

Transition abrupte vers une dynamique chaotique dans un problème de diffusion : une limite anti-intégrable

Claude Baesens¹, Yi-Chiu Chen², & Robert MacKay¹

¹ Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, UK

² Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei 11529, Taiwan

`claude.baesens@warwick.ac.uk`

Dans une étude de diffusion d'une particule par un potentiel à deux dimensions comportant plusieurs maxima de hauteur égale, Bleher, Ott and Grebogi [BOG] ont observé numériquement un phénomène de transition chaotique intéressant : lorsque l'énergie E de la particule est plus élevée que la valeur E_c des maxima du potentiel, l'angle de diffusion est une fonction lisse du paramètre d'impact (diffusion régulière, pas de trajectoires bornées), tandis que lorsque l'énergie de la particule est légèrement plus basse que E_c , cette fonction présente un ensemble de Cantor de singularités qui correspondent en fait à l'apparition d'un ensemble de trajectoires bornées chaotiques. Ils qualifièrent la transition à $E = E_c$ de *bifurcation abrupte de diffusion chaotique*.

Le but de ce travail est d'établir une explication mathématique rigoureuse de l'apparition de cette dynamique chaotique et ce pour une classe générale de problèmes de diffusion. Nous montrons que, dans le cadre de ces systèmes lagrangiens à deux degrés de liberté, cette *bifurcation abrupte* à $E = E_c$ peut s'interpréter comme une *limite anti-intégrable*, concept introduit par Serge Aubry en 1990 dans le contexte de l'Application Standard et du modèle de Frenkel-Kontorova.

Lorsque le potentiel comporte un ou plusieurs maxima locaux de hauteur E_c et qu'à $E = E_c$, des trajectoires homoclines ou hétéroclines (non-dégénérées) connectent ces maxima, nous démontrons que pour $E < E_c$ (suffisamment proche de E_c), il existe un ensemble hyperbolique chaotique de trajectoires qui ombrent uniformément les concaténations (admissibles) de ces trajectoires homoclines ou hétéroclines, suspension d'une chaîne de Markov topologique.

Nous construisons l'ensemble hyperbolique pour plusieurs exemples explicites de potentiels de diffusion.

Notre approche s'inspire d'un travail de Bolotin et MacKay démontrant l'existence d'orbites de Poincaré de seconde espèce dans le problème à trois corps circulaire restreint.

Références

[BOG] Bleher S, Ott E, Grebogi C, Route to chaotic scattering, Phys. Rev. Lett. 63 (1989) 919–922