

Projecteurs de Dirac pour les systèmes hamiltoniens

C. Chandre¹, L. de Guillebon¹, A. Back¹, E. Tassi¹, & P.J. Morrison²

¹ Centre de Physique Théorique, CNRS – Aix-Marseille Université, Campus de Luminy, case 907, F-13288 Marseille cedex 09, France

² Department of Physics and Institute for Fusion Studies, The University of Texas at Austin, Austin, TX 78712-1060, USA

`aurora.back@cpt.univ-mrs.fr`

Obtenir une structure hamiltonienne pour un modèle physique, c'est-à-dire connaître le hamiltonien et le crochet de Poisson qui donnent les équations du mouvement, permet d'obtenir des informations précises sur la dynamique du système. Par exemple, à partir du crochet de Poisson on peut identifier des lois de conservation associées aux invariants, appelés invariants de Casimir. Plus généralement, la connaissance de la structure hamiltonienne permet d'appliquer de nombreux outils développés pour les systèmes hamiltoniens pour des études de stabilité ou des approches perturbatives (e.g. théorie KAM). Lorsqu'on veut imposer des contraintes sur la dynamique d'un système hamiltonien, la détermination du crochet de Poisson du système contraint n'est pas triviale. On utilise une méthode issue des multiplicateurs de Lagrange qui permet d'identifier un crochet de Poisson, le crochet de Dirac. À partir d'un système hamiltonien, on réussit alors à insérer les contraintes et obtenir ainsi un système sous contraintes qui a l'avantage d'être encore un système hamiltonien où les contraintes deviennent des invariants de Casimir.

On a mis en évidence le rôle des projecteurs dans les systèmes hamiltoniens afin de déterminer des crochets de Dirac dans le cadre de systèmes hamiltoniens contraints en dimension infinie. La théorie de Dirac nous a permis d'identifier des projecteurs particuliers, dits de Dirac, ainsi que des projecteurs orthogonaux. On a alors pu utiliser ces projections sur les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) décrivant la dynamique d'un plasma à grande échelle d'un point de vue fluide, ainsi que sur les équations de Vlasov-Maxwell. Dans le cas de la MHD, la contrainte que l'on a imposée correspond à la condition d'incompressibilité du fluide. En ce qui concerne Vlasov-Maxwell, on a imposé la condition de champ magnétique constant (mais non-uniforme) et la condition de quasi-neutralité pour la version linéarisée du système. Cette méthode utilisant ces projecteurs a l'avantage de conserver la structure hamiltonienne d'un modèle donné tout en contraignant les équations. On obtient alors naturellement la structure hamiltonienne des équations de la MHD incompressible et des équations de Vlasov-Poisson.

Références

1. P.J. Morrison, Rev. Mod. Phys. **70**, 467 (1998).
2. P. A. M. Dirac, Can. J. Math. **2**, 129 (1950).
3. C. Chandre, L. de Guillebon, A. Back, E. Tassi, P.J. Morrison *On the use of projectors for Hamiltonian systems and their relationship with Dirac brackets*, <http://fr.arxiv.org/abs/1205.2347>