Sur le comportement dynamique non linéaire des Systèmes à évènements discrets relaxés dans des demi-anneaux Idempotents

Abderahim Benfekir, Samir Hamaci Laurent Laval & Mohamed Bouhamida

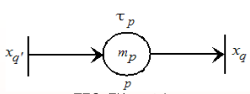
Présenté par A. BENFEKIR

Résumé. Les systèmes à évènements discrets (SED) sont des systèmes qui évoluent dans des espaces discrets dans lesquels toutes les variables d'états prennent leurs valeurs dans un ensemble dénombrable, et des évolutions, nommées trajectoires, basées sur une succession des états et des transitions. Plusieurs concepts (théories, méthodes, outils, modèles et langages) ont été élaborés afin de maitriser la complexité croissante de la conception et du développement de ces systèmes. Ils recouvrent plusieurs domaines d'applications tels que les systèmes de production manufacturière, la logistique, les systèmes de transport, les réseaux de communication, les circuits logiques, etc. L'étude de ces systèmes constitue, depuis le début des années 70. Certaines sous-classes de SED bénéficient néanmoins de modèles bien adaptés pour aborder les problèmes d'évaluation de performance ou de commande. En particulier, les systèmes mettant uniquement en jeu des phénomènes de synchronisation et de saturation peuvent être modélisés par des réseaux de Petri particuliers, appelés graphes d'évènements temporisés (GET). Ces derniers admettent une représentation linéaire sur une structure algébrique idempotente appelée l'algèbre des dioïdes (l'algèbre (min, +)). Néanmoins, les techniques développées dans le cadre des systèmes à évènements discrets atteignent leur limite, lorsque la taille du système considéré est importante. Il s'avère alors utile d'utiliser des GET à arcs pondérés, encore appelés GET avec multiplieurs (GETM), ce qui permet de réduire la taille du modèle. Ces modèles n'admettent pas une représentation linéaire dans l'algèbre (min, +). Pour pallier à ce problème de non linéarité et pourvoir appliquer certains résultats développés dans le cadre de la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes, qui sont des demi-anneaux idempotents, une nouvelle méthode de linéarisation du modèle mathématique régissant l'évolution dynamique est proposé. Contrairement aux méthodes existantes, cette méthode s'applique sur des réseaux de Petri relaxés, c'est-à-dire non frottements connexes avec entrées et sorties. Le modèle linéaire obtenu sera utilisé pour appliquer certains résultats de la théorie des systèmes linéaires pour analyser le comportement des ces systèmes et d'en déduire leurs performances. Cette méthode est développée dans un demi-anneau idempotent, qui est un dioïde d'opérateurs.

Principe

A la différence du modèle d'état classiquement associé à un ***RdP***, l'état considéré est associé non plus aux places d'un ***GET*** mais à ses transitions.

Définition. Un *compteur* associé à une transition x_q est une application croissante, notée $x_q(t)$. Il correspond au nombre de tirs de la transition x_q ayant lieu jusqu'à la date t.



TEG Elémentaire

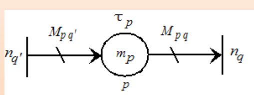
L'évolution d'un compteur associé à une transition x_q :

$$x_q(t) = \min_{p \in {}^*q,\, q' \in {}^*p} (m_p + x_{q'}(t - \tau_p))$$

Non linéaire dans l'algèbre usuelle.

$$x_q(t) = \bigoplus_{p \in {}^*q,\, q' \in {}^*p} (m_p \otimes x_{q'}(t - \tau_p))$$

Linéaire dans le dioïde $Z_{\min}$.



TEGM Elémentaire

L'évolution du compteur associé n_q : $n_q(t) = \min_{p \in {}^*q,\, q' \in {}^*p} \left\lfloor M_{pq}^{-1}(m_p + M_{pq'} n_{p'}(t - \tau_p)) \right\rfloor$

Non linéaire dans l'algèbre usuelle. Et non linéaire dans le dioïde $Z_{\min}$.

Modélisation à base d'opérateur des GETM :

- Trois types d'opérateurs définis de Z^z_{min} vers Z^z_{min} :
- Opérateur de stock γ^α : $\gamma^\alpha(n(t)) = \alpha + n(t)$
- Opérateur de retard δ^τ: $\delta^\tau(n(t)) = n(t-\tau)$
- Opérateur multiplieur μ_m: $\mu_m(n(t)) = \lfloor m \times n(t) \rfloor, m \in Q$

le compteur $n_q(t)$ associé à la transition n_q du GETM : $N_q(\delta) = \mu_{M_{qp}^{-1}} \gamma^\alpha \delta^\tau \mu_{M_{pq'}} N_{q'}(\delta)$

Pour pouvoir linéariser dans le dioïde $D_{min}[[\delta]]$, on exprime chaque compteur en fonction d'une entrée impulsionelle (de par son amplitude), permet de linéariser le modèle mathématique d'un GETM.

Proposition 2 : Soit E une entrée impulsionnelle, on a $\forall\, a \in N, \beta \in Q^+, \forall q = 1, \dots, n$,

$$\mu_\beta \gamma^a \delta^\tau E_q(\delta) = \gamma^{\lfloor \beta a \rfloor} \delta^\tau E_q(\delta)$$

le modèle d'état obtenu après avoir codées les dynamiques dans le dioïde $D_{min}[[\delta]]$.

$N(\delta) = A \otimes N(\delta) \oplus E(\delta)$

N : vecteur des compteurs;

E : entrées impulsionelles.

Admet la plus petite solution : $N(\delta) = A^* E(\delta)$

Avec $A^* = e \oplus A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \dots$

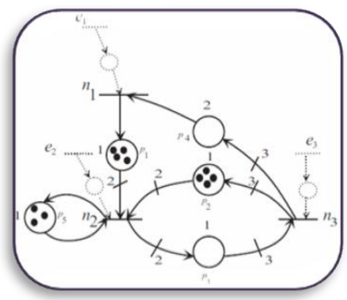
La méthode de linéarisation

Evaluation de performances

Calculer le temps de cycle $TC_m = \theta_q / \lambda_q$, θ_q : T-invariant associée à la transition et λ_q : nombre moyen de tirs de la transition

$\lambda = \min \frac{M(c)}{Temp(c)}$, *M(c)* : nombre total de jetons du circuit c, *Temp(c)* : la somme des temporisations des places du c.

Exemple d'application



GETM avec les entrées impulsionelles

Evolution dynamique dans le dioïde $D_{min}[[\delta]]$

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \mu_3 \delta^2 \\ \mu_{1/2}\gamma^4\delta & \gamma^3\delta & \mu_{1/2}\gamma^4\delta\mu_3 \\ \varepsilon & \mu_{1/3}\delta\mu_2 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} E \\ E \\ E \end{pmatrix}$$

Calculer $A^*E(\delta)$:

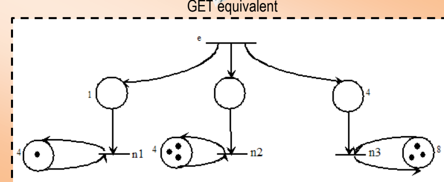
$$A^*E(\delta) = \begin{pmatrix} \delta(\gamma\delta^4)^* \\ (\gamma^3\delta^4)^* \\ \gamma\delta^4(\gamma^3\delta^8)^* \end{pmatrix} E$$

Représentation (min, +) linéaire dans le dioïde Z_{min}

$$\begin{cases} n_1(t) = \min(1 + n_1(t-4),\ e(t-1)) \\ n_2(t) = \min(3 + n_2(t-4), e(t)) \\ n_3(t) = \min(3 + n_3(t-8), 1 + e(t-4)) \end{cases}$$

Représentation par GET

GET équivalent



Evaluation de performances

Il est composé de trois circuits pas fortement connexes.

- Circuit $(n_1; n_1)$: $\lambda_1 = 1/4$;
- Circuit $(n_2; n_2)$: $\lambda_2 = 3/4$;
- Circuit $(n_3; n_3)$: $\lambda_3 = 3/8$;
- $TC_m = 8\, u.t$
- $\theta_q = [2,6,3]$