonction d'Airy (2). Pour ce qui est du temps, le retard est souvent considéré comme l'unité. Ceci nous amène alors au modèle normalisé suivant :

$$\delta \cdot \int_{s_0}^s x(\xi) \, d\xi + (1 + \varepsilon \delta) \cdot x(s) + \varepsilon \cdot \frac{dx}{ds}(s) = \frac{\beta}{1 + m \cdot \sin^2[x(s-1) + \Phi_0]} \quad (8)$$

où $s = t/\tau_{\text{D}}$ est le temps normalisé, $\delta = \tau_{\text{D}}/\theta = 2\pi f_{\text{b}}\tau_{\text{D}}$ et $\varepsilon = \tau/\tau_{\text{D}} = (2\pi f_{\text{h}}\tau_{\text{D}})^{-1}$ sont deux paramètres normalisés (généralement faibles) représentant les temps caractéristiques intégral et différentiel du processus dynamique, $x = (-2\pi ne/\lambda_0^2) \cdot \delta\lambda = (-2\pi ne S_{\text{DL}}/\lambda_0^2) \cdot i_{\text{F}}$ est la variable dynamique normalisée proportionnelle à la déviation en longueur d'onde ou encore au signal de sortie de filtrage électronique, $\beta = (-2\pi ne S_{\text{DL}} H_0 A S_{\lambda}/\lambda_0^2)$ est un poids normalisé de la contre-réaction non linéaire à retard, et enfin $\Phi_0 = (2\pi ne/\lambda_c)(1 - S_{\text{DL}} \cdot i_{\text{DBR}_0}/\lambda_c)$ est un paramètre permettant de choisir, via le réglage de i_{DBR_0} , le point de fonctionnement moyen de la dynamique le long de la non linéarité (avec d'après (1) et (7) $\lambda_0 = \lambda_c + S_{\text{DL}} \cdot i_{\text{DBR}_0}$).

Contrairement à la plupart des équations à retard, nous trouvons ici un terme intégral qui avait déjà été introduit dans [13]. Ce terme est à l'origine de nombreuses nouvelles solutions originales dans les dynamiques à retard, telles que les *breathers* chaotiques [14], les solutions harmoniques à grande pureté spectrale [15] ou encore les régimes périodiques rectangulaires stables de période « un retard » [16].

Une manière plus conventionnelle d'écrire l'équation intégral-différentielle non linéaire à retard précédente, consiste à introduire une variable supplémentaire $y = \int x$. On obtient alors le système suivant de deux équations différentielles couplées du premier ordre :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx}{ds}(s) &= -(1 + \delta\varepsilon) \cdot x(s) - \delta \cdot y(s) + \frac{\beta}{1 + m \sin^2[x(s-1) + \Phi_0]}, \\ \frac{dy}{ds}(s) &= x(s). \end{aligned} \quad (9)$$

δ et ε étant généralement des quantités faibles dans les conditions qui nous concernent (cas des « grands » retards, c'est-à-dire le temps caractéristique rapide τ est beaucoup plus petit que τ_D , et temps d'intégration θ beaucoup plus lent que le retard), le terme $\varepsilon\delta$ est généralement négligeable devant 1 et n'est pas pris en compte par simplification.

3 Chimères « virtuelles »

3.1 Analogie spatio-temporelle

Comme déjà souligné, les états chimères sont des manifestations habituellement étudiées dans les réseaux d'oscillateurs couplés. La dynamique à retard que nous venons de décrire en est *a priori* très éloignée puisqu'il s'agit d'un système purement temporel. Arecchi et ses co-auteurs [8] ont cependant, déjà en 1992, proposé une analogie spatio-temporelle des dynamiques à retard, qui peut dans un premier temps nous aider conceptuellement à nous rapprocher des dynamiques spatio-temporelle des réseaux d'oscillateurs. Le principe consiste à séparer virtuellement les échelles de temps multiples qui interviennent de fait dans les dynamiques à retard, pour attribuer aux temps courts (de l'ordre de τ , ou ε) une variable continue d'un espace virtuel σ et aux temps longs (de l'ordre du retard τ_D , ou de l'unité) une variable temporelle discrète n .

Une trajectoire d'amplitude $x(s)$ solution de (9) peut alors se représenter sur un graphe à 2 dimensions $x(\sigma, n)$, où $\sigma \in [0, 1 + \gamma]$ (avec γ faible, d'ordre ε) en abscisse représente une variable d'espace virtuelle décrivant l'évolution de l'amplitude à l'intérieur d'un intervalle de temps correspondant au retard, et $n \in \mathbb{N}$ est un pas de temps discret correspondant à une itération d'un intervalle de temps de durée de l'ordre du retard, à l'intervalle suivant. Le temps normalisé s se décompose ainsi selon ces 2 coordonnées spatiales et temporelles, $s = \sigma + n(1 + \gamma)$.

Enfin, une autre manière de décrire la dynamique de notre oscillateur à retard, peut se faire via une formulation intégrale, au lieu de la formulation différentielle de (8) ou encore (9) :

$$x(s) = \int_0^\infty h(\xi) \cdot f_{\text{NL}}[x(s-1-\xi)] d\xi, \quad (10)$$

où $h(s)$ représente la réponse impulsionnelle du filtre passe-bande considéré. Une analogie encore plus étroite peut alors être proposée par rapport aux réseaux d'oscillateurs : chaque « oscillateur » du réseau a une amplitude $x(s)$, qui évolue dynamiquement en pas de temps correspondant au retard, selon un couplage non linéaire, via la fonction f_{NL} appliquée à l'amplitude précédente $x(s-1)$. On remarque à partir de (10) que cette dynamique dépend aussi des amplitudes voisines, à distance « ξ ». À partir de cette interprétation, $h(\xi)$ apparaît comme un coefficient de couplage fonction de la « distance » ξ à l'oscillateur considéré. Le caractère non-local de ce couplage apparaît comme lié à l'étalement de la réponse impulsionnelle.

3.2 Résultats

La figure 2 illustre la formation des états chimères dans une dynamique non linéaire à retard, soit à partir de l'expérience (figure 2 (a)), soit à partir d'une simulation numérique de l'équation (9). En fonction des conditions initiales, des chimères simples ou à une tête (ligne du haut) sont obtenues ou alors des chimères à têtes multiples (ligne du bas, cas à 2 têtes). Les traces temporelles à gauche des représentations spatio-temporelles (patterns dans le plan (σ, n)) permettent d'apprécier la phase transitoire de naissance des états chimères à partir des conditions initiales, ou les états chimères en régime établi. Dans ce dernier cas, une chimère virtuelle à une tête dans une dynamique à retard se caractérise par le partitionnement d'un intervalle de temps de durée très proche d'un retard $(1 + \gamma)$, en deux sous-intervalles, l'un montrant des fluctuations de type chaotique (couleurs du rouge au jaune), et l'autre par un plateau d'amplitude constante (couleur bleue). Lors de la formation de chimères à deux ou plusieurs têtes, dans les mêmes

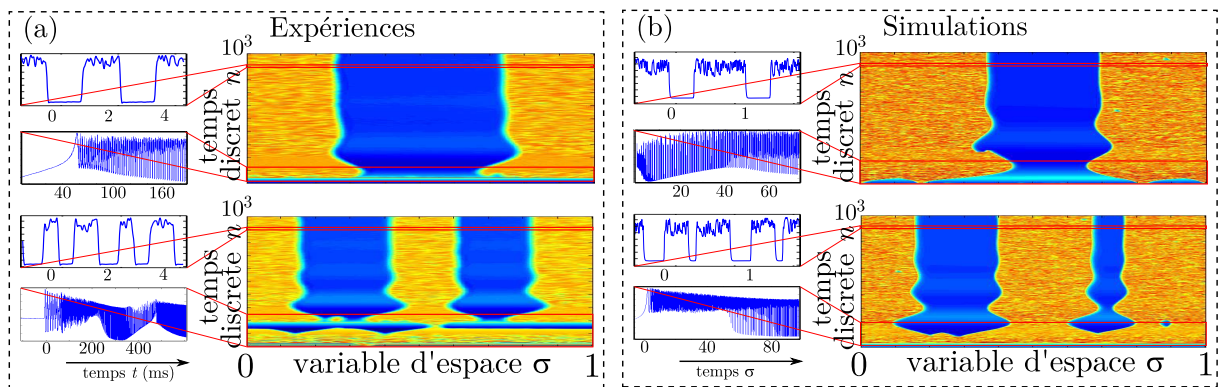


Figure 2. Apparition de chimères dans une dynamique à retard, traces temporelles et représentations spatio-temporelle correspondantes. (a) : expérience, (b) : numérique. Les valeurs des paramètres d'amplitude et de gain de l'équation (9) sont $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$, $\delta = 8,4 \times 10^{-3}$, $\beta = 0,6$ et $\Phi_0 = -0,35$.

conditions de valeurs de paramètres pour la dynamique, le ratio des durées d'amplitudes chaotiques et d'amplitudes constantes reste identique, seules les conditions initiales permettent de différencier le nombre de « têtes » effectivement observées.

La formation de chimère se produit seulement sur un domaine de l'espace des paramètres. Lorsque le gain β est trop faible, la dynamique se réduit à un point fixe ou à un cycle limite exotique de période 1 [16] ou encore à des régimes périodiques très lents dominés par l'échelle de temps intégrale (à partir duquel se développent les *breathers* chaotiques). Pour des gains plus élevés, une transition progressive vers la turbulence est observée, pour aboutir à des régimes chaotiques entièrement développés.

Les paramètres temporels δ et ε sont également très importants dans l'émergence des états chimères. Le modèle scalaire standard des dynamiques à retard ($\delta = 0$) ne permet pas l'observation de chimères stables [17]. La frontière d'existence des chimères stables dans l'espace (ε, δ) a été identifiée numériquement comme une courbe d'équation $\delta = \exp[(1 - \varepsilon^{-1})/2]$.

4 Conclusion

Les dynamiques à retard évoluent dans un espace des phases de dimension infinie et présentent a priori un fort potentiel de complexité dynamique, de manière semblable aux systèmes spatio-temporels. D'un point de vue expérimental, les dynamiques à retard sont beaucoup plus simples à concevoir et à analyser grâce à leur comportement purement temporel. Des techniques de base de traitement du signal et de photonique offrent également une grande flexibilité de choix des différents paramètres de fonctionnement ainsi que des transformations non linéaires. C'est dans ce contexte que nous avons pu

démontrer l'existence de comportements de type « chimère » dans un oscillateur optoélectronique à contre-réaction retardée modélisée par une équation intégral-différentielle non linéaire à retard. Cette variété de comportements confirme ainsi l'analogie bien connue entre les réseaux d'oscillateurs couplés dans lesquels les « chimères » ont été mises en évidence à l'origine.

Il est intéressant de noter qu'une telle analogie a été aussi exploitée récemment dans un complexe applicatif original, qui concerne l'implémentation matérielle d'un nouveau paradigme de calcul inspiré des réseaux de neurones : le système dynamique complexe utilisé pour l'implémentation matérielle jouant le rôle du réseau de neurones est précisément une dynamique non linéaire à retard [18, 19].

Références

1. Y. KURAMOTO & D. BATTOGTOKH, *Nonlinear phenomena in complex systems*, **5**, 380 (2002).
2. D. M. ABRAMS & S. H. STROGATZ, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 174102 (2004).
3. O. E. OMEL'CHENKO, M. WOLFRUM, & Y. MAISTRENKO, *Phys. Rev. E*, **81**, 065201(R) (2010).
4. A. M. HAGERSTROM, T. E. MURPHY, R. ROY, P. HÖVEL, I. OMELCHENKO & E. SCHÖLL, *Nature Phys.*, **8**, 658 (2012).
5. M. TINSLEY, S. NKOMO & K. SHOWALTER, *Nature Phys.*, **8**, 662 (2012).
6. E. A. MARTENS, S. THUTUPALLI, A. FOURRIÈRE, & O. HALLATSCHEK, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **110** 10563 (2013).
7. L. LARGER, B. PENKOVSKIY & Y. MAISTRENKO, *Phys. Rev. Lett.*, **111**, 054103 (2013).
8. F. T. ARECCHI, G. GIACOMELLI, A. LAPUCCI & R. MEUCCI, *Phys. Rev. A*, **45**, R4225 (1992).
9. L. LARGER & V. S. UDALTSOV, & J.-P. GOEDGEBUER, *Electron. Lett.*, **36**, 199 (2000).
10. K. IKEDA, *Optics Commun.*, **30**, 257 (1979).
11. H. M. GIBBS, F. A. HOPF, D. L. KAPLAN & R. L. SHOEMAKER, *Phys. Rev. Lett.*, **46**, 474 (1981).
12. J.-P. GOEDGEBUER, H. PORTE & L. LARGER, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2249 (1998).
13. V. S. UDALTSOV, L. LARGER, J.-P. GOEDGEBUER, M. W. LEE, E. GENIN, & W. T. RHODES, *IEEE Trans. Cir. Syst. I*, **49**, 1006 (2002).
14. Y. C. KOUOMOU, P. COLET, L. LARGER & N. GASTAUD, *Opt. Lett.*, **32**, 2571 (2007).
15. Y. K. CHEMBO, L. LARGER, H. TAVERNIER, R. BENDOULA, E. RUBIOLA & P. COLET, *Opt. Lett.*, **32**, 2571 (2007).
16. L. WEICKER, T. ERNEUX, O. D'HUYS, J. DANCKAERT, M. JACQUOT, Y. CHEMBO & L. LARGER, *Phys. Rev. E*, **86**, 055201(R) (2012).
17. G. GIACOMELLI, F. MARINO, M. A. ZAKS & S. YANCHUK, *Europhys. Lett.*, **99**, 58005 (2012).
18. L. APPELTANT, M. C. SORIANO, G. VAN DER SANDE, J. DANCKAERT, S. MASSAR, J. DAMBRE, B. SCHRAUWEN, C. R. MIRASSO & I. FISCHER, *Nat. Commun.*, **2**, 1 (2011).
19. L. LARGER, M. C. SORIANO, D. BRUNNER, L. APPELTANT, J. M. GUTIERREZ, L. PESQUERA, C. R. MIRASSO & I. FISCHER, *Opt. Express*, **20**, 3241 (2012).

Supernova: explosion or implosion?

Martine Le Berre¹, Yves Pomeau², Pierre-Henri Chavanis³ & Bruno Denet⁴

¹ Institut des Sciences Moléculaires d'Orsay ISMO - CNRS, Université Paris-Sud, Bat. 210, 91405 Orsay Cedex, France

² Department of Mathematics, University of Arizona, Tucson, AZ 85721, USA

³ Laboratoire de Physique Théorique (UMR 5152 du CNRS), Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France

⁴ Université Aix-Marseille, IRPHE, UMR 7342 CNRS et Centrale Marseille, Technopole de Château-Gombert, 49 rue Joliot-Curie, 13384 Marseille Cedex 13, France

`martine.le-berre@u-psud.fr`

Résumé. L'explosion d'une étoile massive est un phénomène complexe de mécanique des fluides durant moins de dix secondes alors que l'étoile était auparavant en équilibre depuis des milliards d'années. Nous interprétons ces échelles de temps multiples caractérisant les supernovae à la lumière d'une théorie dynamique des catastrophes : l'équilibre entre la pression qui tend à repousser la matière vers l'extérieur et la gravité qui tend à l'attirer vers le centre présente une bifurcation de type centre-col. Nous montrons que la disparition de l'état d'équilibre au point de bifurcation est décrit par une équation générique de Painlevé I qui pourrait décrire soit une explosion soit une implosion. Pour une forme particulière de la relation pression-densité conduisant à une implosion, ce résultat est confirmé par deux approches, d'abord par la résolution numérique des équations d'Euler-Poisson, ensuite par la dérivation de la forme normale de la solution au voisinage du point de bifurcation. Après l'amorce du collapse, juste avant la divergence de la densité au centre de l'étoile, notre modèle montre un comportement self-similaire nouveau, compatible avec les observations numériques, où les forces de gravité l'emportent sur la pression dans la partie centrale de l'étoile. Cette solution serait physiquement compatible avec la formation, dans un second temps, d'une explosion qui est observée mais non expliquée. D'autre part, nous proposons d'étudier d'autres configurations de bifurcation noeud-col qui conduiraient dès la bifurcation à une explosion partielle ou totale de l'étoile.

Abstract. Because the collapse of massive stars occurs in a few seconds, while the stars evolve on billions of years, the supernovae are typical complex phenomena in fluid mechanics with multiple time scales. We describe them in the light of a dynamical catastrophe theory, assuming that successive equilibria between pressure and gravity present a saddle-center bifurcation. In the early stage we show that the loss of equilibrium may be described by a generic equation of the Painlevé I form. For a particular pressure-density relation this is confirmed by two approaches. First, by the full numerical solutions of the Euler-Poisson equations, secondly by a derivation of the normal form of the solutions close to the saddle-center. In the final stage of the collapse, just before the divergence of the central density, we show that the existence of a self-similar collapsing solution compatible with the numerical observations imposes that the gravity forces are stronger than the pressure ones. For such processes beginning by an implosion (type II supernovae), our new self-similar solution could be compatible with the explosion of outer shells, a phenomenon not yet well explained. Besides we suggest to investigate other configurations of saddle-center bifurcation which should lead directly to partial or total explosion of the star at the bifurcation.

1 Introduction

Stellar explosions are among the most spectacular phenomena in nature. The most energetic ones, named supernovae, are so luminous that they briefly outshine an entire galaxy, before fading from view over several weeks or months. From the point of view of dynamical systems, such an explosion is remarkable: the process which initiates a supernova is extremely brief, it lasts a few milliseconds although stars evolve on very long time scale, in the billion years range. This was the point which motivated our work: why can stars die so abruptly?

Another important question which we raise here is the following. Existing theories imagine that massive supernovae display a two-steps mechanism: first a core collapse (implosion) due to the disruption of the equilibrium between pressure (which pushes matter outside) and gravity (which pulls towards the star center), secondly a delayed bounce [1] of the matter against the hard core. However this bounce, if it ever occurs, has not yet been explained by a generally accepted theory. This because of the difficulty of the outward process to win over the falling matter. Actually astrophysicists have worked since almost a century with the aim of finding plausible mechanisms in agreement with what has been observed, which is not the death process itself but the radiation emitted after the star death. Yet no definite answer is given. The state of the art distinguishes two kinds of supernovae [1], the less massive (type I) which totally explode and the massive (type II) which should display core collapse (implosion) *and* explosion.

Our approach of the phenomenon of supernovae is not to try to describe quantitatively this immensely complex phenomenon, which depends on many uncontrolled and poorly known physical phenomena, like equations of state of matter in conditions not realizable in laboratory experiments, the definition of the initial conditions for the star collapse, the distribution of various nuclei in the star, etc. We argue that the huge difference of time scales involved should lead to a description of the supernovae in the light of a catastrophe theory [2] including a dynamical (time dependent) parameter, the basic mechanism for star collapse being the loss of equilibrium between pressure and self-gravity at a critical value of this parameter.

The results presented here are described in [3] where the interested reader will find more information. We introduce in section 2 a universal equation valid for Hamiltonian systems (no dissipation) undergoing a saddle-center bifurcation (merging of a center and a saddle at the fold point to make disappear any equilibrium state) which is of the Painlevé I form. This equation could describe an explosion as well as a collapse. Using a particular equation of state, which leads to a core collapse (implosion), we show that by a slow decrease of a given parameter (called here temperature, but it could be entropy), the series of equilibria do show a saddle-center bifurcation and that the full Euler-Poisson equations can be reduced to Painlevé I normal form at the first stage of the catastrophe. We briefly describe in section 3 the new self-similar solution of Euler-Poisson equations and its relevant properties in relation to a post-collapse evolution of the outer shells. In section 4 we finally propose to investigate other pressure-density relations which should lead to explosion processes.

2 Saddle-center bifurcation

2.1 The Painlevé equation

We consider the case where a star is in equilibrium during a long period, as the time dependent control parameter changes, then the series of equilibria presents a bifurcation such that no equilibrium exists beyond the critical point. This loss of equilibrium is responsible for the catastrophe which arises with a very short time scale. In another context it has been shown [4] that such a slow-to-fast transition can be described as resulting from a slow sweeping across a saddle-node bifurcation. Here the bifurcation should be a saddle-center because our system is Hamiltonian (it is described by the Euler-Poisson equations). Another example of dynamical saddle-center bifurcation is the loss of stability of floating body by increasing its charge (see Ref. [11] of [3]), although it has never been considered as here in the light of a *dynamical* bifurcation after it was understood, 2300 years ago, in its static version. In the slow regime we assume that an adiabatic approximation is possible, neglecting the diffusion and/or mechanical arrangement processes which could be responsible of some discontinuities in the route to equilibrium, because these processes have a short time scale compared to the slow evolution time. Defining $R = (r_0 - r_c)/r_c$ as the relative difference between r_c , the value of the radius of the star at the saddle-center bifurcation (time zero) and its value at time t , together with $V(r_0, t) = ct + bR^3/3 + \dots$ a time dependent potential limited to its first term in the Taylor expansion (versus time), the Newtonian dynamics $\frac{d^2 r_0}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial r_0}$ becomes of Painlevé I form (see Ref. [28] of [3]),

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \ddot{R} = -ct - bR^2. \quad (1)$$

Here we treat the case of an implosion, then the parameter c is supposed to be positive, so that the solution at large negative time is close to equilibrium $R = \sqrt{-ct/b}$ and positive, crosses zero at a time close to zero and diverges ($R(t) = -(6/b)(t_* - t)^{-2} \rightarrow -\infty$) at finite positive time t_* . The long time scale is $\theta = b/c$, the short one, τ , appears close to the divergence where equation (1) reduces to $\ddot{R} = -bR^2$ which has the characteristic time $\tau = 1/\sqrt{b}$. Introducing the intermediate time scale $t_0 = 1/(bc)^{1/5}$, or $t_0 = (\theta\tau^4)^{1/5}$ which is such that $\tau \ll t_0 \ll \theta$, and the radius $r_s = c^{2/5}/b^{3/5}$, and setting $\hat{R} = R/r_s$ and $\hat{t} = t/t_0$, allows to scale out the two parameters b, c of equation (1). In another context we emphasized the important role of the intermediate time scale t_0 which may be seen as a precursor time before an earthquake [4]. Note that the blow-up of the solution of equation (1) at finite time t_* does *not* imply a physical singularity at this instant. It only shows that, when t approaches t_* by negative values, the relative radius of the star $R(t)$ changes enough to reach an order of magnitude, such that the approximation of V by the first two terms (linear and cubic with respect to R) of its Taylor expansion is no longer valid, imposing to switch to a theory valid for finite displacements. Actually we have to consider two types of finite time singularity in this problem. Here we have met first a singularity of the solution of Painlevé I equation, a singularity due to various approximations made for the full equations which disappears when the full system of Euler-Poisson equations is considered. But, as we shall see, the solution of this Euler-Poisson set of dynamical equations shows a finite time singularity also, which is studied in section 3 and which is directly related to the core collapse of supernovae (implosion).

2.2 Euler-Poisson system for a barotropic star presenting a saddle-center

We describe the star as made of a compressible inviscid fluid with a barotropic equation of state $p = p(\rho)$. The relevant set of hydrodynamic equations are the barotropic Euler-Poisson system. These are dynamical equations for a compressible inviscid fluid with a pressure-density relation, including the gravitational interaction via Poisson equation. Note that there is no dynamical equation for the transport of energy. They read

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p - \rho \nabla \Phi, \quad (3)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho, \quad (4)$$

where \mathbf{u} is the fluid velocity vector, ρ the mass density, and G Newton's constant.

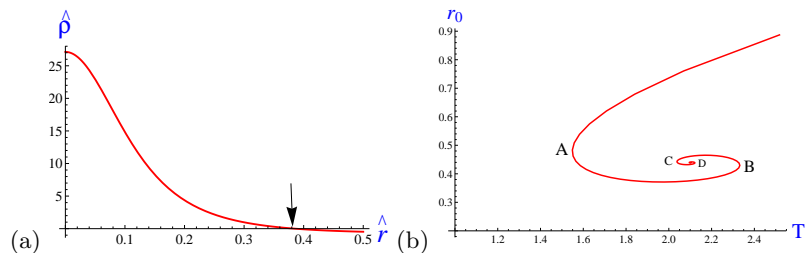


Figure 1. Equilibrium solutions (a) density $\hat{\rho}$ versus \hat{r} , (b) star radius versus temperature.

We assume spherical symmetry, and choose an equation of state of the form

$$p(\rho) = \rho_* T \left(\sqrt{1 + \rho/\rho_*} - 1 \right)^2. \quad (5)$$

For $\rho \rightarrow +\infty$, it reduces to the isothermal equation of state $p = \rho T$ which is known to present saddle-center bifurcation, but has the disagreement to lead to infinite mass. At low density it reduces to the

polytropic equation of state $p = K\rho^\Gamma$ with polytropic index $\Gamma = 2$ and polytropic constant $K = T/(4\rho_*)$, serving as an envelope to confine the system.

The enthalpy function $h(\rho)$ defined by $dh = dp/\rho$ is explicitly given by

$$h(\rho) = 2T \ln \left(1 + \sqrt{1 + \rho/\rho_*} \right) - 2T \ln(2), \quad (6)$$

where the constant of integration has been determined such that $h(\rho = 0) = 0$. With this choice, the enthalpy vanishes at the edge of the star. The equilibrium solution is obtained by solving $\Delta h + 4\pi G\rho(h) = 0$ with $\rho(h) = 4\rho_* (e^{h/T} - e^{h/2T})$. We obtain $\hat{h}_{,\hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}}\hat{h}_{,\hat{r}} + 4\pi\hat{\rho}(\hat{h}) = 0$ using the scaled variables defined in section 3 of [3]. The solution of the latter equation is shown in Fig. 1 (a), where the scaled density vanishes at finite radius defined as the star radius. By varying \hat{h}_0 from 0 to $+\infty$ we can obtain the whole series of equilibria $r_0(T)$ giving the radius of the star as a function of the temperature, using the quantities \hat{h}_0 (or \hat{r}_0) as a parameter. The result is a spiralling curve shown in Fig. 1 (b) where only the upper part is stable, the solution losing its stability at the saddle-center (turning point A). At this point the Euler-Poisson system admits a neutral mode $j(\hat{r})$ which obeys the differential equation $j_{,\hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}}j_{,\hat{r}} + 4\pi(\frac{d\hat{\rho}}{d\hat{h}})_c j(\hat{r}) = 0$, represented in Fig. 2 (c), red curve.

2.3 Derivation of Painlevé I equation from Euler-Poisson system

In view of studying the dynamics of the solution close to the saddle-center, let us assume a slow decrease of the temperature versus time, of the form $T = T_c(1 - \gamma't)$ with positive γ' in order to start at negative time from an equilibrium state. We show that the dynamics of the Euler-Poisson system close to the saddle-center reduces to Painlevé I equation. This property is proved first by showing that the normal form of the full Euler-Poisson system (2)–(4) is of Painlevé I form, secondly by comparing the normal form solutions to the full Euler-Poisson ones. The derivation of these results is detailed in section 4 of [3].

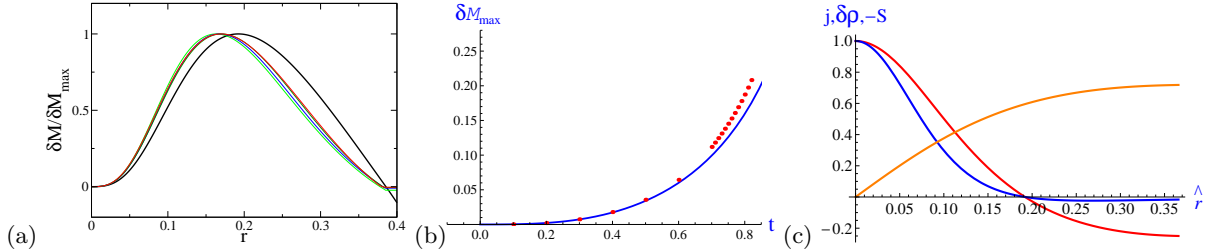


Figure 2. Comparison between theory (thick black curves) and Euler-Poisson numerical solutions: (a) mass $M^{(1)}(\hat{r}, t)$ versus \hat{r} , (b) $M^{(1)}(\hat{r}, t)$ versus time. (c) Spatial profile of the neutral mode $j(\hat{r})$ (red), of the first order density mode $\delta\rho(\hat{r}, t)$ (blue) and of the displacement $-S(\hat{r}, t)$ (orange), see Equation (9).

We consider the dynamics of the mass contained inside the sphere of radius r in the star, $M(r, t) = \int_0^r dr' 4\pi r'^2 \rho(r', t)$ which obeys the equation

$$\frac{\partial^2 M(r, t)}{\partial t^2} = 4\pi r^2 p_{,r} + \frac{1}{r^2} M_{,r} M, \quad (7)$$

where the term $p_{,r} = p'(\rho)\rho_{,r}$ has to be expressed as a function of $\rho(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} M_{,r}$ and $\rho_{,r}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} (M_{,r^2} - \frac{2}{r} M_{,r})$. The mass profile is expanded as $M(r, t) = M^{(c)}(r) + \epsilon M^{(1)}(r, t) + \epsilon^2 M^{(2)}(r, t) + \dots$ where $M^{(c)}(r)$ is the equilibrium profile at $T = T_c$, and ϵ is a small parameter which characterizes a variation of the temperature with respect to its value at the saddle-center, $T = T_c(1 - \epsilon^2 T^{(2)})$. The first order term $M^{(1)}(r, t) = A(t)F(r)$ is shown to display a positive and bump-shape radial profile $F(r)$ drawn in Fig. 2 (a) (thick black curve), and a time dependent part $A(t)$ which obeys Painlevé I equation

$$\ddot{A}(t) = \tilde{\gamma}t + KA^2 \quad (8)$$

with $\tilde{\gamma} = 120.2\dots\gamma'$ and $K = 12.32\dots$, drawn in Fig. 2 (b) (solid blue curve). These results agree well with the numerical simulations of the full Euler-Poisson equations, which are reported on the corresponding figures (thin lines in (a), dots in (b)) for increasing values of time. Note that Painlevé I equation can be derived as well for the first order deviation of the density $\delta\rho(r, t) = M_{,r}^{(1)} \frac{1}{4\pi r^2}$, and of the radial motion of a particle initially at radius r moving subsequently at $r + S(r, t)$, which writes

$$S(r, t) = A(t)j_{,r} \frac{1}{4\pi\rho_c(r)}. \quad (9)$$

The radial dependance of these two quantities is shown in Fig. 2 (c), blue and orange curves respectively.

In summary the analysis derived from Painlevé I equation yields correct results, at least for small deviations from the equilibrium, not only for the exponents, but also for all the numerical prefactors. This defines somehow completely the starting point of the “collapse of the star”.

3 Self-similar collapse

There is still a long way from the normal form toward the understanding of supernovae. As a next step forward, we look at the dynamics of the solution of the Euler-Poisson equations with radial symmetry, starting with a quasi-equilibrium numerical solution of the equations of motion. We emphasize the importance of the initial conditions for solving the dynamics, a delicate problem which could lead to various solutions. The most noticeable feature of our numerical study is the occurrence of a singularity at the center of the star after a finite time, with solutions of the form

$$\begin{cases} \rho(r, t) = (-t)^\beta R (r(-t))^{\beta/\alpha} \\ u(r, t) = (-t)^\gamma U (r(-t))^{\beta/\alpha} \end{cases} \quad (10)$$

where α , β and γ are real exponents different from the well known Larson-Penston ones (see Refs. [4] and [5] of [3]) ($\alpha = -\beta = 2$ and $\gamma = 0$) which were derived by a simple balance of all terms present in the equations. To describe our numerical results, we must invoke a singularity of the second kind, in the

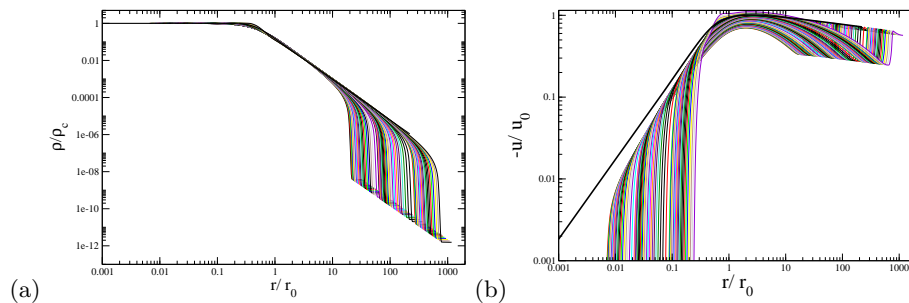


Figure 3. Close to the singularity: comparison between self-similar solution (10) (thick black curves) and Euler-Poisson numerical solutions (a) Density $\rho(r, t)/\rho(0, t)$ (b) Velocity $-u(r, t)/u(r_0, t)$, both versus $r/r_0(t)$ with $r_0(t)$ such that $\rho(0, t)r_0(t)^\alpha = 1$ and $\alpha = 24/11$. A shock wave is visible at the edge of the star, see the oscillations of the velocity.

sense of Zel’dovich (Ref. [34] of [3]), which has to be derived from relevant asymptotic matching, that requires in our case to neglect the pressure forces in regards to gravity forces, as detailed in section 5 of [3]. If gravity dominates over pressure, the exponents are $\alpha = \frac{24}{11}$, $\beta = -2$ and $\gamma = -\frac{1}{12}$. We show that an analytical expression of this new self-similar solution can be derived using the procedure of Mestel (Ref. [35] of [3]), giving

$$\begin{cases} \frac{\rho(r, t)}{\rho_c(t)} = \frac{3}{3+14y+11y^2} \\ \frac{r}{r_0(t)} = y^{1/4}(1+y)^{2/3} \\ \frac{\dot{r}}{r_0(t)} = y^{1/4}(1+y)^{2/3} \end{cases} \quad (11)$$

where the parameter $y = \frac{1}{2}(\frac{a}{A})^4 \frac{t_f}{\delta t}$ goes from 0 to $+\infty$ ($\delta t = t_f - t$ is the delay before the collapse time t_f). The Euler-Poisson numerical solutions (density and velocity) at different times before the collapse are shown in Figs. 11 and 12 in [3], and the merging of these solutions via the relation (10) is illustrated in Fig. 3 which displays a good agreement with the parametric free-fall solution (11) (thick black curve).

At the singularity time the core density does not write as a Dirac distribution but as a power law $\rho(r, 0) \propto r^{-\alpha}$ which yields for $\alpha < 3$ a mass converging at $r = 0$ (the large distance behavior is to be matched with an outer solution to make the total mass finite). Because we do not have a Dirac peak of finite mass at $r = 0$ at t_f , our post-collapse situation looks (mathematically) like the one of the dynamics of the Bose-Einstein condensation where the mass of the condensate begins to grow from zero *after* the time of the singularity (see Refs. [7] and [8] of [3]).

We show that the central mass increases as $M_c(t) = K_M t^{3/4}$, moreover the rest of the star continues to fall towards the center with a self-similar behavior (see Section 6 of [3]).

4 Explosion?

Because of the lack of precise knowledge of the stars parameters before and after the collapse, we have put our study in a general framework of dynamical systems to explain the type II supernovae phenomenon. Here we worked in the *canonical* description (T is fixed at a given time), and we have chosen a particular equation of state, but our aim is to go beyond the corresponding application domain. Here we do observe and predict an inward motion leading to a core collapse, then we predict the formation of a sort of condensate while the rest of the star continues to fall down towards the core, therefore no outward motion is observed or predicted by this model at the saddle-center A .

Nevertheless an outward motion would be possible for other configurations of saddle-centers. We plane to investigate several trails. The first one concerns the *microcanonical* description of a star that may generalize previous studies concerning isothermal spheres bounded into a box where the formation of a core plus a halo has been found. A preliminary study within this description shows that with the equation of state (5) a saddle-node bifurcation exists, where the displacement $S(r, t)$ (at first order) displays a mixed inward-outward motion which we conjecture to be driven by Painlevé I equation. The spatial profile $S(r)$ is negative close to the center and positive elsewhere. This behavior indicates that the center of the star should collapse whereas the outer shell should move outward. This scenario could reproduce what happens for most of type II supernovae which leave behind a neutron star or a black hole.

Another track concerns the exploration of secondary critical points (in microcanonical or canonical descriptions). Whereas these points cannot be reached continuously from stable states, because secondary branches are unstable, it could happen that the system could cross one of them along its history, therefore these secondary critical points seem interesting to investigate.

Another possibility is to investigate a saddle-center bifurcation with other equations of state. Indeed we proved in subsection 5.2.3 of [3] that for other polytropic equations of state, of the form $p(\rho) = \rho^\Gamma$ with a polytropic index in the range $13/12 < \Gamma < 4/3$, the pressure forces prevail over the gravity forces. In that case, we conjecture that if a saddle-center exists the motion of matter could be exclusively outward, that could describe type Ia supernovae (which explode without implosion), and perhaps also supernovae of some massive stars, those which leave behind no compact remnant.

References

1. H. A. BETHE, *Rev. Mod. Phys.*, **62**, 801 (1990); A. BURROWS, *Rev. Mod. Phys.*, **85**, 245 (2013).
2. R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénese*, Benjamin, New York, (1972). V. I. ARNOL'D, *Catastrophe Theory*, 3rd ed., Springer-Verlag.
3. Y. POMEAU, M. LE BERRE, P.-H. CHAVANIS & B. DENET, to appear in *Eur. Phys. J. E*, [[arXiv:1307.4786](#)].
4. R. D. PETERS, M. LE BERRE & Y. POMEAU, *Phys. Rev. E*, **86**, 026207 (2012), [[arXiv:1204.1551](#)]; Y. POMEAU & M. LE BERRE, *Chaos, CNN, Memristors and Beyond*, Eds. A. Adamatzky & G. Chen, World Scientific, chap. 28 (2012); Y. POMEAU & M. LE BERRE, [[arXiv:1107.3331](#)].

Non-linear poro-elastic coupling in real and artificial branches and its possible link to plants mechano-perception

Jean-François Louf, Geoffroy Guéna, Olivier Pouliquen, Yoël Forterre¹, Éric Badel, Hervé Cochard & Bruno Moulia²

¹ Laboratoire IUSTI, 5 Rue Enrico Fermi, 13453 Marseille cedex 13

² Laboratoire PIAF, 5 chemin de Beaulieu, 63039 Clermont-Ferrand cedex 2
jean-francois.louf@univ-amu.fr

Résumé. En conditions naturelles, les plantes sont sans cesse soumises à des sollicitations mécaniques externes, comme le vent ou la pluie, qui affectent et modifient leur croissance [17]. De façon remarquable, cette réponse en croissance n'est pas seulement locale, mais s'observe aussi à grande distance de la zone stimulée et très rapidement après la sollicitation [5]. Cela suggère l'existence chez les plantes d'un transport rapide de l'information sur une longue distance. Cependant, la nature et le mécanisme de transport de ce signal ne sont pas connus.

Récemment, il a été suggéré que ce signal pourrait être une onde de pression générée par la flexion mécanique des branches [8, 12]. Afin de tester cette idée et les mécanismes physiques mis en jeu, nous avons développé une branche artificielle en élastomère de silicone (PDMS) consistant en une poutre cylindrique percée de micro-canaux et remplie d'un liquide visqueux [11]. De façon surprenante, la flexion d'une telle poutre génère une surpression dont l'amplitude varie quadratiquement avec la déformation imposée. Pour comprendre l'origine de cette réponse non-linéaire, nous proposons un modèle simple basé sur l'idée qu'une poutre poreuse en flexion tend à comprimer sa section transverse afin de minimiser l'énergie élastique totale du système. Des expériences sur des branches réelles réalisées en collaboration avec l'INRA suggèrent la robustesse de ce mécanisme.

Abstract. The perception of mechanical stimuli in the environment is crucial to the survival of all living organisms, and plants make no exception. At the scale of a tree, the bending of a stem leads to a transient growth response, not only locally but also far away from the stimulated area, suggesting the existence of a long range information signal within the plant network. The nature and mechanism of this long range signal is not well known, but it has been suggested that it could result from a purely hydraulic pressure signal created in response to the mechanical bending of the hydrated wood tissue. Recently, such hydro-mechanical coupling have been directly observed in plants in the PIAF-INRA Laboratory. The objective of this work is to better understand the physical mechanisms responsible for this hydro-mechanical response, by performing experiments on physical poroelastic beams mimicking stems and branches. To this end, we have designed an original three-dimensional micro-fluidic device consisting of a transparent elastomer beam (PDMS) perforated with longitudinal micro-channels and filled with a viscous liquid. The poroelastic response of this biomimetic branch to a sudden bending has then been studied in a closed geometry. The main result of this study is that the bending of the artificial branch generates a global overpressure in the system. This overpressure increases quadratically with the bending deformation, and is controlled by the pore bulk modulus of the media. We propose a simple model to explain our measurements and discuss the results in the context of plants.

1 Introduction.

Since Darwin, scientists know that plants are able to respond to mechanical stimuli, a process called thigmomorphogenesis [2, 7, 15]. This ability is crucial to the survival of plants, who are continuously exposed to mechanical perturbations such as wind, rain, contact with other plants and so on. For example, at the tree scale, the bending of a branch leads to a rapid change of growth not only locally but also far from the stimulated area suggesting the existence of a long-range signal through the plant [5]. The nature and the mechanism of propagation of this signal is not well known and different hypothesis have been proposed in the literature. One of these is that the signal propagation is purely mechanical [8, 12]: a hydraulic pulse could be generated in response to a local mechanical strain, and could propagate rapidly along the water conductive system of the plant.

This hypothesis of a purely hydro-mechanical coupling has been recently investigated in the PIAF-INRA laboratory in Clermont-Ferrand, by Éric Badel, Hervé Cochard and Bruno Moullia [10]. To this end, hydraulic pressure measurements have been made in plant stems or branches subjected to a rapid and controlled bending. Their main result is that the bending of a branch leads to an overpressure that spreads through the vascular system. These experiments are the first to evidence the existence and propagation of a hydraulic pressure wave in plants in response to a localised bending. It is tempting to assume that such hydraulic signals could play an important role in the long range signalling in plants mechano-perception. On the other hand, from a purely physical and mechanical point of view, these results point to interesting and non-trivial questions. What are the physical mechanisms responsible for the hydraulic pulse generation? What set the amplitude of the pressure pulse, its speed of propagation and its damping rate?

In physics and mechanics, poroelasticity is a natural framework to study the dynamics of a porous deformable solid saturated with a liquid [1,16]. From this point of view, one expects that the bending of a stem or a branch saturated with water induces a water flow. When an elastic beam is bent, some parts are stretched while others are compressed. These local changes of volume must be followed by water expulsion or suction. However, in the linear beam theory, both effects compensate exactly for a symmetrical beam and the *total* change of volume should be zero under pure bending. It is therefore not at all trivial that bending of a branch produces a non-zero mean pressure pulse as observed. While previous theoretical works have studied the linear behaviour of a poroelastic beam *e.g.* [4,14], very few experimental studies have been performed [13]. Moreover, to our knowledge, no study has investigated the poroelastic dynamics of a beam composed of a soft cellular material in the large deformation regime.

2 Experiments on artificial branches.

Minimal ingredients for a biomimetic branch: From a mechanical point of view, a very simple picture of a tree branch is an elastic beam perforated with thin channels drilled in the longitudinal direction and filled with a viscous fluid. This original three-dimensional milli-fluidic device is made of a silicone elastomer (Polydimethylsiloxane) and elaborated using moulding techniques. The elastomer is soft, transparent and isotropic (Young modulus $E \sim 2$ MPa). The size of the channels is $d = 500 \mu\text{m}$. Channels are filled with a viscous fluid (silicon oil or Ucon oil/water mixture) (see Figure 1 for details).

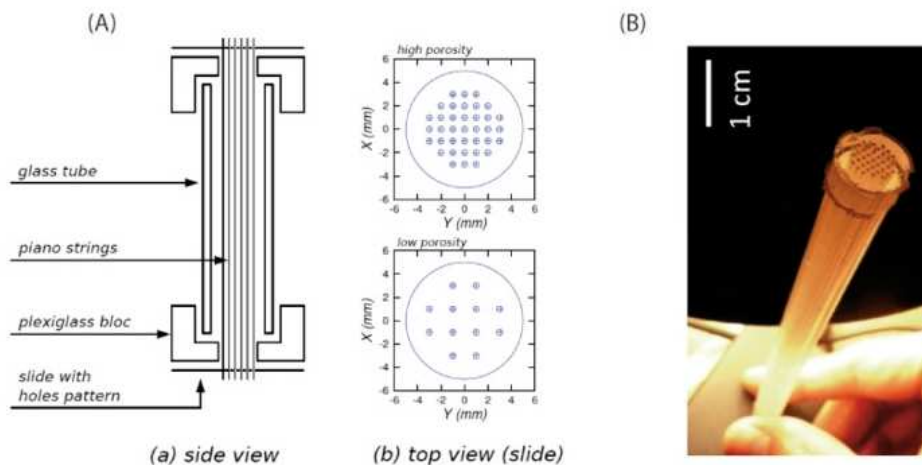


Figure 1. (A) Moulding set-up. (B) Picture of a poroelastic beam.

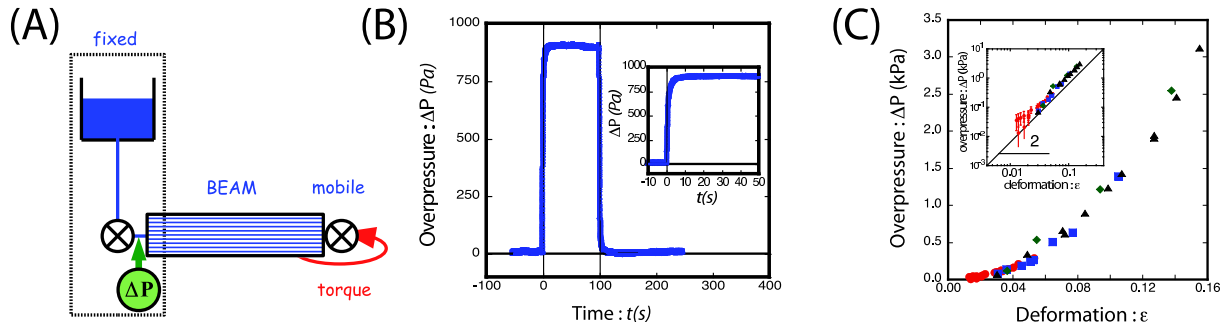


Figure 2. (A) Experimental set-up. (B) A typical pressure signal. Bending (at $t = 0$ s) leads to a stationary overpressure after a transient poro-elastic time and goes back to initial value after unbending (at $t = 100$ s). (C) Non-linear dependance of the amplitude of the stationary pressure pulse as a function of the bending deformation. Each point corresponds to one experiment.

Experimental set-up: All the experiments presented here are performed in the situation of a closed system *i.e.* there is no exchange of fluid between the inside and the outside of the beam. For practical reasons, we work in the geometry of a cantilever beam: the pressure signal is recorded from one fixed end of the beam while deformation is imposed rapidly by the displacement of the other end of the beam (see Figure 2 (A)). To ensure reproducibility, the displacement of the mobile part of the beam is performed with help of a linear actuator. A picture of the beam is taken afterward from which is extracted the mean curvature: $\langle C \rangle = \Delta\theta/L$ where L is the length of the beam and $\Delta\theta$ is the angle difference between both extremities of the beam. The bending deformation ϵ is defined as the maximal longitudinal deformation induced by bending and is given by $\epsilon = (D/2)\langle C \rangle$ where D is the diameter of the beam.

Main characteristics of the pressure signal when bending: A typical hydraulic pressure signal is presented on Figure 2 (B). We see on this figure that pressure reaches a non-zero value which is maintained stationary as long as bending is imposed. Second the transient regime over which the pressure sets up is well accounted for by the relaxation poro-elastic time of the beam. This is in qualitative agreement with the hypothesis of a hydraulic pulse generated by bending and is coherent with experiments performed on plants. Interestingly, we also find that the amplitude of the overpressure ΔP varies quadratically with the bending deformation ϵ (see Figure 2 (C)). These features come up two questions we will now address: (1) Why bending creates an overpressure? (2) Why the pressure response is non-linear whereas the material is still in its linear response regime?

3 A simple elastic model for the pressure response to bending.

In contrast with the prediction of the linear elastic beam theory, the observed over-pressure shows that bending leads to a global change of volume in the system. A possible explanation is the following. When an elastic beam is bent, the longitudinal elastic deformations (extension and compression) increase with the distance to the neutral surface. Now, if the beam is composed of a porous media, the system can reduce the bending elastic energy by deforming its cross-section and gather the material closer to the neutral surface. This “squeezing” of the cross-section is, in turn, associated with a global decrease of the pore area and gives rise to a decrease of the volume of the beam in response to bending (see Figure 3).

(1) Minimisation of the total elastic energy. The total elastic energy is given by the sum of the elastic energy associated with bending in the longitudinal direction and squeezing in the transverse direction. The bending elastic energy of a beam of circular cross-section of diameter D , length L , effective Young modulus E , and bent at a constant curvature C , is given by [9]:

$$U_{\text{bend}} = \frac{EV}{32} D^2 C^2 \quad (1)$$

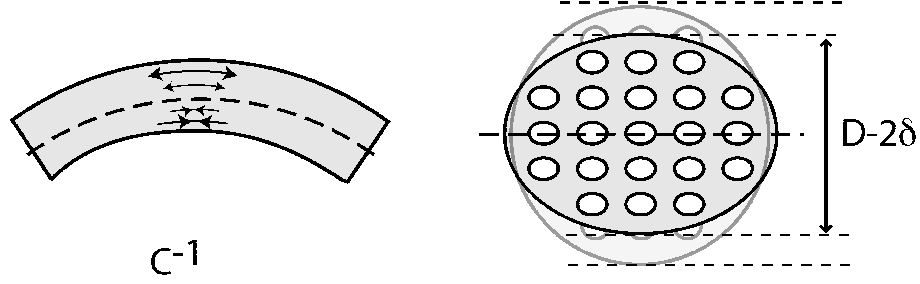


Figure 3. Ovalization process: the elastic energy associated with the curvature of the beam (left) is decreased by the squeezing of the section of the beam (right)

where $\epsilon = (D/2)\mathcal{C}$ is the bending deformation defined in the experiment and $V = \pi D^2 L/4$ is the volume of the beam. When the section of the beam is squeezed by a factor δ , the moment of inertia of the beam is reduced ($D \rightarrow D - 2\delta$) and the bending energy can be approximated as:

$$U_{\text{bend}}(\delta) \approx \frac{EV}{32} (D - 2\delta)^2 \mathcal{C}^2. \quad (2)$$

We can see in this expression that a transverse compression $\delta > 0$ decreases the bending energy. However, this transverse deformation has a cost in term of elastic energy that we need to estimate. By analogy with the elastic energy stored in a compressed bar $[(1/2)EV(d\ell/\ell)^2]$, we write the squeezing energy U_{squeeze} associated to the deformation of the transverse deformation of the cross-section as:

$$U_{\text{squeeze}}(\delta) \approx \frac{EV}{2} \left(\frac{2\delta}{D} \right)^2 \quad (3)$$

where $\epsilon_{\perp} = 2\delta/D$ are the typical transverse deformation (Figure 3). The equilibrium value of δ is found by minimising the sum of the bending energy U_{bend} and the squeezing energy U_{squeeze} , that is: $\frac{d}{d\delta} (U_{\text{bend}} + U_{\text{squeeze}}) = 0$. At the lowest order ($2\delta \ll D$), this gives:

$$\frac{2\delta}{D} \approx \frac{D^2 \mathcal{C}^2}{16} \quad \text{or} \quad \epsilon_{\perp} \approx \frac{\epsilon^2}{4}. \quad (4)$$

This analysis therefore shows that the transverse deformation of the beam cross-section ϵ_{\perp} varies with the power 2 of the bending deformation ϵ . Now, in the 2D cross-section plane, we can write that the relative change of the pore area associated with this transverse compression writes: $\Delta A_c/A_c = -(1 - \nu_c)\epsilon_{\perp} \approx -(1 - \nu_c)\epsilon^2/4$ where A_c is the pore area and ν_c is a 2D surface area Poisson ratio characterizing the change of pore area for a given 2D deformation. In the case of a 2D sheet containing holes, the prefactor $(1 - \nu_c)$ is of the order of unity [6]. In our parallel channel geometry, this pore area change is equal to the pore volume change: $\Delta A_c/A_c = \Delta V_c/V_c$, where V_c is the pore volume. Therefore:

$$\frac{\Delta V_c}{V_c} \sim -\frac{\epsilon^2}{4}. \quad (5)$$

This simple model then predicts that bending a porous beam leads to a global volume change of the channel that is proportional to the square of the bending deformation. This non-ovalization linear effect comes from the flattening of the cross-section when the porous beam is bent, due to a competition between the longitudinal bending deformation and the transverse cross-section deformation. This effect is reminiscent of the ovalization phenomenon observed in bent elastic tubes and first described by Brazier [3]. When a tube of circular section is bent, its section flattens before collapsing at large deformation. We shall now take into account the presence of an incompressible fluid in the porosity of the beam to express the relation between the relative change of the total volume of the channels expected in an open system and the overpressure observed in a closed system.

(2) **Relation between volume change with pressure change.** In the situation where liquid cannot be exchanged with the outside (what we have called a closed system), bending a porous beam at constant volume can be divided in two steps: in the first step, the beam is bent slowly up to \mathcal{C} , and the fluid is let free to be drained out from the beam. In this case, a volume $-\Delta V_c < 0$ is removed from the beam according to equation (5) while the pore pressure remains zero. In the second step, we maintain the bending curvature \mathcal{C} constant and inject the volume of liquid ΔV_c in order to recover the initial volume of the system ($\Delta V_c = 0$). This injection of fluid is then associated to an increase of the pore pressure ΔP , which is the quantity we are looking for. The relation between ΔP and ΔV_c is given by the ‘‘pore bulk modulus’’ B defined by: $\Delta P = -B\Delta V_c/V_c$. which combined with equation (5) gives the relation between the bending deformation ϵ and the pressure response ΔP :

$$\Delta P \sim B \frac{\epsilon^2}{4} . \quad (6)$$

Our model therefore recovers the quadratic relation between the pressure and the bending deformation observed experimentally. In this model, the overpressure ΔP is essentially controlled by the pore bulk modulus B of the porous beam. The measured bulk modulus of the PDMS branch is $B = 2.5 \times 10^5$ Pa. Equation (6) then predicts that a 10% curvature deformation will generate an overpressure of order $\Delta P \sim 10^3$ Pa, in good agreement with the experiments (see Figure 2 (B)).

4 Comparison between real and artificial branches.

In order to test the naive picture we used to design artificial branches, the same experiment has been performed on real branches. Even though experiments on real branches is much more difficult than on artificial branches because of the intrinsic variability of living systems, we observed the same quadratic pressure response to bending as for artificial branches (see Figure 4). This suggests that we have captured

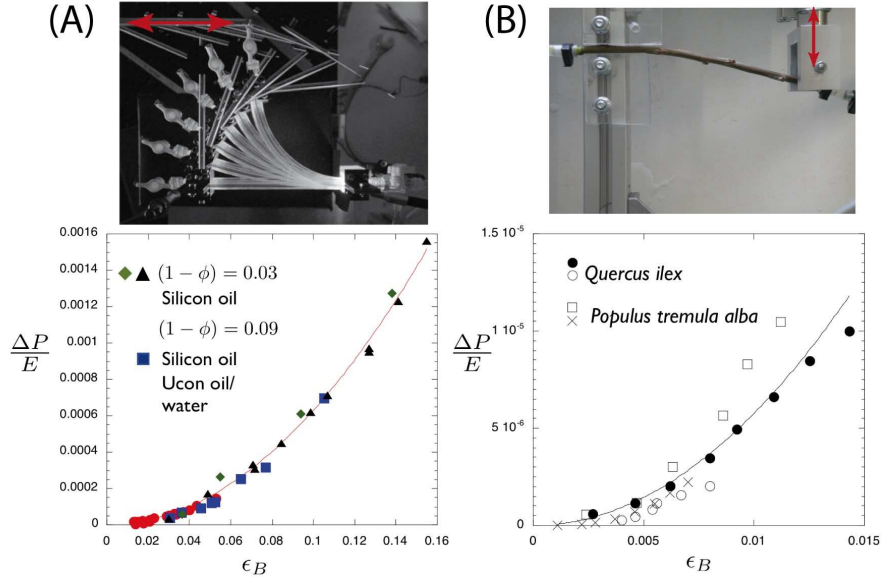


Figure 4. Stationary overpressure normalised by the young modulus for artificial and real branches (hybrid poplar and green oak). Rescaling gives $\frac{\Delta P}{E} = 0.06 \times \epsilon^2$ for artificial branches and $\frac{\Delta P}{E} = 0.02 \times \epsilon^2$ for real branches.

with our naive model the basic features involved in the generation of the hydraulic pulse that was already observed in plants and that the mechanisms involved in the process are robust. Moreover, for a given geometry, the bulk modulus of a material B depends on the Young module E : $B = E \times f(\phi)$ where $f(\phi)$ is a function of the geometry of the beam. Wood being much harder than the elastomer we used for the elaboration of the artificial branches ($E_{\text{wood}} \sim \text{GPa}$ whereas $E_{\text{elastomer}} \sim \text{MPa}$) we expect that the amplitude of the steady overpressure measured in both systems scales like the Young modulus of the material which is indeed the case.

References

1. M. A. BIOT, General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.* **12**, 155–164 (1941).
2. J. BRAAM, In touch: plant responses to mechanical stimuli, *New Phytol.*, **165**, 373–389 (2004).
3. L. G. BRAZIER, On the flexure of thin cylindrical shells and other “thin” sections, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **116**, 104–114 (1927).
4. G. CEDERBAUM *et al.*, *Poroelastic structures*, Elsevier Science Ltd (2000).
5. C. COUTANT & B. MOULIA, Biomechanical study of the effect of a controlled bending on tomato stem elongation: local strain sensing and spatial integration of the signal, *J. Exp. Bot.*, **51**, 1825–1842 (2000).
6. A. R. DAY, K. A. SNYDER, E. J. GARBOCZI & M. J. THORPE, The elastic moduli of a sheet containing circular holes, *J. Mech. Phys. Solids*, **40**, 1031–1051 (1992).
7. M. J. JAFFE *et al.*, Thigmo responses in plants and funghi, *Am. J. Bot.*, **89**, 375–382 (2002).
8. J. L. JULIEN, PhD thesis (1993).
9. L. LANDAU & E. LIFSHITZ, *Théorie de l'élasticité*, éditions MIR (1986).
10. R. LOPEZ, E. BADEL, S. PEREAUDEAU, F. BEAUJARD, H. COCHARD & B. MOULIA, Bending strains generates high hydraulic pulses in trees, *J. Exp. Bot.*, in press.
11. J.-F. LOUF, G. GUÉNA, O. POULIQUEN, Y. FORTERRE, É. BADEL, H. COCHARD & B. MOULIA, Poroelastic coupling in artificial branches, 7th international plant biomechanic conference (2012).
12. M. MALONE, Hydraulic signals, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*, **341**, 33–39 (1994).
13. G. W. SCHERER, Bending a gel rod with an impermeable surface, *J. Non-Cryst. Solids*, **204**, 73–77 (1996).
14. J. M. SKOTHEIM & L. MAHADEVAN, Dynamics of poroelastic filaments, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **460**, 1995–2020 (2004).
15. F. W. TELEWSKI, A unified hypothesis of mechanoperception in plants, *Am. J. Bot.*, **93**, 1466–1476 (2006).
16. H. F. WANG, *Theory of linear poroelasticity with applications to geomechanics and hydrogeology*, Princeton university press (2000).
17. E. WASSIM CHEHAB, E. EICH & J. BRAAM, Thigmomorphogenesis : a complex plant response to mechano-stimulation, *J. Exp. Bot.*, **60**, 43–56 (2009).

Dynamique de fusion de billes de glace en écoulement turbulent

Nathanaël Machicoane¹, Julien Bonaventure¹ & Romain Volk¹

¹ Laboratoire de Physique - ENS Lyon - 46, allée d'Italie, 69007 LYON
 nathanael.machicoane@ens-lyon.org

Résumé. Nous étudions la fonte de grosses billes de glace dans un écoulement turbulent de von Kármán à très hauts nombres de Reynolds à l'aide d'un montage optique couplant suivi de particules et ombroscopie. La mesure de la variation de taille d'une particule au cours du temps permet de mesurer le flux thermique à sa surface en fonction du nombre de Reynolds à l'échelle de la particule Re_D . Trois situations sont considérées : billes librement advectées dans tout l'écoulement, billes maintenues fixes dans une zone d'écoulement moyen nul, et billes maintenues fixes en présence d'un écoulement moyen fort. Dans les deux cas où les billes sont fixes, nous observons que le transfert thermique dans ce régime turbulent est toujours beaucoup plus fort que pour un régime laminaire, le nombre de Nusselt s'exprimant comme une loi de puissance en fonction du nombre de Reynolds : $Nu \propto Re_D^{0,8}$. Dans le cas des particules librement advectées, le transfert turbulent est encore augmenté et le nombre de Nusselt devient proportionnel au nombre de Reynolds. Le flux thermique par unité de surface est alors indépendant de la taille de la particule, ce qui correspond à un régime ultime de transfert de chaleur atteint lorsque la couche limite thermique est pleinement turbulente.

Abstract. We study the melting dynamics of large ice balls in a turbulent von Kármán flow at very high Reynolds number. Using an optical shadowgraphy setup, we record the time evolution of particle sizes. We study the heat transfer as a function of the particle scale Reynolds number Re_D for three cases: fixed ice balls melting in a region of strong turbulence with zero mean flow, fixed ice balls melting under the action of a strong mean flow with lower fluctuations, and ice balls freely advected in the whole flow. For the fixed particles cases, heat transfer is observed to be much stronger than in laminar flows, the Nusselt number behaving as a power law of the Reynolds number: $Nu \propto Re_D^{0,8}$. For freely advected ice balls, the turbulent transfer is further enhanced and the Nusselt number is proportional to the Reynolds number $Nu \propto Re_D$. The surface heat flux is then independent of the particles size, leading to an ultimate regime of heat transfer reached when the thermal boundary layer is fully turbulent.

1 Introduction

Le transfert de masse ou de chaleur entre une particule et un écoulement turbulent est un problème important pour de nombreux procédés industriels dans lesquels des particules solides ou des bulles de gaz se dissolvent ou réagissent avec des espèces chimiques présentes en volume. Sa compréhension est complexe car elle dépend de l'écoulement autour d'objets, parfois eux-mêmes en mouvement, et du glissement entre le fluide et les particules. Du fait de l'importance du phénomène, de nombreuses études expérimentales ont été conduites, soit dans le cas de la dissolution ou de l'évaporation de petites particules en suspension dans des mélangeurs [3, 5, 12], soit dans le cas d'objets de grandes tailles maintenus fixes dans des écoulements turbulents dont on peut faire varier le taux de turbulence [1, 4, 10].

L'ensemble de ces études montre que les nombres de Reynolds à l'échelle de la particule Re_D et du nombre de Prantl Pr sont les paramètres clés dont est fonction le flux par unité de surface. Ainsi, dans le cas du transfert thermique, le nombre de Nusselt Nu , rapport du flux total et du flux purement diffusif, s'exprime de manière générale comme une loi de puissance en fonction de Re_D [6]. L'exposant est proche de 1/2 lorsque les particules sont assez petites pour que Re_D soit faible [9] : l'écoulement est lisse à l'échelle des particules. De plus, l'exposant augmente avec la gamme de nombres de Reynolds [1, 4, 10] et les études expérimentales montrent que le transfert augmente avec le taux de turbulence de l'écoulement [4, 10].

Dans le cas d'objets dont la taille est comparable à l'échelle intégrale, il n'existe aucune étude concernant le transfert de chaleur ou de masse entre des particules librement advectées et l'écoulement turbulent

qui les transporte. En effet, dans un tel cas, il faut pouvoir à la fois suivre les particules en fonction du temps tout en mesurant le transfert de chaleur ou de masse entre les particules et l'écoulement. Dans ce contexte, nous avons couplé un montage de suivi de particules et un montage d'ombroscopie pour mesurer le transfert de chaleur à la surface de grosses sphères de glace librement transportées dans un écoulement turbulent à hauts nombres de Reynolds.

2 Dispositif expérimental

2.1 L'écoulement de von Kármán

Le dispositif expérimental consiste en une cellule de von Kármán à section carrée. La cellule est en plexiglas pour permettre des mesures optiques. Deux disques, à pales droites, contrôlés en fréquence par des moteurs, produisent une turbulence forte dans la cuve. Ils ont un rayon $R = 7,1$ cm et sont espacés d'une distance de 15 cm, ce qui correspond également à la section de la cuve. L'axe de rotation est perpendiculaire à la gravité. Un orifice situé sur le dessus de la cuve, centré, permet l'insertion de billes de glace. Le fluide utilisé est de l'eau pure, dont la température est fixée par un bain thermique. Avant une série d'expériences, les disques sont mis en rotation, jusqu'à atteindre un équilibre entre la puissance injectée par les moteurs et celle évacuée par le bain. Deux écoulements turbulents sont étudiés. D'une part, lorsque les deux disques tournent en contra-rotation, l'écoulement moyen produit est constitué de deux cellules contra-rotatives et des recirculations azimuthales, et le centre de l'écoulement est un point de stagnation pour la vitesse moyenne. D'autre part, lorsqu'un seul disque est en rotation, le fluide est soumis à deux vortex azimuthaux en rotation solide et le centre de l'écoulement subit une vitesse moyenne forte alignée avec l'axe de rotation (figure 1). Dans les deux situations, la turbulence est inhomogène et anisotrope avec des fluctuations de vitesse de l'ordre de 35 % de la moyenne. Lors des expériences, les vitesses de rotation vont de 1,5 à 7,3 Hz, permettant d'atteindre des nombres de Reynolds basés sur l'échelle de Taylor allant de 200 à 700 ; l'échelle intégrale vaut environ 2 cm. La référence [7] donne une description plus détaillée du dispositif et des paramètres de l'écoulement.

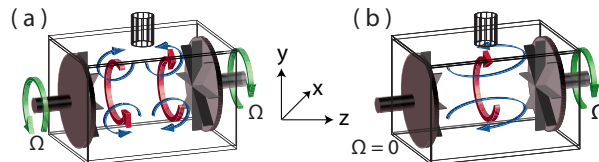


Figure 1. Schéma de l'écoulement moyen dans un écoulement de von Kármán à section carrée. (a) Deux disques contra-rotatifs produisent deux cellules contra-rotatives (flèches rouges) et deux recirculations méridiennes (flèches bleues). (b) Un disque produit une forte rotation (flèche rouge) et une boucle de recirculation méridienne (flèches bleues).

2.2 Les billes de glace

Les glaçons utilisés dans les expériences sont fabriqués dans des moules à empreintes sphériques de diamètres 10, 14, 18, 24 et 30 mm (de l'ordre de grandeur de l'échelle intégrale). Après fabrication, les glaçons sont thermalisés à 0°C , afin d'éviter une diffusion interne lors de la fonte, avant d'être injectés dans l'écoulement maintenu à une température T_{eau} . Deux configurations sont possibles : soit les billes de glace sont librement advectées par l'écoulement, soit elles sont fixées au centre de l'écoulement par une tige en PEEK de 2 mm de diamètre. Dans le cas des glaçons libres, seul l'écoulement à deux disques est utilisé. Pour les glaçons fixes, les deux types d'écoulement sont utilisés afin de comprendre l'influence des fluctuations et du glissement moyen sur le transfert thermique. En effet, les deux écoulements ont

des fluctuations de vitesse du même ordre de grandeur, mais le cas à un disque offre une grande vitesse moyenne à la position de la particule (glissement moyen fort), tandis qu'il n'y a pas de vitesse moyenne au centre dans le cas à deux disques (glissement moyen faible).

2.3 Mesures optiques

Pour mesurer la taille des glaçons en fonction du temps, nous choisissons un montage d'ombroscopie afocal (figure 2 (a)). Une diode (LED) placée au foyer d'un miroir parabolique crée un large faisceau parallèle qui traverse la majeure partie du volume de mesure. Ce faisceau est imagé sur le capteur nu d'une caméra par un télescope composé de deux lentilles convergentes. Ce large faisceau parallèle permet un suivi des glaçons libres le long de leur trajectoire sans biais de profondeur pour les mesures de taille et de position. Par ailleurs, bien que l'eau et la glace aient des indices optiques proches, ce montage, sensible à la dérivée seconde de l'indice, permet de différencier clairement la frontière entre les deux phases (figure 2). Lorsque le faisceau est centré par rapport à la cuve, les zones près des disques ne sont pas complètement visibles (80 % du volume est traversé) alors que nous avons montré que des particules de ce type explorent préférentiellement les zones près des disques dans un tel écoulement [8]. Pour les expériences avec des glaçons libres, le faisceau est donc légèrement translaté vers un côté du dispositif pour pouvoir toujours suivre les billes lorsqu'elles sont de ce côté ce qui maximise la durée des trajectoires (même si l'on perd momentanément la bille lorsqu'elle passe du côté opposé).

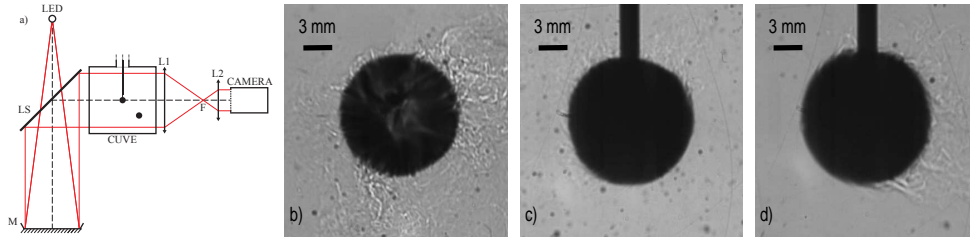


Figure 2. Images de billes de glace obtenues avec le montage d'ombroscopie afocal (a). La frontière entre les deux phases est nette et nous observons également les panaches thermiques émanant de la fusion des billes. (b) Glaçon libre; (c) glaçon fixe dans l'écoulement à deux disques; (d) glaçon fixe dans l'écoulement à un disque.

3 Résultats

3.1 Flux de chaleur

Nous souhaitons mesurer le coefficient de transfert thermique h , défini en fonction du flux surfacique Q_S comme $Q_S = h\Delta T$, où ΔT est la différence entre la température de surface du glaçon ($T_S = 0^\circ\text{C}$ pour une fonte à l'équilibre) et la température de l'écoulement T_{eau} . Lors de la fusion, le rayon de la particule change sous l'action combinée de la diffusion thermique à l'intérieur du glaçon et du transfert convectif à l'extérieur de celui-ci. Son évolution est donnée par l'équation de Stefan :

$$\rho_{\text{glace}} L_{\text{fusion}} \frac{dR}{dt} = \lambda_{\text{th}} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R + h(T_{\text{eau}} - T_S), \quad (1)$$

où λ_{th} est la conductivité thermique de la glace, ρ_{glace} sa masse volumique et L_{fusion} son enthalpie de fusion. Nous travaillons avec des glaçons préalablement thermalisés à la température de fusion $T = 0^\circ\text{C}$, ce qui annule le terme diffusif. Ainsi, mesurer l'évolution de la taille de la bille au cours du temps permet de déduire le coefficient de transfert thermique h .

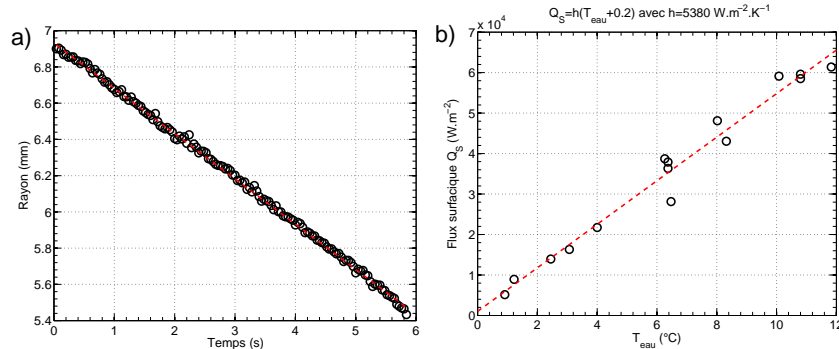


Figure 3. (a) Évolution du rayon d’une bille de glace de 14 mm, fixe au centre de l’écoulement à deux disques, à une fréquence de rotation de 4,4 Hz. (b) Mesures du flux de chaleur pour différentes températures de l’écoulement, à vitesses de rotation et diamètre initial constants.

Les rayons des billes de glace évoluent linéairement avec le temps (figure 3 (a)), ce qui permet de déterminer le flux pour chaque expérience. Nous vérifions que ce flux est bien proportionnel à la température du dispositif expérimental (figure 3 (b)), ce qui signifie qu’il n’y a pas de diffusion à l’intérieur des glaçons, et que la convection naturelle est effectivement négligeable devant le transport turbulent. Ainsi, les expériences avec différents diamètres initiaux et différentes vitesses de rotation donnent chacune un coefficient de transfert thermique, ce qui permet la mesure du nombre de Nusselt : $Nu = hD/\lambda_{th}$ en fonction du nombre de Reynolds à l’échelle des billes : $Re_D = UD/\nu$, avec $U = 2\pi R\Omega$, représentatif du forçage appliqué.

3.2 Fusion de glaçons fixes

Le cas des glaçons fixes est plus simple car la vitesse de glissement particule-fluide est connue. La comparaison des deux écoulements permet de qualifier l’influence du taux de turbulence sur le transfert thermique. En effet, il vaut environ 35 % dans le cas d’un écoulement à un disque et est infini pour le cas à deux disques. Dans les deux cas, le nombre de Nusselt suit une loi de puissance d’exposant valant environ 0,8 en fonction du nombre de Reynolds (figure 4). Le transfert thermique est donc très supérieur au transfert laminaire et les exposants trouvés sont plus grands que ceux répertoriés dans la littérature, ce qui est cohérent avec la gamme très élevée de nombres de Reynolds. Par exemple, pour des petits objets suspendus dans un dispositif assez similaire au cas du glaçon fixe dans l’écoulement à deux disques, un exposant $2/3$ avait été trouvé [2].

De plus, nous n’observons pas d’influence claire du taux de turbulence sur le transfert thermique ; le cas d’un taux plus faible donnant l’exposant le plus grand, contrairement à ce qui avait été observé [4, 10]. La faible différence entre les deux exposants peut s’expliquer en considérant la vitesse *true rms* $u_{trms} = \sqrt{u'^2 + \langle u \rangle^2}$ du fluide à l’emplacement du glaçon comme estimée de la vitesse de glissement. En effet, les nombres de Reynolds locaux construits sur cette vitesse $Re'_D = u_{trms}D/\nu$ couvrent la gamme [1400, 23500] et [1250, 20400] respectivement pour l’écoulement à un et deux disques, ce qui est cohérent avec les valeurs trouvées pour les exposants, respectivement 0,84 et 0,78.

3.3 Glaçons libres dans l’écoulement à deux disques

L’étude de la fusion de billes de glace librement advectées dans l’écoulement permet, grâce au dispositif d’ombroscopie afocale, de suivre l’évolution de la taille des particules au cours de leur fonte (figure 5 (a)). Nous observons que les billes restent sphériques pendant des centaines de temps de retournement à grande échelle $T = 1/\Omega$, bien qu’elles visitent le volume complet d’un écoulement fortement anisotrope et inhomogène. Comme le montre la figure 5 (a), les petit et grand axes évoluent de la même manière et

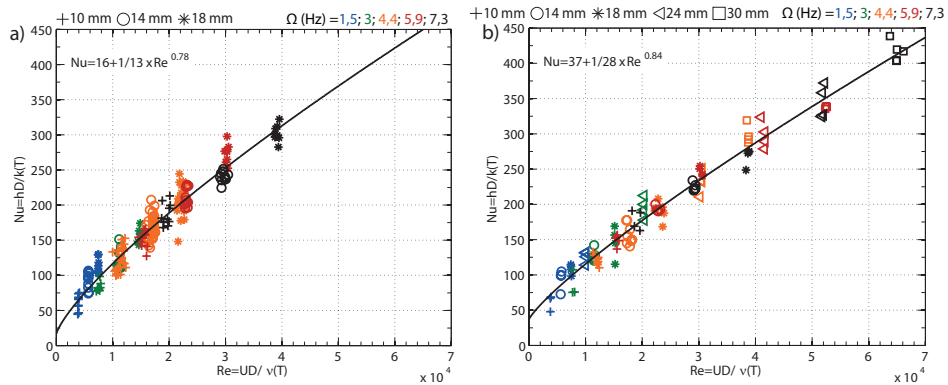


Figure 4. Évolution, à l'échelle des billes de glace, du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds pour le cas des glaçons fixes dans l'écoulement (a) à deux disques ou (b) à un disque.

la légère différence observée vient de la technique de détection qui relève la plus petite et la plus grande distance de l'objet détecté. Les glaçons restent sphériques tout au long de leur fusion probablement du fait de leur dynamique de rotation, prouvée pour des particules de cette taille [11] et qui représente un degré de liberté supplémentaire par rapport au cas des glaçons fixes.

Une analyse similaire au cas des glaçons fixes permet d'obtenir l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds (figure 5 (b)). Nous constatons une évolution linéaire, ce qui diffère fortement des corrélations proposées dans les nombreuses études expérimentales sur le transfert thermique ou massique. Ce résultat signifie certes que le transfert thermique est plus efficace, surtout à hauts nombres de Reynolds, mais il implique surtout un résultat important et nouveau : dans une turbulence pleinement développée, le transfert thermique est indépendant de la taille de l'objet. En effet, $Nu \propto Re_D$ implique $h/k \propto U/\nu$. Ce cas correspond au régime ultime de convection forcée, où l'exposant de la loi de puissance reliant Nu et Re_D vaut 1, sa valeur maximale; la valeur minimale étant 1/2 pour le cas laminaire. Cette loi d'échelle peut s'expliquer simplement sous l'hypothèse d'une turbulence pleinement développée à la surface du glaçon. Dans ce cas, la convection forcée domine et le flux surfacique total s'écrit $Q_S = \rho_{\text{glace}} C_p \Delta T U$, où C_p est la capacité thermique massique à pression constante, ce qui équivaut à $Nu \propto Re_D$.

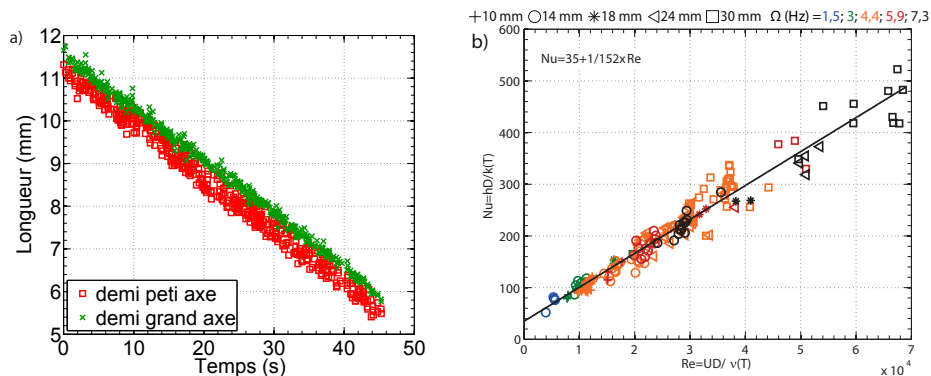


Figure 5. (a) Évolution du rayon d'une bille de glace de 24 mm librement advectée par l'écoulement à deux disques, à une fréquence de rotation de 4,4 Hz. (b) Évolution, à l'échelle des billes de glace, du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds pour le cas des glaçons libres dans l'écoulement à deux disques.

4 Discussion

Nous avons étudié l'influence de la turbulence sur le transfert thermique lors de la fonte de sphères de glace dans un écoulement turbulent aux fluctuations fortes dans trois situations différentes (glaçons libres, glaçons fixes soumis à un glissement moyen fort et glaçons fixes soumis à un glissement moyen faible). Dans les trois cas étudiés, le nombre de Nusselt augmente fortement avec le nombre de Reynolds et le transfert thermique est très efficace, ce qui est cohérent avec les différentes études sur l'influence de la turbulence sur le transfert thermique. Les billes libres atteignent un régime de transfert thermique ultime pour lequel le nombre Nusselt est proportionnel au nombre de Reynolds, ce qui est très différent des deux autres cas. Il existe donc une grande différence de dynamique entre le fluide et la bille dans le cas libre par rapport aux deux cas fixes. Cette différence pourrait trouver son origine soit dans la nature des trajectoires des grosses particules, qui ne suivent pas le mouvement du fluide, soit par la possibilité de la bille libre de tourner sur elle-même au cours de son mouvement, ce qui est interdit pour les billes maintenues fixes. En effet, l'étude [11] a montré que les particules de taille intégrale ont une dynamique de rotation couplée à leur dynamique de translation dans les écoulements turbulents de type von Kármán. Il est possible que ce degré de liberté supplémentaire des particules libres permette aux couches limites hydrodynamique et thermique d'être pleinement turbulentes à la surface de la bille, conduisant ainsi à un régime ultime de transfert thermique.

Par ailleurs, les glaçons libres, à ces hauts nombres de Reynolds, restent sphériques tout au long de leur fonte, quelle que soit leur taille. Bien que l'écoulement soit fortement anisotrope et inhomogène et que l'exploration des glaçons ne soit pas homogène [8], la rotation des glaçons sur eux-mêmes permet une conservation de leur forme. Ce n'est le cas que dans les premiers instants de la fusion (quelques secondes) pour les glaçons fixes. Au-delà de ces instants, la forme des glaçons s'adapte à la géométrie de l'écoulement. Ce résultat peut être utile pour d'éventuelles modélisations de fonte d'une bille librement advectée par la turbulence; il justifie en effet une hypothèse de sphéricité de la bille tout au long de la fusion, ce qui simplifie la modélisation.

Références

1. P. BAGCHI & K. KOTTAM, Effect of freestream isotropic turbulence on heat transfer from a sphere, *Phys. Fluids*, **20**, 073305 (2008).
2. M. BIROUK & I. GÖKALP, A new correlation for turbulent mass transfer from liquid droplets, *Int. J. Heat Mass Tran.*, **45**, 37–45 (2002).
3. M. BIROUK M. & I. GÖKALP, Current status of droplet evaporation in turbulent flows, *Prog. Energ. Combust.*, **32**, 408–423 (2006).
4. L. BOGUSLAWSKI, Estimation of the influence of inflow turbulence on heat convection from a sphere surface, *J. Theoret. Appl. Mech.*, **45**, 505–511 (2007).
5. S. BOON-LONG & C. LAGUERIE, Mass transfer from suspended solids to a liquid in agitated vessels, *Chem. Eng. Sci.*, **33**, 813–819 (1978).
6. D. M. LEVINS & J. R. GLASTONBURY, Application of Kolmogoroff's theory to particle-liquid in agitated vessels mass transfer, *Chem. Eng.*, **27**, 537–543 (1972).
7. N. MACHICOANE *et al.*, Melting dynamics of large ice balls in a turbulent swirling flow, *Phys. Fluids*, **25**, 125101 (2013).
8. N. MACHICOANE *et al.*, Large sphere motion in a turbulent swirling flow, *New J. Phys.*, **16** 013053 (2014).
9. W. E. RANZ & W. R. MARSHALL, Evaporation from drops : part II, *Chem. Eng. Prog.*, **48**, 173–180 (1952).
10. B. G. VAN DER HEGGE ZIJNEN, Heat transfer from horizontal cylinders to a turbulent air flow, *Appl. Sci. Res.*, **7**, 205–223 (1958).
11. R. ZIMMERMANN *et al.*, Rotational Intermittency and Turbulence Induced Lift Experienced by Large Particles in a Turbulent Flow, *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 154501 (2011).
12. Y. SANO *et al.*, Mass Transfer Coefficient for Suspended Particles in Agitated Vessels and Bubbles Columns, *J. Chem. Eng. Jpn.*, **7**, 255–261 (1974).

Transitions structurales dans un gaz granulaire magnétique

Simon Merminod, Michael Berhanu & Éric Falcon

Matière et Systèmes Complexes, Université Paris Diderot, CNRS-UMR 7057, 75013 Paris
simon.merminod@univ-paris-diderot.fr

Résumé. La compétition entre agitation et interactions de constituants élémentaires constitue un principe général de structuration de la matière. Nous en présentons ici un exemple macroscopique : un système de particules agitées mécaniquement et interagissant selon des interactions répulsives dont on peut expérimentalement ajuster l'intensité. Des particules ferromagnétiques sont confinées entre deux plans horizontaux soumis à une vibration mécanique verticale. En présence d'un champ magnétique vertical, les particules se comportent comme des dipôles magnétiques induits alignés selon ce champ et d'autant plus répulsifs que l'amplitude de ce champ est grande. Les propriétés de ce gaz granulaire sont ainsi modifiées par les interactions entre particules contrôlables par l'opérateur. À haut champ magnétique et faible densité, la répulsion contraint fortement le mouvement des particules qui s'auto-organisent en un réseau hexagonal. De façon surprenante, à plus haute densité et pour de fortes interactions répulsives, les particules s'auto-organisent alors en une structure de type amorphe formée principalement de « chaînettes » de particules, qu'on qualifiera de labyrinthe. Ces différentes phases seront caractérisées à l'aide de grandeurs statistiques. L'enjeu est de mieux comprendre les transitions ordre/désordre qui résultent de la compétition entre l'agitation et les interactions entre particules. Ce système modèle devrait permettre une meilleure étude de la dynamique de solidification ainsi que des milieux amorphes bidimensionnels.

Abstract. Basic constituents of matter experience continuous competition between thermal agitation and interactions, leading to global structuring. We present here a macroscopic example of such a structuring using a two-dimensional system of particles mechanically agitated and interacting via tunable repulsive interactions. Soft-ferromagnetic particles are placed on a vibrating rough plate and vertically confined, so that they perform a horizontal Brownian motion in a cell. When bathed in an external vertical magnetic field, the particles become magnetized and thus interact according to a dipolar repulsive law. Therefore, such a granular gas display properties that depend on the tunable particle interactions intensity. At high magnetic field and low particle area fraction, a hexagonal crystal-like structure sets up due to high magnetic repulsion between particles. In contrast, when increasing the particle area fraction while keeping the magnetic field at high value, the particles self-organize into an labyrinthine, amorphous-like structure which is mostly constituted by small chains of particles. We characterize these different phases using relevant statistical tools. Our aim is to provide a better understanding of the ordered/disordered phase transitions induced by the competition between agitation and interactions in many-particle systems. This model system should be useful as a new approach in the study of the 2D solidification dynamics as well as the 2D amorphous systems.

1 Introduction

Un gaz granulaire est constitué d'un grand nombre de particules macroscopiques placées dans une cellule bi- ou tri-dimensionnelle vibrée mécaniquement. L'agitation générée engendre des collisions inélastiques entre les particules et donc une dissipation d'énergie menant le système loin de l'équilibre. Lorsque l'énergie injectée est en moyenne dans le temps exactement égale à l'énergie dissipée, un état stationnaire hors équilibre est atteint par le gaz granulaire et l'on peut considérer l'agitation mécanique comme l'analogie macroscopique d'un bain thermique microscopique. Grâce à cette propriété, les gaz granulaires sont considérés comme des systèmes modèles en physique statistique hors équilibre [1]. Du fait de la dissipation d'énergie lors des collisions inélastiques, ces systèmes présentent des propriétés qui se distinguent de celles d'un gaz à l'équilibre thermodynamique, avec par exemple des distributions de vitesses non gaussiennes

ou encore la formation d'amas [2, 3].

Dans ce travail, nous proposons de comprendre quelles sont les conséquences de l'introduction d'interactions à distance entre les particules dans le cas bidimensionnel. Ces interactions, en compétition avec l'agitation mécanique, engendrent des corrélations spatiales entre particules et modifient par conséquent l'auto-organisation du système [4]. En modifiant leur intensité par l'intermédiaire d'un paramètre contrôlable par l'expérimentateur, il est donc possible d'ajuster le rapport entre le degré d'auto-organisation et le désordre induit par l'agitation mécanique dans le système.

2 Dispositif expérimental et paramètres adimensionnés

Le système étudié est un gaz granulaire bidimensionnel horizontal, dont on donne un schéma en Figure 1. La cellule expérimentale est constituée d'une surface inférieure d'aire $90 \text{ mm} \times 90 \text{ mm}$, rendue rugueuse en y collant du papier de verre. On y dépose des particules ferromagnétiques douces, des billes d'acier chromé de diamètre $a = 2\sigma = 1 \text{ mm}$ et de masse $m = 4,07 \times 10^{-3} \text{ g}$. Elles sont confinées verticalement par une surface horizontale lisse en polycarbonate traité antistatique, à $1.5a$ au-dessus de la surface inférieure et horizontalement par des parois en aluminium. En vibrant verticalement et sinusoidalement cette cellule, on transmet de l'énergie cinétique aux particules. Grâce à l'utilisation de la surface rugueuse, celle-ci est partiellement et aléatoirement distribuée en énergie cinétique horizontale. Un état stationnaire hors équilibre est atteint après un temps typique de quelques secondes. L'accélération de vibration est indiquée par le paramètre adimensionné $\Gamma = (2\pi f)^2 A/g$, avec A et f les amplitude et fréquence des oscillations et g l'accélération de la gravité.

Cette cellule est placée entre deux bobines générant un champ magnétique vertical \mathbf{B}_0 (homogène à 2% dans le champ de la caméra). Par conséquent, les particules s'aimantent et deviennent des dipôles magnétiques induits alignés selon le champ magnétique \mathbf{B}_0 . Ces dipôles sont donc parallèles et interagissent par des forces répulsives de norme $F_m \propto B_0^2/r^4$ (où $B_0 = |\mathbf{B}_0|$ et r est la distance entre deux dipôles) [8]. Ces forces de répulsion à distance, qui agissent dans le volume fixé de la cellule expérimentale, génèrent un confinement du gaz granulaire magnétique.

Une caméra rapide placée au-dessus de la cellule, par ailleurs éclairée par un anneau de LED diffusif, enregistre des images successives à une fréquence $f_{\text{acq}} = 779 \text{ Hz}$. La réflexion de la lumière sur la surface chromée de chaque particule produit un signal annulaire dont on détermine le centre. On utilise ensuite un algorithme de suivi des particules qui nous permet de reconstituer les trajectoires individuelles à partir d'images successives et par conséquent d'accéder aux grandeurs statistiques telles que la distribution des vitesses, la fonction de corrélation de paires, ou encore l'énergie potentielle magnétique. La zone d'enregistrement est d'aire $\mathcal{S} = 57 \text{ mm} \times 57 \text{ mm}$, centrée par rapport aux parois et contient $N(t)$ particules au temps t .

Deux paramètres adimensionnés sont centraux dans notre problème. Le premier est la fraction surfacique de particules $\phi \equiv N\pi\sigma^2/\mathcal{S}$. Le deuxième paramètre adimensionné, ε , est relatif à la compétition

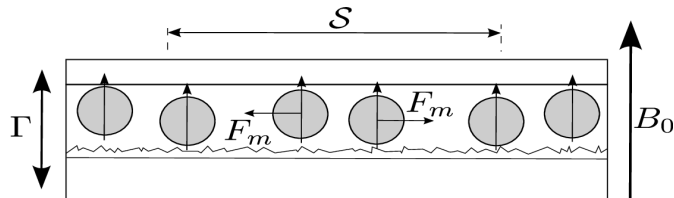


Figure 1. Schéma du dispositif expérimental en vue de côté. Les particules d'acier sont placées sur une surface inférieure rugueuse, soumises à une vibration mécanique (d'accélération Γ) et à un champ magnétique B_0 . Les dipôles magnétiques induits verticaux se repoussent dans le plan horizontal de la cellule selon des forces $F_m \propto B_0^2/r^4$.

entre interactions magnétiques et agitation mécanique. On le définit comme le rapport de l'énergie potentielle magnétique par particule et de l'énergie cinétique par particule :

$$\varepsilon \equiv \frac{E_m}{E_c} \quad (1)$$

avec [8]

$$E_m = \frac{4\pi}{\mu_0} B_0^2 \sigma^6 \frac{N-1}{2} \overline{\sum_{\langle i,j \rangle} |\mathbf{r}_{ij}|^{-3}} ; \quad E_c = \frac{1}{2} m \frac{1}{N} \overline{\sum_{i=1}^N (v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2)} \quad (2)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, $|\mathbf{r}_{ij}|$ la norme du vecteur reliant les particules de la paire $\langle i, j \rangle$, $v_{x,i}$ (resp. $v_{y,i}$) la vitesse de la particule i dans la direction x (direction y) et \overline{X} la moyenne temporelle de la grandeur X . On note que $\langle v_{x,i} \rangle = 0 = \langle v_{y,i} \rangle$, avec $\langle X \rangle$ la moyenne d'ensemble de la grandeur X .

3 Transition d'un état dissipatif à quasi-élastique, puis cristallin

On place $N = 2000$ particules dans la cellule ($\phi = 0,2$) et on fixe $\Gamma = 2,45$ ou $3,32$. Lorsque B_0 augmente, c'est-à-dire lorsque ε croît, le système subit une transition structurale continue d'un état désordonné de type gaz granulaire dissipatif à un état quasi-élastique et atteint finalement un état figé ordonné (voir Fig. 2) [5].

À champ magnétique B_0 nul ($\varepsilon = 0$), l'état du système est celui d'un gaz granulaire dissipatif classique, où les particules n'interagissent que par des collisions inélastiques dissipatives. Par exemple, la fonction radiale de corrélation de paires (Fig. 3-gauche) présente un pic de grande amplitude en $r = a$ suivi d'une décroissance vers la valeur 1 attendue pour $r \geq a$ dans le cas du gaz parfait dilué. Ceci traduit le fait que, à cause de la dissipation au contact, la probabilité de trouver une particule voisine à une distance égale au diamètre a est bien plus élevée que lorsque les collisions sont élastiques. De plus, la distribution des vitesses (Fig. 3-droite) montre un écart significatif à la gaussienne avec des ailes étirées pour les événements de haute et faible vitesses, ce qui est caractéristique des gaz dissipatifs [2, 6, 7].

Afin d'identifier quantitativement l'influence des interactions entre particules, on trace pour des valeurs croissantes de ε la fonction radiale de corrélation de paires $g(r/a)$ ainsi que la distribution des vitesses adimensionnées par l'écart-type de celle-ci (Fig. 3).

Pour ε croissant de 0 à 3, l'amplitude du pic en $r = a$ de la fonction $g(r/a)$ diminue progressivement jusqu'à l'obtention de la fonction radiale de corrélation de paires du gaz idéal dilué (de valeur nulle pour

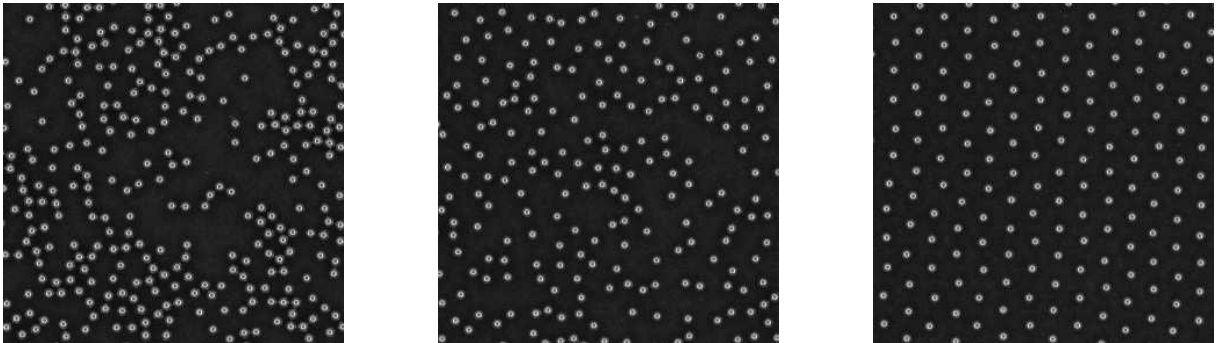


Figure 2. Photographies du système (zoomées à $28 \text{ mm} \times 28 \text{ mm}$) avec une fraction surfacique $\phi = 0,2$ ($N = 2000$), $\Gamma = 3,32$, et différents ε . (gauche) Gaz « dissipatif » à $\varepsilon = 0$ ($B_0 = 0 \text{ G}$); (milieu) gaz « quasi-élastique » à $\varepsilon \approx 4,9$ ($B_0 = 70 \text{ G}$); (droite) état « cristallin » à $\varepsilon \approx 203$ ($B_0 = 369 \text{ G}$).

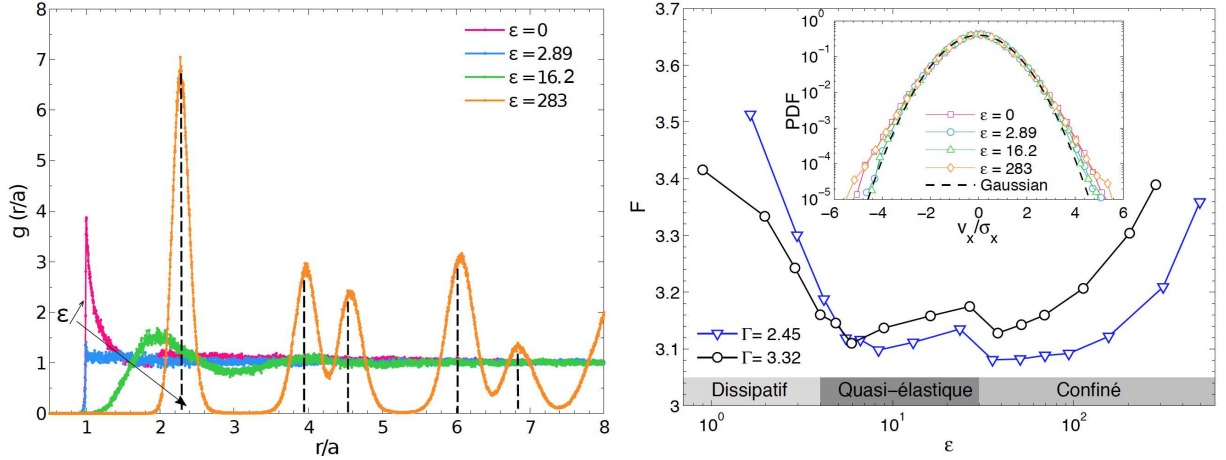


Figure 3. ($\phi = 0,2$) (gauche) Fonction radiale de corrélation de paires $g(r/a)$ pour différents ε à $\Gamma = 3,32$; (droite) kurtosis (*flatness*) F des distributions des vitesses en fonction de ε . On identifie les régimes successifs « dissipatif », « quasi-élastique » et « confiné » suivant la valeur de F et la forme de $g(r/a)$.

$r < a$, égale à 1 pour $r \geq a$). Ceci signifie que la structure du système obtenu mime celle d'un gaz thermodynamique. Quand ε croît au-delà de la valeur 3, une ondulation de la fonction $g(r/a)$ apparaît comme pour celle d'un liquide. Le maximum se déplace de $r/a = 1$ à 2,28, indiquant la longueur caractéristique du système. Pour les plus hautes valeurs de ε (typiquement $\varepsilon > 20$), les collisions deviennent inexistantes [$g(r/a = 1) = 0$]. Lorsque $\varepsilon > 10^2$, on identifie une structure cristalline hexagonale à partir des positions des pics de la fonction $g(r/a)$, qui sont les multiples géométriquement sélectionnés de la position du premier pic $r/a = 2,28$ pour les facteurs 1, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{7}$ et 3 (voir pointillés sur Fig. 3-gauche).

On mesure l'écart des distributions de vitesses PDF(v) à la distribution gaussienne grâce au kurtosis, $F \equiv \langle v^4 \rangle / \langle v^2 \rangle^2$. Celui-ci renseigne en effet sur la non-gaussianité d'une distribution : si $F = 3$ la distribution est égale à la gaussienne et si $F \neq 3$, elle est soit plus étalée ($F > 3$) soit plus étroite ($F < 3$). À faible ε , F décroît fortement en se rapprochant de la valeur pour la gaussienne, puis ne semble plus dépendre de ε (régime « quasi-élastique ») pour des valeurs modérées de ε , avant de croître fortement pour $\varepsilon \geq 10^2$ dans le régime « confiné ».

Ce gaz granulaire magnétique, de fraction surfacique $\phi = 0,2$, transite donc de manière continue par trois régimes distincts selon les valeurs de ε : régime collisionnel « dissipatif » à faible ε , « quasi-élastique » pour ε intermédiaire et un régime sans collision de type hexagonal cristallin pour $\varepsilon \geq 10^2$.

4 Transition vers un état de type amorphe

Pour $N = 5000$ particules (soit $\phi = 0,5$) et ε croissant, le système évolue de l'état de gaz granulaire dissipatif vers un état où coexistent des particules en état de gaz quasi-élastique et des particules en contact continu formant de courtes chaînettes. Progressivement, le nombre de chaînettes croît et une structure quasi-figée sans ordre à longue distance se met en place, de type amorphe, qu'on qualifiera de « labyrinthique » (Fig. 4).

Pour $B_0 = 0$ G, la structure du système à $\phi = 0,5$ est similaire à celle du cas $\phi = 0,2$ (voir Fig. 5-gauche). L'amplitude du premier pic de la fonction $g(r/a)$ ainsi que de son second maximum vers $r/a = 2$ sont amplifiés par rapport au cas $\phi = 0,2$. C'est la signature d'une plus grande dissipation, à cause d'une fréquence de collision plus élevée. L'aplatissement des PDF des vitesses est plus important dans ce cas dense (Fig. 5-droite) et est dû à un taux de collision plus élevé que dans le cas peu dense.

L'évolution de la fonction radiale de corrélation de paires donne des informations cruciales pour la compréhension de la transition structurale s'effectuant lorsqu'on augmente la valeur de ε à partir de 0.

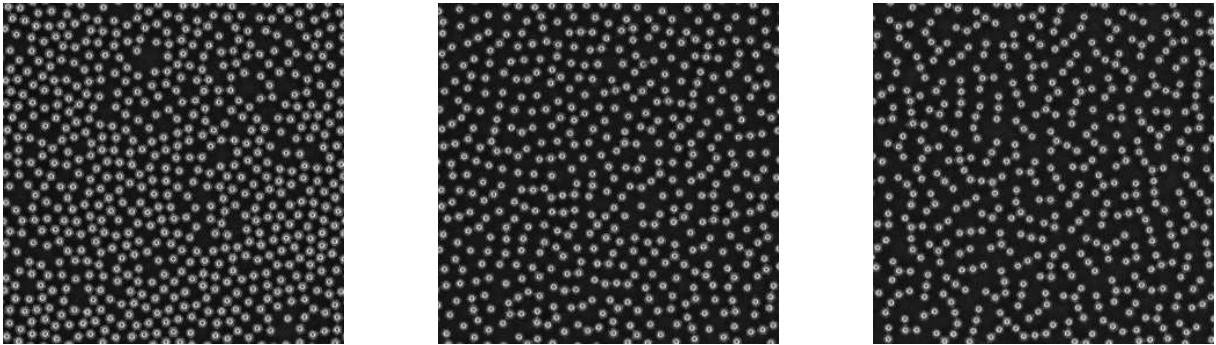


Figure 4. Photographies du système (zoomées à $28\text{ mm} \times 28\text{ mm}$) avec une fraction surfacique $\phi = 0,5$ ($N = 5000$), à $\Gamma = 3,32$ et différents ε . (gauche) Gaz « dissipatif » à $\varepsilon = 0$ ($B_0 = 0\text{ G}$); (milieu) gaz « quasi-élastique » à $\varepsilon \approx 138$ ($B_0 = 131\text{ G}$); (droite) état « labyrinthique » à $\varepsilon \approx 203$ ($B_0 = 369\text{ G}$).

En effet, pour $0 < \varepsilon < 78$, l'évolution de la fonction $g(r/a)$ suit ce qu'on a décrit ci-dessus pour le cas $\phi \approx 0,2$: d'abord diminution de l'amplitude du premier pic à $r/a = 1$, puis déplacement de ce maximum alors élargi vers de plus hautes valeurs de r/a . Cependant, pour $\varepsilon \approx 78$, on remarque l'apparition d'un maximum local vers $r/a = 0,91$. Ceci correspond à une distance de centre à centre plus courte qu'un diamètre de particule, qui existe grâce au fait que notre cellule n'est pas strictement bidimensionnelle : il existe une faible extension verticale du système. En effet, pour agiter le milieu granulaire nous avons choisi une séparation de $1,5a$ entre les surfaces inférieure et supérieure de la cellule. Par conséquent, les particules ont la possibilité de se chevaucher partiellement lorsque l'une est au contact de la surface inférieure et que l'autre touche le plafond de la cellule (voir schéma sur Fig. 5-gauche). On peut montrer en modifiant l'équation (2), que dans cette configuration, l'énergie potentielle magnétique d'interaction entre deux telles voisines est diminuée par rapport à une configuration où elles se situent dans le même plan et l'est d'autant plus que les dipôles magnétiques se rapprochent de l'alignement. En présence de ces chaînettes, ε n'est plus exactement le rapport des énergies magnétique et cinétique mais donne un ordre de grandeur de la compétition entre interactions et agitation. On remarque que toutes les particules n'appartiennent pas à une des chaînettes ainsi formées et sans mouvement : il en existe un nombre faible mais non nul qui conservent un mouvement dynamique dans des puits de potentiel entre les chaînettes.

L'évolution de F en fonction de ε reflète bien cette interprétation. En effet, pour $0 < \varepsilon < 78$, F décroît d'une valeur proche de 4 vers environ 3, ce qui traduit le rapprochement du système de la limite quasi-élastique. L'apparition des particules arrangées des premières chaînettes, en coexistence avec les autres particules « thermalisées » (au sens des gaz granulaires), modifie fortement l'évolution de F . En effet, la distribution des vitesses possède alors deux vitesses typiques distinctes et non plus une seule : celle, élevée, des particules isolées en mouvement rapide et celle des particules « solidifiées » en chaînettes, bien plus basse. L'écart de cette distribution à la gaussienne croît alors extrêmement fortement avec ε (on notera que l'échelle des ordonnées est logarithmique) à mesure que le rapport du nombre de particules « solidifiées » sur le nombre de particules « thermalisées » augmente. À partir de $\varepsilon \approx 10^3$, l'intensité des interactions magnétiques est telle que quasiment toutes les particules du système appartiennent à des chaînettes au sein de ce que l'on a appelé l'état « labyrinthique ».

Nous avons donc amené ce gaz granulaire magnétique dense à se configurer selon une structure « labyrinthique » lorsque le rapport de l'énergie d'interaction magnétique entre particules et de leur agitation est suffisamment élevé ($\varepsilon \geq 78$). Pour $0 < \varepsilon < 78$, de manière similaire au cas $\phi = 0,2$, le système évolue d'un état purement dissipatif à un état proche de la limite quasi-élastique.

5 Conclusion

Ce gaz granulaire magnétique bidimensionnel, dans lequel l'expérimentateur peut ajuster l'intensité des interactions dipolaires répulsives entre particules en plus de leur degré d'agitation, présente plusieurs

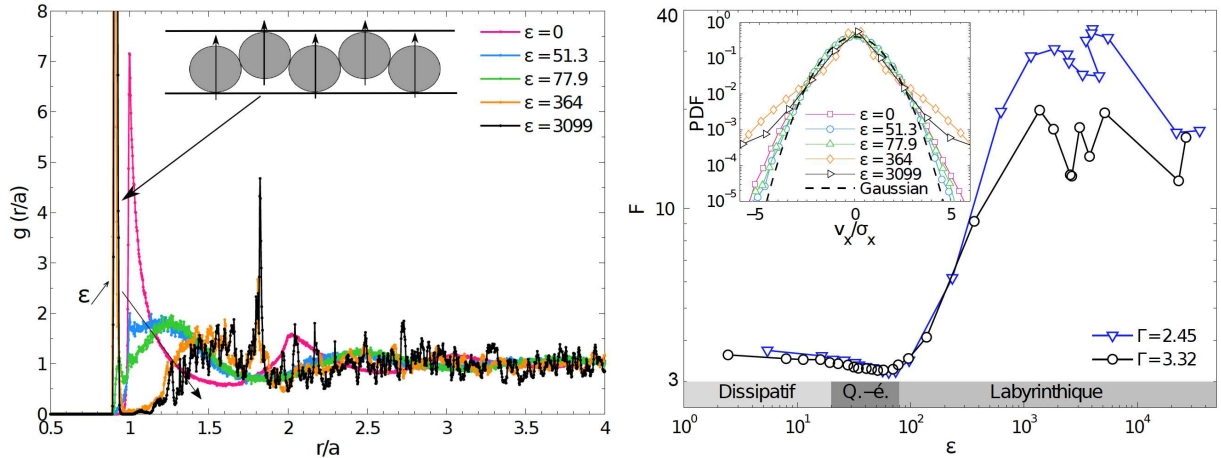


Figure 5. ($\phi = 0,5$) (gauche) Fonction radiale de corrélation de paires $g(r/a)$ pour différents ε à $\Gamma = 3,32$. (droite) Kurtosis (*flatness*) F des distributions des vitesses en fonction de ε en échelle log-log. On note la forte différence avec les valeurs de Fig. 3-droite.

états dont les structures sont radicalement différentes.

Pour une densité de particules faible et en l'absence de champ magnétique, un tel gaz granulaire présente les propriétés d'un gaz dissipatif. Le taux de dissipation est par ailleurs directement lié au taux de collisions et donc à la densité. Lorsque l'on augmente le rapport des énergies d'interaction magnétique et d'agitation mécanique ε et que celui-ci reste suffisamment faible, le gaz granulaire magnétique se rapproche progressivement d'un gaz avec des interactions quasi-élastiques.

À grand ε , l'évolution du gaz granulaire dépend de sa densité. Pour $\phi = 0,2$, le système subit une transition continue vers un état « confiné » dont la structure est de type cristalline hexagonale avec ordre à grande distance. En revanche, pour $\phi = 0,5$, à partir d'un seuil en ε , certaines particules se placent au contact d'autres pour former de courtes chaînettes qui coexistent avec les autres particules qui sont, elles, toujours en agitation. La quantité de ces dernières diminue avec l'augmentation de ε jusqu'à ce que le système se fige en une structure « labyrinthique » sans ordre à grande distance.

Cette dernière structure, qui rappelle celle d'un amorphe, sera étudiée plus en détails. On se demandera si la longueur des chaînettes diminue avec la vitesse de la « trempe magnétique », c'est-à-dire de la vitesse de variation de ε au cours du temps. Peut-on modéliser ces transitions comme des transitions de phase ? Ces résultats pourraient permettre de progresser dans la compréhension de la dynamique des milieux amorphes bidimensionnels et des transitions ordre/désordre dans les systèmes hors équilibre.

Références

1. E. TRIZAC & M. H. ERNST, *J. Phys.: Condens. Matter*, **17**, 99, (2005).
2. J. S. OLAFSEN & J. S. URBACH, *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 4369 (1998).
3. É. FALCON, S. FAUVE & C. LAROCHE, *Eur. Phys. J. B*, **9**, 183 (1999).
4. J. SCHOCKMEL & E. MERSCH, N. VANDEWALLE & G. LUMAY, *Phys. Rev. E*, **87**, 062201 (2013).
5. S. MERMINOD, M. BERHANU & É. FALCON, soumis à *Phys. Rev. Lett.* (2014).
6. T. P. C. VAN NOIJE & M. H. ERNST, *Gran. Mat.*, **1**, 57, (1998).
7. S. J. MOON, M. D. SHATTUCK & J. B. SWIFT, *Phys. Rev. E.*, **64**, 031303 (2001).
8. J. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., Wiley, New York (1998).

Instabilité du pont capillaire

Gounséti Paré¹ & Jérôme Hoepffner²

Institut Jean Le Rond D'Alembert, CNRS & UPMC, UMR 7190, 29 Case 162, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cédex 05, France

`gounseti.pare@etu.upmc.fr`

Résumé. Cette étude présente l'analyse de la dynamique et de la stabilité d'un pont capillaire. Le système étudié est initialement constitué d'un volume liquide axisymétrique soumis à la tension de surface et tendu entre deux anneaux circulaires, coaxiaux, parallèles et de même diamètre. Nous avons effectué des simulations numériques sur deux cas : le cas statique et le cas dynamique. Dans le cas statique, les résultats comparés à ceux de la littérature montrent un très bon accord ; dans le cas dynamique, divers comportements dynamiques seront présentés en fonction du volume de fluide.

Abstract. This study presents analysis of axisymmetric dynamics and stability of a capillary bridge. The configuration analyzed consists of an isothermal, initially axisymmetric, mass of fluid held by surface tension forces between two parallel, coaxial, solid rings of the same diameter. Numerical simulations have been carried out on two cases: the static and dynamic case. In the static case, the results compared with those in the literature show a very good agreement, in the dynamic case, various behaviors dynamic will be presented according to the volume of fluid.

1 Introduction

L'adhésion capillaire est un mécanisme physique permettant de maintenir en contact deux corps par capillarité, par l'intermédiaire d'un ligament liquide. Le pont capillaire est une idéalisation de cette adhésion capillaire. Dans ce document nous allons nous intéresser au cas classique de l'étude de la stabilité de cette adhésion capillaire mais aussi à une configuration un peu plus complexe en imaginant un flux dans le pont capillaire (cf. [7]) comme c'est le cas par exemple de la dynamique du cou d'un ligament liquide dans sa rétractation sous l'effet de la capillarité (voir Hoepffner & Paré [1]). Le système étudié (Fig. 1) est constitué d'un volume liquide axisymétrique tendu entre deux anneaux circulaires, coaxiaux, identiques et parallèles (cf. les expériences de Plateau sur les films de savon [2]), et est supposé sans gravité.

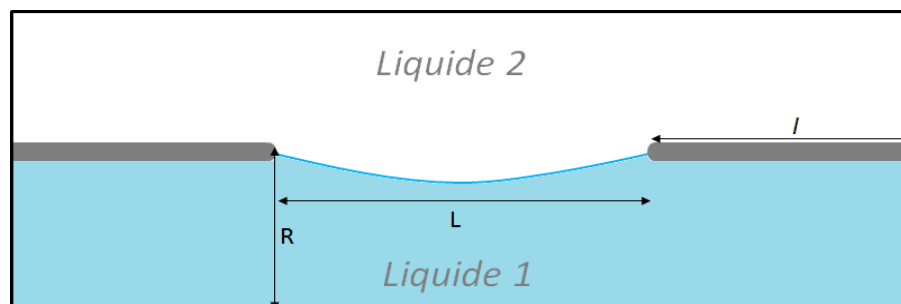


Figure 1. Modèle de simulation du pont capillaire.

Deux cas sont ainsi étudiés, le cas statique et le cas dynamique. Dans le cas statique, le système dépend de deux paramètres adimensionnés, le rapport d'aspect L/R du pont défini par le quotient de la

longueur entre les deux anneaux et le rayon des anneaux, et le rapport de volume $V = V_0/\pi R^2 L$ défini par le quotient entre le volume réel de fluide V_0 et le volume du cylindre de longueur L et de rayon R entre les deux anneaux. Ce cas classique de la stabilité du pont capillaire a été étudié par plusieurs chercheurs notamment Slobozhanin *et al.* [4] ou Lowry *et al.* [5] qui ont aussi porté leur attention sur l'influence de la gravité sur le système, en variant dans ce cas le nombre de Bond $Bo = |\Delta \rho g| R^2 / \sigma$, (voir Fig. 3) avec $\Delta \rho$, le gradient de densités entre les deux liquides, σ la tension de surface.

Dans le cas dynamique où on induit une vitesse égale à l'entrée et à la sortie des deux anneaux (Fig. 2(b)). En plus des deux paramètres précédents le système va dépendre du nombre de Weber, $We = \rho R U^2 / \sigma$, où ρ est la densité du liquide entre les deux anneaux. Un article très récent a été publié pour ce cas dynamique par Conrath *et al.* [7] sur les stations spatiales internationales où ils déterminent le débit volumique critique, au-delà duquel l'interface du pont se déforme pour enrouler une bulle et l'adveciter dans l'écoulement. Plus le rapport de volume est importante plus le nombre de Weber critique de rupture est grande. La configuration expérimentale pour faire ces recherches est exactement la même que celle que nous utilisons pour nos simulations.

Le présent document est organisé comme suit : dans la première section nous décrivons le modèle numérique utilisé. Les résultats seront présentés dans la section 2 et sont obtenus principalement par simulations numériques grâce au logiciel libre, Gerris Flow Solver (voir [3]). Nous nous focalisons sur le cas où V est inférieur à 1 : le venturi capillaire. Dans la configuration statique le diagramme de stabilité du pont capillaire obtenu dans le repère du rapport de volumes versus le rapport d'aspect est en parfait accord avec les résultats de [4] (voir Fig. 3). Dans le cas dynamique nos résultats seront comparés à ceux obtenus par un code matlab basé sur les équations 1 D de Eggers [6] (Fig 8).

Dans le diagramme de stabilité (rayon du cou du pont versus le nombre de Weber), on note trois régimes différents. Pour des rapports de volumes assez petits ($V < 0,8$) le rayon du cou du pont diminue progressivement et va à la rupture. Un régime intermédiaire survient pour ($0,8 < V < 0,9$) où le rayon du cou du pont décroît progressivement, passe par un minimum et croît pendant une gamme de nombres de Weber pour se rompre ensuite brutalement. Pour des rapports de volume proches de 1, on note un état d'oscillation non linéaire du cou du pont avant sa brutale rupture.

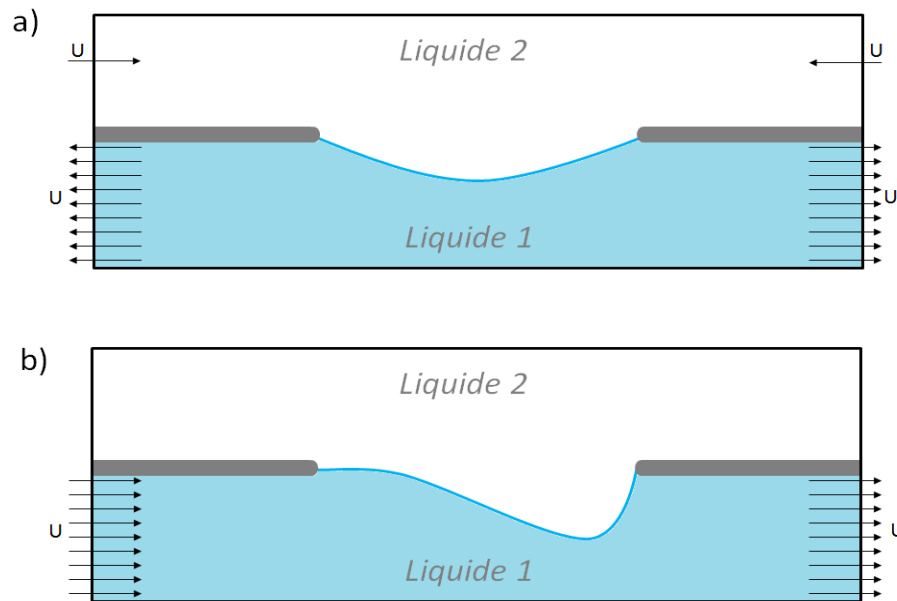
2 Description du modèle

Le système étudié est résumé sur la figure 1, les deux anneaux solides ont une épaisseur de $2r/R = 0,05$, et de longueur l . La distance entre ces deux anneaux L est égale à la longueur du pont capillaire. La condition initiale du pont est un cylindre liquide de rapport d'aspect L/R entre les deux anneaux, entouré par un fluide 10 fois moins visqueux et 100 fois moins dense. Les propriétés physiques du liquide à l'intérieur du pont sont ($\sigma = 1$, $\rho = 1$, $\mu = 0,01$) avec μ la viscosité dynamique. Gerris implémente des méthodes de résolution numérique de type volumes finis pour l'équation de Navier-Stokes en utilisant un maillage uniforme ou adaptatif (basée sur la courbure de l'interface, la vorticité ou encore le gradient de vitesse) et une méthode de suivi en volume avec construction d'interface par morceaux (VOF : Volume-of-Fluid). Le logiciel est facilement installable sur une distribution Ubuntu Linux et utilise un fichier de paramètre contenant les conditions physiques de l'écoulement.

3 Résultats

3.1 Cas statique :   tude de la stabilité du pont capillaire

La stabilité du pont dépend de deux paramètres adimensionnés V et L/R (le système est étudié indépendamment de la viscosité du fluide). Dans nos simulations nous avons fixé cette viscosité à $\mu = 0,01$. L'étude de la stabilité est menée de la façon suivante : on fixe le rapport d'aspect L/R du pont, initialement le volume liquide entre les deux anneaux est un cylindre liquide (c'est à dire $V = 1$), on définit une vitesse adimensionnée de pompage $u_{\max} = 0,005$ à l'entrée et à la sortie du système (voir Fig. 2(a)). Ce qui



donne un débit très faible de pompage égale à $Q = (R\pi/4) u_{\max}$, de façon à rester quasi-statique. Une fois commencé le pompage on assiste à la décroissance du volume V , le pont se creuse et prend la forme du venturi capillaire tout en restant stable. Une fois le volume critique atteint le pont capillaire tend de façon brutale à la rupture, ce qui marque le passage à l'instabilité du pont. On peut ainsi reproduire la procédure pour différents rapports d'aspect et alors dresser le diagramme de stabilité du pont. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 2 et sont en très bon accord avec les résultats de Slobozhanin (voir [4] et la figure 3) ou ceux de [5]. De cette comparaison on tire la validation du notre modèle de simulation, on peut alors explorer le cas complexe de flux dans le pont capillaire : le cas dynamique.

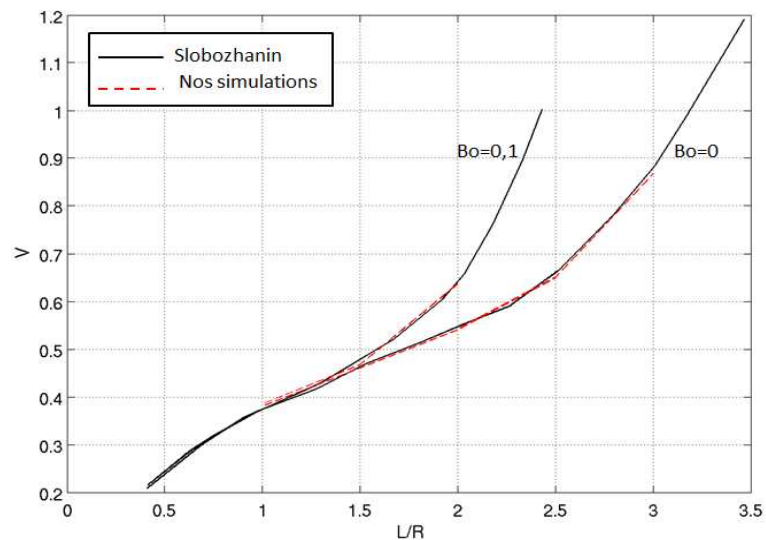


Figure 3. Comparaison des diagrammes de stabilité.

3.2 Cas dynamique : introduction de flux dans le pont capillaire

Dans ce cas, plusieurs simulations sont effectuées pour différentes valeurs de rapport d'aspect ($L/R = 2, 3, 4, 5$), et pour chaque rapport d'aspect, plusieurs valeurs du rapport de volume ($0 < V \leq 1$) seront étudiées. On dressera ainsi pour chaque rapport d'aspect et de volume, le diagramme de stabilité. Ces deux paramètres étant fixés, les étapes de la simulation sont les suivantes. On reprend la même procédure que dans le cas statique mais à l'inverse on définit un temps fini t_f auquel on arrête de pomper, ce temps étant directement relié au volume $V = (V_0 - Qt_f)/V_0$ du pont capillaire. Cette manoeuvre nous permet de ne pas approximer la forme de l'interface étant donné l'inexistence d'une formule analytique la décrivant, comme c'est le cas pour un film de savon liquide entre deux anneaux circulaires (voir [2]). L'arrêt brutal du pompage provoque une oscillation interfaciale pendant un certain temps, ce qui nous impose un temps dit de relaxation t_r ($t_r/t_c \gtrsim 50$ dans nos simulations, avec $t_c = \sqrt{\rho R^3/\sigma}$ le temps capillaire). Une fois relaxé on commencera par mettre de la vitesse dans le pont. On définit une vitesse d'entrée égale à la vitesse de sortie du pont capillaire (Fig. 2 (b)), que l'on augmentera linéairement au cours du temps jusqu'à la rupture du pont. Les diagrammes (évolution du rayon du cou en fonction du nombre de Weber) obtenus pour différents rapports d'aspect sont présentés sur les figures 4 à 7. Plus le volume V du pont est grand, plus le nombre de Weber critique au-delà duquel le pont claque est grand. On note sur ces différents graphes l'existence de trois régimes importants :

(i) $V \lesssim 0,8$. En fonction de l'augmentation du nombre de Weber, le rayon du cou du pont décroît progressivement et se déplace en aval du système, dans la même direction que la vitesse, pour tendre vers la rupture. Rappelons que le cou est initialement au milieu du pont capillaire. Si le rapport d'aspect du pont est assez grand ($L/R \gtrsim 6$), dans ce cas, le pont se retrouve en situation de Rayleigh-Plateau, par suite le cou de pont reste au milieu du système pour se rompre à nombre de Weber nul.

(ii) $0,8 \lesssim V \lesssim 0,9$. Dans ce régime, le cou du pont décroît progressivement en fonction du nombre de Weber, mais se déplace étonnamment en amont du système en direction contraire à la vitesse. Ensuite le rayon du cou passe par un minimum, ce qui marquera l'arrêt de son déplacement en amont et commencera par croître jusqu'à une valeur critique du nombre de Weber pour se rompre brutalement. Cette phase de croissance du rayon du cou correspond au déplacement du cou en aval du système.

(iii) $V \gtrsim 0,9$. Pour des rapports de volumes proches de 1, on observe la même évolution du cou que le régime précédent mais pendant la phase de croissance du rayon du cou, le pont passera par une oscillation non-linéaire dont l'amplitude va grandir et diminuer, ensuite se stabiliser pour se rompre brutalement.

Comparaison avec le code 1 D de Eggers

On construit un code matlab à partir des équations de Eggers [6] :

$$-uu_z - \frac{p_z}{\rho} + \frac{3\nu(h^2u_z)}{h^2} = 0 \quad (1)$$

$$\sigma \left[\frac{1}{h(h+h_z^2)} - \frac{h_{zz}}{(1+h_z^2)} \right] = p \quad (2)$$

$$-uh_z - \frac{1}{2}u_z h = 0 \quad (3)$$

où p est la pression et h la fonction décrivant l'interface liquide 1 / liquide 2 et ν la viscosité cinématique. Le diagramme de bifurcation obtenu à partir de ces équations est comparé avec nos résultats dans le cas $L/R = 2$ (cf. Fig. 8) et montre un bon accord, surtout pour des rapports de volume $V \lesssim 0,9$. La comparaison est moins bonne pour V proche de 1 lors de la phase d'oscillation interfaciale. Des travaux sont actuellement en cours en vue d'une bonne compréhension de cette phase d'oscillation non linéaire et seront présentés prochainement.

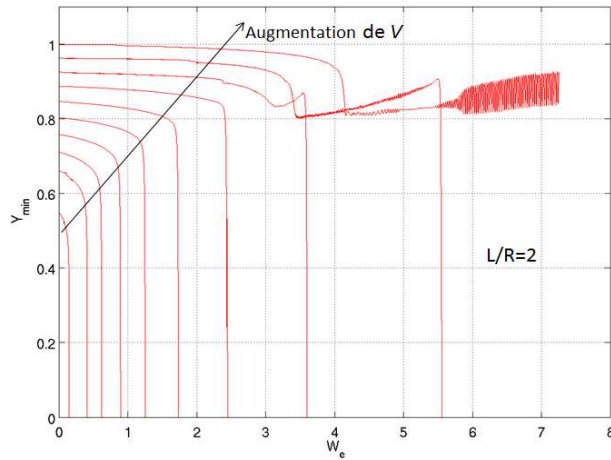


Figure 4. Évolution du rayon du cou en fonction du nombre de Weber, $L/R = 2$ pour différentes valeurs de $V=0,51, 0,61, 0,66, 0,71, 0,76, 0,81, 0,85, 0,90, 0,95, 1$.

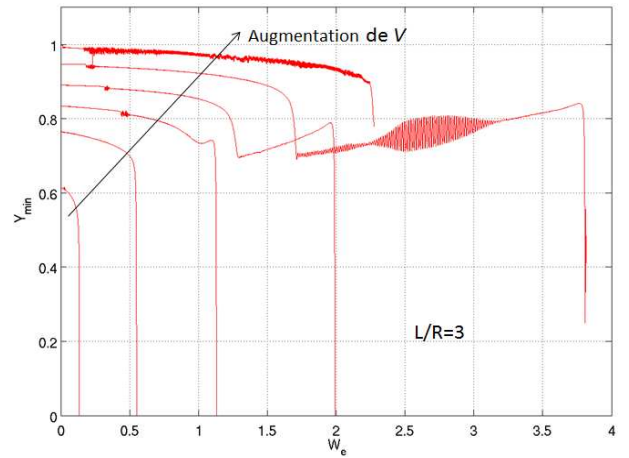


Figure 5. Évolution du rayon du cou en fonction du nombre de Weber, $L/R = 3$, $V=0,61, 0,74, 0,81, 0,87, 0,94$.

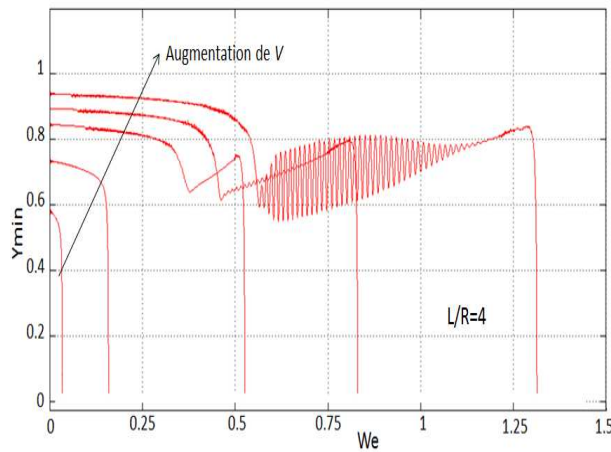


Figure 6. Évolution du rayon du cou en fonction du nombre de Weber, $L/R = 4$, $V=0,61, 0,71, 0,81, 0,85, 0,90$.

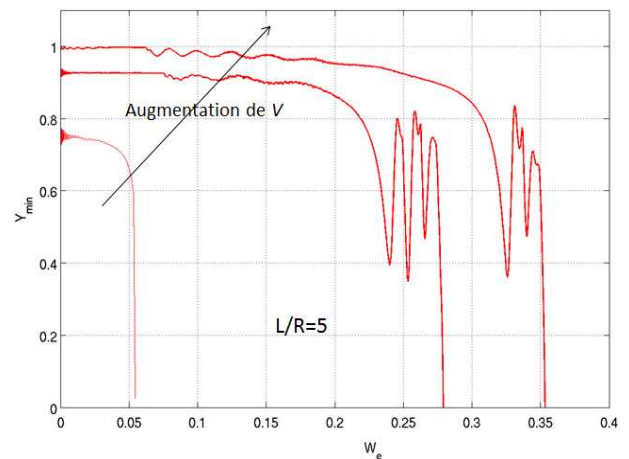


Figure 7. Évolution du rayon du cou en fonction du nombre de Weber, $L/R = 5$, $V=0,76, 0,92, 1$.

4 Conclusion

La stabilité du pont capillaire a été étudiée numériquement de deux façons différentes, les cas statique et dynamique. Dans le cas statique les résultats obtenus sont en très bon accord avec les résultats théoriques de la littérature. Dans le cas dynamique plusieurs régimes de comportements ont été identifiés. La comparaison avec le code de matlab basé sur les équations de Eggers dans le cas $L/R = 2$ montre un très bon accord. Des comparaisons pour d'autres rapports d'aspect sont actuellement étudiées et seront publiées très prochainement.

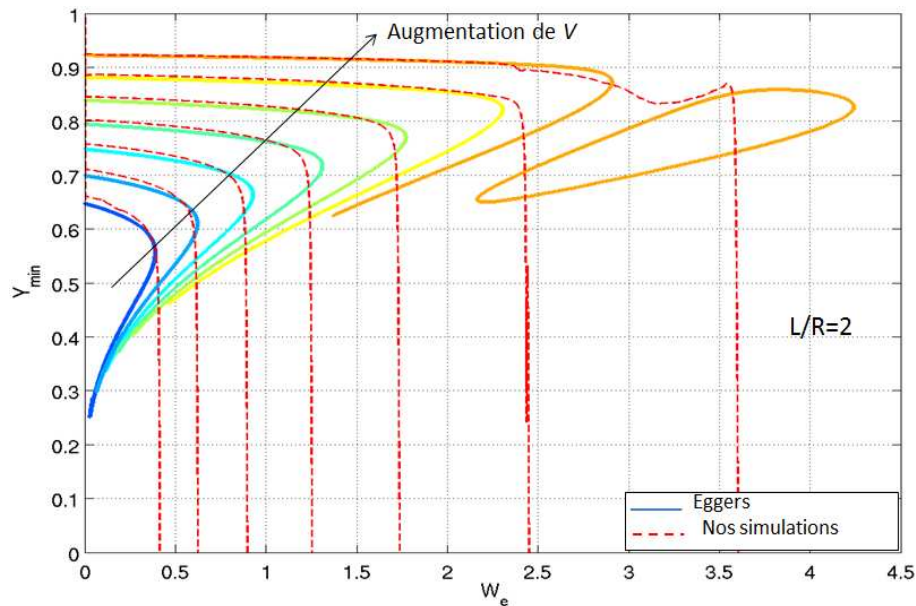


Figure 8. Évolution du rayon du cou en fonction du nombre de Weber, $V=0,61, 0,66, 0,71, 0,76, 0,80, 0,85, 0,90$.

Références

1. J. HOEPFFNER & G. PARÉ, Recoil of a liquid filament : escape from pinch-off through creation of a vortex ring *J. Fluid Mech.*, **734**, 183–197 (2013).
2. J. PLATEAU, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Gauthier-Villars, Paris, (1873).
3. S. POPINET, An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows, *J. Comp. Phys.*, **228**, 5838–5866 (2009).
4. L. A. SLOBOZHANIN & J. M. PERALES, Stability of liquid bridges between equal disks in an axial gravity field, *Phys. Fluids*, **5**, 1305–1314 (1993).
5. B. J. LOWRY & P. H. STEEN, Stability of slender liquid bridges subjected to axial flows, *J. Fluid Mech.*, **330**, 189–213 (1996).
6. J. EGGERS & T. F. DUPONT, Drop formation in a one-dimensional approximation of the Navier-Stokes equation, *J. Fluid Mech.*, **262**, 205–221 (1994).
7. M. CONRATH, P. J. CANFIELD, P. M. BRONOWICKI, M. E. DREYER, M. M. WEISLOGEL & A. GRAH, Capillary channel flow experiments aboard the International Space Station, *Phys. Rev. E*, **88**, 063009 (2013).

La phyllotaxie : cristallographie sous rotation-dilatation et mode de croissance ou de détachement

Nicolas Rivier¹, Jean-François Sadoc² & Jean Charvolin²

¹ Institut de Physique et Chimie des Matériaux de Strasbourg (IPCMS), et Université de Strasbourg, 3, rue de l'Université F-67084 Strasbourg

² Laboratoire de Physique des Solides, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay
nick@fresnel.u-strasbg.fr

Résumé. La phyllotaxie en botanique concerne les arrangements d'objets de même nature (inflorescences dans une fleur composée telle la marguerite ou l'aster, écailles sur un ananas, un cactus ou une pomme de pin, etc.) C'est un réseau spiralé constitué de points placés régulièrement sur une spirale génératrice ; à chaque point on associe une cellule de Voronoi (région de Dirichlet), et c'est le pavage de ces objets qui nous intéresse.

Quasiment toutes ces cellules de Voronoi sont des hexagones topologiques et l'on observe que les cellules voisines s'arrangent en trois spirales ou parastiques : la cellule s a pour voisins les cellules $s \pm f$, où les trois f sont des nombres de Fibonacci successifs. Par exemple (13, 8, 5) pour l'ananas ou l'agave. De plus, on observe des cercles concentriques de défauts (les cellules non-hexagonales qui sont en fait des carrés légèrement tronqués) en nombres de Fibonacci, eux aussi. Ces observations sont décrites par transformations conformes.

On montre que cette structure est indépendante de la position du premier point sur la spirale génératrice. On obtient aussi la structure du cœur de la phyllotaxie, c'est-à-dire des cellules à l'intérieur du premier cercle de défauts. Cette invariance est donc intriquée à la structure en parastiques (à la fois sa cause et sa conséquence). C'est sur une sphère que la phyllotaxie est la plus simple, car les cercles de défauts y sont les mieux séparés. L'invariance de la structure tout entière par rapport à la position du premier point (covariance par inflation) donne un mode de détachement (du grain n d'un petit amas de n grains) ou de croissance (ajout des grains $n + 1, \dots$). L'organisation phyllotactique est donc particulièrement malléable.

L'agave de Parry offre une illustration spectaculaire de ce mode de croissance : après plus de vingt ans en cactus sphérique de phyllotaxie (13, 8, 5), un sursaut de croissance lui fait pousser, six mois avant sa mort, un mât de plus de 2 mètres de haut, de phyllotaxie (3, 2, 1), qui constitue aussi sa mort topologique.

Abstract. Phyllotaxis describes the arrangement of florets, scales or leaves in composite flowers or plants (daisy, aster, sunflower, pinecone, pineapple). Mathematically, it is the most homogeneous and densest covering of a large disk by Voronoi cells (the florets). The Voronoi cell (or Dirichlet domain) associated with a point is defined as the region of space nearer to it than to any other point in the set. Points placed regularly on a generative spiral constitute a spiral lattice, and phyllotaxis is the tiling by the Voronoi cells of the spiral lattice. The number of points on the generative spiral increases as the flower grows, and the azimuthal angle between two successive points on the spiral is $2\pi/\tau$, where $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ is the golden ratio.

If the generative spiral is equiangular (Bernoulli), the phyllotaxis is a conformal (single) crystal, with only hexagonal florets (outside a central core) and zero shear strain. But the size of the florets increases radially outwards. Florets of equal size are generated by points on a Fermat spiral. But the florets are not all hexagonal: there are annular crystalline grains of hexagonal florets (traversed by three visible reticular lines in the form of spirals, called parastichies) separated by grain boundaries that are circles of dislocations (d : dipole pentagon/heptagon) and square-shaped topological hexagons (t : squares with two truncated adjacent vertices). The sequence $dtddtdt$ is quasiperiodic, and Fibonacci numbers are pervasive. The two main parastichies cross at right angle through the grain boundaries. A shear strain develops between two grain boundaries. It is actually a Poisson shear, associated with radial compression between two circles of fixed, but different length. Thus, elastic and plastic shear can be readily absorbed by a polycrystalline phyllotactic structure described by several successive Fibonacci numbers. The packing efficiency problem is thereby solved: one grain boundary constitutes a perfect circular boundary for the disk into which objects are to be packed. Grain boundaries can be rotated (dislocation glide) and translated by local neighbor exchanges (phason flips in quasicrystals). In that way, the phyllotactic structure responds easily, locally and naturally to an external force that is expressed in the curvature of the substrate. A grain bounded by two boundaries of fixed length and quasicrystalline topology, is depleted as the curvature becomes less positive.

An application of phyllotaxis to growth can be seen in the agave. Structurally, the agave spends almost its entire life (25 years, approx.) as a single grain (13, 8, 5) spherical phyllotaxis, a conventional cactus of radius 0.3 m. During the last six month of its life, it sprouts (through three grain boundaries) a huge (2.5 m) mast terminating as seeds-loaded branches arranged in the (3, 2, 1) phyllotaxis, the final topological state before physical death.

The topological constraint of circular symmetry imposes an inflation-deflation symmetry that takes the place of the translational and rotational symmetries of classical crystallography.

1 Introduction. Le pavage de la phyllotaxie

On construit d'abord sur une surface de courbure de Gauss constante (plan, sphère, cône, cylindre) un réseau spiralé constitué de points $s = 0, 1, 2, \dots, n$ placés régulièrement sur une spirale génératrice; ensuite, à chaque point on associe une cellule de Voronoi (région de Dirichlet) [1,2]. La position de chaque point s est donnée par ses coordonnées polaires (ρ, θ) par exemple, sur le plan

$$\rho(s) = a\sqrt{s} \text{ and } \theta(s) = (2\pi/\tau)s \quad (1)$$

où $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ est le nombre d'or. La spirale génératrice $\rho(\theta)$ est ici une spirale de Fermat. La fonction $\rho(s)$ précise la position du premier point $s = 0$ par rapport à l'origine de la spirale $\rho = 0$ et la taille des cellules du pavage qu'on impose uniforme (paramètre a).

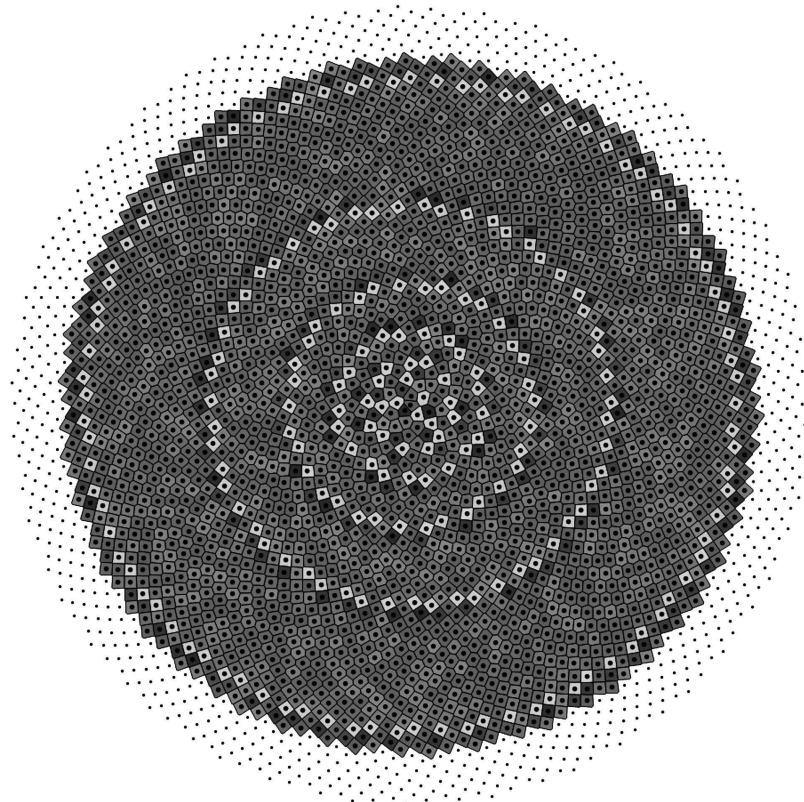


Figure 1. Phyllotaxie plane (nombre d'or, densité uniforme de points, le point $s = 0$ est l'origine de la spirale génératrice) . Chaque point est entouré de son polygone de Voronoi (domaine de Dirichlet) le séparant de ses voisins. Les pentagones, hexagones et heptagones sont dessinés en gris foncé, intermédiaire et clair, respectivement. Les trois spirales visibles de voisins autour de chaque point sont appelées parastiques [2].

Le pavage est presque invariant par rapport au choix du premier point $s = 0$ ou $s = 1$. Si l'on élimine le premier point, la cellule correspondante disparaît ou se détache [3] et seules quelques cellules proches voisines sont topologiquement modifiées. C'est cette presque invariance que nous allons examiner ici. Nous verrons qu'elle impose la structure quasicristalline des joints de grains (les cercles concentriques de cellules non-hexagonales de la Fig. 1) et l'articulation en parastiques, jusqu'au coeur du pavage (tout près de l'origine du substrat plan ou des pôles de la sphère).

2 Couches

Un pavage de polygones topologiques (complexe cellulaire) se décompose en couches successives $j - 1, j, j, j + 1, \dots$ en montant ou $j + 1, j, j, j - 1, \dots$ en descendant [4]. La distance topologique entre deux cellules est le nombre minimum d'interfaces à traverser pour aller de (l'intérieur de) l'une à l'autre. Deux cellules voisines sont distantes de 1. Toutes les cellules de la couche j sont voisines d'au moins une cellule de la couche $j - 1$ en montant ($j + 1$ en descendant); la plupart sont aussi voisines de la couche $j + 1$ (resp. $j - 1$). Une cellule sans contact direct avec la couche $j + 1$ (resp. $j - 1$) est appelée inclusion. Si un joint de grains (anneau circulaire de cellules non-hexagonales de la Fig. 1), par exemple $[7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 6, 6, 6, 6, 6, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]$, constitue une couche complète j en descendant (dont les huit pentagones sont des inclusions), en montant, seuls les huit heptagones et six hexagones constituent la couche j , les huit pentagones faisant partie de la couche $j + 1$. En phyllotaxie, les couches contiennent normalement un nombre de Fibonacci de cellules. C'est le cas des joints de grains. En montant, la première couche a trois cellules. Nous allons voir que les couches sont normalement invariantes par rapport au choix du premier point $s = 0$ ou $s = 1$, donc sous détachement de la première cellule ou croissance (addition d'une dernière cellule).

Un anneau circulaire de défauts (= joint de grains) constitue (en descendant) une couche j complète de f_{i+1} cellules non-hexagonales (soit, successivement le long des f_i tours de la spirale génératrice, f_{i-1} heptagones, f_{i-2} hexagones (avec deux petits côtés adjacents) et f_{i-1} pentagones), ordonnées comme dans la figure A1 de [2] (strip cut in a square lattice). Les cellules de Voronoi (domaines de Dirichlet) sont carrées, quatre incidentes sur un sommet qui est un point critique de $T1$ (les parastiques principales se croisent à angle droit sur le joint de grain [5]). Ces carrés sont légèrement tronqués, et c'est le mode de troncature qui effectue des $T1$ le long du joint de grains pour donner la topologie des cellules voisines. Entre deux anneaux de défauts, il y a des cellules hexagonales qui constituent les grains. Les couches $j + 1$ et $j - 1$ voisines du joint de grains j contiennent respectivement f_{i+1} et f_i cellules, toutes hexagonales sauf exceptions.

3 Détachement de la première cellule $s = 1$

Sur la sphère, ($n \leq 75$), la première couche $s = (1, 2, 3)$ se compose de trois cellules $(5, 6, 6)$. La seconde couche a huit cellules $s = (4, 7, 10, 5, 8, 11, 6, 9)$ cycliquement. La cellule pentagonale $s = 1$ a pour voisins les cinq cellules $s = (2, 3, 6, 9, 4)$ cycliquement, marquant le départ des parastiques $1, 2, 5, 8, 3$ qui sont tous des nombres de Fibonacci caractéristiques de la phyllotaxie.

Que se passe-t-il si la cellule 1 du pavage se détache ou disparaît (o)? On voit [3], par exemple en supprimant la frontière entre 1 et 4, que les cellules 2 et 3 perdent un côté ($-$) et la cellule 4, qui remplit l'espace laissé par 1, en gagne un ($+$). Toutes les autres cellules sont topologiquement inchangées ($.$). L'effet du détachement sur la séquence des cellules le long de la spirale génératrice $s = 1, 2, \dots$ est donc $(o, -, ., +, ., ., ., ., -, ., \dots)$ et la première cellule de la spirale génératrice est alors $s = 2$. La séquence $(5, 6, 6), [5, 5, 5, 5, 5], 6, 6, 6 \dots$ est donc invariante sous détachement de 1. De même, la séquence $(5, 6, 6), [(6, 6, 6, 6, 6), (6, 6, 6), (5, 5, 5, 5, 5)], 6, 6, \dots$ est invariante sous détachement de 1, avec un $T1$ sur $s = 4$ $(., ., ., -, ., ., ., ., +, ., ., +, ., ., ., ., -, \dots)$ qui déplace le premier joint de grain $[(6, 6, 6, 6, 6), (6, 6, 6), (5, 5, 5, 5, 5)]$. Notons que ce joint de 13 cellules est trop petit pour être un joint de grains normal (les cinq hexagones intérieurs devraient être des heptagones) mais il a la charge topologique de $+5$ qui, avec le pentagone $s = 1$, complète la charge $+6$ d'un hémisphère.

Notons aussi qu'un joint de grain est déplacé par un $T1$ sur $s = c$, sa première cellule heptagonale. Par exemple, le $T1 \dots, [-, ., ., ., ., +, ., ., +, ., ., ., .], -, ., \dots$ translate la séquence $\dots, 6, [7, 7, 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5, 5], 6, 6, \dots$ en $\dots, 6, 6, [7, 7, 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5, 5], 6, \dots$

En phyllotaxie sphérique avec n cellules, la spirale génératrice est symétrique par rapport au milieu de l'équateur. Pour $n = 16 - 29$ on a la séquence $(5, 6, 6), [5, 5, 5, 5, 5], 6, 6, 6, \dots$, invariante sous détachement de $s = 1$. La charge topologique est celle d'un hémisphère $+6 = 1 + 5$. Pour $n = 43 - 75$ on a la séquence $(5, 6, 6), [(6, 6, 6, 6, 6), (6, 6, 6), (5, 5, 5, 5, 5)], 6, 6, \dots$, de charge topologique $+6 = 1 + 5$, invariante sous détachement de $s = 1$ avec un $T1$ sur $s = 4$. Pour $n \geq 81$, un nouveau joint de grain normal de 21 cellules s'est développé de chaque côté de l'équateur, soit la séquence $(5, 6), [(7, 6, 6, 6, 6), (5, 6, 6), (5, 5, 5, 5, 5)], 6, 6, 6, 6, [(7, 7, 7, 7, 7, 7, 7), (6, 6, 6, 6, 6), (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)] \dots$

Le premier joint de grains est poussé vers l'origine (la première couche n'a plus que deux cellules). Il finira par se désintégrer, laissant au nouveau joint de grains le soin d'apporter la charge topologique $+5$.

En effet, en phyllotaxie planaire, on a la séquence [2], $(5, 5, 6, 7), (7, 7, 6, 5, 5, 6), [(6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7), (6, 6, 6, 6, 6), (5, 5, 5, 5, 5, 5)] \dots$

Ici, la spirale génératrice commence à l'origine $s = 0$ et n'est plus contrainte à l'équateur par symétrie. La cellule $s = 0$ disparaît en enlevant la frontière 0|2 et effectuant (i) un ou (ii) deux $T1$ pour éviter que les parastiques 13 ne partent des cellules centrales 2 ou 3 respectivement. On aboutit aux structures invariantes

(i) $(5, 6, 7), (6, 6, 6, 6, 5, 6), [(7, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7), (6, 6, 6, 6, 6), (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)] \dots$,

ou

(ii) $(5, 6, 6), (6, 6, 6, 6, 6, 6), [(7, 7, 6, 6, 6, 6, 6, 7), (6, 6, 6, 6, 6), (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)] \dots$

(La séquence b) de la Table I de [2] contient trois erreurs, corrigées ici). On voit que le premier joint de grain en phyllotaxie sphérique $[(7, 6, 6, 6, 6), (5, 6, 6), (5, 5, 5, 5, 5)]$ s'est désintégré pour n infini.

4 Croissance anormale : l'agave

La botanique est décrite en Figure 2.

L'agave est une phyllotaxie sphérique $n = 43 - 75$ $(5, 6, 6), [(6, 6, 6, 6, 6), (6, 6, 6), (5, 5, 5, 5, 5)], 6, 6, \dots, 6, 6, [(5, 5, 5, 5, 5)(6, 6, 6)(., ., ., ., .)]$.

Elle est constituée d'un seul grain $(13, 8, 5)$, bordé par deux joints de grains (cercles polaires) où les cellules sont carrées et les sommets des points critiques de $T1$. La croissance procède de bas en haut, du pôle sud au pôle nord de la sphère. La calotte polaire sud est la première couche de trois cellules $(5, 6, 6)$. Considérons le cône tangent à la sphère sur le cercle polaire nord.

Comment continuer la croissance au-delà du cercle polaire nord ? Normalement (état stationnaire) en restant sur la sphère. Ou, comme le fait l'agave Parryi, en passant sur le cône tangent par un joint de grain complet $[(5, 5, 5, 5, 5)(6, 6, 6)(7, 7, 7, 7, 7)]$ puis par deux autres joints de grains, sur deux cônes moins ouverts pour terminer sur un cylindre, le mât. Soit $\dots, 6, 6, [(5, 5, 5, 5, 5), (6, 6, 6), (7, 7, 7, 7, 7)], [(5, 5, 5), (6, 6), (7, 7, 7)], [(5, 5), (6), (7, 7)], 6, 6, 6, \dots$

Fin de partie topologique (phyllotaxie $(3, 2, 1)$).

Références

1. J.-F. SADOE, N. RIVIER & J. CHARVOLIN, Phyllotaxis: a non conventional crystalline solution to packing efficiency in situations with radial symmetry, *Acta Crystallogr. A*, **68**, 470–483 (2012).
2. J.-F. SADOE, J. CHARVOLIN & N. RIVIER, Phyllotaxis on surfaces of constant Gaussian curvature, *J. Phys. A.*, **46**, 295202 (2013).
3. B. DUBERTRET & N. RIVIER, The renewal of the epidermis: a topological mechanism, *Bioph. J.*, **73**, 38–44 (1997).
4. C. OQUEY, N. RIVIER & T. ASTE, Stratifications of cellular patterns: hysteresis and convergence *Eur. Phys. J. B*, **33**, 447–455 (2003).
5. H. S. M. COXETER, *Introduction to Geometry*, Wiley, New York (1961), 169–174.

Agave

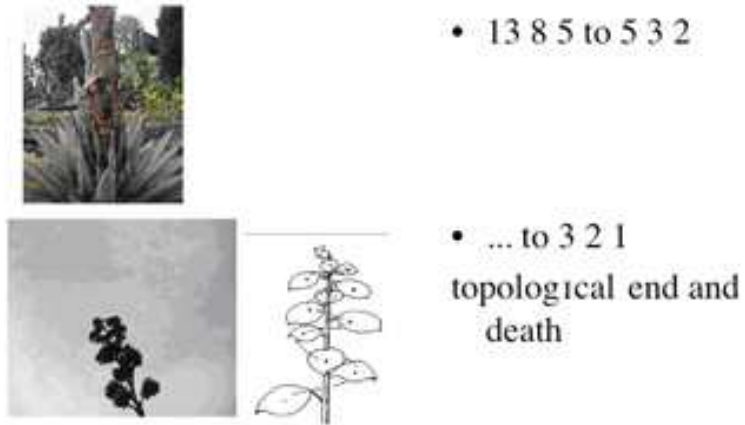


Figure 2. Agave Parryi. Structuralement, passe quasiment toute sa vie, 25 ans environ, en phyllotaxie sphérique (grain unique (13, 8, 5) bordé de deux défauts topologiques [5, 5, 5, 5, 5]). C'est alors un cactus standard de 30 cm de rayon). Pendant les derniers six mois de sa vie, il lui pousse un mât de 2,5 m qui se termine par des fleurs et des graines en phyllotaxie (3, 2, 1), état topologique final et mort physique.

Observation directe de la formation de patterns dans des paquets d'électrons relativistes

É. Roussel¹, C. Évain¹, M. Le Parquier¹, C. Szwej¹, S. Bielawski¹, M. Hosaka², N. Yamamoto², Y. Takashima², T. Konomi³, M. Adachi³, H. Zen³, S. Kimura³, M. Katoh³, J. Raasch⁴, P. Thoma⁴, A. Scheuring⁴, K. Ilin⁴, M. Siegel⁴, L. Manceron⁵, J.-B. Brubach⁵, M.-A. Tordeux⁵, J.-P. Ricaud⁵, L. Cassinari⁵, M. Labat⁵, M.-E. Couprie⁵, P. Roy⁵

¹ PhLAM, Université Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

² Graduate School of Engineering, Nagoya University, Nagoya, 464-8603, Japan

³ UVSOR, Institute for Molecular Science, Okazaki, 444-8585, Japan

⁴ Institute of Micro- and Nanoelectronic Systems, KIT, Karlsruhe, Germany

⁵ Synchrotron SOLEIL, Gif-sur-Yvette, France

eleonore.rousseau@ed.univ-lille1.fr

Résumé. Dans les anneaux de stockage des centres de rayonnement synchrotron, les électrons relativistes subissent des instabilités lorsque la densité électronique dépasse un certain seuil. Une de ces instabilités dite CSR (*Coherent Synchrotron Radiation*) est caractérisée par la formation de structures spatiales, avec une période typique de l'ordre du millimètre, et qui évoluent de manière erratique. Elle est due à l'interaction des paquets d'électrons avec leur propre champ, et se caractérise par l'émission d'un rayonnement synchrotron cohérent très intense dans le domaine des fréquences térahertz. Cette instabilité représente une limitation fondamentale, lorsque l'on désire atteindre des densités de charge élevées. Cependant, elle représente également une nouvelle opportunité pour produire du rayonnement térahertz cohérent. Nous présentons ici des simulations numériques basées sur l'équation de Vlasov-Fokker-Planck à 1 degré de liberté dans les cas des anneaux de stockage UVSOR (Japon) et Synchrotron SOLEIL (France). Les simulations numériques permettent de visualiser la microstructuration et la dynamique complexe de l'espace des phases longitudinal (position, énergie) du paquet d'électrons.

Abstract. At high beam current, when relativistic electron bunches circulate in a storage ring, they undergo an instability which leads to the formation of spatial structures in the bunch at millimeter scale with an irregular evolution in space and time. The interaction between the electrons and their own radiation is at the origin of this instability, called the CSR (Coherent Synchrotron Radiation) instability. It is characterized by an intense emission of coherent synchrotron radiation in the terahertz frequency domain. This instability presents a fundamental limitation to reach higher beam current, but is also a promising source of coherent terahertz radiation. We present numerical simulations based on the Vlasov-Fokker-Planck equation with 1 degree of freedom in the cases of the UVSOR (Japan) and Synchrotron SOLEIL (France) storage rings. The numerical simulations allow to follow the complex dynamics of the microstructure in the longitudinal phase-space (position, energy) of the electron bunch.

1 Introduction

Les accélérateurs d'électrons relativistes tels que les anneaux de stockage (par exemple Synchrotron SOLEIL en France, UVSOR au Japon) sont largement utilisés pour produire des rayonnements intenses, appelés rayonnement synchrotron, à des longueurs d'ondes difficilement accessibles par d'autres moyens, en particulier dans le domaine des rayons X, et des ondes térahertz. En effet, lorsque des paquets d'électrons (d'une longueur typique de l'ordre de quelques millimètres à quelques centimètres) circulant à des vitesses proches de la lumière sont accélérés (par exemple dans un aimant de courbure ou un onduleur), ils émettent un rayonnement très intense (Fig. 1).

Le rayonnement synchrotron émis est généralement incohérent et proportionnel au nombre d'électrons N_e dans le paquet. Lorsque l'on tente d'augmenter le nombre d'électrons pour obtenir des rayonnements

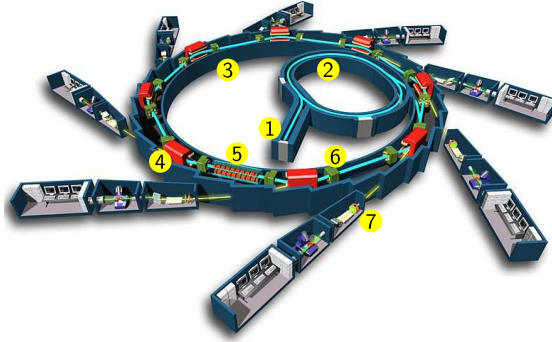


Figure 1. Fonctionnement d'un anneau de stockage. Un faisceau d'électrons est émis par un canon à électrons (1). Il est d'abord accéléré dans un accélérateur linéaire (linac) puis dans un accélérateur circulaire (booster) (2) où il atteint son énergie nominale. Les électrons sont alors injectés dans l'anneau de stockage (3) où ils circulent pendant plusieurs heures. Lorsque les électrons sont déviés de leur trajectoire rectiligne (par exemple dans un aimant de courbure (4) ou dans un onduleur (5)), ils émettent un rayonnement synchrotron intense et perdent de l'énergie. Pour compenser ces pertes, les électrons sont maintenus à leur énergie nominale grâce aux cavités radio-fréquences (5). Le rayonnement émis par les électrons est transporté le long de lignes de lumière (7) vers les expériences des utilisateurs.

encore plus intenses, les anneaux de stockage se heurtent à une instabilité appelée instabilité CSR (*Cohérent Synchrotron Radiation*) [1–8]. Cette instabilité est causée par l'interaction des électrons avec leur propre rayonnement via les parois de la chambre à vide de l'anneau. Elle-même conduit à la formation de patterns dans le paquet d'électrons (microstructures dans la direction longitudinale), qui évoluent de manière complexe. L'observation expérimentale de ces microstructures se fait généralement de manière indirecte via l'enregistrement du signal cohérent térahertz émis pendant l'instabilité. Ce rayonnement extrêmement intense est appelé rayonnement synchrotron cohérent (CSR) et est proportionnel au carré du nombre d'électrons. Il permet de déduire des informations sur la forme des structures dans le paquet [9] mais ne permet pas de suivre l'évolution spatio-temporelle des microstructures.

Dans un premier temps, nous montrons comment l'intégration numérique de l'équation de Vlasov-Fokker-Planck permet de décrire la formation des microstructures pendant l'instabilité CSR. Nous montrons ensuite comment le choix du modèle de couplage entre les électrons et leur rayonnement influe sur la forme des microstructures dans le paquet. Les simulations numériques sont réalisées dans les cas des anneaux de stockage UVSOR-III (Japon) et Synchrotron SOLEIL (France).

2 L'équation de Vlasov-Fokker-Planck

L'évolution de la fonction de distribution f de la densité électronique dans un anneau de stockage peut être décrite à partir de l'équation de Vlasov-Fokker-Planck (VFP) à 1 degré de liberté [10] :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} - p \frac{\partial f}{\partial q} + [q - I_c E_w f(q, f(\cdot))] \frac{\partial f}{\partial p} = 2\varepsilon \left[f(q, p, \theta) + p \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right]. \quad (1)$$

Dans cette équation, θ est un temps continu, sans dimension et est associé au nombre de tours dans l'anneau : $\theta = 2\pi f_s t$, avec t le temps (en secondes) et f_s la fréquence synchrotron (de l'ordre du kilohertz). Les grandeurs q et p représentent la position et l'impulsion. La grandeur q (resp. p) est l'écart en position (resp. en impulsion) par rapport à un électron de référence, dit *électron synchrone* (avec une position longitudinale z_0 et une énergie E_0). Elles s'expriment en fonction de la longueur du paquet σ_z et de sa dispersion en énergie σ_E à l'équilibre : $q = (z - z_0)/\sigma_z$ et $p = (E - E_0)/\sigma_E$. On pose $\varepsilon = 1/(2\pi f_s \tau_s)$ où τ_s est le temps d'amortissement synchrotron. En général, $\varepsilon \ll 1$, ce qui signifie que les oscillations synchrotrons sont faiblement amorties. Enfin, on définit $I_c = e2\pi R_c/(2\pi f_s \sigma_E T_0)$ avec R_c le rayon des

aimants de courbure et T_0 la période de révolution. La fonction de distribution $f(q, p)$ est normalisée telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(q, p) dq dp = 1$.

Le terme E_{wf} représente l'interaction des électrons avec leur propre rayonnement. Ce terme représente un couplage non-local et non-linéaire, et est à l'origine de l'instabilité CSR. Il s'exprime sous la forme d'un produit de convolution entre le champ de sillage (*wakefield*) créé par un électron E_{wf}^{1e} et la densité électronique longitudinale $\rho(q)$:

$$E_{wf}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_e E_{wf}^{1e}(q - q') \rho(q') dq', \quad (2)$$

avec N_e le nombre d'électrons dans un paquet et $\rho(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q, p) dp$.

Le choix de l'expression du wakefield dépend de la modélisation de la trajectoire d'un électron et des conditions aux bords de la chambre à vide de l'accélérateur. Nous utilisons un des modèles les plus utilisés qui consiste à décrire la trajectoire d'un électron sur une orbite circulaire (Fig. 2 (a)) entre deux plaques parallèles infiniment conductrices (Fig. 2 (b)) [11].

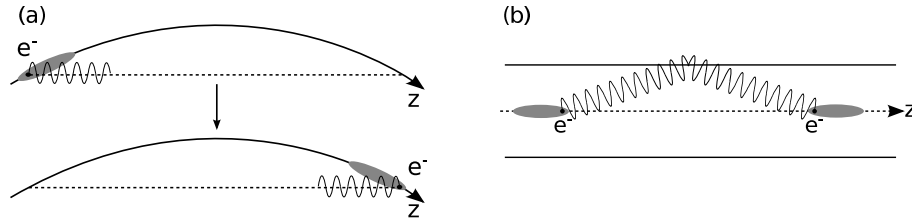


Figure 2. Interaction du paquet d'électrons avec son propre rayonnement (a) le long d'une orbite circulaire, (b) entre deux plaques parallèles.

3 Formation des microstructures

Les simulations numériques permettent de visualiser l'apparition de microstructures pendant l'instabilité CSR et de suivre leur évolution. Les microstructures apparaissent dans l'espace des phases (q, p) sous forme de « doigts », et sont entraînées dans un mouvement de rotation (Fig. 3). Les anneaux UVSOR et SOLEIL sont des anneaux de domaines d'énergie, de taille, etc. différents (Tab. 1). L'étude dans ces deux situations nous permet d'explorer des domaines de paramètres très différents.

	SOLEIL UVSOR-III	
Énergie nominale E_0 (GeV)	2,75	0,6
Dispersion relative en énergie σ_δ	1×10^{-3}	$4,36 \times 10^{-4}$
Longueur du paquet σ_z (mm)	4,59	30
Temps d'amortissement τ_d (ms)	3,27	32,36
Fréquence synchrotron f_s (kHz)	4,64	23,1
Période de révolution T_0 (ns)	1181,4	177,6
Hauteur de la chambre à vide $2h$ (cm)	2,5	3,8
Rayon de courbure R_c (m)	5,36	2,2

Table 1. Liste des paramètres des anneaux de stockage Synchrotron SOLEIL et UVSOR. La longueur du paquet et la dispersion en énergie sont des valeurs RMS. La longueur du paquet est donnée à zéro courant.

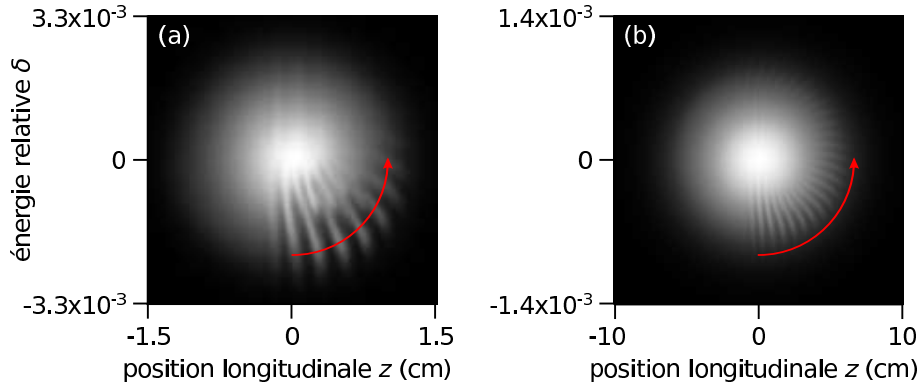


Figure 3. Espace des phases longitudinal dans le cas de (a) Synchrotron SOLEIL, $I = 15$ mA et (b) UVSOR-III, $I = 120$ mA.

La longueur d'onde des microstructures est liée aux dimensions de la chambre à vide dans les aimants de courbure, notamment à la hauteur $2h$ entre les plaques parallèles et au rayon de courbure R_c . Elle apparaît juste en dessous de la longueur d'onde de coupure λ_c d'une trajectoire circulaire entre deux plaques parallèles [10] :

$$\lambda_c = 4h\sqrt{\frac{2h}{R_c}}. \quad (3)$$

Dans le cas de Synchrotron SOLEIL, la longueur d'onde est de l'ordre de 1 mm ($\lambda_c = 3,4$ mm) tandis qu'à UVSOR, les structures ont une période de l'ordre de 6,5 mm ($\lambda_c = 9,9$ mm).

La rotation des microstructures dans l'espace des phases se traduit par un glissement des structures dans le profil longitudinal du paquet d'électrons et également dans le champ électrique térahertz émis (Fig. 4). Les structures apparaissent au centre du paquet d'électrons puis sont entraînées à l'avant du paquet avec la rotation des électrons dans l'espace des phases.

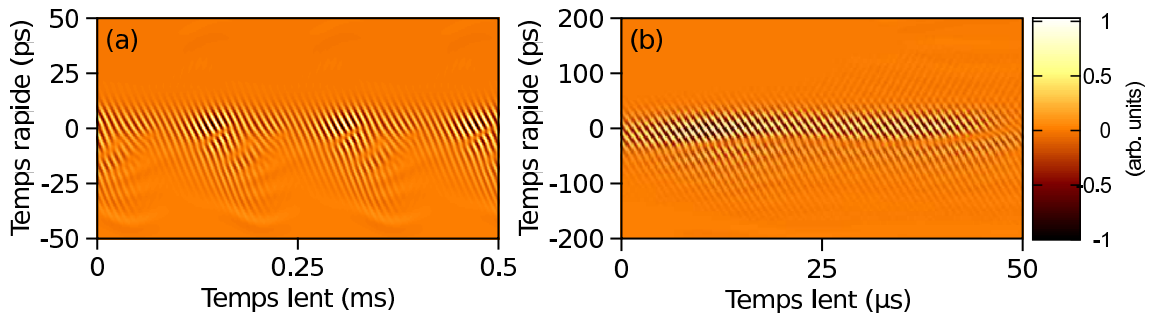


Figure 4. Champ électrique térahertz émis dans le cas de (a) Synchrotron SOLEIL, $I = 15$ mA et (b) UVSOR-III, $I = 120$ mA. Le temps lent représente le nombre de tours dans l'anneau. Le temps rapide correspond à la position longitudinale au niveau du paquet d'électrons. Des temps rapides négatifs correspondent à l'avant du paquet d'électrons.

4 Influence du wakefield

Le terme de couplage entre les électrons via leur propre rayonnement est l'ingrédient indispensable à l'étude de l'instabilité CSR. La géométrie des chambres à vide est souvent trop complexe à simuler

et l'utilisation de modèle simplifié facilite les études théoriques. Nous avons utilisé le cas simple d'un électron circulant sur une orbite circulaire entre deux plaques infiniment conductrices. Ce modèle est une description très simplifiée de la trajectoire d'un électron dans un aimant de courbure. Expérimentalement, des déformations du profil longitudinal, notamment l'apparition d'un front raide à l'avant du paquet, ont été observées à UVSOR-III. Le modèle simple décrit précédemment ne permet pas de simuler ces déformations. Cependant, elles peuvent être reproduites en prenant en compte les effets de résistance et d'inductance dus à la paroi de la chambre à vide [12].

L'apparition d'un front raide à l'avant du paquet d'électrons (Fig. 5(a)) est reproduite dans les simulations numériques. Les microstructures à l'intérieur du paquet d'électrons sont toujours visibles mais une spirale englobe désormais le paquet d'électrons. Les impédances résistive et inductive sont à l'origine de cette déformation du paquet d'électrons. Ce changement se traduit également dans la forme du champ électrique térahertz (Fig. 5(b)). En effet, en plus d'observer le glissement des microstructures vers l'avant du paquet, une structure plus lente apparaît sur le bord et glisse vers l'arrière du paquet.

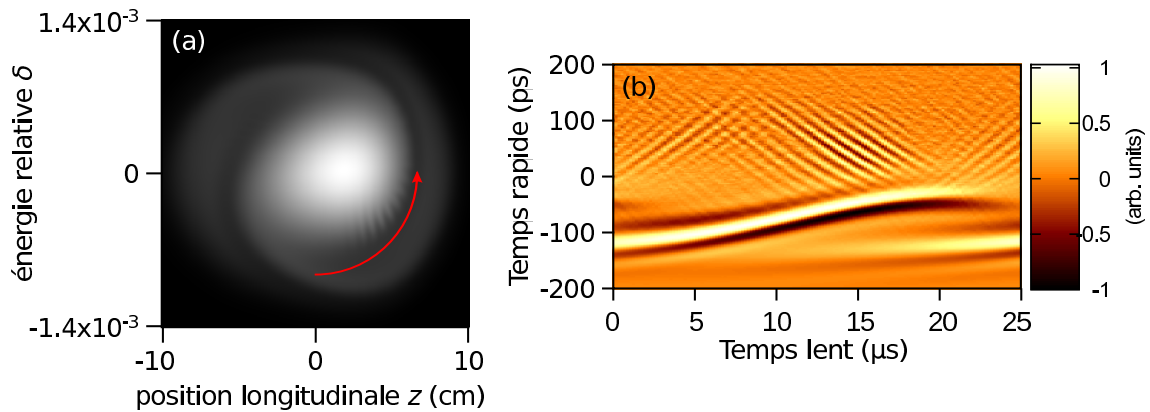


Figure 5. Influence de l'impédance résistive et inductive dans l'anneau UVSOR-III. (a) Espace des phases longitudinal, (b) champ électrique térahertz émis.

5 Conclusion

Dans les anneaux de stockage, les paquets d'électrons relativistes sont sujets à une instabilité appelée instabilité CSR. Cette instabilité est due à l'interaction des électrons avec leur propre rayonnement (wakefield) via les parois de la chambre à vide de l'accélérateur. Les simulations numériques basées sur l'équation de Vlasov-Fokker-Planck permettent d'étudier la formation et l'évolution des microstructures au sein du paquet d'électrons sous l'influence de différents types de wakefield. Nous avons ainsi montré que l'ajout d'un terme résistif et inductif décrivant de manière simplifiée les propriétés des parois de la chambre à vide influe sur la forme des microstructures apparaissant dans l'espace des phases ainsi que sur leur évolution temporelle.

6 Remerciements

Le projet a été supporté par l'ANR (projet Blanc 2010-042301), le LABEX CEMPI, le programme PICS (CNRS) franco-japonais, le *grant-in-aid for scientific researches (B20360041) of JSPS*, le *JSPS fellowship program for research in Japan S-09171*, le *Joint Studies Program of the Institute for molecular science*, et a bénéficié des ressources HPC de GENCI TGCC/IDRIS (2013-x2013057057).

Références

1. M. ABO-BAKR, J. FEIKES, K. HOLLDAK, G. WÜSTEFELD & H.-W. HÜBERS, Steady-State Far-Infrared Coherent Synchrotron Radiation detected at BESSYII, *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 254801 (2002).
2. J. M. BYRD, W. P. LEEMANS, A. LOFTSDOTTIR, B. MARCELIS, M. C. MARTIN, W. R. MCKINNEY, F. SANNIBALE, T. SCARVIE & C. STEIER, Observation of Broadband Self-Amplified Spontaneous Coherent Terahertz Synchrotron Radiation in a Storage Ring, *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 224801 (2002).
3. Y. TAKASHIMA, M. KATOH, M. HOSAKA, A. MOCHIHASHI, S.-I. KIMURA & T. TAKAHASHI, Observation of Intense Bursts of Terahertz Synchrotron Radiation at UVSOR-II, *Jpn J. Appl. Phys.*, **44**, L1131–L1133 (2005).
4. E. KARANTZOULIS, G. PENCO, A. PERUCCHI & S. LUPI, Characterization of coherent THz radiation bursting regime at Elettra, *Infrared Phys. Techn.*, **53**, 300–303 (2010).
5. G. WÜSTEFELD, J. FEIKES, M. V. HARTROTT, M. RIES, A. HOEHL, R. KLEIN, R. MÜLLER, A. SERDYUKOV & G. ULM, Coherent THz Measurements at the Metrology Light Source, *Proceedings of the 2010 IPAC conference, Kyoto, (Japan)*, p. 2508 (2010).
6. V. JUDIN, N. HILLER, A. HOFMANN, E. HUTTEL, B. KEHRER, M. KLEIN, S. MARSCHING, C. A. J. MEUTER, A.-S. MÜLLER, M. SCHUH, M. SCHWARZ, N. J. SMALE, M. STREICHERT & M.J. NASSE, Spectral and Temporal Observations of CSR at ANKA, *Proceedings of the 2012 IPAC conference, New Orleans, Louisiana (USA)*, p. 1623 (2012).
7. W. SHIELDS, R. BARTOLINI, G. BOORMAN, P. KARATAEV, A. LYAPIN, J. PUNTREE & G. REHM, Microbunch Instability Observations from a THz Detector at Diamond Light Source, *J. Phys. Conf. Ser.*, **357**, 012037 (2012).
8. C. EVAIN, J. BARROS, A. LOULERGUE, M. A. TORDEUX, R. NAGAOKA, M. LABAT, L. CASSINARI, G. CREFF, L. MANCERON, J. B. BRUBACH, P. ROY & M. E. COUPRIE, Spatio-temporal dynamics of relativistic electron bunches during the micro-bunching instability in storage rings, *Europhys. Lett.*, **98**, 40006 (2012).
9. É. ROUSSEL, C. EVAIN, C. SZWAJ & S. BIELAWSKI, Microbunching instability in storage rings : link between phase-space structure and terahertz coherent synchrotron radiation radio-rfrequency spectra, *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, **17**, 010701 (2014).
10. M. VENTURINI, R. WARNOCK, R. RUTH & J. ELLISON, Coherent synchrotron radiation and bunch stability in a compact storage ring, *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, **8**, 014202 (2005).
11. J. B. MURPHY, S. KRINSKY & R. L. GLUCKSTERN, Longitudinal Wake Field for An Electron Moving on A Circular orbit, *Part. Accel.*, **57**, 9–64 (1996).
12. I. P. S. MARTIN, C. A. THOMAS & R. BARTOLINI, Modelling the Steady-state CSR Emission in Low Alpha Mode at the Diamond Storage Ring, *Proceedings of the 2012 IPAC conference, New Orleans, Louisiana (USA)*, p. 1677 (2012).

Description gyrocinétique des modes de déchirement néoclassiques

Natalia Tronko¹, Alain Brizard² & Howard Wilson¹

¹ York Plasma Institute, University of York, Heslington, York, YO10 5DD, UK

² Department of Physics, Saint Michael's College, Colchester, VT 05439, USA

nathalie.tronko@gmail.com

Résumé. Dans cet article l'équation de Vlasov gyrocinétique non-linéaire est dérivée dans les variables adaptées à la description de la dynamique des particules chargées en présence d'un îlot magnétique. L'équation de Vlasov est tronquée en concordance avec la dynamique générée par un hamiltonien de gyrocentre contenant la perturbation électromagnétique de premier ordre. Cette équation représente un outil essentiel pour le calcul de la réponse ionique à la perturbation d'un îlot. Elle est aussi utile à l'évaluation de la perturbation du courant du plasma induite par cet îlot.

Abstract. We derive the non-linear gyrokinetic Vlasov equation in variables adapted for description of the charged particle dynamics in the presence of a magnetic island. The equation is truncated accordingly to the dynamics generated by a gyrocenter Hamiltonian containing a first order electromagnetic perturbation. The gyrokinetic Vlasov equation is an essential tool for evaluation of the ion response to the island. It is also necessary for accounting contribution of a magnetic island to the current perturbation of plasma.

1 Introduction

Le champ magnétique confinant le plasma de fusion possède une topologie complexe. Par exemple, la formation d'une chaîne d'îlots magnétiques est une de ses propriétés intrinsèques. La présence des îlots implique, à son tour, l'apparition de régions stochastiques dans lesquelles le transport d'électrons augmente. Dans le cas où la taille d'un îlot croît de manière significative, i.e. en atteignant 1 à 2 cm pour le MAST, ceci peut entraîner une perte de confinement et une éruption possible du plasma. Comprendre le mécanisme de croissance des îlots magnétiques ainsi que calculer la taille minimale nécessaire à leur croissance sont les défis majeurs pour la compréhension de la dynamique des NTMs. Ces questions ont été étudiées dans [2] du point de vue de la théorie drift-cinétique et dans [3] du point de vue de l'approche fluide. Afin de pouvoir prévenir l'influence néfaste d'un îlot magnétique sur le confinement du plasma, il est aussi important de comprendre comment la présence d'un îlot influence la dynamique du plasma. Un intérêt particulier est porté au calcul d'un courant de plasma modifié par la présence d'un îlot. Cette question a déjà été étudiée du point de vue de la théorie drift-cinétique par Wilson *et al.* [2].

La théorie néoclassique tient compte des effets de la courbure du champ magnétique sur la dynamique du plasma. Ceci implique l'existence de deux types de trajectoires des particules chargées : les trajectoires piégées et passantes. Dans le cadre de la théorie néoclassique, la présence d'un îlot magnétique peut modifier le courant du plasma de deux manières différentes. Premièrement, la propagation d'un îlot induit un courant, appelé « courant de polarisation ». Deuxièmement, le profil de la pression s'aplatit dans la région de l'îlot. Ceci modifie le courant appelé « *bootstrap* », qui est proportionnel au gradient de pression $j_b \sim -\partial p / \partial r$. Le courant *bootstrap* est dû aux collisions entre les particules piégées et passantes, sa prise en compte est donc uniquement possible dans le cadre de la théorie néoclassique. Ce courant permet la stabilisation et le chauffage du plasma, et joue un rôle primordial pour le confinement. Il est donc nécessaire pour l'évaluation du courant de *bootstrap* de tenir compte des effets de courbure du champ magnétique de manière consistante.

Un îlot magnétique est un système possédant plusieurs échelles spatiales. Il se caractérise en général par une structure assez allongée dans la direction poloidale pouvant atteindre la taille du petit rayon

d'un tokamak $k_\theta \sim r$, alors que sa largeur varie de quelques millimètres à quelques centimètres. Les modes de déchirement néoclassiques, (NTM, pour « *Neoclassical Tearing Modes* ») représentent une classe d'instabilités qui génèrent les îlots, dont la dynamique peut influencer le courant de *bootstrap*. Dans le cas des NTM, on s'intéresse aux îlots dont la largeur est comprise entre quelque rayons de Larmor ioniques ρ_i et la largeur des trajectoires bananes ioniques ρ_{bi} : $\rho_i < w \sim \rho_{bi}$.

Afin de pouvoir calculer la modification du courant induit par un îlot, il est nécessaire de tenir compte de la taille finie du rayon de Larmor (les effets de FLR), ceci de manière consistante, au moins pour la dynamique des ions. On utilise pour cela la théorie gyrocinétique moderne [1]. À la première étape du calcul, les réponses ioniques et électroniques à une perturbation électromagnétique représentant un îlot sont calculées. À la deuxième étape, la loi d'Ampère gyrocinétique est utilisée afin de pouvoir évaluer la modification du courant induit par un îlot. L'évaluation de la loi d'Ampère consistante avec la réduction de la dynamique est possible dans le cadre de l'approche variationnelle de la théorie gyrocinétique. Dans [5], on présente la dérivation des équations de Vlasov-Maxwell gyrocinétiques pour la description d'un îlot magnétique à partir de ce principe variationnel.

Dans cet article, on se concentre sur la première étape de ce calcul. Le but principal est de présenter l'équation de Vlasov gyrocinétique non-linéaire, décrite dans les variables adaptées à la perturbation magnétique induite par un îlot. Notre travail généralise les descriptions obtenues et utilisées précédemment dans le cadre de l'approche drift-cinétique [2], qui ignoraient alors les effets induits par la taille finie du rayon de Larmor. On peut ainsi envisager d'étendre notre approche aux applications numériques, qui utilisaient jusqu'à présent le formalisme gyrocinétique électrostatique uniquement [4].

On remarque aussi que notre résultat en régime linéaire correspond à l'équation gyrocinétique de Vlasov non-adiabatique, obtenue dans [6].

Cette communication est organisée de la manière suivante. Dans la première partie on rappelle brièvement l'idée de la réduction gyrocinétique et l'on introduit les équations de la dynamique réduite du gyrocentre. En deuxième partie, les coordonnées de flux standard pour la géométrie d'un champ magnétique axisymétrique sont présentées. On introduit ensuite les variables adaptées à la description de la dynamique d'une particule chargée en présence d'un îlot. Dans la troisième partie, on présente l'équation de Vlasov non-adiabatique non-linéaire qui correspond à cette dynamique.

2 Formalisme gyrocinétique hamiltonien

Dans un plasma de fusion magnétisé les processus physiques importants ont lieu aux échelles temporelles qui excèdent la période de mouvement cyclotronique. L'élimination d'une échelle de mouvement cyclotronique est essentielle pour simplifier la description de la dynamique du plasma. Une telle simplification est possible grâce à l'existence d'une variable lente, i.e. d'un invariant adiabatique $\mu = mv_\perp/mB$, qui représente le moment magnétique d'une particule chargée.

En théorie gyrocinétique on travaille sur l'espace des phases à 6 dimensions avec les variables suivantes : $(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mu, \zeta)$. Ici, $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \rho_L$ représente la position réduite d'une particule à laquelle on a soustrait le rayon de Larmor ρ_L , \mathcal{E} est l'énergie cinétique, μ est le moment magnétique, ζ est l'angle rapide de la gyrophase. Les deux dernières variables sont canoniquement conjuguées : μ est la variable lente et ζ est la variable rapide.

L'idée générale de la réduction gyrocinétique consiste à définir une procédure systématique de changement de variables, permettant l'obtention de variables pour lesquelles μ a une dynamique triviale, i.e. est une constante du mouvement exacte. En même temps, la dynamique de la variable rapide de rotation cyclotronique ζ est alors complètement découplée.

Au final, la dynamique réduite prend place dans l'espace des phases à 4 dimensions $(\mathbf{X}, \mathcal{E})$ et les quantités physiques gardent la dépendance paramétrique en μ .

La procédure de réduction dynamique contient deux étapes : la construction de centre-guide et la construction de gyrocentre. À la première étape, on dérive la dynamique réduite pour une particule chargée, de masse m et de charge e , qui se déplace dans un champ magnétique non-uniforme \mathbf{B}_0 (voir la section 3 pour la description de la géométrie magnétique). Dans ce cas, le petit paramètre nécessaire à la

construction de la procédure asymptotique d'élimination de l'échelle du mouvement cyclotronique est lié à la non-uniformité du champ \mathbf{B}_0 . À la deuxième étape, on introduit les fluctuations électromagnétiques dans le système et l'on applique une seconde fois la procédure de réduction rétablissant la conservation du moment magnétique μ . L'amplitude des fluctuations électromagnétiques sert dans ce cas de petit paramètre ϵ . Les détails de la procédure de réduction gyrocinétique peuvent être trouvés dans [1].

On commence la dérivation en introduisant un hamiltonien de gyrocentre contenant la perturbation induite par un îlot magnétique en perturbant la dynamique du centre-guide Φ_{1gc} :

$$H_{gy} = \mathcal{E} + e \langle \Phi_{1gc} \rangle, \quad (1)$$

où

$$\Phi_{1gc} \equiv \phi_{1gc} - v_{||} \frac{e}{c} A_{1||gc} \quad (2)$$

et

$$\mathcal{E} = \frac{p_{||}^2}{2m} + \mu B_0 \quad (3)$$

est l'énergie cinétique du système. Ici, $\langle \dots \rangle$ représente l'opérateur de la gyromoyenne. On note que les quantités physiques moyennées contiennent les effets de taille finie du rayon de Larmor. Le potentiel électromagnétique du centre guide $\Phi_{1gc} \equiv \Phi(\mathbf{X})$ est le potentiel électromagnétique évalué dans la position réduite \mathbf{X} .

On choisit de mettre toutes les perturbations liées aux champs électromagnétiques fluctuants dans le hamiltonien de gyrocentre (1). Avec ce choix, le crochet de Poisson pour notre système n'est pas affecté et l'on peut utiliser le crochet du centre-guide :

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{gc} &= \frac{\Omega}{B_0} \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial G}{\partial \mu} - \frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right) + \dot{\mathbf{X}}_{gc} \cdot \left(\nabla F \frac{\partial G}{\partial \mathcal{E}} - \nabla G \frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} \right) \\ &+ \Omega \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{E}} - \frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right) - \frac{c \hat{\mathbf{b}}_0}{c B_{||}^*} \cdot (\nabla F \times \nabla G). \end{aligned} \quad (4)$$

Ce choix correspond à une représentation hamiltonienne de la théorie gyrocinétique. Ici $\dot{\mathbf{X}}_{gc}$ est la vitesse du centre-guide, générée par le hamiltonien qui n'inclut pas de perturbation électromagnétique :

$$\dot{\mathbf{X}}_{gc} = v_{||} \frac{\mathbf{B}^*}{B_{||}^*} = \frac{p_{||}}{m B_{||}^*} \left(\mathbf{B}_0 + \nabla \times \left[\frac{c}{e} p_{||} \hat{\mathbf{b}}_0 \right] \right), \quad (5)$$

où $\hat{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{B}_0/B_0$ est le vecteur unitaire dans la direction du champ magnétique de fond \mathbf{B}_0 . \mathbf{B}^* est le champ magnétique symplectique qui apparaît de manière naturelle au cours de la procédure de réduction dynamique :

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B}_0 + \frac{c}{e} \nabla \times \left(p_{||} \hat{\mathbf{b}}_0 \right). \quad (6)$$

Le champ symplectique contient les effets de la courbure magnétique. Les équations du mouvement dans l'espace des phases réduit sont données par :

$$\dot{\mathbf{X}}_{gy} = \dot{\mathbf{X}}_{gc} \frac{\partial H_{gy}}{\partial \mathcal{E}} + \epsilon \frac{c \hat{\mathbf{b}}_0}{B_{||}^*} \times \nabla \langle \Phi_{1gc} \rangle, \quad (7)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_{gy} = -\epsilon e \dot{\mathbf{X}}_{gc} \cdot \nabla \langle \Phi_{1gc} \rangle. \quad (8)$$

3 Dynamique réduite dans le champ magnétique axisymétrique

3.1 Les coordonnées de flux magnétique

Au cours de notre étude on considère le champ magnétique axisymétrique :

$$\mathbf{B}_0 = I(\psi)\nabla\varphi + \nabla\varphi \times \nabla\psi \equiv \nabla\xi \times \nabla\psi, \quad (9)$$

où l'on a utilisé en premier lieu les coordonnées magnétiques standard $(\psi, \vartheta, \varphi)$; ψ est une coordonnée radiale, ϑ est un angle poloïdal et φ est un angle toroïdal. On a aussi introduit la représentation du champ magnétique par le potentiel d'Euler $\xi = \varphi - q(\psi)\vartheta$. Ici le facteur de sécurité du champ magnétique est le rapport entre ses composantes toroïdale et poloïdale contravariantes $q(\psi) = \frac{B_0^\varphi}{B_0^\vartheta}$.

On remarque que l'introduction du potentiel d'Euler ξ permet de définir l'opérateur de dérivée parallèle associé au champ magnétique non perturbé : $\hat{\mathbf{b}}_0 \cdot \nabla = \partial/\partial s \equiv R_{||}^{-1} (\partial/\partial\vartheta)|_{\psi, \xi}$, avec $R_{||} = B_0/B_0^\vartheta$. En utilisant les coordonnées magnétiques (ψ, ϑ, ξ) , on peut donc traiter l'angle ϑ comme étant la coordonnée le long des lignes de champ non perturbées, étiquetées par (ψ, ξ) . Une telle substitution est utilisée dans les travaux précédents [2] et [6].

3.2 Les invariants du mouvement du centre-guide

La dynamique non perturbée du centre-guide dans le champ magnétique axisymétrique possède trois invariants du mouvement. Tout d'abord, l'énergie cinétique (3) est conservée, ainsi que le moment magnétique μ . Il existe un troisième invariant, dont la conservation est directement liée à la symétrie du champ magnétique. Dans le cas de la configuration axisymétrique, le moment angulaire canonique toroïdal $p_{\text{gc}\varphi} \equiv -e/c \psi^*$ est conservé. Le flux ψ^* correspond à une surface magnétique $\psi = \psi^*$ sur laquelle se trouvent les points de rebroussement d'une trajectoire de particule piégée. Le flux radial symplectique

$$\psi^* \equiv \psi - \frac{v_{||}}{\Omega} I(\psi) \quad (10)$$

est conservé :

$$\dot{\psi}_{\text{gc}}^* \equiv \{\mathcal{E}, \psi^*\}_{\text{gc}} = \dot{\mathbf{X}}_{\text{gc}} \cdot \nabla\psi^* = 0. \quad (11)$$

Afin de pouvoir démontrer la conservation de ψ^* par la dynamique du centre-guide, on doit utiliser la propriété géométrique du champ magnétique symplectique axisymétrique :

$$\mathbf{B}^* \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varphi} = \nabla\psi^*, \quad (12)$$

qui à son tour découle de la propriété du potentiel magnétique symplectique : axisymétrique

$$\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \varphi} + \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varphi} \right) \cdot \mathbf{A}^* = 0. \quad (13)$$

L'introduction de ψ^* s'avère utile pour une réécriture élégante et compacte de la dynamique non perturbée du centre-guide, ainsi que de la dynamique perturbée du gyrocentre.

$$\dot{\psi}_{\text{gc}} = \mathbf{X}_{\text{gc}} \cdot \nabla\psi = -v_{||} \frac{B_0^\vartheta}{B_{||}^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial \vartheta}, \quad \dot{\vartheta}_{\text{gc}} = \mathbf{X}_{\text{gc}} \cdot \nabla\vartheta = v_{||} \frac{B_0^\vartheta}{B_{||}^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial \psi}. \quad (14)$$

Afin de pouvoir obtenir ces équations, on utilise les propriétés fondamentales des coordonnées axisymétriques qui relient les vecteurs de base contravariants et covariants : $\mathbf{e}^i = (\sqrt{g_{ii}})^{-1} \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k$. Dans notre cas on choisit $\sqrt{g_{ii}} \equiv \mathcal{J}_{\text{mag}} = (B_0^\vartheta)^{-1}$ et

$$\nabla\psi = B_0^\vartheta \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varphi}, \quad \nabla\vartheta = B_0^\vartheta \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \psi}. \quad (15)$$

En ce qui concerne la dynamique perturbée de l'invariant ψ^* , on peut la déduire en appliquant le crochet de Poisson (5) par la règle de chaîne pour $\psi^* = \psi^*(\mathbf{X}, \mathcal{E})$:

$$\dot{\psi}_{\text{gv}}^* \equiv \epsilon e \{ \langle \Phi_{1\text{gc}} \rangle, \psi^* \}_{\text{gc}} = \epsilon e \left(\dot{\mathcal{E}}_{\text{gv}} \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathcal{E}} + \dot{\mathbf{X}}_{\text{gv}} \cdot \nabla\psi^* \right). \quad (16)$$

On substitue ensuite les expressions (7) et (8) pour la dynamique du centre-guide et l'on applique la propriété géométrique (12) du champ symplectique \mathbf{B}^* ; on prend aussi en compte l'annulation du terme lié à la dynamique du centre-guide du fait de la propriété de conservation (11). Au final la dynamique perturbée de ψ^* est :

$$\dot{\psi}_{\text{gy}}^* = \epsilon e \frac{\partial \langle \Phi_{1\text{gc}} \rangle}{\partial \varphi}. \quad (17)$$

Autrement dit, la dépendance en angle toroidal du potentiel électromagnétique effectif détruit la conservation du troisième invariant du centre-guide ψ^* .

Finalement, on a introduit les nouvelles variables qui s'avèrent utiles pour la description de la dynamique perturbée du gyrocentre en présence de particules piégées et passantes. Tout d'abord, on a pu séparer la direction perpendiculaire de la direction parallèle aux lignes de champ magnétique non perturbé. On utilise les coordonnées (ψ, ξ) pour la direction perpendiculaire et ϑ pour la direction parallèle aux lignes de champ. Dans le même temps, l'introduction des invariants ψ^* et \mathcal{E} est pratique pour la description des champs et des distributions d'équilibre.

3.3 Perturbation du champ axisymétrique par un îlot magnétique

Le rôle de l'instabilité de déchirement (*tearing mode*) est de produire une composante radiale perturbative du champ magnétique, afin de pouvoir générer un îlot magnétique. La définition de la perturbation magnétique radiale peut être faite de deux façons différentes. Soit par l'introduction d'un déplacement radial de la ligne de champ magnétique $\eta_1 = \eta_1^\psi \partial \mathbf{X} / \partial \psi$, soit par l'introduction d'un potentiel magnétique perturbé. Ici on suit la deuxième méthode en définissant :

$$\mathbf{A}_1 = \eta_1^\psi \nabla \xi + \nabla \chi_1, \quad A_{1\parallel} = \hat{\mathbf{b}}_0 \cdot \nabla \chi_1, \quad (18)$$

et le champ électrique parallèle perturbé peut s'écrire :

$$E_{1\parallel} = -\hat{\mathbf{b}}_0 \cdot \nabla \left(\phi_1 + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi_1}{\partial t} \right) \equiv -\hat{\mathbf{b}}_0 \cdot \nabla \phi_{1\parallel}. \quad (19)$$

4 Équation de Vlasov gyrocinétique

L'équation de Vlasov gyrocinétique non-linéaire pour la fonction de distribution de gyrocentre s'écrit :

$$\frac{d_{\text{gc}} F}{dt} + \{F, e \langle \Phi_{1\text{gc}} \rangle\}_{\text{gc}} = 0. \quad (20)$$

Les détails de sa dérivation peuvent être trouvés dans [1], par exemple. Ici, le potentiel électromagnétique perturbé est défini par (2); on utilise le crochet de Poisson du centre-guide (5); ainsi que $d_{\text{gc}}/dt = \partial/\partial t + \dot{\mathbf{X}}_{\text{gc}} \cdot \nabla$, l'opérateur d'évolution temporelle du centre-guide.

À l'étape suivante, on procède avec la dérivation d'une équation de Vlasov tronquée qui correspond à la dynamique générée par le hamiltonien du gyrocentre contenant le potentiel électromagnétique de premier ordre en ϵ (1). Pour cela, on sépare la fonction de distribution de Vlasov en deux parties : $F = F_0 + \epsilon F_1$, où $F_0 = F_0(\psi^*, \mathcal{E}, \mu)$ représente la distribution d'équilibre, i.e. $d_{\text{gc}} F_0/dt = 0$, et dépend uniquement des invariants du centre-guide. Dans ce cas, on obtient pour la partie fluctuante F_1 l'équation suivante :

$$\epsilon \frac{d_{\text{gc}} F_1}{dt} = -\epsilon^2 \{F_1, e \langle \Phi_{1\text{gc}} \rangle\}_{\text{gc}} - \left(\dot{\psi}_{\text{gy}}^* \frac{\partial F_0}{\partial \psi^*} + \dot{\mathcal{E}}_{\text{gy}} \frac{\partial F_0}{\partial \mathcal{E}} \right). \quad (21)$$

En suivant la procédure conventionnelle, on écrit cette équation en introduisant les parties adiabatique et non-adiabatique de la fonction de distribution fluctuante F_1 :

$$F_1 \equiv G_1 + e \langle \Phi_{1\text{gc}} \rangle \frac{\partial F_0}{\partial \mathcal{E}}. \quad (22)$$

Ici, la partie non-adiabatique est G_1 ; la partie adiabatique possède une dépendance explicite en F_0 et $\langle \Phi_{1gc} \rangle$. On substitue dans l'équation (21) les expressions pour la dynamique perturbée des invariants du centre-guide (8) et (11). Dans ce cas, les termes linéaires dans la partie droite de l'équation (21) peuvent être réécrits sous la forme suivante :

$$\frac{d_{gc}}{dt} \left(e \langle \Phi_{1gc} \rangle \frac{\partial F_0}{\partial \mathcal{E}} \right) + e \hat{\mathcal{F}}_0 \langle \Phi_{1gc} \rangle \quad (23)$$

avec l'opérateur $\hat{\mathcal{F}}_0 = - \left(\frac{\partial F_0}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c} \frac{\partial F_0}{\partial \psi^*} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$.

L'équation d'évolution pour la partie non-adiabatique de la fonction de distribution de Vlasov s'écrit :

$$\epsilon \frac{d_{gc}}{dt} G_1 = \epsilon e \hat{\mathcal{F}}_0 \langle \Phi_{1gc} \rangle - \epsilon^2 \{G_1, e \langle \Phi_{1gc} \rangle\}_{gc} - \frac{\epsilon^2}{2} \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial \mathcal{E}}, (e \langle \Phi_{1gc} \rangle)^2 \right\}_{gc} \quad (24)$$

Afin de pouvoir faire la comparaison de notre résultat avec le formalisme établi auparavant dans [6], on considère la partie linéaire de cette équation pour G_1 .

On adopte la forme hélicoïdale pour le potentiel électromagnétique fluctuant à proximité d'une surface de flux résonante : $\Phi_1 \equiv \sum_n \Phi_1^{(n)} \exp(in\xi_s - i\omega t)$, où $\xi_s = \varphi - (n/m)\vartheta$ est la valeur du potentiel d'Euler résonnant avec $q = n/m$; n est le nombre toroïdal.

En réponse à cette perturbation, le terme linéaire dans la partie droite de l'équation (24) peut être écrit comme :

$$e \hat{\mathcal{F}}_0 \langle \Phi_{1gc} \rangle \rightarrow i \frac{\partial F_0}{\partial \mathcal{E}} (\omega - n\omega_{*\varphi}) e \langle \Phi_{1gc}^{(n)} \rangle, \quad (25)$$

où on a introduit la fréquence toroïdale de dérive $\omega_{*\varphi} \equiv \frac{e}{c} \frac{\partial F_0}{\partial \psi^*} \left(\frac{\partial F_0}{\partial \mathcal{E}} \right)^{-1}$.

En prenant en compte la séparation des directions, parallèle et perpendiculaire, avec les coordonnées $(\psi, \xi; \vartheta)$, on écrit l'opérateur d'évolution de centre-guide : $d_{gc}/dt = \partial/\partial t + v_{||} \hat{\mathbf{b}}_0 \cdot \nabla + \nabla_{\perp gc}$, avec

$$\nabla_{\perp gc} \equiv \dot{\mathbf{X}}_{\perp gc} \cdot \nabla = \dot{\psi}_{gc} \partial/\partial \psi + \dot{\xi}_{gc} \partial/\partial \xi. \quad (26)$$

En utilisant la définition du potentiel magnétique perturbé correspondant à un îlot magnétique (18), on écrit le potentiel perturbatif électromagnétique de la manière suivante :

$$e \langle \Phi_{1gc} \rangle = e \langle \phi_{||gc} \rangle - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{||} \hat{\mathbf{b}}_0 \cdot \nabla \right) \langle \chi_{1gc} \rangle = e \langle \phi_{||gc} \rangle + \frac{e}{c} \left(\nabla_{\perp gc} - \frac{d_{gc}}{dt} \right) \langle \chi_{1gc} \rangle \equiv e \langle \Upsilon_{1gc} \rangle - \frac{e}{c} \frac{d_{gc}}{dt} \langle \chi_{1gc} \rangle,$$

où l'on a introduit le potentiel $\langle \Upsilon \rangle_{1gc} \equiv \langle \phi_{||} \rangle + c^{-1} \nabla_{\perp gc} \langle \chi_{1gc} \rangle$.

En prenant en compte le fait que les opérateurs différentiels d_{gc}/dt et $\hat{\mathcal{F}}_0$ commutent, on définit la nouvelle fonction de distribution non-adiabatique modifiée $\mathcal{H}_1 \equiv G_1 + (e/c) \hat{\mathcal{F}}_0 \langle \chi_{1gc} \rangle$ qui satisfait l'équation linéaire

$$\frac{d_{gc} \mathcal{H}_1}{dt} = e \hat{\mathcal{F}}_0 \langle \Upsilon_{1gc} \rangle. \quad (27)$$

Cette équation est analogue à l'équation (13) présentée dans [6].

Références

1. A. J. BRIZARD & T. S. HAHM, *Rev. Mod. Phys.*, **79**, 421 (2007).
2. H. R. WILSON, J. W. CONNOR, R. J. HASTIE & C. C. HEGNA, *Phys. Plasmas*, **3**, 248 (1996).
3. A. I. SMOLYAKOV, A. HIROSE, E. LAZZARO, J. D. CALLEN & G. B. RE, *Phys. Plasmas*, **2**, 1581, (1995).
4. E. POLI, A. BOTTINO, W. A. HORNSBY, A. G. PEETERS, T. RIBEIRO, B. D. SCOTT & M. SICCINIO, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **52**, 124021 (2010).
5. N. TRONKO, A. J. BRIZARD & H. R. WILSON, *Gyrokinetic formulation of NTM's*, en préparation.
6. J. W. CONNOR, R. J. HASTIE, P. HELANDER, *Plasma. Phys. Contr. Fus.*, **51**, 015009 (2009).

Advection chaotique dans un électrolyte, générée par une densité de forces de Laplace

Gérard Vinsard¹, Stéphane Dufour¹ & Esteban Saadjan¹

LEMMA, ENSEM - 2 Avenue de la Forêt de Haye, TSA 60604, 54518 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex
gerard.vinsard@univ-lorraine.fr

Résumé. Une expérimentation d'advection chaotique avec forçage électromagnétique est décrite ainsi que les modèles qui permettent d'en faire une simulation numérique. L'écoulement comporte un point hyperbolique dont la position dépend des paramètres de réglage électrique. Une zone de mélange potentiel est définie comme le lieu des positions des lignes de courant instantanées passant par le point hyperbolique et son adéquation à la prédiction d'une borne inférieure de la zone chaotique est validée.

Abstract. A chaotic advection experiment with electromagnetic forcing is described as well as the models that allow numerical simulation. The flow contains a hyperbolic point whose position depends on the electrical parameters setting. The adequacy of the mixing zone potential to predict a lower bound of the chaotic zone is validated.

1 Introduction

L'injection directe de courant électrique dans un électrolyte en présence du champ magnétique d'un ou plusieurs aimants permanents crée une densité de forces de Laplace qui génère un écoulement. Il est possible d'obtenir ainsi une assez grande variété d'écoulements dont l'étude permet l'investigation de questions diverses, comme l'apparition de la turbulence lors d'un forçage périodique [1].

Le cas quasi-bidimensionnel d'une faible épaisseur de fluide sollicitée par des courants électriques variables en temps, lorsque les nombres de Reynolds et de Strouhal sont suffisamment faibles pour que les approximations de Stokes et quasi-statique soient légitimes, présente l'intérêt de pouvoir assez facilement être réalisé expérimentalement. Il est notamment possible de disposer les électrodes et de faire des choix de modulation des courants électriques tels que l'écoulement présente des caractéristiques d'advection chaotique [2] comme exploité dans [3].

L'objet de la communication est double. Il s'agit d'abord de montrer des résultats d'une telle expérimentation et de les comparer avec des résultats de simulation dans un cas simple et très symétrique. Ces résultats sont illustrés par la déformation d'une tache d'encre entraînée par l'écoulement ; ils montrent que le calcul est en bon accord avec l'expérience, et peut donc être utilisé pour faire des prévisions à temps plus longs que ceux qu'autorise l'expérimentation.

Ensuite les électrodes sont disposées de manière à ce qu'une structure d'écoulement présentant un point hyperbolique (une position où la vitesse est nulle et traversée par deux lignes de courant dont l'une conduit les particules qui s'y trouvent vers cette position et l'autre les en éloigne) puisse être superposées à un autre écoulement qui module la position de ce point hyperbolique. Cette configuration permet d'utiliser les concepts définis dans [4] pour le problème du « journal bearing » notamment celui de la *zone de mélange potentiel* qui se trouve presque correspondre aux sections de Poincaré.

Et finalement la question de la détermination a priori des lois d'évolution conduisant à de l'advection chaotique est posée ; une piste étant que l'amplitude du déplacement du point hyperbolique semble jouer ici un grand rôle [4].

2 Dispositif expérimental

2.1 Description brute

Le dispositif expérimental (Fig. 1) est constitué d'une plaque de circuit imprimé comportant 3 pistes circulaires a , b et c imbriquées les unes dans les autres : les pistes intérieure a et extérieure c sont

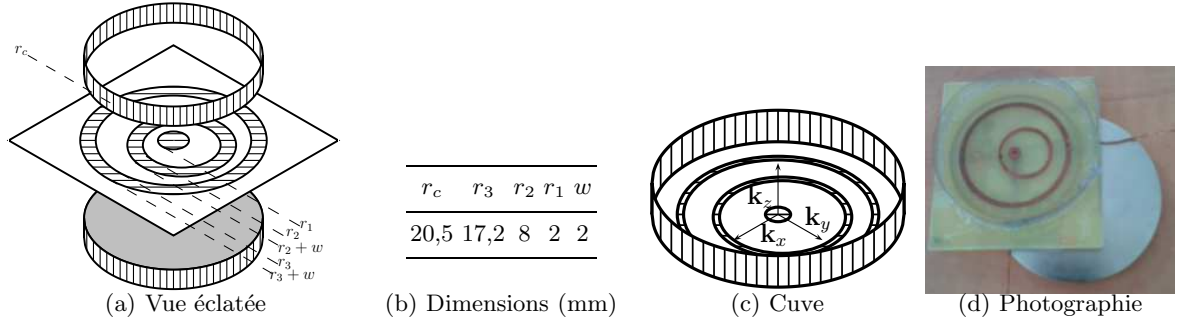


Figure 1. Éléments du dispositif.

concentriques alors que la piste médiane b est décentrée. Ces pistes sont connectées à des fils d'alimentation (passant en dessous de la plaque) qui permettent de créer des différences de potentiels entre la piste. Le choix fait est d'utiliser un générateur de signaux basses fréquences (GBF) à deux sorties ; de connecter la masse commune des deux sorties à la piste central et les deux pistes b et c aux parties actives des sorties. Soit, pour V_a , V_b et V_c les potentiels des pistes

$$V_a = 0 ; V_b = V_1 ; V_c = V_2 \quad (1)$$

où V_1 et V_2 sont des tensions réglables sur le GBF.

Un ruban plastique est roulé en forme de cercle (concentrique avec les pistes a et c) et collé autour des pistes de manière à former une cuve qui est alors remplie d'électrolyte (du sulfate de cuivre avec ajout de glycérol). Lorsque les pistes, qui sont maintenant appelées des électrodes, sont mises sous tension, une densité de courant électrique \mathbf{j} se crée dans l'électrolyte.

Un fort aimant permanent est placé en dessous de la cuve et donc l'électrolyte est soumis à son champ magnétique \mathbf{b} ; la conjonction du courant électrique et du champ magnétique génère dans le fluide une densité de force de Laplace.

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{b} \quad (2)$$

qui est la source d'un écoulement dont le champ de vitesse est \mathbf{v} .

L'objectif est d'étudier l'advection qui correspond à cet écoulement, pour cela une encre de densité légèrement inférieure à celle de l'électrolyte est utilisée. Une tache de cette encre placée à la surface du fluide se déforme (cf. Fig. 2) et, selon l'écoulement généré, cette déformation présente ou non les caractères d'étirement et de repliements caractéristiques de l'advection chaotique.

2.2 Modèles de calcul

L'expérimentation présente des limitations expliquée en Section 3.1, aussi est-elle accompagnée d'une série de modèles qui permettent une simulation numérique compagne. Ces modèles se présentent comme des problème d'EDP pour le calcul des champs et d'EDO pour le calcul des trajectoires : pratiquement, ils sont tous écrits en script de FreeFem++ [5]) et exécuté par ce logiciel.

Le domaine d'électrolyte est vue comme une boîte circulaire D dont le bord ∂D est décomposé en : Γ , la frontière libre (les mouvements sont toujours suffisamment lents pour qu'elle puisse être considérée comme plate) ; Γ_l , la paroi latérale ; Γ_d le fond de la cuve. Ce dernier se décompose en : Γ_a , Γ_b et Γ_c le contact avec les électrodes a , b et c et $\overline{\Gamma}_d$ les parties restantes. La hauteur du domaine est fixée par la quantité d'électrolyte mise : un volume $\approx 2,5$ ml correspond à une hauteur $e = 2$ mm.

La densité de courant est calculée numériquement comme

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla \varphi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta \varphi = 0 \text{ dans } D ; -\partial_n \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma, \overline{\Gamma}_d, \Gamma_l \\ \varphi = 0, V_1, V_2 \text{ sur } \Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c \end{cases} \quad (3)$$

L'hypothèse faite est que l'électrolyte se comporte comme un milieu conducteur de conductivité électrique σ et que les phénomènes de contact avec les électrodes ne conduisent pas à de trop grands sur-potentiels. Cette hypothèse a été validée en comparant les résultats de calculs avec des mesures de résistances au moyen d'un RLC-mètre, ce qui a permis de déterminer la valeur $\sigma \approx 1$ S/m pour la concentration de sulfate de cuivre et de glycérol utilisée.

Le champ magnétique est calculé (semi-analytiquement via un script sous FreeFem++) par la formule de Biot et Savart. Avec un modèle ampérien de l'aimant, Le potentiel vecteur magnétique est

$$\mathbf{a} = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H \frac{(-\sin\theta \mathbf{k}_x + \cos\theta \mathbf{k}_y) R d\xi}{\sqrt{(R \cos\theta - x)^2 + (R \sin\theta - y)^2 + (\xi + z)^2}} \quad (4)$$

où H et R sont les hauteur et rayon de l'aimant ; M est l'aimantation $\approx 0,608/\mu_0$ A/m, valeur déterminée par mesure du champ magnétique avec un gauss-mètre. Le champ magnétique correspondant est

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}. \quad (5)$$

Ce champ est presque uniforme sur la hauteur de l'électrolyte et dirigé dans la direction \mathbf{k}_z .

La densité de force \mathbf{f} est alors déterminée par (2), et le champ de vitesse \mathbf{v} et de pression P est déterminé par le problème de Stokes

$$\begin{aligned} \mathbf{f} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho g \mathbf{k}_z &= \mathbf{0} & \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{dans } D \\ \text{pour } \mathbf{u} = u \mathbf{k}_x + v \mathbf{k}_y + w \mathbf{k}_z, & u, v, w = 0 & \text{sur } \Gamma_d, \Gamma_l; & w = 0 \text{ et } \partial_z v = \partial_z w = 0 & \text{sur } \Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

où $\mu \approx 3,6$ mPa·s est la viscosité (déterminée par un rhéomètre), ρ la masse volumique ≈ 1 g/mm³ et g l'accélération de la pesanteur. Les termes d'inertie sont négligés parce que les vitesses sont de l'ordre du mm/s ce qui conduit à nombre de Reynolds inférieur à l'unité. D'autre part la densité de force \mathbf{f} dépend du temps périodiquement avec une évolution lente (périodes ≈ 100 s), ce qui correspond à un nombre de Strouhal $\approx 0,1$, aussi le régime stationnaire est-il toujours supposé établi. Le calcul des composantes du champ de vitesses et de la pression est effectué numériquement avec la stratégie de l'algorithme d'Uzawa suggéré par le manuel de FreeFem++.

Et finalement la trace du champ de vitesse sur la frontière libre Γ

$$\mathbf{U}(t, x, y) = u(t, x, y, z = e) \mathbf{k}_x + v(t, x, y, z = e) \mathbf{k}_y \quad \text{dans } \Gamma \quad (7)$$

est extraite pour être utilisée par un modèle de calcul d'advection 2D. La décomposition d'Helmholtz 2D de cette trace de champ de vitesse dans le domaine connexe Γ s'écrit

$$\mathbf{U}_\partial = (\partial_x \chi \mathbf{k}_x + \partial_y \chi \mathbf{k}_y) + (\partial_y \psi \mathbf{k}_x - \partial_x \psi \mathbf{k}_y) \quad \text{dans } \Gamma, \quad \text{avec } \psi = 0, \quad \text{sur } \partial\Gamma. \quad (8)$$

où χ contient les termes qui ne sont pas à divergence (2D) nulle de \mathbf{U} et ψ ceux qui le sont ; ces termes sont calculés numériquement par minimisation de

$$F(\chi) = \int_\Gamma (\mathbf{U} - \partial_x \chi \mathbf{k}_x - \partial_y \chi \mathbf{k}_y)^2 dx dy \quad \text{et} \quad G(\psi) = \int_\Gamma (\mathbf{U} - \partial_y \psi \mathbf{k}_x + \partial_x \psi \mathbf{k}_y)^2 dx dy \quad (9)$$

par rapport à χ et ψ . Pour χ et ψ les arguments minimisant, il vient

$$\int_\Gamma \mathbf{U}^2 dx dy = F(\chi) + G(\psi). \quad (10)$$

Le calcul effectif montre que $F(\chi) \ll G(\psi)$; ce terme est même de l'ordre de grandeur des erreurs de l'approximation numérique. Le champ de vitesse superficiel est alors bien à divergence nulle et sa fonction de courant est ψ . C'est un point important parce que cela légitime l'hypothèse que des particules en surface de l'électrolyte sont bien entraînées par un champ de vitesse 2D.

Ceci établi, l'approximation

$$\mathbf{U} \approx (\partial_y \psi \mathbf{k}_x - \partial_x \psi \mathbf{k}_y)$$

est faite et donc une particule initialement en $\mathbf{x}_0 = x_0 \mathbf{k}_x + y_0 \mathbf{k}_y$ se retrouvera en $\mathbf{x} = x \mathbf{k}_x + y \mathbf{k}_y$ à l'instant t avec la loi d'évolution

$$\frac{dx}{dt} = \partial_y \psi(t, x, y); \quad \frac{dy}{dt} = -\partial_x \psi(t, x, y). \quad (11)$$

C'est un système hamiltonien dont l'hamiltonien ψ dépend du temps. Dans un contexte d'éléments finis où ψ est approximé comme fonction affine sur des triangles et au prix de supposer que ψ ne varie pas pendant le temps nécessaire à la traversée d'un triangle, une intégration « exacte par morceaux » est possible pour le calcul de la trajectoire. C'est ce que réalise l'algorithme d'intégration qui donc s'appuie sur l'hypothèse que les variations temporelles explicites de ψ sont lentes.

L'algorithme d'intégration est suffisant en lui-même pour le calcul de sections de Poincaré mais pas pour la simulation d'une déformation de tache. La tache est représenté par une liste de positions sur son bord. Lors de l'advection de ces positions il y a génération d'une position intermédiaire entre deux positions consécutives qui tendraient à s'écarter trop l'une de l'autre; et inversement des positions qui se rapprochent trop sont remplacées par une position moyenne.

3 Résultats

3.1 Validation dans la géométrie des électrodes concentriques

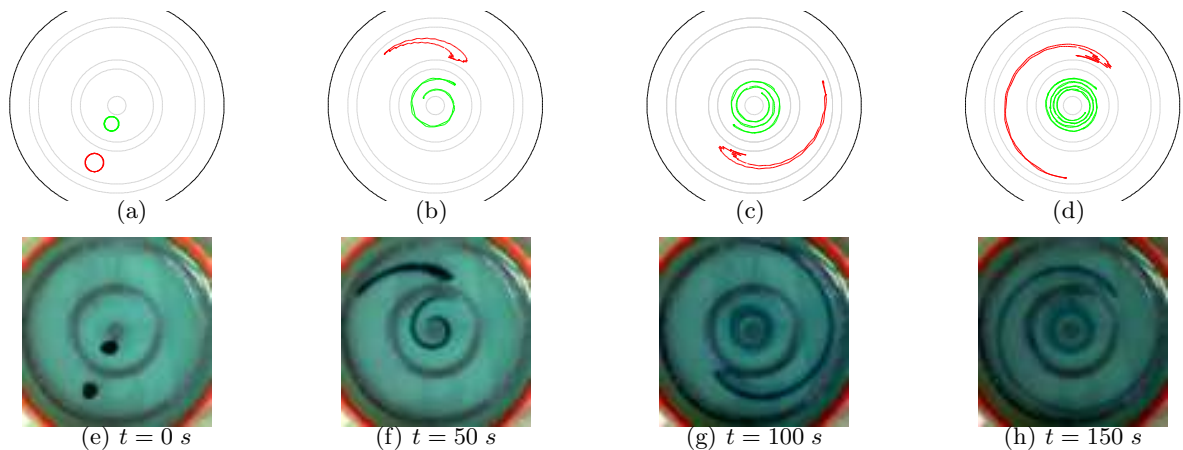


Figure 2. Évolution de deux taches d'encre pour $V_1 = 0,5$ V, $V_2 = 0$ V (électrode médiane seule alimentée aux temps indiqués (a, b, c, d : modèle ; e, f, g, h : expérience)).

Tout d'abord une confrontation entre l'expérience et le calcul (voir Fig. 2) est faite avec un jeu d'électrodes toutes concentriques et dans le cas où seulement l'électrode médiane est alimentée. La densité de courant est radiale et orienté vers l'intérieur entre les électrodes centrale et médiane puis vers l'extérieur entre les électrodes extérieure et médiane; la densité de force de Laplace est alors orthoradiale, dirigées dans le sens trigonométrique puis horaire dans ces deux régions. De fait les deux taches qui sont disposées initialement dans chacune de ces régions se développent bien en spirale pour celle de la région intérieure et en spirale avec un repliement dans la région extérieure.

Aux temps courts, il y a un bon accord qualitatif entre expérience et calcul mais cet accord se détériore pour les temps plus longs. Ceci est dû d'une part à ce que la vraie tache diffuse dans le fluide, ce que ne fait pas (ou ne devrait pas faire) la tache numérique. Une façon d'éviter cela serait d'utiliser des dimensions encore plus petites pour la cuve, ce qui aurait l'avantage connexe de réduire le nombre Reynolds et de rendre le modèle encore plus fiable.

Quoi qu'il en soit le modèle est supposé suffisamment proche de la réalité pour utiliser ses résultats aux temps longs.

3.2 Le protocole

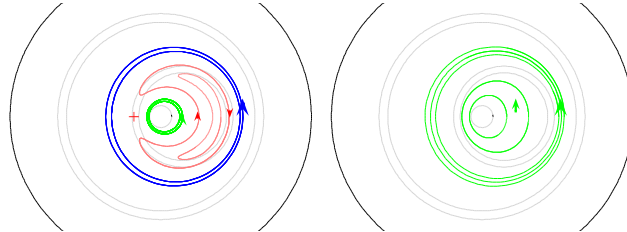


Figure 3. Lignes de courant pour les écoulements : à gauche ($V_1 = 1 \text{ V}$, $V_2 = 0 \text{ V}$) contra-rotatif; à droite ($V_1 = 0 \text{ V}$, $V_2 = 1 \text{ V}$). La direction de la vitesse est figurée par les flèches et la position du point hyperbolique par une croix.

Que l'électrode b soit ou non décentrée les écoulements sont : rotatif pour $V_a = V_b = V_1 = 0 \text{ V}$, $V_c = V_2 = 1 \text{ V}$; et contra-rotatif pour $V_a = 0$, $V_b = V_1 = 1 \text{ V}$, $V_c = V_2 = 0 \text{ V}$. Lorsqu'elle est décentrée la nature de ces écoulements ne change pas; par contre la dissymétrie fait apparaître un point hyperbolique dans l'écoulement contra-rotatif (Fig. 3).

L'ajout de l'écoulement rotatif pondéré par un facteur β à l'écoulement contra-rotatif conduit à un écoulement qui présente pour β suffisamment petit encore un point hyperbolique mais situé à une position qui dépend de β . Le déplacement du point hyperbolique peut encore être amplifié en modulant conjointement l'écoulement contra-rotatif, par exemple en choisissant une dépendance temporelle de $V_b = V_1$ et $V_c = V_2$ comme

$$V_1 = \alpha(1 + \cos(2\pi t/T)); \quad V_2 = \beta \sin(2\pi t/T) \quad (12)$$

où T est la période et α , β des paramètres déterminés par la considération que d'une part le point hyperbolique doit être présent le plus longtemps possible sur un cycle et que d'autre part il doit se déplacer sur la plus grande plage possible. Le modèle de calcul, utilisé pour cette détermination, fournit les valeurs

$$\alpha = \beta = 0,4 \text{ V}. \quad (13)$$

Et donc le paramétrage des tensions sources ne dépend plus que de la période T .

La valeur de décentrement choisie pour l'électrode médiane $d = 3,4 \text{ mm}$ a été faite sur des considérations purement électriques d'équilibre des résistances entre les électrodes [6].

3.3 Zone de mélange potentiel et sections de Poincaré

Pour un temps fixé, les lignes de courant qui passent par le point hyperbolique sont composées de deux branches : l'une entrante et l'autre sortante (Fig. 4 (a)). Ce système de lignes forme une famille de courbes (doubles) paramétrées par le temps. La *zone de mélange potentiel* est définie [4] par la région balayée par ces lignes dans le temps (Fig. 4 (b)) ou encore la région délimitée par l'enveloppe de la famille de courbes.

Si un tracé de sections de Poincaré est effectué sur huit points disposés initialement en un cercle proche mais en dehors de la zone de mélange potentiel, la région remplie par les occurrences successives de ces points aux temps nT pour $n = 1, \dots, 1000$ recouvre cette zone de mélange potentiel (Fig. 4) qui est donc une sorte de borne inférieure de la région qui contient des orbites chaotiques.

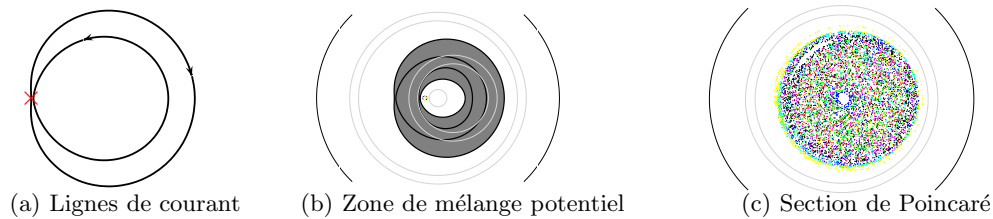


Figure 4. (a) Lignes de courant entrantes et sortantes passant par le point hyperbolique à un instant donné. (b) Zone de mélange potentiel et position initiale des point pour les sections de Poincaré, (c) Section de Poincaré sur 1000 périodes pour une période $T = 500$ s.

Le choix d'autres valeurs des paramètres que (13) conduit à la même conclusion : la zone de mélange potentiel peut être plus petite que celle des sections de Poincaré mais elle semble lui être toujours intérieure.

D'autre part, le choix des valeurs de paramètres (13) qui a été fait sur le critère du maximum de déplacement du point hyperbolique semble également correspondre à une zone de mélange potentielle de surface maximale. Mais c'est là peut-être un résultat particulier à la configuration.

4 Conclusion

Une expérimentation d'advection chaotique à partir d'un électrolyte soumis à une densité de forces de Laplace est relativement facile à faire ; elle se révèle fournir des résultats proches d'une simulation réalisée en négligeant l'inertie et le transitoire du champ de vitesse.

La zone de mélange potentiel définie par Kaper *et al.* [4] est un concept utile pour prédire une région minimale dans laquelle les trajectoires de particules entraînées par l'écoulement ont un comportement chaotique.

Mais ce critère ne rend pas compte de la structure de la zone chaotique. Notamment les îlots elliptiques (où ne pénètrent pas les occurrences des points dans les sections de Poincaré) ne sont pas décrits ; il est donc insuffisant à lui seul pour caractériser la qualité du chaos obtenu.

Toutefois ne retenir de l'évolution de la famille de courbes formée par les lignes de courant entrantes et sortantes du point hyperbolique que la zone de mélange potentiel est finalement assez grossier. Il devrait être possible, par exemple, de construire une carte de densité de passage de ces lignes en chacun des points de cette zone de mélange et peut-être cette carte ferait-elle apparaître sinon les lieux de ces îlots du moins une indication sur leur présence.

Références

1. P. TABELING, O. CARDOSO & B. PERRIN, Chaos in a linear array of vortices, *J. Fluid Mech.*, **213**, 511–530 (1990).
2. H. AREF, Stirring by chaotic advection, *J. Fluid Mech.*, **143**, 1–21, (1984).
3. S. QIAN, J. ZHU & H. H. BAU, A stirrer for magnetohydrodynamically controlled minute fluidic network, *Phys. Fluids*, **14**, 3384–3592 (2002).
4. T. J. KAPER & S. WIGGINS, An analytical study of transport in Stokes flows exhibiting large scale chaos in the eccentric journal bearing, *J. Fluid Mech.*, **253**, 211–243, (1993).
5. F. HECHT, New development in freefem++, *J. Numer. Math.*, **20**, 251–265 (2012).
6. S. DUFOUR, G. VINSARD, J. P. MOTA & E. SAATDJIAN, Mixing by chaotic advection in a magneto-hydrodynamic driven flow, *Phys. Fluids*, **25**, 102001 (2013).

Incoherent dispersive shocks in the spectral evolution of random waves

Gang Xu¹, Josselin Garnier², Stefano Trillo³ & Antonio Picozzi¹

¹Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de Bourgogne - CNRS, University of Burgundy, 21078 Dijon, France

²Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, University Paris Diderot, 75205 Paris Cedex 13, France

³Department of Engineering, University of Ferrara, Via Saragat 1, 44122 Ferrara, Italy

gang.xu@u-bourgogne.fr

Résumé. Nous prédisons théoriquement et numériquement l'existence d'ondes de choc dispersives incohérentes. Elles se manifestent par un comportement singulier et instable du spectre des ondes incohérentes qui évoluent dans un milieu caractérisé par une réponse non linéaire non-instantanée. Cette singularité de la dynamique spectrale se développe dans le régime faiblement non linéaire de l'onde aléatoire. Nous élaborons une formulation théorique générale de ces objets incohérents sur la base d'une approche statistique faiblement non linéaire : nous dérivons une famille d'équations cinétiques singulières intégro-différentielles qui donne une description déterministe détaillée des ondes de choc dispersives incohérentes.

Abstract. We predict theoretically and numerically the existence of incoherent dispersive shock waves. They manifest themselves as an unstable singular behavior of the spectrum of incoherent waves that evolve in a non-instantaneous nonlinear environment. This phenomenon of “spectral wave-breaking” develops in the weakly nonlinear regime of the random wave. We elaborate a general theoretical formulation of these incoherent objects on the basis of a weakly nonlinear statistical approach: A family of singular integro-differential kinetic equations is derived, which provides a detailed deterministic description of the incoherent dispersive shock wave phenomenon.

1 Introduction

Shock waves play an important role in many different branches of physics [1]. When dissipative effects are negligible, the shock wave formation is regularized, owing to dispersion, through the onset of rapidly oscillating non-stationary structures, so-called dispersive shock waves (DSWs) or undular bores. DSWs have been constructed mathematically [2] long ago, after pioneering investigations in the fields of tidal waves [3]. It is only recently, however, that DSWs have emerged as a general signature of singular fluid-type behavior in areas as different as Bose-Einstein condensed atoms [4], nonlinear optics oceanography [5], quantum liquids [6], etc. Although DSWs are, generally speaking, non-solitonic slow modulations of fast periodic waves emerging from a gradient catastrophe [2], in specific cases they can exhibit pure multi-soliton content, yet with solitons emerging only after the breaking time (distance).

A natural question concerns the effect of disorder on DSW. So far only the role of structural disorder of the medium has been investigated [7], while perfectly deterministic (coherent) wave amplitudes are assumed as in the rest of the literature body. Our aim is to address the opposite problem, namely the evolution of incoherent (random) waves in deterministic (homogeneous) media, showing that they can exhibit DSWs of a fundamental different nature than their coherent counterpart. Specifically, we show that incoherent DSWs manifest themselves as a wave breaking process (“gradient catastrophe”) only in the spectral dynamics of the incoherent field evolving in a non-instantaneous nonlinear environment [8].

These incoherent DSWs develop in the highly incoherent regime of the random wave, in which linear dispersive effects dominate nonlinear effects. This allows us to develop a general theoretical formulation of incoherent DSWs on the basis of a weakly nonlinear statistical approach. The theory reveals that these incoherent objects are described, as a general rule, by singular integro-differential kinetic equations (SIDKE), which provide a detailed description of the mechanism underlying the formation, or vice versa

the inhibition, of spectral incoherent shocks [8]. This theoretical approach also reveals unexpected links with the 3D vorticity equation in incompressible fluids [9], or the integrable Benjamin-Ono (BO) equation [10] originally derived in hydrodynamics for stratified fluids, and investigated in the semiclassical (coherent breaking) limit recently.

We present the theory in the context of nonlinear optics because fibers [11] turn out to be ideal experimental test beds for our predictions, thanks to the easily tailorable non-instantaneous response via the well-known Raman effect. Nevertheless, given the universality of the nonlinear Schrödinger equation (NLSE), incoherent DSWs shed new light on singular nonequilibrium behaviors of a large variety of turbulent wave systems [12,13]. Furthermore, our kinetic approach finds applications in biological systems in the framework of the Lotka-Volterra equation [14], which is known as a key model for the coupled dynamics of competing biological species.

2 NLSE simulations

The starting point is the NLSE accounting for a non-instantaneous nonlinearity

$$i\partial_z\psi = -\sigma\partial_{tt}\psi + \psi \int R(t-t') |\psi|^2(t') dt', \quad (1)$$

where the response function $R(t)$ satisfies the causality condition $R(t) = 0$ for $t < 0$, and the typical width of $R(t)$ denotes the nonlinear response time, τ_R . The problem has been normalized with respect to the “healing time” $\tau_0 = \sqrt{|\alpha|L_{\text{nl}}}$, where α is the dispersion coefficient [$\sigma = \text{sign}(\alpha)$], $L_{\text{nl}} = 1/(\gamma\rho)$ the nonlinear length, γ the nonlinear coefficient, and ρ the wave intensity. The dimensional variables can be recovered through the substitution $\psi \mapsto \psi\sqrt{\rho}$, $t \mapsto t\tau_0$, $z \mapsto zL_{\text{nl}}$. In the following we consider the *highly incoherent* (i.e. *weakly nonlinear*) regime where $L_d \ll L_{\text{nl}}$ (or equivalently $t_c \ll \tau_0$), $L_d = t_c^2/|\alpha|$ being the dispersion length and t_c the time correlation of the random field $\psi(z, t)$. It is in this regime that incoherent DSWs develop, at variance with conventional coherent DSWs, which occur in the opposite nonlinear regime, $L_d \gg L_{\text{nl}}$.

According to linear response theory, the real and imaginary parts of the Fourier transform of $R(t)$ satisfy the Kramers-Krönig relations. The imaginary part is an odd function known as the nonlinear spectral gain, $g_\omega = \text{Im}[\int_0^\infty R(t)e^{-i\omega t} dt]$ (inset of Fig. 1 (b)). Its typical width denotes the natural spectral scale of the problem, $\Delta\omega_g \sim \tau_R^{-1}$.

We developed the theory of incoherent DSWs for a general form of the response function, $R(t) = H(t)\bar{R}(t)$, where $\bar{R}(t)$ is a smooth function while the Heaviside function $H(t)$ ensures the causality property [8]. We illustrate the theory by considering two physically relevant examples of response functions, which respectively induce and inhibit the formation of incoherent shock waves. These examples allow us to discuss all interesting phenomena in a simple and explicit way. We first present numerical simulations of the NLSE with the example of the damped harmonic oscillator response, which is known to model a great variety of nonlinear systems (e.g., Raman effect), $\bar{R}(t) = \frac{1+\beta^2}{\beta\tau_R} \sin(\beta t/\tau_R) \exp(-t/\tau_R)$. Figure 1 reports a typical evolution of a broad initial spectrum of the incoherent wave, $\Delta\omega \gg \Delta\omega_g$ ($t_c \ll \tau_R$, see the inset in Fig. 1 (b)). The initial condition is a Gaussian-shaped spectrum with random spectral phases, i.e. $\psi(z=0, t)$ is of zero mean and characterized by fluctuations that are *stationary* in time. The broad spectrum exhibits a global collective deformation on a spectral scale much larger than $\Delta\omega_g$, which means that the system exhibits a kind of “long-range interaction in frequency space”. This evolution features a pronounced self-steepening of the spectrum at low-frequencies, with spectral wave breaking being ultimately regularized by the onset of fast large-amplitude spectral oscillations (“incoherent dispersive shock”). This behavior is reminiscent of the conventional phenomenon of DSW studied for coherent wave amplitudes. Here, the DSW takes place within a genuine incoherent wave, and manifests itself solely in the spectral domain, while in the temporal domain the random field exhibits stationary fluctuations (see inset in Fig. 1 (c)). Importantly, the incoherent DSWs develop irrespective of the sign of $\sigma = \pm 1$ (i.e. in the focusing or defocusing regime), a feature which is consistent with the weakly nonlinear regime and the theory developed below.

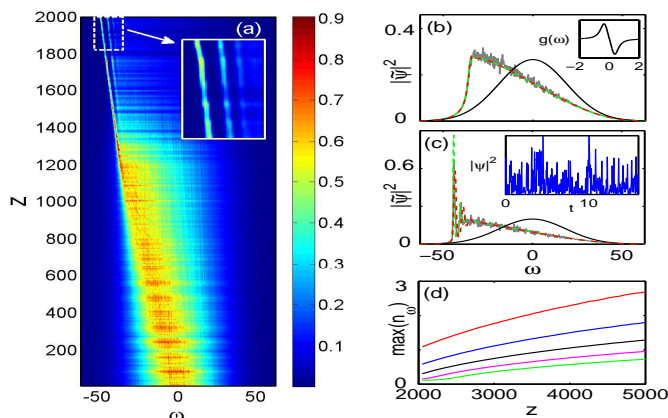


Figure 1. (a) Numerical simulation of the NLSE (1): The stochastic spectrum $|\tilde{\psi}|^2(\omega, z)$ develops a DSW at $z \simeq 1200$ ($\tau_R = 3, \beta = 1, \sigma = 1$). Snapshots at (b) $z = 1040$, (c) $z = 1400$: NLSE outcome (gray) is compared with KE [Eq. (2)] (green), SIDKE [Eq. (3)] (dashed-red), and input (solid black). (d) First five maxima of n_ω vs z in the long-term post-shock dynamics: the spectral peaks keep evolving, revealing the non-solitonic nature of the incoherent DSW. Insets: (b) gain spectrum g_ω , note that $\Delta\omega_g \ll \Delta\omega$; (c) corresponding temporal profile $|\psi(t)|^2$ showing the incoherent wave with stationary statistics.

Note that the rapid oscillatory spectral wave-train induced by the shock cannot be interpreted in this case as a soliton train. Indeed, contrary to the dynamics ruled by integrable models where the solitons quickly stabilize as they emerge, here the spectral peaks continue to exhibit an adiabatic growth and temporal narrowing even over long-term evolution after the catastrophe (see Fig. 1 (d)).

Incoherent DSWs develop also in the presence of a spectral background and even when the spectrum is a hole, as shown in Fig. 2. In this case, the incoherent DSW exhibits properties analogous to those widely studied for coherent DSWs, which can be described in the framework of our theory.

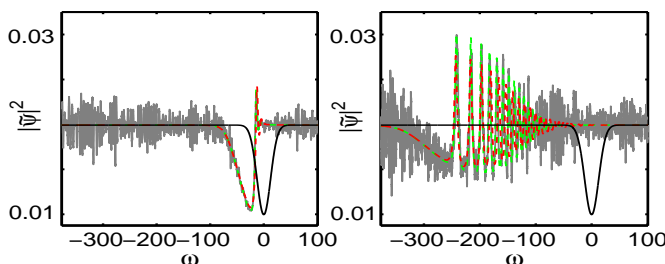


Figure 2. Incoherent DSW from a dark-like input spectrum with background noise (solid black) at (a) $z = 6 \times 10^3$; (b) $z = 40 \times 10^3$. NLSE (1), gray; KE (2), green; BO Eq.(4), dashed-red. Here $\tau_R = 2, \beta = 1, \sigma = 1$.

3 Singular integro-differential kinetic equations

The incoherent wave evolves in the *weakly nonlinear regime* ($L_d \ll L_{nl}$) and thus preserves a Gaussian statistics during the whole shock (a property that we have verified through the analysis of the Kurtosis and the PDF of the random wave). To get physical insight into incoherent DSWs, we thus resort to a weakly nonlinear statistical approach. On the basis of the random phase approximation, one obtains a closure of

the hierarchy of moments equations [11]: the averaged spectrum of the wave, $n_\omega(z) = \int B(z, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$, where $B(z, \tau) = \langle \psi(z, t - \tau/2) \psi^*(z, t + \tau/2) \rangle$ is the correlation function, evolves according to the kinetic equation (KE)

$$\partial_z n_\omega = \frac{1}{\pi} n_\omega \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\omega-\omega'} n_{\omega'} d\omega'. \quad (2)$$

This equation conserves $N = \int n_\omega(z) d\omega$ and $S = \int \log[n_\omega(z)] d\omega$. It has been recently considered to describe spectral incoherent solitons in optics [11]. A similar equation was considered in plasma physics to describe weak Langmuir turbulence and stimulated Compton scattering [13, 15].

To grasp the properties of incoherent DSWs, we now look for a reduction of the KE (2) in the regime $\tau_R \gg 1$ (i.e. $\tau_R \gg \tau_0$ in dimensional units). For this purpose, we stress the fact that, because of the causality condition of the response function $R(t)$, its Fourier transform necessarily decays algebraically at infinity. In the example of the harmonic oscillator response the spectral gain decays as $g_\omega \sim 1/\omega^3$, while for the exponential response discussed below $g_\omega \sim 1/\omega$. This algebraic behavior leads to divergent integrals in the mathematical derivation. *We solve this tricky problem by accurately addressing the singularities involved in the convolution integral of the KE (2)* [8]. The theory reveals that, as a rule, a singular integro-differential operator arises systematically in the derivation of the reduced KE (SIDKE), though under different forms describing linear or nonlinear dispersive effects, as well as purely nonlinear effects. The theory is validated by the excellent agreement exhibited by the numerical simulations of the NLSE, KE and SIDKEs obtained *without using any adjustable parameter* in all cases.

We first consider the example of the damped harmonic oscillator response. In this case the KE (2) can be written, *without any approximations*, in the form of a SIDKE

$$\tau_R^2 \partial_z n_\omega = (1 + \beta^2) \left(n_\omega \partial_\omega n_\omega - \frac{1}{\tau_R} n_\omega \mathcal{H} \partial_\omega^2 n_\omega + \frac{1}{\tau_R^2} \mathcal{I}[n_\omega] \right), \quad (3)$$

where $\mathcal{I} = \frac{n_\omega}{\pi\beta} \int_0^\infty [\partial_\omega^3 n_{\omega+\frac{u}{\tau_R}} + \partial_\omega^3 n_{\omega-\frac{u}{\tau_R}}] G(u) du$, with $G(u) = \int_u^\infty (F(v) - \beta/v) dv$, $F(u) = \frac{\pi\beta}{2} - \frac{1}{2} [v \arctan(v) - \frac{1}{2} \log(1+v^2)]_{u-\beta}^{u+\beta}$ and the singular operator \mathcal{H} refers to the Hilbert transform, $\mathcal{H}f(\omega) = \pi^{-1} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\omega-u)}{u} du$, where \mathcal{P} denotes the Cauchy principal value. In the regime $\tau_R \gg 1$, the SIDKE (3) describes the essence of incoherent DSWs shown in Fig. 1. The leading-order term is reminiscent of the inviscid Burgers equation and thus drives the formation of the shock. The singularity is subsequently regularized by the second *nonlinear dispersive term* involving the Hilbert operator. The last $(1/\tau_R^2)$ term plays a negligible role in the development of the incoherent shock, while it becomes comparable to the other terms in the long-term post-shock dynamics (see Fig. 1 (d)).

BO kinetic equation. When the incoherent wave evolves in the presence of a significant background spectral noise, $n_\omega(z) = n_0 + \tilde{n}_\omega(z)$, a multi-scale expansion with $\tilde{n}_\omega(z) \sim n_0/\tau_R$, leads to the SIDKE [8]:

$$\tau_R^2 \partial_z \tilde{n}_\omega - (1 + \beta^2) n_0 \partial_\omega \tilde{n}_\omega = (1 + \beta^2) (\tilde{n}_\omega \partial_\omega \tilde{n}_\omega - \frac{1}{\tau_R} n_0 \mathcal{H} \partial_\omega^2 \tilde{n}_\omega). \quad (4)$$

Equation (4) has the form of the integrable BO equation, which was originally derived to model internal waves in stratified fluids [10]. Here, it unexpectedly provides the deterministic description of the *spectral dynamics* of incoherent shocks illustrated in Figs. 2–3. In particular, the case illustrated in Fig. 3 is reminiscent of the “solitonic” DSW obtained for the BO equation with positive initial data vanishing at infinity (as it is the case for $\tilde{n}_\omega = n_\omega - n_0$ at $z = 0$, in Fig. 3). Indeed the peaks of the wavetrain resembles genuine BO solitons, which, at variance with those of the “non-solitonic” DSW described by the non-integrable SIDKE (3) and discussed in Fig. 1, are stabilized by the presence of the spectral background. From a more general perspective, the derivation of the deterministic SIDKEs paves the way for the analysis of spectral incoherent DSWs in a way analogous to conventional coherent DSWs. For instance, one can consider the Bohr-Sommerfeld limit of the inverse scattering [1] to study the distribution function for soliton amplitudes in the wavetrain by using the semi-classical quantization rule from the BO equation, or by means of a modulation theory.

We remark that, in the regime $\tau_R \gg 1$ and *assuming that the wave spectrum evolves in the presence of a strong background noise*, a heuristic derivation of the Korteweg-de Vries (KdV) equation was considered

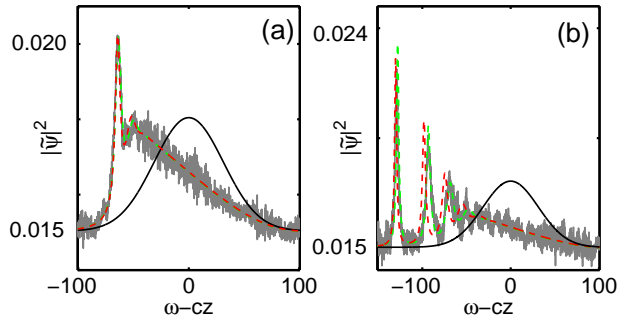


Figure 3. (a-b) Solitonic incoherent DSW in the presence of a background noise (harmonic oscillator response): The shock is regularized by the emission of incoherent BO solitons. NLSE (1), gray; KE (2), green; BO Eq. (4), dashed-red; input spectrum (solid black). ($\tau_R = 5, \beta = 1, \sigma = 1$, (a) $z = 3 \times 10^5$, (b) $z = 7 \times 10^5$).

in the context of plasma physics [13], although the possible existence of shocks was not discussed there. A derivation taking into account the algebraic decay of g_ω reveals that the validity of the KdV equation is limited to a gain spectrum which decays faster than $g_\omega \sim 1/\omega^5$ as $\omega \rightarrow \pm\infty$. As discussed above, usual physical response functions do not lead to such rapidly decaying spectral gains. A decay faster than $g(\omega) \sim 1/\omega^5$ would require, e.g., an artificial response function of the form, $\bar{R}(t) \sim t^\nu \exp(-t/\tau_R)$ with $\nu \geq 3$. This reveals that the KdV equation is not appropriate to describe incoherent DSWs.

4 Inhibition of incoherent shocks

The KdV equation would also lead to the erroneous conclusion that incoherent shocks occur unconditionally, irrespective of the form of the response function $R(t)$. In contrast, we show here that DSWs can be inhibited. We illustrate this by considering the widespread example of a purely exponential response function, $\bar{R}(t) = \exp(-t/\tau_R)/\tau_R$. In the regime $\tau_R \gg 1$, we obtain the SIDKE [8]

$$\tau_R \partial_z n_\omega = -n_\omega \mathcal{H} n_\omega - \frac{1}{\tau_R} n_\omega \partial_\omega n_\omega + \frac{1}{2\tau_R^2} n_\omega \mathcal{H} \partial_\omega^2 n_\omega. \quad (5)$$

Note that the second-order Burgers term produces a shock toward the high-frequency components ($\omega > 0$), so that the leading-order term is the only one liable to produce a shock.

The first term of the rhs of (5) was considered as a one-dimensional model of the vorticity formulation of the 3D Euler equation of incompressible fluid flows [9]. A detailed analysis of this first term reveals that it does not produce a shock (see Ref. [9]). If the initial condition is Lorentzian, $n_\omega^0 = N\omega_0/[\pi(\omega_0^2 + \omega^2)]$, then the spectrum propagates as a solitary-wave solution, $n_\omega(z) = N\omega_0/[\pi(\omega_0^2 + (\omega - \tilde{c}z)^2)]$ with $\tilde{c} = -N/(2\pi\tau_R)$. If the initial condition decays faster than a Lorentzian and vanishes at $\omega = \omega_c$, the spectrum exhibits a genuine collapse at $z_c = -2\tau_R/(\mathcal{H}n_{\omega=\omega_c}^0)$ [9]. In this case, the last term in (5) will ultimately regularize the singularity. If the initial condition decays without ever vanishing, then the spectrum moves at velocity \tilde{c} , while its peak amplitude increases according to $\sim 4\tau_R^2/[z^2 n^0(\omega = \tilde{c}z)]$, a property remarkably confirmed by the simulations of the NLSE (see Fig. 4 (a)).

Periodic behavior. This collapse-like behavior changes in a dramatic way when the incoherent wave evolves in the presence of a significant spectral background. A multi-scale expansion with $n_\omega(z) = n_0 + \tilde{n}_\omega(z)$ and $\tilde{n}_\omega(z) \sim n_0/\tau_R$ (see [8]), leads to the SIDKE

$$\tau_R \partial_z \tilde{n}_\omega = -(n_0 + \tilde{n}_\omega) \mathcal{H} \tilde{n}_\omega - \frac{1}{\tau_R} (n_0 + \tilde{n}_\omega) \partial_\omega \tilde{n}_\omega + \frac{n_0}{2\tau_R^2} \mathcal{H} \partial_\omega^2 \tilde{n}_\omega. \quad (6)$$

Since $n_0 \gg \tilde{n}_\omega(z)$, the spectral dynamics of the incoherent wave is dominated by the first linear term in the rhs of (6), which admits the following analytical solution

$$\tilde{n}_\omega(z) = \cos(n_0 z/\tau_R) \tilde{n}_\omega^0 - \sin(n_0 z/\tau_R) \mathcal{H} \tilde{n}_\omega^0, \quad (7)$$

where $\tilde{n}_\omega^0 = \tilde{n}_\omega(z=0)$ refers to the initial condition. This unexpected periodic behavior of the incoherent spectrum has been found in quantitative agreement with the simulations of the whole SIDKE (6), as well as with those of the KE (2) and the NLSE (1), as remarkably illustrated in Fig. 4 (b) and (c).

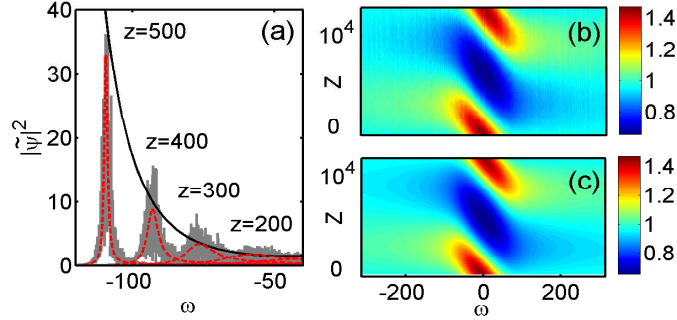


Figure 4. Inhibition of incoherent DSW with an exponential response function. (a) Without background the spectrum exhibits a collapse-like behavior: NLSE (1), gray; SIDKE (5), dashed-red ($\tau_R = 5$). The black line stands for the law $\sim 1/[z^2 n^0(\omega = \bar{c}z)]$ predicted from the first term in Eq. (5), see text. (b) and (c) A spectral background turns the evolution into periodic: (b) NLSE simulation; (c) plot of the analytical solution [Eq. (7)], $\tau_R = 2$.

5 Conclusion

We have reported the existence of incoherent DSWs, as well as collapse-like and periodic behaviors in the spectral dynamics of incoherent waves. The great generality of our mathematical treatment suggests that these phenomena can be found in disparate area of nonlinear science. For instance, the discretized version of the KE (2) recovers a form of the Lotka-Volterra equation, $\partial_t n_j = n_j \sum_i g_{ji} n_i$ with $g_{ji} = -g_{ij}$, where $n_j(t)$ denotes the temporal evolution of the population of the j -th biological species (or chemical reacting component) [14]. For a nearest neighbor predator-prey interaction (which maps the limit $\tau_R \gg 1$), the numerical simulations indicate the existence of a “discrete shock” effect, whose “wave-breaking” is regularized by the formation of discrete oscillations [8].

References

1. G. B. WHITHAM, *Linear and nonlinear waves*, Wiley, New York, 1974.
2. A. GUREVICH & L. PITAEVSKII, *Sov. Phys. JETP*, **38**, 291 (1974).
3. T. B. BENJAMIN *et al.*, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **224**, 448 (1954).
4. Z. DUTTON *et al.*, *Science*, **293**, 663 (2001) ; J. J. CHANG *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 170404 (2008).
5. N. F. SMYTH & P. E. HOLLOWAY, *J. Phys. Oceanogr.*, **18**, 947 (1988).
6. E. BETTELHEIM, A. G. ABANOV, P. WIEGMANN, *PHYS. REV. LETT.*, **97**, 246401 (2006).
7. N. GHOFRANIHA *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 243902 (2012).
8. J. GARNIER, G. XU, S. TRILLO & A. PICOZZI, *Phys. Rev. Lett.*, **111**, 113902 (2013).
9. P. CONSTANTIN, P. LAX & A. MAJDA, *Comm. Pure Appl. Math.*, **38**, 715–724 (1985).
10. T. BENJAMIN, *J. Fluid Mech*, **29**, 559 (1967) ; H. ONO, *J. Phys. Soc. Japan*, **39**, 1082 (1975).
11. A. PICOZZI, S. PITOIS & G. MILLOT, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 093901 (2008).
12. A. C. NEWELL *et al.*, *Physica D*, **152**, 520 (2001) ; V. E. ZAKHAROV *et al.*, *Phys. Rep.*, **398**, 1 (2004).
13. S. L. MUSER, A. M. RUBENCHIK, V. E. ZAKHAROV, *Phys. Rep.*, **252**, 177 (1995).
14. N. S. GOEL *et al.*, *Rev. Mod. Phys.*, **43**, 231 (1971).
15. C. MONTES *et al.*, *Phys. Fluids*, **22**, 176 (1979) ; C. MONTES *et al.*, *Phys. Rev. A*, **20**, 1081 (1979).

Instabilité de méandrage d'un filet liquide

Stéphanie Couvreur¹, Adrian Daerr¹, Jens Eggers² & Laurent Limat¹

¹ Matière et Systèmes Complexes UMR 7057, Université Paris Diderot, F-75205 Paris cedex 13

² School of Mathematics, University of Bristol, Bristol BS8 1TW, United Kingdom

adrian.daerr@univ-paris-diderot.fr

Résumé. Un rivulet liquide sur un plan incliné cesse de s'écouler de façon rectiligne au-delà d'un débit seuil et adopte alors une trajectoire sinueuse qui rappelle les méandres de rivières. Dans certaines conditions expérimentales, cette instabilité est linéaire et convective. Nous avons montré que le substrat y joue un rôle clef, en ralentissant la perturbation de la trajectoire rectiligne par rapport à la vitesse moyenne de l'écoulement. Dans ces conditions, les forces inertielles sont déstabilisantes et provoquent l'instabilité lorsqu'elles dépassent les forces capillaires. Nous discutons brièvement pourquoi ce mécanisme constitue un cadre général qui s'applique à d'autres instabilités similaires d'écoulements minces, telles que le flambage de nappes liquides, et comment il est lié à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Récemment, nous nous sommes intéressés aux effets non-linéaires, qui n'affectent pas seulement la saturation de l'instabilité et la sélection de longueurs d'onde, mais dont certains modifient fondamentalement la nature de l'instabilité. C'est le cas notamment des forces de piégage de la ligne de contact qui rendent l'expérience linéairement stable en mouillage partiel. Il existe alors toujours un seuil d'instabilité, mais celui-ci est maintenant fonction de l'état initial du système. On peut rendre compte de cette dépendance en mesurant directement la rugosité de la ligne de contact.

Abstract. For a range of flow rates, a liquid filament on an inclined plane may adopt a sinuous, meandering path instead of flowing straight downhill. We discuss the mechanism underlying the instability, and the growth and the saturation of the resulting meanders. An experiment in total wetting conditions greatly simplifies the understanding by avoiding the pinning of the rivulets, yet still exhibits the meandering instability. We show that the key ingredient lies in the anisotropic friction experienced by the rivulet. This anisotropy leads to a decoupling of material and wave velocities and allows inertial forces to increase the amplitude of perturbations once they overcome stabilizing capillary forces. Turning back to the case of partial wetting rivulets, we show how the linear instability is suppressed by contact line pinning, and how the instability threshold now depends on the initial geometry of the rivulet, namely its width and the amplitude of finite perturbations of its contact lines. Once meanders develop they evolve over long timescales towards stationary structures whose characteristic scales do no longer depend on the initial conditions.

1 Introduction : instabilités sinueuses

Il est assez courant de voir un filet liquide couler sur une surface solide, non pas en ligne droite selon la plus grande pente, mais en adoptant une trajectoire sinueuse. Curieusement le mécanisme qui conduit à cette trajectoire n'est pas évident. En effet, les principales forces en jeu que sont la pesanteur, la viscosité et les forces capillaires (tension de surface, accrochage des lignes de contact) semblent à première vue parfaitement s'accomoder d'une trajectoire rectiligne et même tendre à rectifier un filet qui s'en éloignerait. Les travaux expérimentaux à ce sujet sont peu diserts sur l'explication du phénomène [2, 6, 14, 16] et deux analyses théoriques [3, 12] passent à côté de l'ingrédient physique essentiel : le substrat. Pour constater le rôle clef de celui-ci il suffit de l'omettre : le même filet liquide sans le substrat, en chute libre, ne méandrerait pas. Du coup, obtenant essentiellement la dynamique d'un filet libre, le premier travail théorique s'efforce aussitôt de réintroduire l'effet du substrat sous forme d'un forçage aléatoire. Or il y a bien du bruit sous forme d'hétérogénéités de mouillage du substrat, mais l'échelle caractéristique est bien plus petite que la taille des virages du filet. La trajectoire du méandre ne ressemble pas à la marche aléatoire que prédit Bruinsma (un autre modèle semblable avec du bruit phénoménologique a été publié plus récemment [2]). Le deuxième travail par Kim *et al.* tient compte du frottement avec l'air ambiant et retrouve l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Cette instabilité est effectivement observée sur des

jets ou des nappes liquides éjectées à grande vitesse dans l'air [5] mais n'est pas le mécanisme à l'œuvre ici. Les perturbations dans l'instabilité de Kelvin-Helmholtz devraient être advectées à des vitesses de l'ordre de la vitesse du fluide, nettement plus dense que l'air. L'observation montre que les perturbations croissent et se déplacent à des vitesses de l'ordre du cm/s, environ deux ordres de grandeur en dessous de la vitesse du liquide (~ 1 m/s). En dépit de leurs défauts, les modèles de Bruinsma et Kim *et al.* identifient correctement l'inertie comme origine de l'instabilité, en compétition avec les forces capillaires. Nous allons discuter de quelle manière le substrat rend l'inertie déstabilisante et voir que ce mécanisme implique que le rapport des forces inertielles et capillaires (le nombre de Weber) doit être évalué dans le référentiel advecté avec les perturbations.

2 Méandrage en mouillage parfait et mécanisme d'instabilité

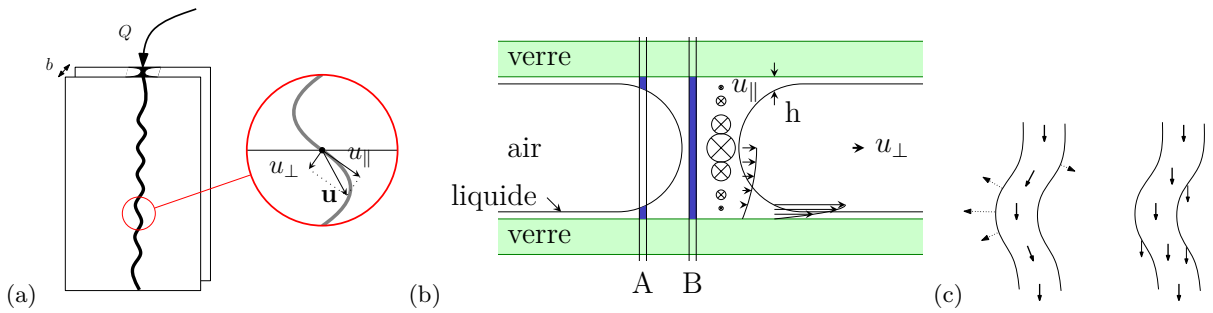


Figure 1. Méandres en mouillage parfait. (a) Un liquide mouillant les deux parois en verre est injecté de manière à former un pont liquide d'une paroi à l'autre. Le tracé du filet n'est pas ancré comme en mouillage partiel, la vitesse du liquide n'est donc pas nécessairement tangente au tracé instantané. (b) Coupe transverse du filet liquide. Lors d'un mouvement latéral, les vitesses moyennes en A et B doivent être à peu près les mêmes, les gradients de vitesses donc plus élevés en A alors qu'un écoulement longitudinal aura une vitesse moyenne bien plus élevée en B. (c) Conséquence du frottement anisotrope. Si une perturbation dérive à une vitesse u_{φ} plus faible que la vitesse \bar{u} du liquide, ce dernier parcourt une trajectoire non rectiligne et subit des forces apparentes centrifuges (à gauche). Ces forces sont absentes si $u_{\varphi} = \bar{u}$, comme en chute libre (à droite).

Pour comprendre le rôle du substrat, il s'est avéré utile de passer à un système où le frottement entre celui-ci et le liquide est réduit : en mouillage parfait, où les lignes de contact ne sont plus ancrées. Dans ce système découvert par Drenckhan [9, 10], le filet de liquide forme un pont entre deux plaques à faible espacement qui sont mouillées d'un film de très faible épaisseur (Fig. 1 gauche). La courbure de l'interface est concave, ce qui stabilise le filet : la pression en son intérieur est plus faible que dans les films, ce qui l'empêche de s'étaler comme un filet en mouillage parfait le ferait sur un plan.

On peut moyenner l'équation de Navier-Stokes sur l'épaisseur de la cellule, on trouve [1]

$$\partial_t \mathbf{u} + \beta (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \underbrace{-k \mathbf{u}}_{\text{viscosité}} + \left(\underbrace{\Gamma \kappa}_{\text{capillarité}} - \underbrace{k_{cl} u_n}_{\text{ligne de contact}} \right) \mathbf{n} + \underbrace{g \mathbf{e}_x}_{\text{pesanteur}}. \quad (1)$$

où $\beta \simeq 1$, Γ est la tension de surface multipliée par la largeur du filet divisée par le produit de sa section et de sa densité, k et k_{cl} sont des coefficients de frottement visqueux, et g est la pesanteur. La particularité de cette équation, qui fait son originalité dynamique, tient dans la décomposition du frottement visqueux en un terme isotrope de *bulk* et un terme normal aux lignes de contact. Ce dernier s'oppose à un déplacement du tracé du filet et fait qu'une perturbation ne se comporte pas comme en l'absence de parois.

Le frottement visqueux que subit le filet n'est pas isotrope, car un mouvement longitudinal, c'est-à-dire le long du tracé, peut se faire principalement dans le pont liquide qui se tend d'une paroi vers l'autre (Fig. 1 milieu). À l'opposé, un mouvement transverse force le déplacement des bords de ménisque. Ce déplacement engendre un cisaillement sur une épaisseur faible de liquide et l'on retrouve, dans la mesure où le film sur les parois loin du filet devient mince, la divergence de la dissipation d'une ligne de contact en mouvement.

Le frottement supplémentaire pour un déplacement du tracé a pour conséquence qu'une perturbation ne pourra pas dériver à la même vitesse que l'écoulement, contrairement à ce qui se passe sur un jet en chute libre. La vitesse de phase u_ϕ des perturbations est donc plus petite que la vitesse moyenne du liquide \bar{u} . Le liquide qui double une perturbation est contraint de suivre la trajectoire qu'elle dessine (Fig. 1 droite). Le liquide fera en particulier croître une perturbation si son inertie domine la tension de surface qui fournit une force centripète. Une analyse de stabilité de l'équation (1) donne le critère d'instabilité suivant [1] :

$$(\bar{u} - u_\phi)^2 > \Gamma. \quad (2)$$

Ici nous avons utilisé le fait que la vitesse d'advection des perturbations, u_ϕ , est fonction des coefficients de frottement k et k_{cl} , pour éliminer ces derniers en faveur de grandeurs mesurables expérimentalement. Le résultat central de cette analyse est que la vitesse pertinente pour les forces centrifuges est la vitesse *relative* entre fluide et perturbation [1].

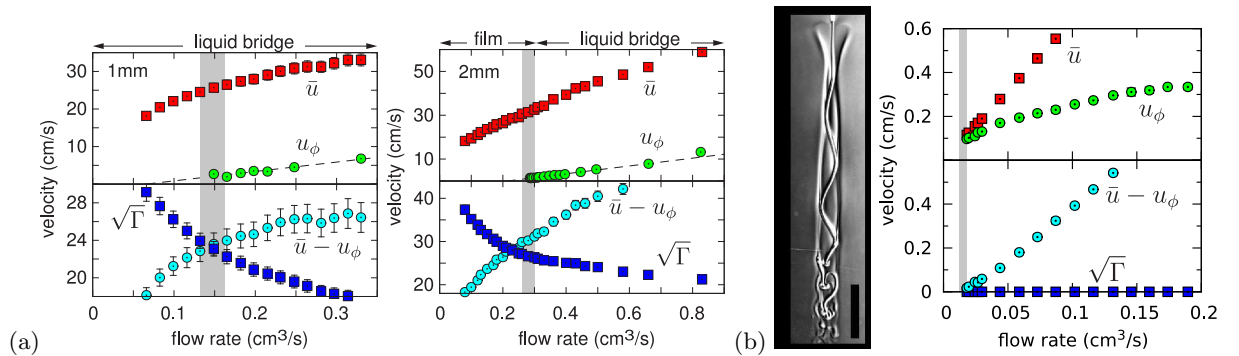


Figure 2. (a) Mesures de la vitesse matérielle et de la vitesse de phase de méandres en cellule de Hele-Shaw (espacements 1 mm et 2 mm) et comparaison du terme inertiel déstabilisant $\bar{u} - u_\phi$ au terme capillaire stabilisant Γ . Selon l'équation (2) les deux termes devraient être égaux au seuil d'instabilité (bande grise : seuil expérimental) [1]. (b) Test du même critère sur un système différent [8] : un jet d'eau salée tombant dans de l'eau moins salée. La tension de surface est nulle et la vitesse de phase bien égale à la vitesse du jet au seuil.

La figure 2 montre qu'on vérifie bien ce critère expérimentalement. Dans le cas des méandres en cellule de Hele-Shaw, la vitesse de phase est très petite au seuil, ce qui fait qu'il est difficile d'apprécier la différence avec un critère où l'on négligerait l'advection des perturbation. Nous avons donc vérifié le critère (2) d'instabilité sur un système différent, en l'occurrence la chute d'un jet d'eau salée dans un bain stratifié moins salé [15]. Ici la vitesse de phase n'est pas négligeable. On constate (Fig. 2 droite) que l'instabilité a lieu dès que la vitesse du liquide dépasse la vitesse de phase, ce qui est bien en accord avec l'absence de terme stabilisant, puisque la tension de surface est nulle, $\Gamma = 0$.

Jets inertiels et instabilité de Kelvin-Helmholtz

Partant du succès de l'application de notre critère d'instabilité à l'expérience de Dombrowski *et al.*, expérience dans laquelle il n'y a plus de tension de surface et qui entre dans la catégorie des instabilités de jet inertiel, il est tentant de voir quelles autres instabilités obéissent au même critère.

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz étant également inertielle, son seuil s'écrit, de manière similaire à la condition de méandrage (2) dans nos expériences, comme une comparaison d'un terme inertiel avec un terme stabilisant [11] :

$$4\rho_1\rho_2 \left(\frac{U}{2(\rho_1 + \rho_2)} \right)^2 > c_0^2 = \frac{g}{k} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} + \frac{\gamma k}{\rho_2 + \rho_1}.$$

Ici U est le différentiel de vitesses des deux fluides, ρ_i leur densités respectives, g l'accélération gravitationnelle et k le vecteur d'onde considéré. La grandeur c_0 est la vitesse des ondes (gravito-capillaires) entre les deux liquides en l'absence d'écoulement. Cette inégalité dit que l'interface devient instable lorsque le

terme inertiel en U^2 dépasse les forces de rappel, responsables des ondes gravito-capillaires. En effet, en multipliant l'inégalité par $(\rho_2 + \rho_1)k\epsilon$, on retrouve à gauche la force centrifuge (la variation de pression) sur une perturbation d'amplitude ϵ et longueur d'onde $2\pi/k$ et à droite la force de rappel.

La même inégalité peut aussi être lue comme une comparaison de vitesses, où la dispersion d'une perturbation par les ondes est en compétition avec son amplification. Lorsque le différentiel de vitesse des fluides, pondéré par un facteur sans dimension qui dépend des densités, dépasse la vitesse de phase des ondes interfaciales c_0 , alors le système devient instable. Si l'on admet que la vitesse des ondes interfaciales joue ici le rôle de la vitesse de phase de nos méandres, à savoir celle de vitesse de référentiel pour l'évaluation du terme inertiel centrifuge, alors les deux types d'instabilités (Kelvin-Helmholtz et frottement visqueux anisotrope) s'expriment de la même manière. Notons qu'il n'est pas étonnant en soi que le méandrage et Kelvin-Helmholtz se ramènent tous deux, du moins si l'on néglige l'effet de la pesanteur, au nombre de Weber. En revanche il nous semble intéressant que leur description devient particulièrement simple si le nombre de Weber est évalué dans le bon référentiel, à savoir celui qui suit les perturbations advectées. Dans des expériences comme celles de Pesci *et al.* et Dombrowski *et al.*, la vitesse de phase des perturbations n'a bien évidemment pas la même origine que dans nos méandres. En revanche, une fois cette vitesse calculée avec la physique propre à l'expérience, c'est le même critère que pour les méandres qui s'applique pour identifier le seuil.

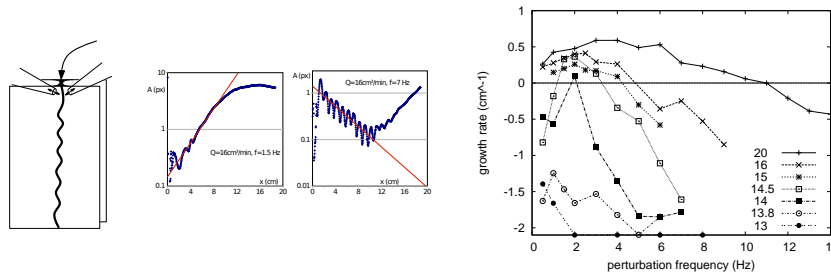


Figure 3. Perturbation contrôlée de méandres en mouillage parfait. (gauche) Deux buses soufflent et aspirent en opposition de phase, à quelques centimètres de l'injecteur, et forcent le filet à se déplacer latéralement. (milieu) L'enveloppe du tracé du filet croît ou décroît, selon que la perturbation est amplifiée ou atténuée, initialement exponentiellement. Ceci définit une longueur d'amplification ou d'atténuation, dont l'inverse est reporté dans le graphe à droite. (droite) Taux de croissance d'une perturbation de fréquence donnée à différents débits. À un débit de 14 ml/min seule une perturbation de 4 Hz a un taux de croissance positif, les perturbations aux autres fréquences sont atténuées. Le taux d'amplification des modes instables et la gamme de fréquences instables sont d'autant plus grands que le débit est au-dessus du débit seuil.

Curieusement le modèle ne prédit aucune sélection de longueur d'onde. Une expérience de perturbation contrôlée (Fig. 3) montre bien une signature d'instabilité linéaire et convective et révèle en plus une sélection de longueur d'onde. Notre modèle ne tient pas compte de la largeur finie du filet, dont on conçoit facilement qu'elle puisse introduire une coupure aux petites longueurs d'onde. L'existence d'une coupure aux grandes longueurs d'onde n'apparaît pas clairement dans les mesures, sauf pour les deux courbes les plus proches du seuil de la Fig. 3 droite.

3 Méandrage en mouillage partiel

Dans le méandrage en mouillage partiel (Fig. 4), ce n'est curieusement pas le début de l'instabilité, mais le régime pleinement développé qui est le plus facile à comprendre (Fig. 5). Pendant sa thèse Nolwenn Le Grand a montré que le méandre finit par figer son tracé, dans une certaine gamme de débits, et parfois sur un temps étonnamment long devant les autres temps caractéristiques. Il est courant que le méandre ne se fige qu'au bout d'environ 30 min alors que le liquide met à peine plus d'une seconde pour parcourir la longueur du plan incliné. Cette forme finale est caractérisée par des virages de courbure, d'amplitude et de longueur d'onde bien définies. On voit bien dans l'agrandissement Fig. 4 que le méandre est déformé

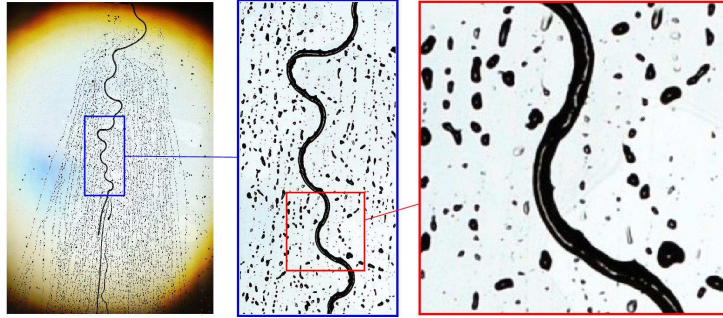


Figure 4. Images prises avec la pupille d'entrée de l'appareil photo au point conjugué d'une source lumineuse de petite taille. Cette configuration maximise le contraste : toute goutte ou impureté qui dévie la lumière de plus d'environ $1,5^\circ$ apparaît noire car la lumière n'atteint plus le diaphragme de l'appareil photo. À fort grossissement on voit qu'un trait blanc marque les maxima et les points cols du méandre, ce qui nous permet de mesurer sa déformation (au premier ordre vers l'extérieur du virage). La planche de gauche fait environ 1 m de long.

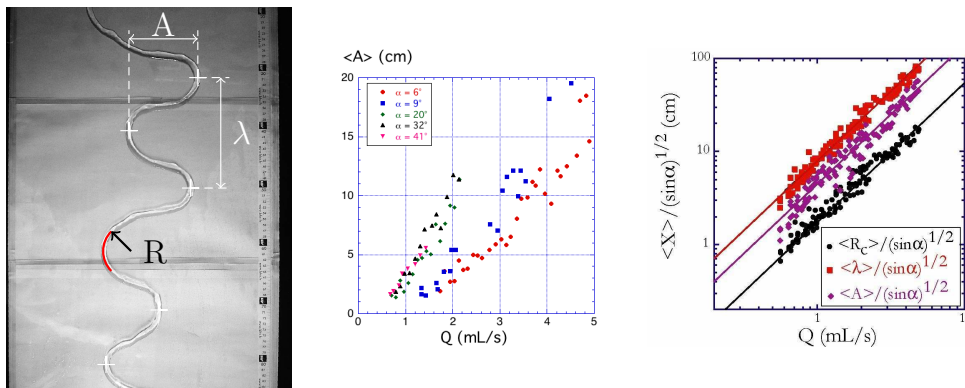


Figure 5. Caractérisation de méandres stationnaires en mouillage partiel.

par inertie vers l'extérieur des virages, dont la croissance s'arrête précisément quand les forces inertielles ont atteint le niveau des forces d'accrochage de la ligne de contact sur le substrat. La loi d'échelle qui découle de cet équilibre des forces regroupe bien les mesures à différents débits et inclinaisons sur une même droite (Fig. 5) [13].

L'apparition de l'instabilité est plus difficile à saisir, car l'hystérèse de mouillage supprime le mécanisme d'instabilité linéaire à l'œuvre en mouillage parfait. En effet, à lignes de contact fixées, de petites perturbations font juste osciller le filet autour de sa position d'équilibre (Fig. 6) [7]. Le seuil de méandrage dépend alors de la géométrie initiale du filet : s'il est plus large, le débit peut augmenter davantage avant que l'angle de contact n'atteigne sa valeur statique limite et que la ligne de contact ne devienne mobile. Si le filet initial est plus rugueux, si donc ses lignes de contact sont moins rectilignes, alors l'angle de contact limite sera plus rapidement atteint sur ces perturbations. Pour la figure 7 gauche, nous avons préparé des filets droits à différents débits et mesuré leur courbure moyenne (losanges bleus), avant d'augmenter le débit jusqu'à formation de méandres (ronds rouges). La courbe de droite (axes intervertis!) montre qu'un scaling prenant en compte le débit de préparation et la courbure moyenne du filet initial, suffit à saisir le débit critique de déstabilisation [4].

4 Résumé

Le passage par une expérience de méandrage en mouillage parfait a permis de montrer comment le frottement anisotrope sur le filet liquide rend l'inertie déstabilisante. Le critère d'instabilité (2) s'avère relativement générique, reliant avec succès des grandeurs directement observables, la stabilité et les vitesses matérielle et de phase, dans deux systèmes complètement différents physiquement (nos filets liquides

dans une cellule de Hele-Shaw, et des jets salins dans un bain, loin des parois et sans tension de surface). L'hystérèse de mouillage vient cependant compliquer la donne : puisque la force d'accrochage est réactive, sa mobilisation dans l'état initial détermine le seuil d'instabilité, qui dépend donc de la préparation. Seules les échelles des méandres stationnaires en mouillage partiel dépendent encore de manière simple des propriétés de mouillage du substrat.

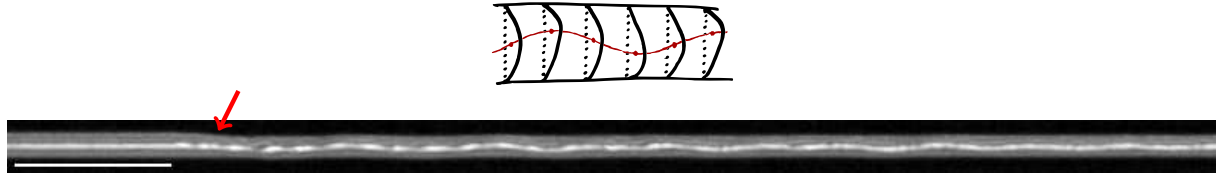


Figure 6. (haut) Une déformation de la section d'un filet provoque un différentiel de pression de Laplace, qui fait osciller le liquide autour de sa position d'équilibre. L'oscillation est atténuée par la viscosité. (bas) Effet d'une perturbation contrôlée sur la section du méandre. Un substrat avec des bandes moins mouillantes (noires) canalise le filet en ancrant les lignes de contact sur leurs bords. Le canal rétrécit par élargissement de la bande noire supérieure, au niveau de la flèche. En aval de la perturbation, on voit la section du méandre osciller (les points blancs marquent les points de hauteur maximale).

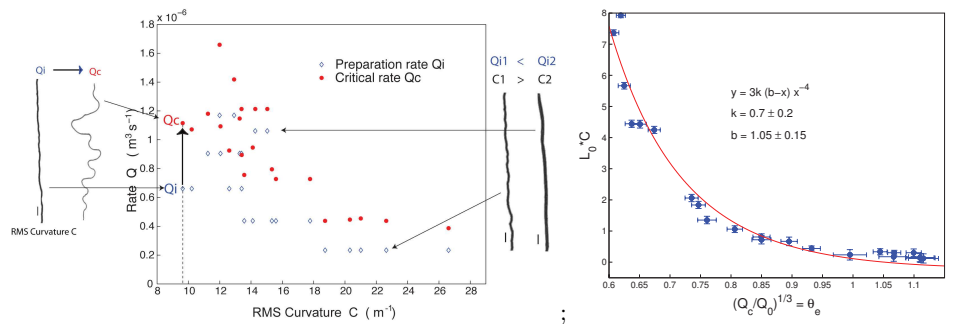


Figure 7. Caractérisation de méandres stationnaires en mouillage partiel.

Références

1. A. DAERR, J. EGGERS, L. LIMAT & N. VALADE, *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 184501 (2011).
2. B. BIRNIR, K. MERTENS, V. PUTKARADZE & P. VOROBIEFF, *J. Fluid Mech.*, **607**, 401–411 (2008).
3. R. BRUINSMAN, *J. Phys. France*, **51**, 829–845 (1990).
4. S. COUVREUR & A. DAERR, *Europhys. Lett.*, **29**, 24004 (2012).
5. G. CRAPPER, N. DOMBROWSKI, W. JEPSON & G. PYOTT, *J. Fluid Mech.*, **57**, 671–672 (1973).
6. J. B. CULKIN & S. H. DAVIS, *AIChE J.*, **30**, 263–267 (1984).
7. S. DAVIS, *J. Fluid Mech.*, **98**, 225–242 (1980).
8. C. DOMBROWSKI, B. LEWELLYN, A. I. PESCI, J. M. RESTREPO, J. O. KESSLER & R. E. GOLDSTEIN, *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 184501 (2005).
9. W. DRENCKHAN, S. GATZ & D. WEAIRE. *Phys. Fluids*, **16**, 3115 (2004).
10. W. DRENCKHAN, H. RITACCO, A. SAINT-JALMES, A. SAUGEY, P. MCGUINNESS, A. VAN DER NET, D. LANGEVIN & D. WEAIRE, *Phys. Fluids*, **19**, 102101 (2007).
11. É. GUYON, J.-P. HULIN & L. PETIT, *Hydrodynamique physique*, EDP Sciences (2001).
12. H.-Y. KIM, J.-H. KIM & B. H. KANG, *J. Fluid Mech.*, **498**, 245–256 (2004).
13. N. LE GRAND-PITEIRA, A. DAERR & L. LIMAT, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 254503 (2006).
14. T. NAKAGAWA & J. C. SCOTT, *J. Fluid Mech.*, **149**, 89–99 (1984).
15. A. PESCI, M. PORTER & R. GOLDSTEIN, *Phys. Rev. E*, **68**, 056305 (2003).
16. P. SCHMUKI & M. LASO, *J. Fluid Mech.*, **215**, 125–143 (1990).

Index

- Adachi Masahiro, 123
Antkowiak Arnaud, 35
- Badel Éric, 93
Bai Yang, 5
Berhanu Michael, 105
Bielawski Serge, 123
Bonaventure Julien, 99
Boniface Paul, 11
Bouchet Freddy, 17
Bouillet Fabien, 11
Brizard Alain, 129
Brubach Jean-Blaise, 123
Bush John W. M. , 69
- Cadot Olivier, 51
Cassinari Lodovico, 123
Charvolin Jean, 117
Chavanis Pierre-Henri, 87
Cochard Hervé, 93
Coulouvrat François, 45
Couprie Marie-Emmanuelle, 123
Couvreur Stéphanie, 147
Crumeyrolle Olivier, 5
- Daerr Adrian, 147
Denet Bruno, 87
Derot Jonathan, 23
De Zotti Vincent, 29
Dufour Stéphane, 135
- Eggers Jens, 147
Évain Clément, 123
- Falcon Éric, 105
Fargette Aurélie, 35
Forterre Yoël, 57, 93
- Gao Zhenlan, 39
Garnier Josselin, 141
Gentilhomme Valérie, 23
Girardot-Poinsot Morgane, 81
Guédra Matthieu, 45
Guéna Geoffroy, 93
- Hoepffner Jérôme, 111
Hosaka Masahito, 123
- Humbert Thomas, 51
- Ilin Konstantin, 123
- John Soundar Jerome J., 57
Josserand Christophe, 51
- Kahouadji Lyes, 63
Kato Masahiro, 123
Kimura Shin-Ichi, 123
Konomi Taro, 123
- Labat Marie, 123
Labousse Matthieu, 69
Laffargue Tanguy, 75
Larger Laurent, 81
Le Berre Martine, 1, 87
Le Parquier Marc, 123
Lebon Luc, 11
Limat Laurent, 11, 69, 147
Louf Jean-François, 93
- Machicoane Nathanaël, 99
Maistrenko Yuri, 81
Manceron Laurent, 123
Merminod Simon, 105
Moulia Bruno, 93
Mutabazi Innocent, 5, 63
- Neukirch Sébastien, 35
- Paré Gounséti, 111
Peixinho Jorge, 63
Penkovsky Bogdan, 81
Perrard Stéphane , 69
Picozzi Antonio, 141
Podvin Bérengère, 39
Pomeau Yves, 1, 87
Pouliquen Olivier, 93
- Raasch Juliane, 123
Receveur Mathieu, 11
Ricaud Jean-Paul, 123
Rivier Nicolas, 117
Rolland Joran, 17
Roussel Éléonore, 123
Roy Pascale, 123
- Saatdjian Esteban, 135

Sadoc Jean-François, 117
Scheuring Alexander, 123
Schmitt François G., 23
Sergent Anne, 39
Siegel Michael, 123
Simonnet Éric, 17
Szwaj Christophe, 123

Tailleur Julien, 75
Takashima Yoshifumi, 123
Thoma Petra, 123
Tordeux Marie-Agnès, 123
Toumache Farid, 5
Touzé Cyril, 51
Trimmo Stefano, 141

Tronko Natalia, 129

Vidal Valérie, 29
Vinsard Gérard, 135
Volk Romain, 99

Wilson Howard, 129

Xin Shihe, 39
Xu Gang, 141

Yamamoto Naoto, 123
Yoshikawa Harunori, 63

Zen Heishun, 123

17^e Rencontre du Non-Linéaire
Université Paris Diderot
Paris 2014

ISBN 978-2-9538596-3-8
EAN 9782953859638

Non-Linéaire Publications (NL Pub.)
Site universitaire du Madrillet — BP 12
78801 St-Étienne du Rouvray Cedex

Version en ligne, révisée le 15 avril 2014