

Éric FALCON  
Christophe JOSSERAND  
Marc LEFRANC  
François PÉTRÉLIS  
Chi-Tuong PHAM

---

Comptes-rendus de la 16<sup>e</sup>

# Rencontre du Non-Linéaire

Paris 2013

---

Université Paris Diderot  
Amphithéâtre Buffon

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/>



É. Falcon, C. Josserand  
M. Lefranc, F. Pétrélis & C.-T. Pham  
Éditeurs

---

**Comptes-Rendus de la 16<sup>e</sup>  
Rencontre du Non-Linéaire  
Paris 2013**

---

Université Paris Diderot  
Non-Linéaire Publications





16<sup>e</sup> RENCONTRE DU NON-LINÉAIRE  
 Université Paris Diderot, PARIS  
 25–27 Mars 2013

Nous remercions vivement le Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes, Molécules (PhLAM), l'Institut Jean le Rond d'Alembert (IJLRA), le Laboratoire Matière et Systèmes Complexes (MSC), le Laboratoire de Physique Statistique (LPS), le Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (LIMSI), le GDR 2984 DYCOEC (Dynamique et Contrôle des Ensembles Complexes), le Laboratoire d'Excellence CEMPI (Centre Européen pour les Mathématiques, la Physique et leurs Interactions), le GDR 2865 Structure de la Turbulence et Mélange, l'Université Paris Diderot, le Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), pour leur soutien matériel et financier.

Le comité scientifique est composé de :

Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Éric FALCON	MSC — Paris Diderot
Anke LINDNER	PMMH — ESPCI, Paris
Mathis PLAPP	LPMC — Polytechnique
Sébastien AUMAÎTRE	CEA — Saclay
Christel CHANDRE	CPT — Marseille
Christophe FINOT	ICB — Dijon
Laure SAINT-RAYMOND	DMA — ENS
Médéric ARGENTINA	INLN — Nice
Laurent CHEVILLARD	Lab. de Physique — ENSL
Jérôme HOEPFFNER	IJLRA — UPMC
François PÉTRÉLIS	LPS — ENS
Chi-Tuong PHAM	LIMSI — Paris-Sud

Les *Rencontres annuelles du Non-linéaire* sont organisées par :

Éric FALCON	MSC — Paris Diderot
Christophe JOSSERAND	IJLRA — UPMC
Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
François PÉTRÉLIS	LPS — ENS
Chi-Tuong PHAM	LIMSI — Paris-Sud

Le Colloque *Dynamiques irréversibles en l'honneur de Paul Manneville* est organisé par :

Patrice LE GAL	IRPHE — Marseille
Laurette TUCKERMAN	PMMH — ESPCI

Ces Comptes-Rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

*Non-Linéaire Publications, Avenue de l'Université, BP 12*  
 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Toutes les informations concernant les *Rencontres* sont publiées sur le serveur :

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/>

Renseignements :

[rnl@nonlineaire.univ-lille1.fr](mailto:rnl@nonlineaire.univ-lille1.fr)



## Table des matières

<b>Événements extrêmes dans la dispersion relative turbulente</b> <i>Jérémy Bec, Rehab Bitane, Holger Homann</i> .....	1
<b>Morphologies universelles d’interfaces fluides déformées par la pression de radiation acoustique ou électromagnétique</b> <i>Hamza Chraïbi, Nicolas Bertin, Régis Wunenburger, Jean-Pierre Delville, Étienne Brasselet</i> .....	7
<b>Instabilité d’une onde plane d’inertie par résonance triadique</b> <i>Pierre-Philippe Cortet, Guilhem Bordes, Frédéric Moisy, Thierry Dauvois</i> .....	13
<b>Digitation de densité asymétrique dans les systèmes réactifs</b> <i>L. Lemaigre, M. A. Budroni, L. A. Riolfo, P. Grosfils, A. De Wit</i> .....	19
<b>Numerical Simulations of Wave Turbulence in Vibrating Plates</b> <i>M. Ducceschi, C. Touzé, O. Cadot, S. Bilbao</i> .....	25
<b>Transitions de phase et dynamique de spin dans un condensat de Bose dipolaire à composantes multiples</b> <i>B. Pasquiou, A. De Paz, A. Chotia, A. Sharma, E. Maréchal, P. Pedri, L. Vernac, B. Laburthe-Tolra, O. Gorceix</i> .....	31
<b>Décomposition en Modes Dynamiques Économique pour l’identification de structures cohérentes dans des écoulements 3D</b> <i>Florimond Guéniat, Maxime Delorme, Luc R. Pastur, François Lusseyran</i> .....	37
<b>Émergence d’une circulation grande échelle en turbulence 2D</b> <i>Johann Héroult, Guillaume Michel, François Pétrélis, Stéphan Fauve</i> .....	43
<b>Dynamiques complexes de rebonds d’une goutte placée sur un bain vibré : résonances et anti-résonances</b> <i>Maxime Hubert, Nicolas Vandewalle</i> .....	49
<b>Turbulence d’ondes dans les plaques minces en vibration : effet de l’amortissement</b> <i>T. Humbert, C. Josserand, O. Cadot, C. Touzé</i> .....	55
<b>Turbulence d’ondes gravito-capillaires engendrée par des vibrations horizontales du récipient</b> <i>Bruno Issenmann, Éric Falcon</i> .....	61
<b>Vortices catapult droplets in atomization</b> <i>J. John Soundar Jerome, S. Marty, J.-P. Matas, S. Zaleski, J. Hoepffner</i> .....	67
<b>Sur la synchronisation de systèmes chaotiques bidirectionnellement couplés</b> <i>Laurent Laval, Jean-Pierre Barbot, Christophe Letellier</i> .....	73

<b>Étude du piège de l’utriculaire : modèle élastique et comportements dynamiques associés</b>	
<i>Coraline Llorens, Médéric Argentina, Yann Bouret</i> .....	79
<b>Dynamique lente de particules matérielles dans un écoulement de von Kármán</b>	
<i>N. Machicoane, L. Fiabane, R. Zimmermann, M. Bourgoïn, J.-F. Pinton, R. Volk</i> .....	86
<b>Fluides complexes sous cisaillement : quelques instabilités à nombre de Reynolds nul</b>	
<i>Christophe Perge, Vincent Grenard, Marc-Antoine Fardin, Thibaut Divoux, Nicolas Taberlet, Sébastien Manneville</i> .....	92
<b>Expérience électro-optique générique de calculateur neuromorphique utilisant les transitoires complexes des dynamiques à retard</b>	
<i>R. Martinenghi, A. Baylon-Fuentes, M. Jacquot, Y. Chembo, L. Larger</i> .....	98
<b>Bistabilité hydrodynamique engendrant deux branches dynamos dans l’expérience VKS</b>	
<i>Sophie Miralles, Nicolas Plihon, Jean-François Pinton, Philippe Odier, Mickaël Bourgoïn, Gautier Verhille, Johann Héroult, François Pétrélis, Christophe Gissinger, Stéphane Fauve, Bérengère Dubrulle, Sébastien Aumaître, François Daviaud</i> .....	104
<b>Segmentation capillaire : phénomène d’évitement de l’étranglement</b>	
<i>Jérôme Hoepffner, Gounséti Paré</i> .....	110
<b>Diffusion-mechanical instability of a spherical gel</b>	
<i>Jorge Peixinho, Shomeek Mukhopadhyay</i> .....	116
<b>Effets de quantification d’une association onde-particule soumise à une force centrale</b>	
<i>S. Perrard, M. Labousse, M. Miskin, E. Fort, Y. Couder</i> .....	120
<b>Des vagues en forme d’étoile</b>	
<i>Alphonse Leroux, Didier Clamond, Jean Rajchenbach</i> .....	125
<b>Gabarit d’un attracteur borné par un tore de genre 5</b>	
<i>Martin Rosalie, Christophe Letellier</i> .....	131
<b>Inéquivalence d’ensemble d’états stationnaires turbulents</b>	
<i>Brice Saint-Michel, Bérengère Dubrulle, Guillaume Mancel, Vincent Padilla, Cécile Wiertel, François Daviaud</i> .....	137
<b>Effet d’un gradient de température radial sur le régime turbulent dans un système de Couette-Taylor</b>	
<i>Clément Savaro, Arnaud Prigent, Innocent Mutabazi</i> .....	143
<b>Dynamique intermittente du plancton : analyse de la dynamique multi-échelle en utilisant la décomposition modale empirique</b>	
<i>François G. Schmitt, Orlane Anneville, Sami Souissi</i> .....	149
<b>Motifs turbulent-laminaire dans l’écoulement de Poiseuille plan</b>	
<i>Laurette S. Tuckerman</i> .....	155
<b>Dynamique et topologie des vortex magnétiques</b>	
<i>Alberto Verga</i> .....	161
<b>Éclatement de bulles ou de films minces : vers la limite acoustique</b>	
<i>Valérie Vidal, Brayán Álvarez, Claudia Sánchez, Francisco Melo</i> .....	167

**Impact des cellules endothéliales sur la dynamique de croissance tumorale**  
*Louise Viger, Fabrice Denis, Martin Rosalie, Christophe Letellier* ..... 173

**Index** ..... 181





# Événements extrêmes dans la dispersion relative turbulente

Jérémie Bec, Rehab Bitane & Holger Homann

Laboratoire J.-L. Lagrange UMR 7293, Université de Nice-Sophia Antipolis, CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur, BP 4229, 06304 Nice Cedex 4, France.

jeremie.bec@oca.eu

**Résumé.** Nous étudions par le biais de simulations numériques directes les propriétés statistiques de la dispersion relative de traceurs dans un écoulement en turbulence homogène isotrope développée. Les valeurs typiques de la distance entre traceurs semblent bien décrite par l'approche de Richardson. En revanche, les valeurs extrêmes en dévient fortement et suggèrent que le mélange turbulent n'est pas aussi efficace que prédit. Nous montrons que cela peut s'interpréter par un comportement diffusif des différences de vitesse entre traceurs qui fait intervenir un taux local de transfert d'énergie défini comme le rapport entre le cube des différences de vitesse et la distance. Cette quantité atteint un régime statistiquement stationnaire sur des petites échelles de temps.

**Abstract.** The statistics of Lagrangian pair dispersion in a developed homogeneous isotropic turbulent flow is investigated by means of direct numerical simulations. The typical values of the distance between tracers seem well described by Richardson's approach. However, the extrem values strongly deviate from it and this suggests that turbulent mixing is much less efficient than expected. We show that this can be understood in terms of a diffusive behavior of velocity differences between tracers, which depends on a local energy transfer rate defined by the ratio between the cube of the longitudinal velocity difference and the distance. This quantity attains a statistically stationary regime on short timescales.

## 1 Introduction

Le comportement diffusif aux temps longs des traceurs d'un écoulement turbulent est souvent utilisé dans la modélisation du transport. Les propriétés de mélange sont alors décrites en termes d'une diffusivité turbulente effective qui est exprimée en fonction des caractéristiques dynamiques de l'écoulement. Cette démarche est par exemple utilisée pour le contrôle de la qualité de l'air afin d'évaluer les risques sur la santé d'une longue exposition en aval d'une source de polluants. Toutefois, ce type d'approche échoue lorsqu'on s'intéresse à l'éventualité de trouver une concentration locale excédant un certain seuil critique. Les fluctuations locales ne peuvent alors pas être déterminées à partir de la concentration moyenne puisqu'elles sont associées à ses moments d'ordres plus élevés. Les statistiques d'ordre deux, comme par exemple la corrélation spatiale d'un scalaire passif, peuvent s'exprimer en fonction du mouvement relatif de deux traceurs de l'écoulement turbulent. Dans la plus grande partie des applications, comme par exemple la météorologie, l'ingénierie mécanique, la biologie, cette dynamique est approchée par le modèle de diffusivité turbulente de Richardson.

Etudier la dispersion de paires en turbulence consiste à comprendre le comportement statistique de la séparation  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_2(t)$  entre deux traceurs. L'argument de Richardson [1] peut s'interpréter en faisant l'hypothèse que la différence de vitesse  $\mathbf{V}(t) = \delta_r \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}_1, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}_2, t)$  sur une séparation  $r = |\mathbf{R}|$  a un temps de corrélation bien plus court que les échelles auxquelles le système est observé. Cela signifie que l'on peut appliquer le théorème de la limite centrale pour écrire

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V} \simeq \sqrt{\tau_L} \mathbf{U}(\mathbf{R}) \xi(t), \quad (1)$$

où  $\xi$  est le bruit blanc standard tridimensionnel,  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \langle \delta_r \mathbf{u} \otimes \delta_r \mathbf{u} \rangle$  est le tenseur de corrélation des différences de vitesse eulériennes et  $\tau_L$  est le temps de corrélation lagrangien des différences de vitesse

entre une paire de traceurs séparés d'une distance  $r = |\mathbf{R}|$ . Comme cela a été souligné par Obukhov [2], lorsque l'on suppose que les propriétés d'échelle de l'écoulement sont données par Kolmogorov 1941, on a  $\tau_L \sim \varepsilon^{-1/3} r^{2/3}$ ,  $\mathbf{U} \sim \varepsilon^{-1/3} r^{1/3}$ , où  $\varepsilon$  désigne le taux moyen de dissipation d'énergie, et l'équation de Fokker–Planck associée à (1) correspond de façon exacte à celle écrite par Richardson pour la densité de probabilité  $p(r, t)$  de la distance entre les traceurs. En particulier, cette approche prédit que la distance carrée moyennée sur toutes les paires qui sont initialement à une distance  $|\mathbf{R}(0)| = r_0$  se comporte aux temps longs comme

$$\langle |\mathbf{R}|^2 \rangle_{r_0} \simeq g \varepsilon t^3, \quad (2)$$

où  $g$  est une constante universelle. Ce comportement est indépendant de la séparation initiale  $r_0$ , d'où son nom de *loi explosive*. Cette perte de mémoire ne peut se produire que sur des échelles de temps plus longues que le temps de corrélation  $\tau_L(r_0) \sim r_0^{2/3}$  de la différence de vitesse initiale. Aux temps  $t \ll \tau_L(r_0)$ , il n'est pas possible d'utiliser l'approximation (1) vu que les différences de vitesse gardent plus ou moins leur valeur initiale. Ceci correspond au régime balistique introduit par Batchelor [3]

$$\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0} \simeq t^2 S_2(r_0), \quad (3)$$

où  $S_2(r) = \langle |\delta_r \mathbf{u}|^2 \rangle$  est la fonction de structure eulérienne d'ordre deux sur une séparation  $r$ . L'approche diffusive (1) peut toutefois être modifiée pour prendre en compte le régime balistique [4]. Néanmoins, un temps de corrélation court pour les différences de vitesse peut difficilement être justifié et semble contredire la phénoménologie de la turbulence. En effet, comme cela a été souligné dans [5], si  $r$  croît comme  $t^{3/2}$ , le temps de corrélation lagrangien  $\tau_L$  est alors de l'ordre de  $r^{2/3} \sim t$ , et il est donc toujours de l'ordre du temps d'observation. Les propriétés de dispersion relative dépendent très fortement des temps de corrélation de l'écoulement, comme cela a été montré dans [6]. Malgré ces contradictions apparentes, l'approche diffusive de Richardson donne une très bonne approximation pour décrire certains régimes intermédiaires aux temps suffisamment longs et pour des séparations proches des valeurs typiques [7–9].

Nous nous efforçons dans ce travail de donner un nouvel angle d'approche à ce problème. Nous utilisons pour cela les résultats de simulations numériques directes de l'équation de Navier–Stokes effectuées avec  $4096^3$  points de grille pour atteindre un nombre de Reynolds à la micro-échelle de Taylor aux alentours de  $R_\lambda \approx 730$ . Cet écoulement transporte  $10^7$  traceurs. Une fois qu'un régime statistiquement stationnaire est atteint, nous commençons l'analyse de la dispersion de paires. Pour cela nous repérons à un instant initial arbitraire (que nous fixons ici égal à  $t = 0$ ) tous les couples de traceurs qui sont à une distance  $|\mathbf{R}(0)| = r_0 \pm 2\%$  pour différentes valeurs de  $r_0$ .

## 2 Échelles de temps de convergence vers le régime explosif

L'objectif est ici de mieux comprendre quelle est l'échelle de temps de convergence vers la loi explosive  $\propto t^3$  de Richardson. Pour commencer, réécrivons le comportement balistique de Batchelor (3) en prenant en compte les termes sous-dominants. Un développement de Taylor conduit à

$$\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0} = t^2 S_2(r_0) + t^3 \langle \delta_{r_0} \mathbf{u} \cdot \delta_{r_0} \mathbf{a} \rangle + \mathcal{O}(t^4). \quad (4)$$

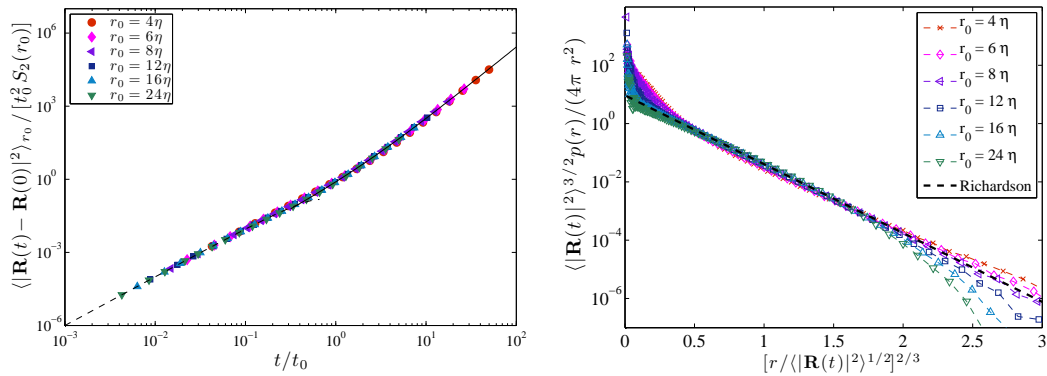
Ici,  $\delta_r \mathbf{a}$  désigne l'incrément eulérien de l'accélération du fluide. Tant que le premier terme (proportionnel à  $t^2$ ) du membre de droite est dominant, les traceurs se séparent de façon balistique. Il est clair que le développement perd sa validité lorsque le second terme devient du même ordre. Cela se produit lorsque  $t \approx t_0 = S_2(r_0) / |\langle \delta_{r_0} \mathbf{u} \cdot \delta_{r_0} \mathbf{a} \rangle|$ . Il est connu que dans un écoulement turbulent et pour des séparations aux échelles inertielles, la corrélation entre les différences de vitesse et d'accélération vérifie  $\langle \delta_{r_0} \mathbf{u} \cdot \delta_{r_0} \mathbf{a} \rangle \simeq -2\varepsilon$  (voir, par exemple, [5]). Cette relation est exacte et ne repose pas sur des arguments dimensionnels. Elle peut être vue comme la version lagrangienne de la célèbre loi des 4/5. Ceci implique que pour une séparation initiale  $r_0$  à l'intérieur de la gamme d'échelles inertielles, le régime balistique pour la séparation de traceurs se termine à un temps de l'ordre de  $t_0 \simeq S_2(r_0) / (2\varepsilon)$ . Cette échelle de temps peut s'interpréter comme le temps nécessaire pour dissiper avec le taux moyen  $\varepsilon$  l'énergie cinétique typiquement contenue à l'échelle  $r_0$ . On s'attend à ce que ce temps soit de l'ordre du temps de corrélation de la différence de

vitesse initiale entre traceurs. Il est en principe différent du temps de retournement qui est lui de l'ordre de  $\tau_{r_0} = r_0/S_2^{1/2}(r_0)$ . Dans le cas d'un écoulement intermittent où  $S_2(r_0) \propto r_0^{\zeta_2}$  avec  $\zeta_2 > 2/3$ , le rapport entre le « temps de dissipation »  $t_0$  et le temps de retournement  $\tau_{r_0}$  croît en fonction de  $r_0$ .

L'introduction du temps  $t_0$  dans le développement (4) conduit à écrire pour  $t \ll t_0$

$$\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0} = t_0^2 S_2(r_0) (t/t_0)^2 [1 - t/t_0] + \mathcal{O}(t/t_0)^4. \quad (5)$$

La figure 1 (gauche) montre l'évolution temporelle du déplacement carré moyen pour différentes valeurs de la séparation initiale  $r_0$ . Clairement, un fois le temps adimensionné par  $t_0$  et les distances carrées moyennes par  $t_0^2 S_2(r_0)$ , toute les mesures se concentrent sur une même courbe lorsque  $r_0$  est suffisamment loin dans la gamme d'échelles inertielles. Aux temps courts, les données sont en bon accord avec (5).



**Figure 1.** Gauche : Séparation carrée moyenne entre deux traceurs en fonction du temps et pour différentes séparations initiales  $r_0$ . La ligne en tirets représente les deux termes dominants dans le régime de Batchelor (5). La ligne continue correspond au régime de Richardson (2) avec  $g = 0.525$ . Droite : densité de probabilité de la distance  $r$  au temps  $t = 5 t_0$  pour différentes valeurs de la séparation initiale. Nous l'avons ici normalisée par  $4\pi r^2$  et représentée sur un axe log  $y$  en fonction de  $r / \langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle_{r_0}^{1/2}$ . Avec un tel choix, la distribution de Richardson (7) apparaît comme une droite (représentée ici en tirets).

Aussi, une observation importante sur la figure 1 (gauche) est que la concentration des différentes données se prolonge au delà de  $t_0$  et est toujours valide lorsque les séparations tendent vers le régime en  $t^3$  de Richardson. Un tel fait implique que  $t_0$  n'est pas seulement le temps de départ du régime balistique mais aussi celui de convergence vers le comportement explosif. Les données numériques suggèrent qu'aux temps longs la séparation moyenne carrée se comporte comme

$$\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0} = g \varepsilon t^3 [1 + C t_0/t] + \mathcal{O}(t/t_0). \quad (6)$$

Maintenant que nous avons identifié les échelles de temps de convergence vers le régime explosif de Richardson, intéressons nous plus avant aux statistiques de la séparation. Nous avons représenté sur la figure 1 (droite) la densité de probabilité  $p(r, t)$  de la distance  $r = |\mathbf{R}(t)|$  pour différentes valeurs de la séparation initiale et à l'instant  $t = 5 t_0$  clairement à l'intérieur du régime explosif. Ces mesures sont comparées à la loi diffusive de Richardson qui prédit

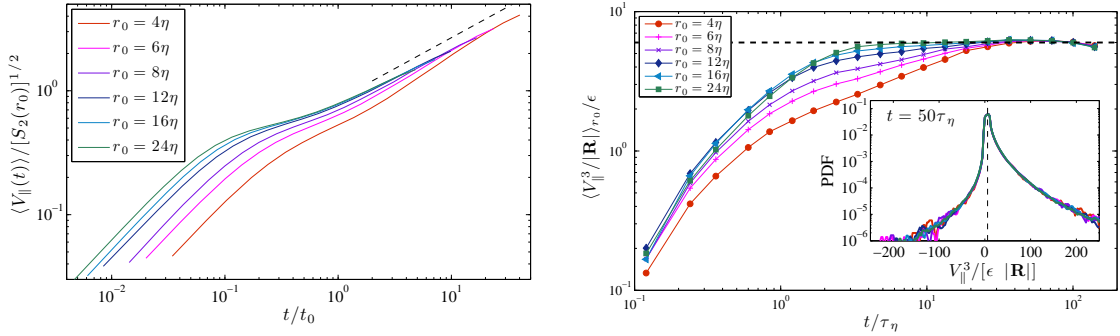
$$p(R, t) \propto \left[ r^2 / \langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle_{r_0}^{3/2} \right] \exp \left[ -A r^{2/3} / \langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle_{r_0}^{1/3} \right], \quad (7)$$

où  $A$  est une constante positive. Les données suggèrent que le cœur de la distribution (pour  $0.4 \leq r / \langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle_{r_0}^{1/2} \leq 4$ ) est assez bien décrit par l'approche de Richardson. Toutefois, des déviations sont clairement observées dans les queues lointaines de la distribution, aussi bien aux grandes qu'aux petites valeurs de la séparation. Comme cela est détaillé dans [10], nous observons un comportement  $\propto r^{\alpha(t)}$

aux petites séparations et  $\propto \exp(-Cr^{\beta(t)})$  aux grandes distances. Aux temps longs, on observe que les exposants ne s'approchent pas des valeurs  $\alpha = 2$  et  $\beta = 2/3$  prédites par l'approche de Richardson. Il semble que  $\alpha \rightarrow 1$  et  $\beta \rightarrow 1$ , et donc de plus grandes concentrations à petite échelle et des grandes séparations moins probables. Ceci suggère que les événements extrêmes sont bien moins dispersés.

### 3 Comportement diffusif des différences de vitesse

Nous nous intéressons maintenant à l'évolution de la composante longitudinale  $V_{\parallel}(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{V}(t)/|\mathbf{R}(t)|$  de la différence de vitesse entre les traceurs. Initialement la valeur moyenne de cette quantité est nulle ; ceci est dû à la stationnarité statistique de l'écoulement. Aux temps  $t \ll t_0$  dans le régime balistique de Batchelor, les paires maintiennent leur différence de vitesse initiale et on peut aisément voir que  $\langle V_{\parallel}(t) \rangle_{r_0} \simeq t \langle |\mathbf{V}_{\perp}(0)|^2 \rangle_{r_0} / r_0$ , où  $\mathbf{V}_{\perp}$  désigne les composantes de  $\mathbf{V}$  dans les directions transverses à  $\mathbf{R}$ . Il est donc clair que la vitesse moyenne à laquelle les traceurs se séparent devient immédiatement positive. La figure 2(gauche), qui représente l'évolution temporelle de  $\langle V_{\parallel}(t) \rangle_{r_0}$ , montre sans aucun doute cette croissance linéaire initiale.



**Figure 2.** Droite : Evolution temporelle de la différence de vitesse longitudinale moyenne  $\langle V_{\parallel}(t) \rangle_{r_0}$  pour différentes séparations initiales. La ligne en tirets à droite a une pente 1/2. Gauche : Evolution temporelle du taux local de transfert d'énergie moyen  $\langle V_{\parallel}^3 / |\mathbf{R}| \rangle$  pour différentes valeurs de la séparation initiale. Encart : densité de probabilité de  $V_{\parallel}^3 / |\mathbf{R}|$  à l'instant  $t = 50\tau_{\eta}$ .

Après cette croissance initiale, la séparation des trajectoires décélère pour atteindre lentement le comportement diffusif  $\langle V_{\parallel}(t) \rangle_{r_0} \propto t^{1/2}$  qui est le pendant du régime de Richardson pour les différences de vitesse. Comme cela est montré dans [10], les fluctuations de la vitesse restent quant à elles très fortes. La skewness et la flatness de la distribution de  $V_{\parallel}$  gardent jusqu'à des temps très longs une forte dépendance en la séparation initiale  $r_0$ . Cela peut s'expliquer de manière qualitative grâce à l'intermittence de l'écoulement. Les différences de vitesse violentes sont plus probables aux petites qu'aux grandes échelles. Cela implique que les paires avec une petite séparation initiale ont plus probablement de grandes différences de vitesse initiales. Elles vont donc se séparer plus rapidement et elles vont donc rapidement rencontrer d'encore plus grandes valeurs de la vitesse. Cet accroissement rapide et violent des fluctuations de leur différence de vitesses est ainsi dû à une sorte d'effet boule de neige.

Pour mieux comprendre le comportement aux temps long des différences de vitesse, intéressons nous aux statistiques des différences d'accélération entre les deux traceurs. Il est bien connu en turbulence que l'accélération, qui est une grandeur à petite échelle, est corrélée sur des temps de l'ordre du temps de retournement  $\tau_{\eta}$  à l'échelle dissipative de Kolmogorov [11]. Comme cela a été vu dans [12], les différences d'accélération  $\mathbf{A} = (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})(\mathbf{X}_1(t), t) - (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})(\mathbf{X}_2(t), t)$  entre deux traceurs se décorrèlent elles aussi sur des échelles de temps de l'ordre de  $\tau_{\eta}$ . Cela suggère que pour des séparations aux échelles inertielles, et pour des échelles de temps bien plus grandes que le temps de Kolmogorov, les différences

d'accélération entre traceurs peuvent être approximées par un processus aléatoire delta-corrélé en temps, de sorte que

$$\mathbf{A}(t) \simeq \sqrt{\tau_\eta^{\text{loc}}} \mathbf{A}(\mathbf{R}, \mathbf{V}) \eta(t), \quad (8)$$

où  $\eta(t)$  est de nouveau le bruit blanc standard tridimensionnel. La matrice  $\mathbf{A}$  est défini par

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \langle \mathbf{A}(t) \otimes \mathbf{A}(t) | \mathbf{R}, \mathbf{V} \rangle_{r_0}. \quad (9)$$

Nous avons ici utilisé le théorème de la limite centrale de sorte que le produit dans (8) doit être compris au sens de Stratonovich.

Des arguments dimensionnels indiquent que le « temps de Kolmogorov local »  $\tau_\eta^{\text{loc}}$  et l'amplitude  $A = |\mathbf{A}|$  de la différence d'accélération ne dépendent que de la viscosité et du taux local de transfert d'énergie  $\varepsilon_{\text{loc}}$ . Ils s'écrivent comme

$$\tau_\eta^{\text{loc}} \sim \nu^{1/2} \varepsilon_{\text{loc}}^{-1/2} \quad \text{et} \quad A \sim \nu^{-1/4} \varepsilon_{\text{loc}}^{3/4}. \quad (10)$$

Cela nous conduit à écrire le coefficient de diffusion apparaissant dans (8) comme  $[\tau_\eta^{\text{loc}}]^{1/2} A \sim \varepsilon_{\text{loc}}^{1/2}$ . Cette quantité est indépendante de  $\nu$  et doit donc avoir une limite finie lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini. Le taux de transfert local est une fonction de la différence de vitesse  $\mathbf{V}$  et de la séparation  $\mathbf{R}$ . Des arguments dimensionnels suggèrent que  $\varepsilon_{\text{loc}} \sim V_\parallel^3 / |\mathbf{R}|$ . Toutefois, lorsque  $V_\parallel = 0$ , on ne s'attend pas à ce que le taux local de transfert s'annule mais il doit plutôt venir d'une contribution des tourbillons de plus grande échelle, de sorte que  $\varepsilon_{\text{loc}} \simeq \varepsilon$ , le taux moyen. On doit donc avoir  $\varepsilon_{\text{loc}}(t) \sim \varepsilon + \alpha V_\parallel^3(t) / |\mathbf{R}(t)|$ , où  $\alpha$  est un paramètre ajustable. Ces estimations ont été testées avec succès pour les données de simulations numériques dans [12].

Ces considérations phénoménologiques sont purement unidimensionnelles. Elles nous permettent toutefois d'introduire un modèle stochastique pour l'évolution jointe de la séparation  $R(t)$  et de la différence de vitesse longitudinale  $V_\parallel(t)$  entre deux traceurs

$$dR = V_\parallel dt, \quad dV = -b |V_\parallel| V_\parallel / R dt + [1 + c |V_\parallel|^3 / R]^{1/2} dW_t, \quad (11)$$

où  $W(t)$  désigne le processus de Wiener. Le bruit multiplicatif est ici compris au sens d'Itô. Le terme de dérive est dû au changement de définition de l'intégrale stochastique. Toutefois, les constantes  $b$  et  $c$  ne sont pas directement reliées car leur rapport vient de considérations tensorielles et de la prescription d'incompressibilité de la dynamique lagrangienne. Le terme de dérive, qui est non-linéaire, introduit un « temps de corrélation » égal au temps de retournement  $R/|V_\parallel|$ .

Bien qu'il ait une forme relativement simple, le modèle défini par (11) ne peut pas être intégré de manière explicite, ni sous sa forme stochastique, ni sous sa forme d'équation de Fokker–Planck. Toutefois, nous pouvons effectuer quelques remarques. Tout d'abord, des simulations numériques de type Monte-Carlo nous ont permis d'observer que ce modèle a un comportement très proche de la dispersion de traceurs dans un écoulement turbulent. La distribution des distances montre notamment une queue algébrique aux petites valeurs et une queue exponentielle étirée aux grandes valeurs. Les exposants associés à ces queues évoluent en fonction du temps d'une manière similaire à celle observée dans les simulations numériques directes.

Aussi, il est facile de vérifier que l'équation de Fokker–Planck associée à (11) admet des solutions invariantes d'échelle de la forme  $p(r, v, t) = t^\alpha \Psi(r/t^{3/2}, v/t^{1/2})$ . Ce scaling correspond exactement à celui donné par le comportement explosif de Richardson (c'est-à-dire  $r \sim t^{3/2}$  et  $v \sim t^{1/2}$ ). Nous avons pu observer numériquement la convergence des solutions de ce système vers un tel régime. Le mécanisme de convergence peut s'interpréter de la manière suivante. Le taux local de transfert d'énergie  $V_\parallel^3 / R$  atteint sur des temps très courts un régime statistiquement stationnaire. Par conséquence, l'amplitude de l'accélération, et donc le membre de droite de l'équation d'évolution de  $V_\parallel$ , deviennent eux mêmes statistiquement stationnaires. Cela implique un comportement diffusif aux temps longs de la différence de vitesse entre les traceurs. La loi de Richardson  $R \propto t^{3/2}$  est une conséquence de la diffusion de la vitesse. Nous avons pu vérifier ce scénario avec les données des simulations numériques directes. Comme

cela est montré sur la figure 2(droite), le taux de transfert local le long des paires de trajectoires devient statistiquement stationnaire sur des temps de l'ordre du temps de retournement  $\tau_\eta$  à l'échelle de Kolmogorov.

## 4 Conclusion

L'un des principaux résultats de cette étude est de réinterpréter le régime explosif de Richardson comme une conséquence d'un comportement diffusif des différences de vitesses entre traceurs. Deux observations permettent d'appuyer ce raisonnement. D'une part, les différences d'accélération entre traceurs sont corrélées sur un temps court, de l'ordre du temps dissipatif de Kolmogorov, et ceci nous permet de les approcher par un bruit blanc. D'autre part, l'amplitude de ce bruit ne dépend que du taux local de transfert  $\langle [V^\parallel]^3/R \rangle_{r_0}$  qui se stabilise vers un comportement stationnaire sur de petites échelles de temps. Ce comportement, qui d'après nous n'a jamais été observé auparavant, donnent des contraintes fortes pour le développement et la validation de modèles stochastiques markoviens pour la dispersion relative en turbulence.

Une question centrale qui reste ouverte concerne les mécanismes physiques qui conduisent à la convergence rapide du taux local de transfert vers un régime statistiquement stationnaire. Une piste pour s'attaquer à ce problème pourrait être de pousser plus avant l'étude du modèle stochastique. Toutefois, cela nécessite de l'étendre au cas tridimensionnel pour notamment prendre en compte l'incompressibilité de l'écoulement via la structure tensoriel des corrélations de l'accélération. Ceci va au delà de l'étude présentée ici et sera étudié dans des travaux futurs.

Les simulations numériques ont été effectuées sur la machine IBM BlueGene/P JUGENE du centre de calcul de Jülich (Allemagne) grâce au projet XXL HBO28. La recherche conduisant à ces résultats a reçu un financement du Conseil Européen de la Recherche dans le cadre du 7<sup>e</sup> programme cadre de la communauté européenne (FP7/2007-2013, accord de bourse n° 240579).

## Références

1. L. F. RICHARDSON, Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph, *Proc. Roy. Soc. London A*, **110**, 709 (1926).
2. A. M. OBUKHOV, On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow, *Izv. Akad. Nauk SSSR*, **5**, 453 (1941).
3. G. K. BATCHELOR, Diffusion in a field of homogeneous turbulence. II. The relative motion of particle, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **48**, 345 (1952).
4. R. H. KRAICHNAN. Dispersion of particle pairs in homogeneous turbulence. *Phys. Fluids*, **9**, 1937 (1966).
5. G. FALKOVICH, K. GAWĘDZKI & M. VERGASSOLA, Particles and fields in fluid turbulence, *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 913, (2001).
6. M. CHAVES, K. GAWĘDZKI, P. HORVAI, A. KUPIAINEN & M. VERGASSOLA, Lagrangian dispersion in Gaussian self-similar ensembles, *J. Stat. Phys.*, **113**, 643 (2003).
7. L. BIFERALE, G. BOFFETTA, A. CELANI, B. DEVENISH, A. LANOTTE & F. TOSCHI, Lagrangian statistics of particle pairs in homogeneous isotropic turbulence, *Phys. Fluids*, **17**, 115101 (2005).
8. N. OUELLETTE, H. XU, M. BOURGOIN & E. BODENSCHATZ, An experimental study of turbulent relative dispersion models, *New J. Phys.*, **8**, 109 (2006).
9. G. L. EYINK, Stochastic flux freezing and magnetic dynamo, *Phys. Rev. E*, **83**, 056405 (2011).
10. R. BITANE, H. HOMANN & J. BEC, Geometry and violent events in turbulent pair dispersion, *Journal of Turbulence*, sous presse (2013).
11. N. MORDANT, A. M. CRAWFORD & E. BODENSCHATZ, Three-dimensional structure of the Lagrangian acceleration in turbulent flows, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 214501 (2004).
12. R. BITANE, H. HOMANN & J. BEC, Time scales of turbulent relative dispersion, *Phys. Rev. E*, **86**, 045302 (2012).



# Morphologies universelles d'interfaces fluides déformées par la pression de radiation acoustique ou électromagnétique

Hamza Chraïbi<sup>1</sup>, Nicolas Bertin<sup>1</sup>, Régis Wunenburger<sup>1,2</sup>, Jean-Pierre Delville<sup>1</sup> & Étienne Brasselet<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univ. Bordeaux, LOMA, UMR 5798, F-33400 Talence, France.

<sup>2</sup> UPMC, Institut Jean Le Rond d'Alembert, Paris, France.

[h.chraibi@loma.u-bordeaux1.fr](mailto:h.chraibi@loma.u-bordeaux1.fr)

**Résumé.** Nous présentons la génération de morphologies universelles d'interfaces fluides par la pression de radiation, que la nature de l'onde soit acoustique ou électromagnétique. Des observations expérimentales montrent des déformations axisymétriques d'interfaces allant de formes en doigts ou tétines, à des formes pyramidales. Nous montrons que ces formes sont le résultat du couplage entre la propagation de l'onde et la déformation des interfaces fluides. Ce résultat est justifié par des simulations numériques de propagation d'ondes dans les profils expérimentaux (équation d'Helmholtz axisymétrique et diphasique) et nous fournissons une interprétation quantitative basée sur les propriétés de guidage des ondes.

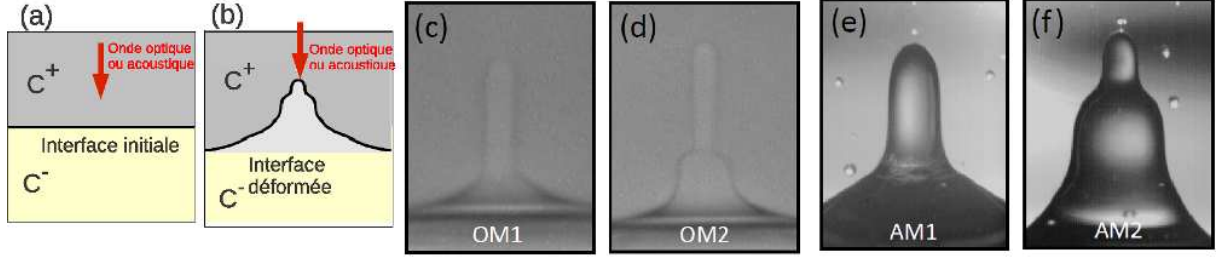
**Abstract.** We report on the generation of universal morphologies of fluid interfaces by radiation pressure whatever is the nature of the wave, acoustic or optical. Experimental observations reveal interface deformations with step-like features that result from the interplay between the wave propagation and the shape of the interface. The results are supported by numerical simulations and a quantitative interpretation based on the waveguiding properties of the field is provided.

## 1 Introduction

Plus d'un siècle après les travaux pionniers de Poynting [1] et de Rayleigh [2] sur les effets mécaniques des ondes électromagnétiques et acoustiques, il est connu que la lumière et le son exercent une pression de radiation sur la matière. Expérimentalement, son existence a été démontrée sur les déformations d'interfaces en acoustique par Hertz et Mende 1939 [3] et en optique par Ashkin et Dziedzic en 1973 [4]. Depuis ces observations, la pression de radiation a été exploitée dans différents contextes tels que la métrologie sans contact [5, 6], l'éjection de gouttelettes de liquide [7, 8], ou dans des applications biomédicales [9, 10].

Dans cet article, nous montrons de nouvelles morphologies induites par la pression de radiation dans des systèmes interfaciaux. Nous exposons ainsi leur caractère universel et indépendant de la nature de l'onde (optique ou acoustique). Nous montrons que ces morphologies sont le résultat d'un équilibre entre forces de gravité, capillaires et de pression de radiation. Grâce à des simulations numériques sur des profils d'interface expérimentaux, nous montrons que la réfraction est à l'origine du couplage entre la propagation de l'onde et la déformation de l'interface. Finalement, nous proposons une interprétation basée sur le guidage des ondes par les déformations induites.

Les expériences ont été réalisées dans des couples de liquides usuels (eau, huile, etc..) en acoustique alors que des systèmes de microémulsions proches d'un point critique ont été utilisés en optique afin d'obtenir de faibles tension interfaciales. Les déformations sont obtenues par des faisceaux optiques ou acoustiques focalisés qui arrivent en incidence normale sur l'interface, depuis le milieu de plus grande vitesse de phase ( $c^+$ ), en direction du milieu de plus faible vitesse de phase ( $c^-$ ) (Figure 1(a,b)). Expérimentalement, le faisceau acoustique est obtenu à partir d'un transducteur piézoélectrique ultrasonore (de fréquence 2.25 MHz) immergé, alors que dans le cas optique nous avons utilisé un faisceau laser Gaussien à une longueur d'onde de 514.4 nm. Plus de détails sur les faisceaux et les fluides utilisés sont disponibles dans l'article exposant pour la première fois nos résultats [12]. Des exemples de déformations obtenues sont montrés dans la figure 1(c-f).



**Figure 1.** (a) Interface fluide au repos. (b) Interface déformée par la pression de radiation. (c,d) Morphologies optiques (dans des phases de microémulsion) en forme de doigt (OM1) et de tétine (OM2). (e,f) Morphologies acoustiques en forme de doigt (AM1) (couple eau(+)/kérozène(-)) et de tétine (AM2) (couple eau(+)/huile de silicone 100cSt(-)).

## 2 Modèle

L'objectif de ce travail est de confirmer l'équilibre entre forces gravito-capillaires ( $\Pi_{GC}$ ) d'une part et pression de radiation ( $\Pi_R$ ) d'autre part. Nous voulons ainsi montrer la validité de l'équation :

$$\Pi_{GC} = \Pi_R. \quad (1)$$

avec

$$\Pi_{GC} = |\rho_+ - \rho_-|gh - \frac{\gamma}{r} \frac{d}{dr} [rh'(r)/\sqrt{1+h'^2(r)}] \quad (2)$$

$\rho_+$  et  $\rho_-$  étant les masses volumiques des liquides,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $r$  la coordonnée radiale,  $h(r)$  est l'équation de l'interface et  $\gamma$  la tension interfaciale. D'autre part,

$$\Pi_R = \mathbf{n} \cdot [(\langle \mathbf{T}_+ \rangle) - \langle \mathbf{T}_- \rangle] \cdot \mathbf{n} \quad (3)$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale orientée de (-) vers (+).  $\mathbf{T}$  est soit le tenseur acoustique (donné par Brillouin)

$$\mathbf{T}_{ac} = -\frac{1}{2}\chi p^2 \mathbf{I} + \frac{1}{2}\rho \mathbf{u}^2 \mathbf{I} - \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad (4)$$

$\chi$  étant la compressibilité isentropique,  $p$  la pression et  $\mathbf{u}$  la vitesse, soit le tenseur électromagnétique (donné par Maxwell) :

$$\mathbf{T}_{em} = -\frac{1}{2}\epsilon \mathbf{E}^2 \mathbf{I} - \frac{1}{2}\mu \mathbf{H}^2 \mathbf{I} + \epsilon \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \mu \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} \quad (5)$$

$\epsilon$  et  $\mathbf{E}$  étant respectivement la permittivité et le champ électrique et  $\mu$  et  $\mathbf{H}$  respectivement la perméabilité et le champ magnétique. D'une part,  $\Pi_{GC}$  est calculée à partir des profils expérimentaux  $h(r)$  alors que le calcul de  $\Pi_R$  nécessite un calcul des champs. Celui-ci est réalisé à partir de la résolution de l'équation de propagation pour un profil expérimental donné en prenant en compte les relations de continuité du champ à l'interface et en modélisant de manière appropriée la source du champ.

En acoustique, l'équation de propagation dans des fluides parfaits est

$$\Delta \Psi_{\pm} - \frac{1}{c_{\pm}^2} \frac{\partial^2 \Psi_{\pm}}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

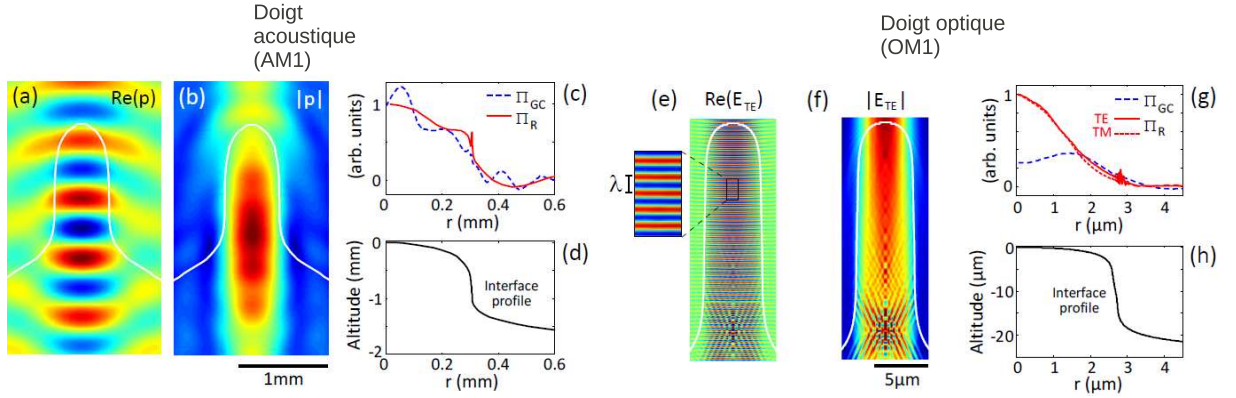
où  $\Psi_{\pm}$  est la pression acoustique complexe et axisymétrique dans chaque fluide. En admettant des champs harmoniques de fréquence  $\omega$ , la vitesse acoustique est obtenue à partir de l'équation d'Euler avec

$$\mathbf{u}_{\pm}(r, z, t) = \frac{1}{i\omega\rho_{\pm}} \nabla p_{\pm} \quad (7)$$

$z$  étant la coordonnée axiale.

La propagation des ondes (équation d'Helmholtz) est résolue numériquement par la méthode des éléments de frontière [11]. Lorsque les champs de pression et de vitesse sont calculés,  $\Pi_R$  est calculée à son tour, et la comparaison avec  $\Pi_{GC}$  peut être effectuée. Dans le cas optique, étant donné que le contraste d'indices de réfractifs est faible ( $\frac{c_+ - c_-}{c} \ll 10^{-2}$ ), nous supposons une équation de propagation scalaire, celle-ci décrivant parfaitement la propagation quelque soit la polarisation de l'onde. Afin de bénéficier de l'équivalence mathématique entre acoustique et électromagnétisme, nous nous limiterons au cas de la polarisation  $TE$  avec  $\Psi = E_{TE}$  où  $\mathbf{E}_{TE} = E_{TE} \mathbf{e}_\phi$  et  $\mathbf{e}_\phi$  est le vecteur orthoradial. Avec cette formulation, nous pouvons utiliser le code développé pour l'acoustique en remplaçant respectivement  $p$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\rho$  et  $\chi$  par  $E_{TE}$ ,  $\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{H}$ ,  $\mu$  et  $\epsilon$ . L'équivalence avec la polarisation  $TM$  est discutée dans les résultats.

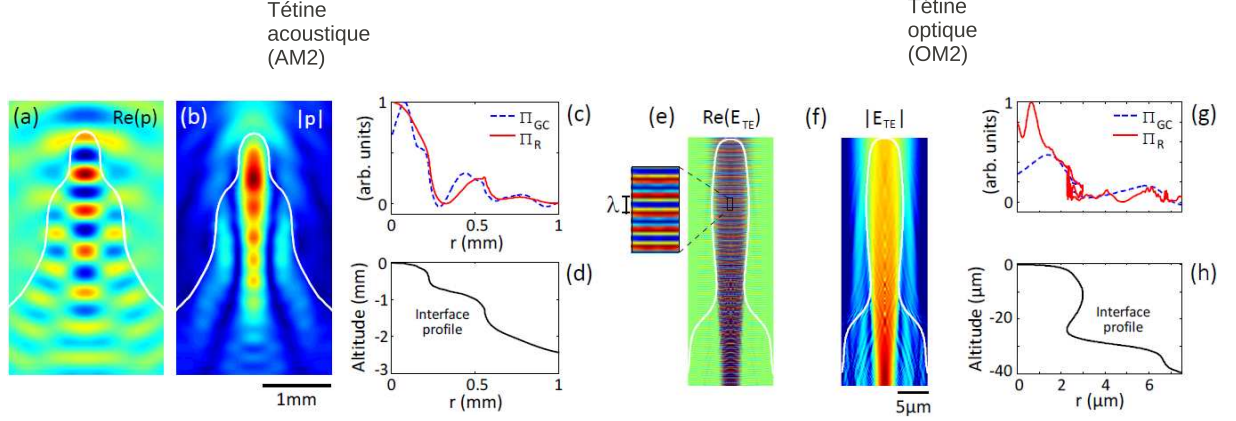
### 3 Résultats et discussion



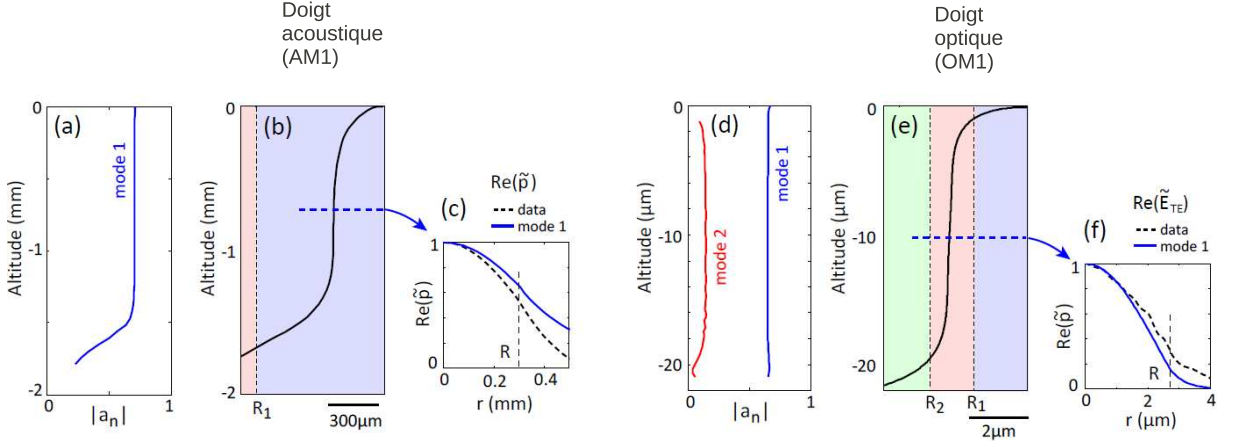
**Figure 2.** Analyse en champs des formes AM1 et OM1. [(a,b) et (e,f)] Dans chaque cas, la distribution spatiale de la partie réelle  $Re(p)$  ou  $Re(E_{TE})$  et du module du champ  $|p|$  ou  $|E_{TE}|$  dans un plan transverse est montrée avec le profil d'interface superposé en ligne blanche. (c,g) Comparaison entre la dépendance radiale de la pression de radiation ( $\Pi_R$ ) et la contribution gravito-capillaire ( $\Pi_{GC}$ ). (d,h) Profils d'interfaces déformées. L'extremum de l'interface a été arbitrairement placé à une altitude zéro.

Les figures 2 et 3 montrent les résultats des simulations numériques des champs dans le cas acoustique (Fig. 2(a-d) et Fig. 3(a-d)) et le cas optique (Fig. 2(e-h) et Fig. 3(e-h)) pour des morphologies de doigts (Fig. 2) et de tétines (Fig. 3). Sur ces figures, nous pouvons noter la focalisation de l'onde caractérisée par une grande intensité des champs (de pression  $|p|$  ou électriques  $|E_{TE}|$ ) à l'intérieur des morphologies (Fig. 2(b,f) et Fig. 3(b,f)). Nous pouvons également noter un bon accord entre  $\Pi_R$  et  $\Pi_{GC}$  sur les parties guidantes (verticales) de l'interface (Fig. 2(c,g) et Fig. 3(c,g)). Ceci valide l'équation d'équilibre de l'interface et confirme l'hypothèse que les formes en doigt et en tétines sont dues à une stabilisation de l'interface, sous cette forme, par la pression de radiation. Sur la figure 2(g) nous pouvons voir un résultat très semblable entre les polarisations  $TE$  et  $TM$  confirmant ainsi leur équivalence dans notre cadre d'étude.

Les figures 4 et 5 montrent une analyse modale des champs dans les cas optiques et acoustiques pour les différentes morphologies. Ainsi, dans le cas des doigts (Fig. 4(a,d)), un seul mode domine la propagation en étant caractérisé par une plus grande amplitude, alors que dans le cas des tétines (Fig. 5(a,e)) chaque portion cylindrique des morphologies est dominée par un mode avec une coexistence possible entre les différents modes. La plus petite portion cylindrique est ainsi dominée par le mode 1, alors que la portion cylindrique suivante de plus grand rayon est dominée par le mode 2 sans extinction du mode 1. Ainsi, ces morphologies acoustiques ou optiques peuvent exister grâce à une répartition



**Figure 3.** Analyse en champs des formes AM2 et OM2. Voir la légende de la figure 2 pour les détails.

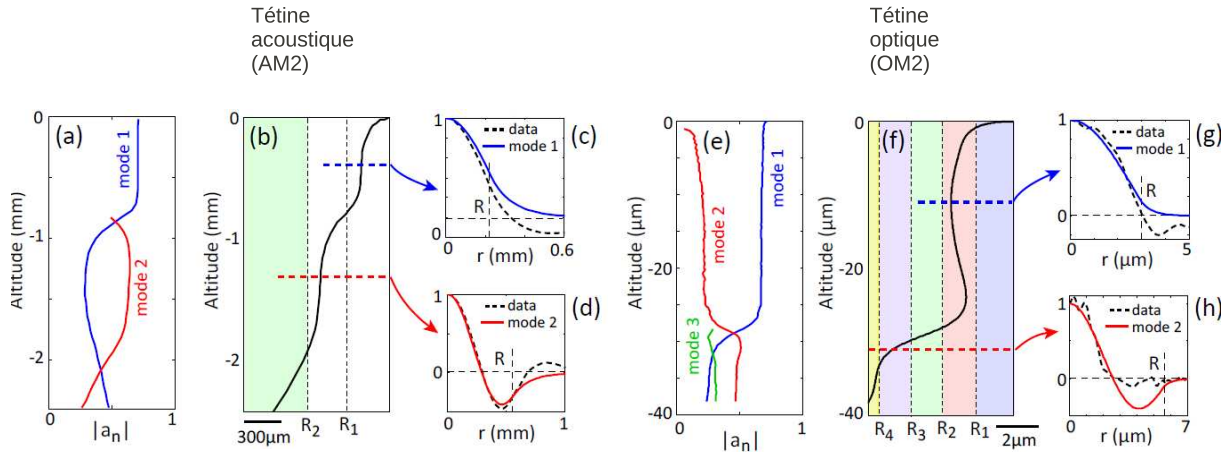


**Figure 4.** Analyse modale des formes AM1 et OM1. (a,d) Dépendance en  $z$  du module de l'amplitude normalisée  $|a_n|$  du mode guidé  $n$ .  $a_n = \langle \psi \psi_n \rangle / \sqrt{\langle \psi \psi \rangle \langle \psi_n \psi_n \rangle}$ ,  $\psi$  représentant le champ et  $\langle \varphi_a \varphi_b \rangle = \frac{\pi}{i\omega\rho} \int_0^\infty (\varphi_a \frac{\partial \varphi_b^*}{\partial z} + \varphi_b^* \frac{\partial \varphi_a}{\partial z}) r dr$  où \* fait référence à la conjugaison complexe. (b,e) Profil d'interface déformée. (c,f) Comparaison entre les champs calculés numériquement (ligne) et analytiquement (traits) à des altitudes données. Le champ analytique est calculé à partir d'un cylindre de rayon correspondant à celui de l'interface sur l'altitude choisie.

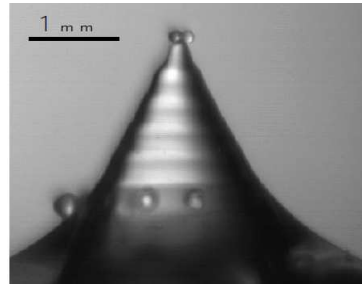
spatiales des modes de guidage, chaque mode fixant un rayon donné à l'interface. Une comparaison des champs pour un rayon donné de la déformation entre résultats numériques et analytiques (basés sur les modèles des références [13, 14]) est montrée sur la figure 4(c,f) pour les doigts et sur la figure 5(c,d,g,h) pour les tétines. Le bon accord entre résultats numériques et analytiques confirme que chaque mode de propagation domine un rayon donné et que chaque portion cylindrique de l'interface agit comme un guide d'onde.

## 4 Conclusion

Pour conclure, nous avons démontré l'existence de morphologies universelles dues à la déformation d'interfaces fluides par la pression de radiation d'ondes acoustiques ou électromagnétiques. Ces interfaces peuvent adopter des formes de doigts, de tétines ou de pyramides (figure 6). Ce phénomène est due au guidage de la lumière et du son par des déformations axisymétriques qu'ils ont eux même induits dans



**Figure 5.** Analyse modale des formes AM2 et OM2. Voir la légende de la figure 4 pour les détails.



**Figure 6.** Déformation d'interface induite par une onde acoustique. L'interface adopte une forme en pyramide. Extrait de Bertin 2011 [15].

des systèmes de liquides diphasiques présentant un saut de vitesse de phase.

## Références

1. R. LOUDON & C. BAXTER, *Proc. R. Soc. A*, **468**, 1825 (2012).
2. R. T. BEYER, *J. Acoust. Soc. Am.*, **63**, 1025 (1978).
3. G. HERTZ & H. MENDE, *Z. Phys.*, **114**, 354 (1939).
4. A. ASHKIN & J. M. DZIEDZIC, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 139 (1973).
5. G. V. OSTROVSKAYA, *Sov. Phys. Tech. Phys.*, **33**, 468 (1988).
6. B. T. KHURI-YAKUB *et al.*, *Appl. Phys. Lett.*, **52**, 1571 (1988).
7. J. Z. ZHANG & R. K. CHANG, *Opt. Lett.*, **13**, 916 (1988).
8. S. A. ELROD *et al.*, *J. Appl. Phys.*, **65**, 3441 (1989).
9. J. GUCK *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 5451 (2000).
10. M. FATEMI & J. F. GREENLEAF, *Science*, **280** 82 (1998).
11. S. KIRKUP, *The Boundary Element Methods in Acoustics*, (Integrated Sound Software, 1998).
12. N. BERTIN, H. CHRAIBI, R. WUNENBURGER, J.-P. DELVILLE & É. BRASSELET, *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 244304 (2012).
13. É. BRASSELET, R. WUNENBURGER & J.-P. DELVILLE, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 014501 (2008).

14. N. BERTIN, R. WUNENBURGER, É. BRASSELET & J.-P. DELVILLE, *Phys. Rev. Lett.*, **105**, 164501 (2010).
15. N. BERTIN, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux, 2011, N° d'ordre 4266.



# Instabilité d'une onde plane d'inertie par résonance triadique

Pierre-Philippe Cortet<sup>1</sup>, Guilhem Bordes<sup>2</sup>, Frédéric Moisy<sup>1</sup> & Thierry Dauxois<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire FAST, CNRS, Univ Paris Sud, UPMC Univ Paris 06, France

<sup>2</sup> Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon, CNRS et Université de Lyon, France  
ppcortet@fast.u-psud.fr

**Résumé.** Nous présentons dans ce travail la première observation expérimentale de la déstabilisation d'une onde plane d'inertie par une instabilité paramétrique. La motivation fondamentale de ce travail est le rôle clé joué par ce type d'instabilités par résonance triadique dans les transferts d'énergie entre échelles en turbulence en rotation. Nous excitons une onde plane d'inertie grâce à un générateur, composé d'un empilement de plaques oscillant autour d'un arbre à cames, installé dans un aquarium en rotation. Grâce à des mesures par vélocimétrie par image de particules, nous observons que l'onde plane générée subit une instabilité sous-harmonique qui excite deux ondes planes secondaires. Les fréquences et les vecteurs d'ondes de ces ondes secondaires sont en accord quantitatif avec les prédictions théoriques pour une résonance triadique. Les vecteurs d'ondes secondaires sont en particulier systématiquement plus normaux à l'axe de rotation que le vecteur d'onde primaire : cette caractéristique illustre le mécanisme de base à l'origine des transferts d'énergie vers les modes lents quasi-2D de la turbulence en rotation.

**Abstract.** Plane inertial waves are generated using a wavemaker, made of oscillating stacked plates, in a rotating water tank. Using particle image velocimetry, we observe that, after a transient, the primary plane wave is subject to a subharmonic instability and excites two secondary plane waves. The measured frequencies and wavevectors of these secondary waves are in quantitative agreement with the predictions of the triadic resonance mechanism. The secondary wavevectors are found systematically more normal to the rotation axis than the primary wavevector: this feature illustrates the basic mechanism at the origin of the energy transfers towards slow, quasi two-dimensional, motions in rotating turbulence.

## 1 Introduction

Les fluides en rotation sont le support d'une classe d'ondes singulières, les ondes d'inertie, qui jouent un rôle fondamental dans la dynamique des écoulements géo- et astro-physiques [1, 2]. Ces ondes sont remarquables de par leur vitesse de groupe normale à leur vitesse de phase ainsi que par leur fréquence qui sélectionne leur direction de propagation mais pas leur longueur d'onde [2, 3].

Nous présentons dans ce travail la première observation expérimentale de la déstabilisation d'une onde plane d'inertie par une instabilité paramétrique [4]. La motivation fondamentale de ce travail est le rôle clé joué par ce type d'instabilités par résonance triadique dans les transferts d'énergie entre échelles en turbulence en rotation [5–7]. L'instabilité observée illustre en effet le mécanisme de base des transferts anisotropes vers des modes de vecteurs d'ondes toujours plus horizontaux (l'axe de rotation est vertical) qui construisent la bidimensionnalité de la turbulence en rotation.

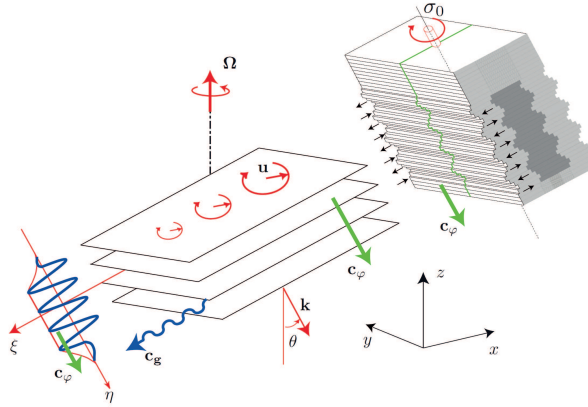
L'instabilité que nous rapportons est analogue à celle que subit un pendule pesant forcé à deux fois sa fréquence propre. Dans le cas des ondes d'inertie, le paramètre est le taux de rotation  $\Omega$  du fluide qui est modulé localement par la présence d'une onde de fréquence  $\sigma_0$ . L'instabilité de l'onde primaire induit alors à travers une résonance non-linéaire un transfert d'énergie vers deux ondes secondaires de fréquences  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  plus faibles. Comme un continuum de fréquences peut être excité,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ne sont ici pas nécessairement égales à la moitié  $\sigma_0/2$  de la fréquence d'excitation, mais vérifient la relation de résonance  $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_0$ . En l'absence de dissipation, on retrouve la résonance paramétrique standard avec  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0/2$ . C'est la viscosité qui lève cette dégénérescence des fréquences  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  qui se répartissent alors de part et d'autre de  $\sigma_0/2$ .

Dans notre expérience, l'onde primaire est excitée par un générateur, composé d'un empilement de plaques oscillant autour d'un arbre à cames, qui reproduit les conditions aux limites d'une onde plane [8,9]. Ce générateur est placé dans un aquarium rempli d'eau sur notre plateforme tournante. Grâce à une mesure des champs de vitesse par vélocimétrie par image de particules dans le référentiel tournant, nous montrons qu'après un régime transitoire, l'onde plane subit une instabilité qui conduit à l'excitation de deux ondes planes sous-harmoniques dont les vecteurs d'ondes sont systématiquement plus horizontaux que celui de l'onde primaire. Les transferts d'énergie à l'intérieur de cette triade d'ondes sont alors décrits quantitativement grâce à la décomposition de l'équation de Navier-Stokes en modes hélicoïdaux introduite par Waleffe en 1992 [10].

Nous montrons que la direction —vers les grandes ou les petites échelles— des transferts d'énergie dépend de l'amplitude de l'onde primaire et de la viscosité. En turbulence en rotation, le bilan de cette compétition entre transferts directs et inverses est au coeur du problème complexe de la direction des cascades d'énergie.

## 2 Génération d'une onde plane d'inertie

Nous rappelons d'abord les propriétés principales des ondes d'inertie dans un fluide en rotation à une vitesse angulaire constante  $\Omega$ . Dans le référentiel tournant, c'est l'action de rappel de la force de Coriolis qui est responsable de la propagation de ces ondes pour des pulsations  $\sigma \leq f$ , où  $f = 2\Omega$  est le paramètre dit de Coriolis. Les particules fluides excitées à la pulsation  $\sigma$  décrivent alors des cercles anticycloniques dans un plan incliné d'un angle  $\theta = \cos^{-1}(\sigma/f)$  avec l'horizontale. La phase de ce mouvement circulaire se propage perpendiculairement à ce plan incliné.



**Figure 1.** Représentation schématique du générateur d'ondes. L'onde plane excitée a une fréquence  $\sigma_0$ , une vitesse de phase vers le bas, une hélicité négative ( $s_0 = -1$ ), et se propage selon l'angle  $\theta = \cos^{-1}(\sigma_0/f)$ , où  $f = 2\Omega$ .

Les équations du mouvement pour un fluide en rotation à  $\Omega = f/2$  autour de l'axe  $z$  sont

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

où  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  est le champ de vitesse en coordonnées cartésiennes  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Dans la suite, nous nous restreignons au cas d'un écoulement invariant selon la direction  $y$ . Le fluide étant incompressible, le mouvement peut alors être décrit par une fonction de courant  $\psi(x, z)$ , telle que  $\mathbf{u} = (\partial_z \psi, u_y, -\partial_x \psi)$ . En considérant une solution de type onde plane de fréquence  $\sigma$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (k, 0, m)$ ,

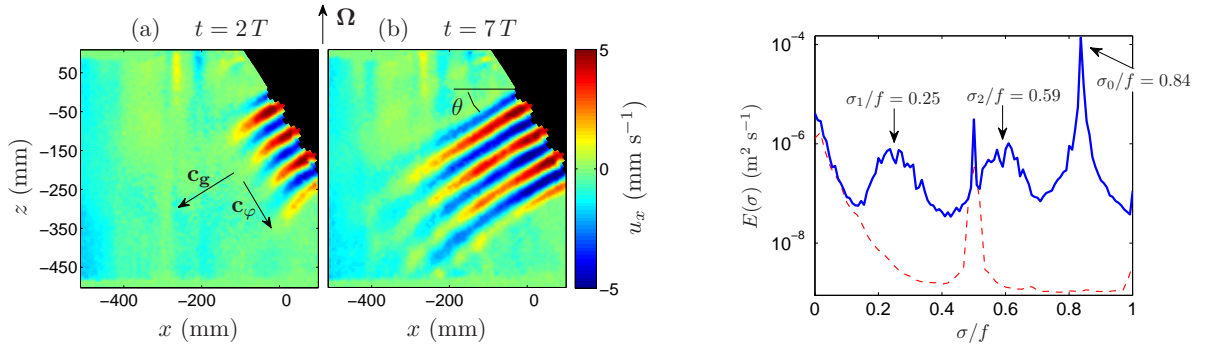
$$\psi(x, z, t) = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t)} + \text{c.c.}, \quad (2)$$

(où c.c. signifie complexe conjugué), nous obtenons la relation de dispersion anisotrope des ondes d'inertie

$$\sigma = sf \frac{m}{\kappa} = sf \cos \theta, \quad (3)$$

avec  $\kappa = (k^2 + m^2)^{1/2}$ ,  $s = \pm 1$ , et  $\theta$  l'angle entre  $\mathbf{k}$  et l'axe de rotation (Fig. 1). La phase d'une telle onde se propage avec une vitesse  $\mathbf{c}_\varphi = \sigma \mathbf{k} / \kappa^2$  normale à sa vitesse de groupe  $\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \sigma$ . La vorticité de l'onde  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  est alignée en chaque point avec la vitesse,  $\boldsymbol{\omega} = -s\kappa \mathbf{u}$ , ce qui justifie le nom d'ondes h licoidales parfois donnée aux ondes d'inertie. Le signe  $s$  dans l'équation (3) identifie le signe de l'hélicité de l'onde  $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$ .

Pour exciter une telle onde plane d'inertie, nous utilisons un générateur [9] consistant en une série de plaques oscillantes empilées autour d'un arbre à cames h licoidal. Lorsque l'arbre à cames tourne à la fréquence  $\sigma_0$ , les plaques se mettent à osciller avec un déphasage régulier permettant de reproduire la condition aux limites d'une onde plane d'inertie. Le générateur d'onde est placé dans un aquarium de 120 cm de longueur sur 80 cm de largeur, rempli d'eau jusqu'à 58 cm. L'aquarium est lui même placé sur la plateforme tournante « Gyroflow » de 2 m de diamètre dont la vitesse de rotation  $\Omega$  est fixée dans un intervalle allant de 1.05 à 3.15 rad s<sup>-1</sup>. L'angle de propagation de l'onde d'inertie est modifié en changeant le taux de rotation de la plateforme en gardant constant la fréquence du générateur  $\sigma_0 = 1.05$  rad s<sup>-1</sup>. Le paramètre de Coriolis a ainsi été varié de  $f = 1.004 \sigma_0$  à  $3 \sigma_0$ , correspondant à des angles  $\theta$  allant de 5    70 .



**Figure 2.** Gauche : Champ de vitesse horizontale, 2 et 7 périodes après le démarrage du générateur, pour  $\sigma_0/f = 0.84$ . Droite : Spectre temporel d'énergie pour deux expériences réalisées à  $\Omega = 0.63$  rad s<sup>-1</sup> avec (ligne continue) et sans (ligne tiretée) génération d'onde à  $\sigma_0/f = 0.84$ .

Les champs de vitesse sont mesurés (Fig. 2 gauche) dans un plan vertical grâce à un système de vélocimétrie par image de particules (PIV) embarqué dans le référentiel tournant [4]. La figure 2 (gauche) montre des champs de vitesse typiques, 2 et 7 périodes  $T = 2\pi/\sigma_0$  après le démarrage du générateur, pour une expérience réalisée à  $\sigma_0/f = 0.84$ . On y reconnaît une onde plane d'inertie respectant toutes les caractéristiques attendues.

### 3 Instabilité sous-harmonique

Après quelques périodes d'excitation, le front de l'onde d'inertie est sorti de la région de mesure et l'onde peut être considérée comme stationnaire. Cependant, après typiquement 15 périodes de l'onde, celle-ci devient instable et présente des modulations lentes à des échelles légèrement plus petites que la longueur d'onde excitée. Pour mieux comprendre ce phénomène, nous avons calculé le spectre temporel d'énergie du champ de vitesse  $E(\sigma) = \langle |\hat{\mathbf{u}}_\sigma|^2 \rangle_{x,z}$ , où  $\langle \cdot \rangle_{x,z}$  est la moyenne spatiale sur le champ de mesure et  $\hat{\mathbf{u}}_\sigma$  la transformée de Fourier temporelle du champ de vitesse. Lorsque  $E(\sigma)$  est calculé sur une fenêtre de temps  $(t_0, t_0 + \Delta t)$  de quelques périodes d'excitation, nous observons l'émergence avec le temps  $t_0$  de

deux larges bosses à des fréquences plus petites que la fréquence d'excitation  $\sigma_0$ , suggérant la présence d'une instabilité sous-harmonique de l'onde primaire (Fig. 2 droite). La somme des fréquences des pics secondaires correspond à la fréquence de l'onde primaire  $\sigma_1 + \sigma_2 \simeq \sigma_0$ . Cette instabilité sous-harmonique de l'onde primaire est en pratique observée pour toutes les fréquences  $\sigma_0$  allant de  $0.65f$  à  $f$ .

Grâce à un filtrage de Hilbert [8], nous sommes capables d'extraire la structure spatiale de l'amplitude  $\mathbf{u}_o(\mathbf{x})$  et de la phase  $\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t$  de chaque onde secondaire. Nous sommes ainsi capables de montrer que les ondes secondaires sont aussi des ondes planes caractérisées par des vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ . Cette structure d'onde plane suggère d'analyser cette instabilité en terme d'une résonance triadique entre l'onde primaire et les deux ondes secondaires. Une telle résonance peut être comprise grâce à la décomposition hélicoïdale de l'équation de Navier-Stokes introduite par Waleffe [10, 11]. Cette décomposition est particulièrement adaptée à l'étude des écoulements en rotation car une onde plane d'inertie a exactement la structure d'un mode hélicoïdal

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = A_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{h}_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma_{\mathbf{k}} t)}, \quad (4)$$

où  $A_{\mathbf{k}}(t)$  est une amplitude complexe,  $\sigma_{\mathbf{k}}$  la fréquence,  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde et  $s_{\mathbf{k}}$  le signe de l'hélicité avec

$$\mathbf{h}_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z}{|\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z|} + i s_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z}{|\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z|}. \quad (5)$$

Les équations d'interaction entre trois modes, i.e. trois ondes d'inertie, s'écrivent alors

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu \kappa^2 \right) A_{\mathbf{k}} = C_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{p}}^* A_{\mathbf{q}}^* e^{i(\sigma_{\mathbf{k}} + \sigma_{\mathbf{p}} + \sigma_{\mathbf{q}}) t}, \quad (6)$$

où les étoiles désignent les complexes conjugués. Les trois modes doivent vérifier la condition de résonance spatiale  $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Les coefficients d'interaction sont donnés par

$$C_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} [s_{\mathbf{q}} \kappa_{\mathbf{q}} - s_{\mathbf{p}} \kappa_{\mathbf{p}}] \left( \mathbf{h}_{s_{\mathbf{p}}}^*(\mathbf{p}) \times \mathbf{h}_{s_{\mathbf{q}}}^*(\mathbf{q}) \right) \cdot \mathbf{h}_{s_{\mathbf{k}}}^*(\mathbf{k}). \quad (7)$$

Une permutation circulaire de  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  dans l'équation (6) donne les deux autres équations d'interaction.

Comme dans l'équation (6) et ses deux permutations les coefficients  $A_{\mathbf{r}}(t)$  sont à comprendre comme des amplitudes évoluant lentement par rapport à la période des ondes  $2\pi/\sigma_{\mathbf{r}}$ , une résonance temporelle est nécessaire pour que le coefficient  $A_{\mathbf{r}}$  du terme de gauche soit non nul. En réindexant par 0, 1, 2 les trois ondes  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$ , la condition de résonance complète s'écrit donc

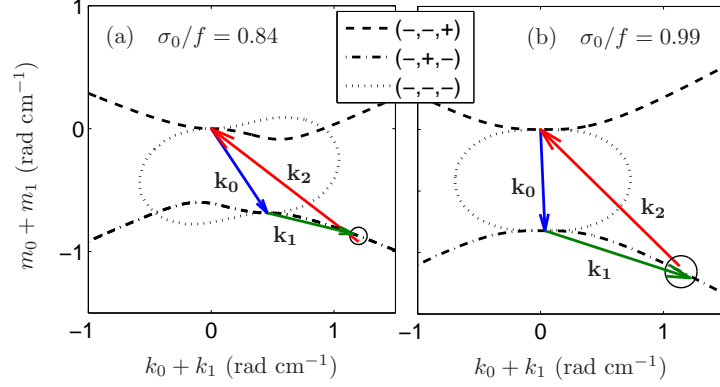
$$\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = 0. \quad (8)$$

Dans la suite, nous considérons que seule l'onde primaire, indexée 0, est présente initialement dans le système ( $A_{1,2}(0) = 0$ ). En introduisant la relation de dispersion des ondes d'inertie dans le problème, la condition de résonance devient

$$s_0 \frac{m_0}{\sqrt{k_0^2 + m_0^2}} + s_1 \frac{m_1}{\sqrt{k_1^2 + m_1^2}} - s_2 \frac{m_0 + m_1}{\sqrt{(k_0 + k_1)^2 + (m_0 + m_1)^2}} = 0. \quad (9)$$

Pour une onde primaire donnée,  $(s_0, k_0, m_0)$ , la solution de ce système pour chaque combinaison de signe  $(s_1, s_2)$  est une courbe dans le plan  $(k_1, m_1)$  (Fig. 3).

Dans la figure 3, les prédictions de la théorie de la résonance triadique sont comparées avec les vecteurs d'ondes secondaires  $\mathbf{k}_1 = (k_1, m_1)$  et  $\mathbf{k}_2 = (k_2, m_2)$  mesurés expérimentalement. Les vecteurs d'ondes mesurés forment un triangle fermé tel que  $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0}$ , vérifiant ainsi la condition de résonance spatiale, et la position du vecteur  $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1$  correspond bien à une des solutions résonantes. Pour tous les angles d'onde primaire étudiés, les ondes secondaires ont systématiquement des vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}_{1,2}$  plus horizontaux que  $\mathbf{k}_0$  comme on peut le voir sur la figure 3. Cette propriété illustre la tendance naturelle des écoulements en rotation aux transferts d'énergie vers les modes lents quasi-2D. Si ce processus est mis en cascade, l'énergie se concentre finalement dans les vecteurs d'ondes presque horizontaux, correspondant à l'état ultime de la turbulence en rotation invariante le long de l'axe de rotation [6, 7].



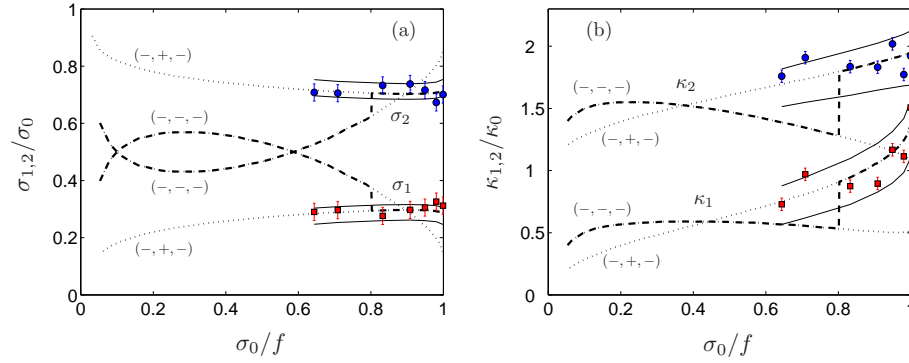
**Figure 3.** Courbes de résonance pour une onde primaire (a) [ $s_0 = -1, \sigma_0 = 0.84f, \kappa_0 = 0.82 \text{ rad cm}^{-1}$ ] et (b) [ $s_0 = -1, \sigma_0 = 0.99f, \kappa_0 = 0.82 \text{ rad cm}^{-1}$ ]. Les courbes représentent les positions de  $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 = (k_0 + k_1, m_0 + m_1)$  satisfaisant l'équation (9). Les vecteurs d'ondes mesurés expérimentalement sont représentés avec des flèches. Le cercle correspond à la prédiction théorique obtenue à partir du critère de taux de croissance maximum.

#### 4 Sélection de la triade la plus instable

Pour prédire univoquement la triade résonante effectivement sélectionnée, nous devons ajouter à l'équation (9) une condition de maximisation du taux de croissance de l'instabilité. En repartant de l'équation (6), nous pouvons prédire une croissance exponentielle de l'amplitude des ondes secondaires aux temps courts avec le taux de croissance

$$\gamma = -\frac{\nu}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + \sqrt{\frac{\nu^2}{4}(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^2 + C_1 C_2 |A_0|^2}. \quad (10)$$

Dans la figure 3, nous représentons par un cercle le couple de vecteurs d'onde  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  qui maximise le taux de croissance  $\gamma$  de l'instabilité parmi tous ceux résonants. Les mesures expérimentales se révèlent être en très bon accord avec cette prédiction théorique.



**Figure 4.** Fréquences  $\sigma_{1,2}/\sigma_0$  (a) et nombres d'ondes  $\kappa_{1,2}/\kappa_0$  (b) des ondes secondaires en fonction de la fréquence de l'onde primaire  $\sigma_0/f$ . Les cercles et les carrés pleins représentent les mesures expérimentales. Les prédictions théoriques sont représentées par les lignes tiretées épaisses (selon le critère de taux de croissance maximal absolu) et par les lignes pointillées (selon le critère de taux de croissance maximal relatif aux résonances de types  $(-, -, -)$  et  $(-, +, -)$ ).

En Fig. 4, nous représentons les fréquences d'ondes secondaires  $\sigma_{1,2}$  et les nombres d'ondes  $\kappa_{1,2}$  prédits théoriquement en fonction de la fréquence de l'onde primaire  $\sigma_0/f \in [0, 1]$ . Les lignes pointillées

correspondent aux prédictions pour les résonances de types  $(-, -, -)$  et  $(-, +, -)$  alors que les lignes tiretées correspondent au critère de taux de croissance maximal absolu. Nous montrons aussi les données expérimentales qui présentent un accord quantitatif avec la théorie pour la branche de type  $(-, +, -)$ . Il n'est cependant pas clair pourquoi la branche  $(-, +, -)$  est sélectionnée pour  $\sigma_0/f < 0.79$  alors que la théorie prédit que la branche  $(-, -, -)$  devrait être la plus instable. Il est possible que la taille finie de l'onde primaire (4 longueurs d'ondes seulement) empêche la sélection des ondes secondaires de vecteurs d'ondes trop faibles et donc de la branche  $(-, -, -)$ .

## 5 Discussion

Dans la limite des faibles nombres de Rossby  $Ro = U/\Omega L$ , où  $U$  et  $L$  sont respectivement les échelles caractéristiques de vitesse et de longueur, la turbulence en rotation peut être décrite comme la superposition d'ondes d'inertie en interaction faible selon le mécanisme de résonance triadique [12, 13]. L'instabilité paramétrique d'une onde d'inertie décrite dans ce travail peut alors être vue comme le mécanisme élémentaire des transferts d'énergie entre échelles en turbulence en rotation. Comme nous l'avons vu, ces transferts anisotropes ont lieu à la fois en échelle et en direction. Le transfert « angulaire » d'énergie est toujours dirigé vers des vecteurs d'ondes plus horizontaux fournissant un mécanisme clair selon lequel les modes lents quasi-2D peuvent être excités [5]. En revanche, la nature des transferts d'énergie par triade résonante en terme de nombres d'ondes — i.e. vers les grandes ou les petites échelles — dépend de l'amplitude de l'onde instable considérée et de la viscosité. En effet, les ondes d'amplitude grande devant  $\nu\kappa_0$  sont instables au profit d'ondes de grands nombres d'ondes, conduisant à une cascade directe d'énergie, alors que celles d'amplitude faible devant  $\nu\kappa_0$  se déstabilisent au profit de grandes longueurs d'ondes, résultant en une cascade inverse. Le bilan de cette compétition entre cascade directe et inverse d'énergie en turbulence en rotation reste aujourd'hui un problème fondamental ouvert.

## Références

1. H. GREENSPAN, *The Theory of Rotating Fluids*, Cambridge University Press, London (1968).
2. J. Lighthill, *Waves in Fluids*, Cambridge University Press, London (1978).
3. O. M. PHILLIPS, Energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves, *Phys. Fluids*, **6**, 513 (1963).
4. G. BORDES, F. MOISY, T. DAUXOIS & P.-P. CORTET, Experimental evidence of a triadic resonance of plane inertial waves in a rotating fluid, *Phys. Fluids*, **24**, 014105 (2012).
5. L. M. SMITH & F. WALEFFE, Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating, three-dimensional turbulence, *Phys. Fluids*, **11**, 1608 (1999).
6. P. SAGAUT & C. CAMBON, *Homogeneous turbulence dynamics*, Cambridge University Press, London (2008).
7. C. LAMRIBEN, P.-P. CORTET & F. MOISY, Direct Measurements of Anisotropic Energy Transfers in a Rotating Turbulence Experiment, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 024503 (2011).
8. M. MERCIER, N. GARNIER & T. DAUXOIS, Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the Hilbert transform, *Phys. Fluids*, **20**, 0866015 (2008).
9. M. MERCIER, D. MARTINAND, M. MATHUR, L. GOSTIAUX, T. PEACOCK & T. DAUXOIS, New wave generation, *J. Fluid Mech.*, **657**, 310 (2010).
10. F. WALEFFE, The nature of triad interactions in homogeneous turbulence, *Physics of Fluids A*, **4**, 350 (1992).
11. F. WALEFFE, Inertial transfers in the helical decomposition, *Phys. Fluids A*, **5**, 577 (1993).
12. S. GALTIER, Weak inertial-wave turbulence theory, *Phys. Rev. E*, **68**, 015301 (2003).
13. C. CAMBON, R. RUBINSTEIN & F. S. GODEFERD, Advances in wave turbulence : rapidly rotating flows, *New J. Phys.*, **6**, 73 (2004).

# Digitation de densité asymétrique dans les systèmes réactifs

L. Lemaigre<sup>1</sup>, M. A. Budroni<sup>1</sup>, L. A. Riolfo<sup>1</sup>, P. Grosfils<sup>2</sup> & A. De Wit<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Unité de Chimie Physique Non Linéaire, Faculté des Sciences, Université Libre de Bruxelles (ULB), CP231, 1050 Bruxelles, Belgique.

<sup>2</sup> Center for Nonlinear Phenomena and Complex Systems, Université Libre de Bruxelles (ULB), CP231, 1050 Brussels, Belgium

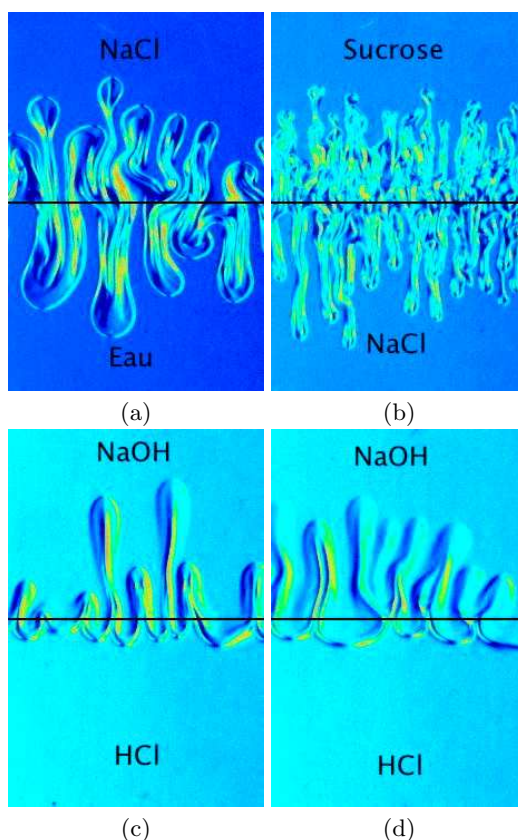
adewit@ulb.ac.be

**Résumé.** Lorsque deux solutions de composition et de densité différentes sont mises en contact l'une au-dessus de l'autre dans le champ de gravité, des instabilités hydrodynamiques telles que l'instabilité de Rayleigh-Taylor ou de double diffusion peuvent induire des mouvements de convection. Les motifs hydrodynamiques ainsi obtenus croissent de manière symétrique de part et d'autre de la ligne de contact initial. Si des réactions chimiques se produisent dans de tels systèmes, ces réactions couplées à la diffusion modifient les profils de concentration et par conséquent les profils de densité à la fois dans l'espace et dans le temps. Il en résulte une modification des motifs hydrodynamiques. En particulier si la différence de densité entre les deux solutions réactives n'est pas trop importante, les réactions chimiques induisent une asymétrie des motifs convectifs par rapport à la ligne de contact initial. Nous caractérisons ici expérimentalement et numériquement cette asymétrie et nous montrons que, pour la réaction acide-base choisie ici, les doigts croissent préférentiellement au-dessus de la zone réactive et non de part et d'autre comme c'est le cas en l'absence de réaction chimique.

**Abstract.** Buoyancy-driven flows induced by the Rayleigh-Taylor or double-diffusive instabilities can develop when two solutions of different composition and density are put in contact one on top of the other in the gravitational field. The resulting convective patterns grow symmetrically above and below the initial contact line. In reactive solutions, the composition and hence the density profiles can be modified in space and time by reaction-diffusion processes which can thus affect the hydrodynamic patterns. In particular, we show that, if the density difference between the two reactant solutions is not too large, the symmetry of the chemo-hydrodynamic patterns with regard to the initial contact line can be broken by the reaction. We experimentally and numerically characterize this asymmetry and show that, for the acid-base reaction chosen here, fingers grow preferentially above the reaction zone and not both above and below it, as in the non reactive situation.

## 1 Introduction

Dans de nombreuses applications environnementales ou technologiques telles que la séquestration du CO<sub>2</sub> ou la bioremédiation de zones de pollutions dans les sous-sols, des instabilités hydrodynamiques se produisent dans des solutions réactives [1]. Si les réactions chimiques modifient une propriété physique des solutions telles que leur densité ou viscosité, elles peuvent affecter les gradients de mobilité à l'origine des mouvements de convection. Ainsi par exemple, des réactions acide-base peuvent modifier les caractéristiques de l'instabilité de Rayleigh-Taylor (RT) ou de phénomènes de diffusion différentielle liés à des variations de densité le long du champ de gravité [2, 3]. L'instabilité de RT se produit lorsqu'une solution dense surplombe une solution moins dense dans le champ de gravité [4, 5] comme lorsque une solution d'eau salée est placée au-dessus d'eau pure par exemple (Fig. 1a). Les instabilités liées à des phénomènes de diffusion différentielle opèrent quant à elles en présence d'un gradient de densité initialement stable (densité augmentant le long du champ de gravité) pour peu que deux solutés diffusant à des vitesses différentes soient impliqués [4, 6, 7]. En particulier, si le soluté présent dans la couche inférieure plus dense diffuse plus vite que celui dans la couche supérieure moins dense, de la double diffusion (DD) est observée (Fig. 1b). Si dans un tel système les espèces qui influencent la densité sont impliquées dans des réactions chimiques, une brisure de symétrie des motifs convectifs peut apparaître.



**Figure 1.** Motifs convectifs observés en absence (haut) et en présence (bas) d’une réaction chimique. (a) Instabilité de Rayleigh-Taylor, (b) Double diffusion, (c) Instabilité de Rayleigh-Taylor réactive, (d) Double diffusion réactive. Temps = (a) 5 s, (b) 18 s, (c) 16 s, (d) 32 s. La taille de l’image est de 1.8 x 2.7 cm. La ligne noire horizontale indique la position de la ligne de contact initial.

## 2 Détails expérimentaux

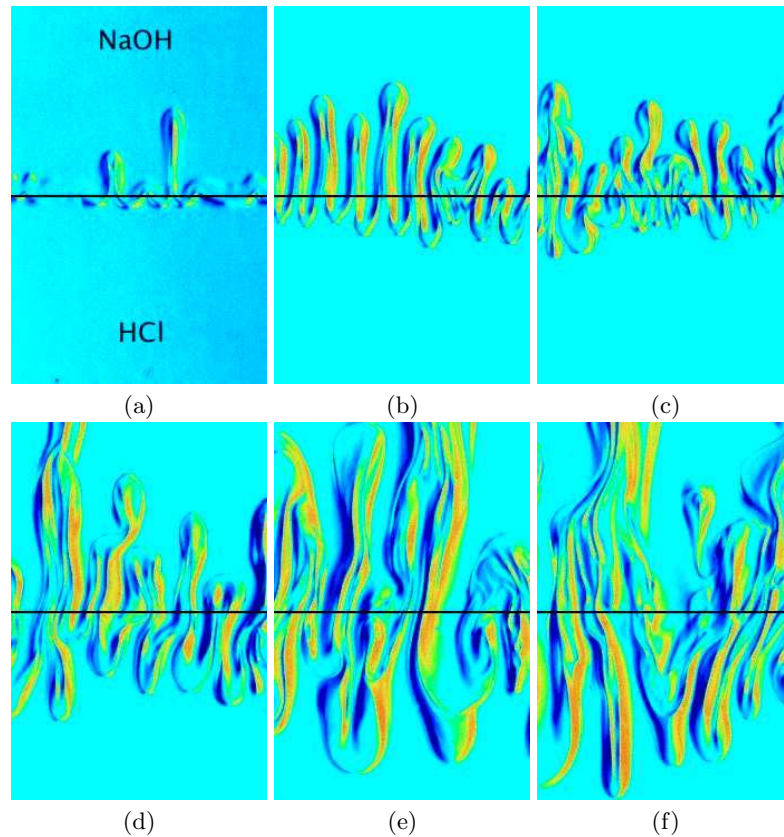
Pour démontrer ceci, nos expériences sont menées dans une cellule de Hele-Shaw verticale spécialement conçue pour pouvoir mettre facilement en contact deux solutions miscibles [8]. Ce réacteur est composé de deux plaques en verre séparées par un mince interstice dans lequel se déroule la dynamique étudiée. Les instabilités hydrodynamiques sont obtenues en plaçant une solution aqueuse d’un soluté A au-dessus d’une autre solution aqueuse d’un soluté B. Ces deux solutions miscibles sont initialement séparées par une ligne de contact horizontale plane. Pour observer les instabilités hydrodynamiques en l’absence de réactions chimiques, on emploie des solutions de NaCl et de sucrose.

Dans les cas réactifs, des solutions de réactifs impliqués dans une réaction acide-base sont utilisés. Explicitement, nous considérons ici une solution d’hydroxyde de sodium de concentration  $[\text{NaOH}]$  et donc de densité variables placée au-dessus d’une solution d’acide chlorhydrique de concentration  $[\text{HCl}] = 1$  mol/L constante. Dans la mesure où l’acide HCl diffuse plus vite que le NaOH dans l’eau, la double diffusion réactive est observée lorsqu’une solution de NaOH est placée au-dessus d’une solution de HCl plus dense. L’instabilité de RT réactive quand à elle est analysée en partant d’une solution basique plus dense que la solution acide du dessous. Ces diverses situations sont étudiées ici en détail en variant la concentration de la solution basique entre 0.1 et 1 mol/L. Lorsque la concentration de la solution de soude dépasse 0.4 mol/L, celle-ci devient plus dense que la solution acide placée en dessous d’elle. On observe



donc l'équivalent réactif de l'instabilité de Rayleigh-Taylor pour  $[\text{NaOH}] > 0.4 \text{ mol/L}$  et la DD en-dessous de cette concentration.

Comme les fluides étudiés sont incolores et que l'ajout d'un indicateur coloré influence les motifs convectifs [9–11], les dynamiques ont été visualisées à l'aide d'une méthode de Schlieren [12]. Cette technique optique permet de visualiser les variations en indice de réfraction qui sont elles-mêmes liées aux variations de densité. Les images obtenues sont en niveaux de gris. Une échelle de couleur y a été ajoutée par la suite pour améliorer le contraste.



**Figure 2.** Instabilité de Rayleigh-Taylor réactive pour des concentrations croissantes de NaOH et donc une densité croissante de la solution du dessus, la concentration et la densité de la solution de HCl du dessous étant fixée. A mesure que le rapport de la densité de la solution basique sur celle de la solution acide augmente, la brisure de symétrie opérée par la réaction chimique disparaît. Toutes les images ont été prises après 10 s. Après un même temps, les motifs convectifs sont plus longs aux concentrations plus élevées donc la convection est plus forte. Les concentrations en NaOH sont de (a) 0.5 M, (b) 0.6 M, (c) 0.7 M, (d) 0.8 M, (e) 0.9 M et (f) 1 M pour une concentration de HCl = 1 mol/L. La taille de l'image est de  $1.8 \times 2.7 \text{ cm}$ . La ligne noire horizontale indique la position de la ligne de contact initial.

### 3 Résultats expérimentaux

Les instabilités hydrodynamiques se produisant dans une cellule de Hele-Shaw en présence et en absence de réaction chimiques sont comparées dans la figure 1. Dans les cas non réactifs, des doigts se développent à la fois vers le haut et vers le bas (voir le haut de la figure 1). Les motifs convectifs s'étendent

donc de manière symétrique par rapport à la ligne de contact initial à la fois pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor (Fig. 1a) et pour les phénomènes de double-diffusion (Fig. 1(b)). Ces derniers apparaissent sur une échelle de temps légèrement plus longue que pour les modes RT car il faut que la diffusion agisse pour que les motifs convectifs apparaissent.

Passons à l'équivalent réactif de ces instabilités. Lorsque la solution supérieure de NaOH est plus dense que celle de l'acide sous elle (Fig. 1(c)), on observe donc l'instabilité de Rayleigh-Taylor réactive. Contrairement au cas sans réaction, on voit que les motifs convectifs se développent ici principalement vers le haut et qu'aucun doigt ne croît vers le bas. La réaction chimique entraîne donc une brisure de symétrie des motifs convectifs. Ceci est dû au fait que la réaction chimique consomme la base qui descend pour la remplacer par un sel de densité intermédiaire. Lorsque la solution supérieure est cette fois-ci la moins dense, c'est la double diffusion réactive qui peut être analysée. Comme le montre la Fig. 1(d), la convection apparaît ici à nouveau sous forme de doigts uniquement ascendants car la réaction chimique provoque dans ce cas aussi une brisure de symétrie des motifs convectifs. Ceci rappelle le même genre de motifs obtenus lorsqu'une solution moins dense d'acide est placée au-dessus d'une solution de base plus dense lorsque d'autres phénomènes de diffusion différentielle entrent en jeu [2, 13].

La brisure de symétrie est particulièrement interpellante dans le cas de l'instabilité de Rayleigh-Taylor car celle-ci cause généralement une convection vigoureuse encline à advecter rapidement les réactifs. Pour comprendre dans quelles conditions la réaction chimique parvient à jouer un rôle déterminant dans la dynamique de RT, nous avons répété ces expériences en variant progressivement la concentration de la solution supérieure et donc sa densité (Fig. 2). A mesure que la densité augmente, la convection devient de plus en plus vigoureuse vu que, après un temps identique de 10 s, les doigts convectifs sont de plus en plus longs, ce qui signifie qu'ils se développent de plus en plus vite. De plus, on voit que la brisure de symétrie due à la réaction chimique est de moins en moins marquée à mesure que la concentration augmente et disparaît même complètement à la concentration la plus élevée (Fig. 2(f)). On retrouve alors une dynamique semblable à celle qui se produit dans les systèmes non réactifs. Ceci montre que la réaction chimique impacte suffisamment les profils de densité pour avoir un effet visible sur le motif convectif tant que les écarts de densité entre les deux solutions de départ ne sont pas trop importantes.

Une particularité des systèmes réactifs est aussi la possibilité de voir apparaître diverses instabilités successives au fur et à mesure que la composition de la solution change dans la cellule au cours du temps. Ainsi, d'autres doigts dus à une instabilité secondaire de double diffusion entre le sel produit et l'acide sous lui ont pu être observés dans certaines conditions [3].

## 4 Résultats numériques

La brisure de symétrie des motifs convectifs induite par réaction et observée expérimentalement se retrouve dans les simulations non linéaires du système réaction-diffusion-convection (RDC) correspondant. Pour ce faire, nous intégrons numériquement les équations d'évolution des concentrations  $a, b$  et  $c$  des espèces  $A, B$  et  $C$  impliquées dans la réaction  $A+B \rightarrow C$  où  $A$  est l'acide,  $B$  la base et  $C$  le sel produit. On ne tient pas compte de la concentration de l'eau vu qu'il s'agit du solvant. En grandeurs adimensionnelles, le modèle RDC décrivant l'évolution convective des concentrations s'écrit [2, 3] :

$$\partial_\tau a + (\mathbf{v} \cdot \nabla) a = \delta_a \nabla^2 a - ab, \quad (1)$$

$$\partial_\tau b + (\mathbf{v} \cdot \nabla) b = \nabla^2 b - ab, \quad (2)$$

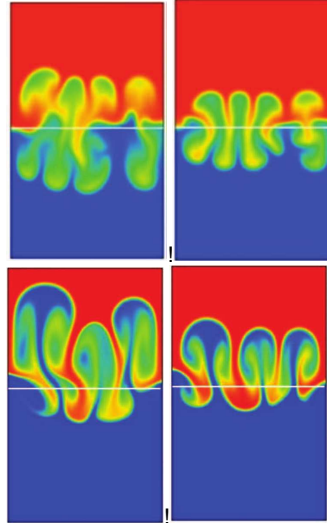
$$\partial_\tau c + (\mathbf{v} \cdot \nabla) c = \delta_c \nabla^2 c + ab, \quad (3)$$

$$\nabla p = \nabla^2 \mathbf{v} - (R_a a + R_b b + R_c c) \mathbf{1}_z, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

où  $\delta_a = D_A/D_B$  et  $\delta_c = D_C/D_B$  sont le rapport des coefficients de diffusion de l'acide et du sel respectivement par rapport à celui de la base,  $\mathbf{v}$  est le champ de vitesse,  $p$  la pression et  $\mathbf{1}_z$  le vecteur

unité pointant dans la direction du champ de gravité. Les nombres de Rayleigh solutaux  $R_i$  de l'espèce  $i$  déterminent la contribution relative de chaque espèce au profil de densité.



**Figure 3.** Simulations numériques comparant au même temps les instabilités (a) RT, (b) DD, (c) RT réactif, (d) DD réactif (de gauche à droite et de haut en bas).

Pour des valeurs des paramètres dictées par le choix des réactifs dans les expériences [2, 3, 13], nous obtenons les résultats montrés dans la Fig. 3. On y voit que les simulations des instabilités hydrodynamiques en système non réactif reproduisent la symétrie des structures en doigts, ceux-ci s'étendant autant vers le haut que vers le bas. En présence de réactions en revanche, les structures convectives grandissent de manière asymétrique vers le haut.

## 5 Conclusions

Une simple réaction chimique telle que celle ayant lieu entre un acide et une base peut profondément modifier les motifs convectifs résultant d'une instabilité hydrodynamique due à un gradient de densité dans le champ de gravité. En particulier, la réaction peut briser la symétrie des mouvements convectifs par rapport à la ligne de contact initial et favoriser la croissance des doigts dans une direction plutôt qu'une autre. Cette constatation démontre l'importance de la prise en compte explicite des phénomènes réactifs dans l'étude de la dynamique de systèmes chemo-hydrodynamiques. Ces résultats ouvrent de plus de nombreuses perspectives sur la possibilité d'obtenir de nouveaux comportements dynamiques et de nouvelles structures spatio-temporelles complexes dus au couplage entre réactions chimiques et hydrodynamique.

## 6 Remerciements

L.L. et L.R. bénéficient d'une bourse de thèse FRIA et ITN EU Marie Curie Multiflow respectivement. M.B. et A.D. remercient l'ESA Prodex pour son soutien financier. P.G. remercie le FRS-FNRS pour le support financier sous le contrat C-Net NR/FVH972. Enfin, A.D. remercie également le FRS-FNRS et l'ARC CONVINCÉ pour leur appui financier.

## Références

1. A. DE WIT, K. ECKERT & S. KALLIADASIS, Introduction to the focus issue : Chemo-hydrodynamic patterns and instabilities, *Chaos*, **22**, 037101 (2012).
2. C. ALMARCHA, P. M. J. TREVELYAN, P. GROSFILS & A. DE WIT, Chemically driven hydrodynamic instabilities, *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 044501 (2010).
3. L. LEMAIGRE, M. A. BUDRONI, L. A. RIOLFO, P. GROSFILS & A. DE WIT, Asymmetric Rayleigh-Taylor and double-diffusive fingers in reactive systems, *Phys. Fluids*, **25**, 014103 (2013).
4. P. M. J. TREVELYAN, C. ALMARCHA & A. DE WIT, Buoyancy-driven instabilities of miscible two-layer stratifications in porous media and Hele-Shaw cells, *J. Fluid Mech.*, **670**, 38 (2011).
5. J. FERNANDEZ, P. KUROWSKI, P. PETITJEANS & E. MEIBURG, Density-driven unstable flows of miscible fluids in a Hele-Shaw cell, *J. Fluid. Mech.*, **451**, 239 (2002).
6. J. S. TURNER, *Buoyancy effects in fluids*, Cambridge University Press, Cambridge (1979).
7. H. E. HUPPERT & J.S. TURNER, Double-diffusive convection, *J. Fluid Mech.*, **106**, 299 (1981).
8. Y. SHI & K. ECKERT, A novel Hele-Shaw cell design for the analysis of hydrodynamic instabilities in liquid-liquid systems, *Chem. Eng. Sci.*, **63**, 3560 (2008).
9. A. ZALTS, C. EL HASI, D. RUBIO, A. UREÑA, & A. D'ONOFRIO, Pattern formation driven by an acid-base neutralization reaction in aqueous media in a gravitational field, *Phys. Rev. E*, **77**, 015304(R) (2008).
10. C. ALMARCHA, P. M. J. TREVELYAN, L. A. RIOLFO, A. ZALTS, C. EL HASI, A. D'ONOFRIO & A. DE WIT, Active role of a color indicator in buoyancy-driven instabilities of chemical fronts, *J. Phys. Chem. Lett.*, **1**, 752 (2010).
11. S. KUSTER, L. A. RIOLFO, A. ZALTS, C. EL HASI, C. ALMARCHA, P.M.J. TREVELYAN, A. DE WIT & A. D'ONOFRIO, Differential diffusion effects on buoyancy-driven instabilities of acid-base fronts : the case of a color indicator, *Phys. Chem. Chem. Phys.*, **13**, 17295 (2011).
12. G. S. SETTLES, *Schlieren and Shadowgraph Techniques*, Springer, Berlin (2001).
13. C. ALMARCHA, Y. R'HONI, Y. DE DECKER, P. M. J. TREVELYAN, K. ECKERT & A. DE WIT, Convective mixing induced by acid-base reactions, *J. Phys. Chem. B*, **115**, 9739 (2011).

# Numerical Simulations of Wave Turbulence in Vibrating Plates

M. Ducceschi<sup>1</sup>, C. Touzé<sup>1</sup>, O. Cadot<sup>1</sup> & S. Bilbao<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Unité de Mécanique, ENSTA - ParisTech, 828 Boulevard des Maréchaux, Palaiseau, France

<sup>2</sup> James Clerk Maxwell Building, University of Edinburgh, Scotland

michele.ducceschi@ensta-paristech.fr

**Résumé.** La turbulence d'ondes dans les vibrations de plaques minces est étudiée numériquement. Dans cette contribution, une méthode par différences finies est utilisée pour simuler les vibrations de plaques en grande amplitude, ce qui permet d'être plus proche de la réalité expérimentale comparativement aux résultats numériques déjà publiés. Des conditions aux limites de type simplement supporté sont imposées, et le forçage est ponctuel et harmonique. Un schéma temporel conservatif est utilisé, assurant une conservation parfaite de l'énergie discrète. Des simulations sans amortissement sont d'abord considérées afin de comparer aux résultats théoriques. L'absence d'amortissement permet d'engendrer une cascade d'énergie jusqu'à la fréquence de coupure numérique (proche de la fréquence de Nyquist). L'influence de paramètres géométriques comme l'épaisseur sur la puissance injectée et les spectres d'amplitude, est quantifiée. Des relations en terme de lois de puissance sont établies entre ces différentes grandeurs.

**Abstract.** This work is concerned with numerical simulations of wave turbulence in elastic plates. A finite difference code is used to simulate the turbulent regime of a plate vibrating at large amplitudes, hence allowing a computational framework that is closer to the experiments as compared to already published results. Physical boundary conditions are enforced, and the harmonic forcing is pointwise. An energy-conserving time-stepping scheme is used hence allowing for a perfect discrete conservation of energy in the conservative case. Undamped simulations are run first to check the numerical results with theoretical predictions. The absence of damping allows to generate an energy cascade up the numerical cutoff frequency (close to the Nyquist frequency). The influence of different geometrical parameters (*e.g.* the thickness) on derived quantities such, for instance, the injected power and the spectral amplitudes is quantified. Relations between these quantities is derived in the form of power laws.

## 1 Introduction

Wave Turbulence (WT) is a statistical description of the interactions amongst weakly nonlinear dispersive waves [1, 2]. This type of turbulence is in some aspects similar to the classical hydrodynamic turbulence, in that it describes a far-from-equilibrium set of random waves. The most salient feature of the WT description is that it is possible to find analytic solutions to the kinetic equations, from which a closed form for the power spectra corresponding to the energy cascade through lengthscales can be derived. Closure is generally not available in the broader context of hydrodynamic turbulence, where only dimensional arguments can be used to deduce the form of the spectra. Examples of WT systems range from water surface and capillary waves, Rossby waves, Alfvén waves, waves in nonlinear optics. Waves in nonlinear elastic plates also exhibit WT [6]: velocity power spectra have been analytically derived for infinite plates without dissipation. Early experiments on vibrating plates have shown however that the shape of the spectra differs significantly from the theory [4, 5]. The discrepancy has been attributed mainly to three contributions: finite-size effects, incorrect separation of the linear and nonlinear time scales, damping effects. This work presents early results derived from an energy-conserving finite difference scheme. The goal is to create a numerical setup that is as close as possible to a real experiment,

and where the plate parameters (viscous damping, geometry, imperfections ...) can be changed at will. This is a scheme that allows to simulate a framework that is much closer to the real experiments than earlier simulations presented in [6], relying on a pseudo-spectral scheme with periodic boundary conditions. Here physical boundary conditions are enforced, and the forcing is pointwise and harmonic as in the experiments.

In order to first verify the theoretical predictions, the code is run in the absence of damping. Energy is input at a grid point thanks to a sinusoidal forcing of ramping amplitude and whose frequency is tuned so to activate modal resonances in order to create more efficiently a turbulent state. The energy cascade is quantified in terms of cutoff frequencies calculated from the spectra. Self-similarity amongst spectra from different runs is checked. The injected power is calculated and used as descriptive parameter of the cascade, and its relation to the spectral amplitude (*e.g.* the amplitude at cutoff) is exploited.

## 2 Model Equations, WT Spectra and Numerical Setup

A plate whose flexural vibrations  $w(\mathbf{x}, t)$  are comparable to the thickness can be described efficiently by the von Kármán equations [7]. These are

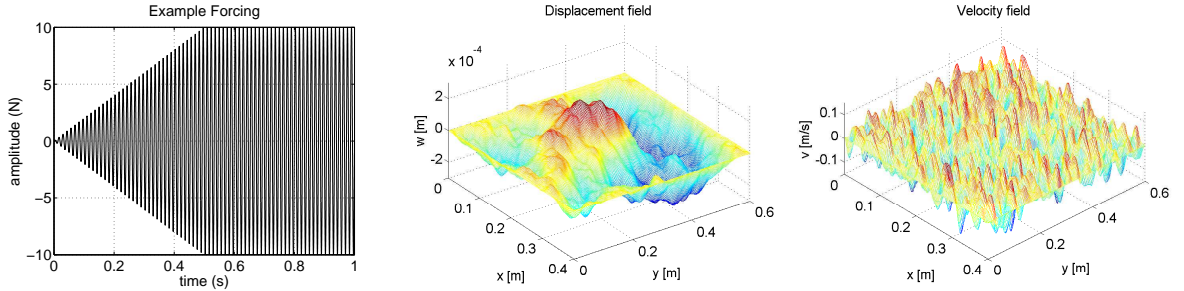
$$D\Delta\Delta w(\mathbf{x}, t) + \rho h \ddot{w}(\mathbf{x}, t) = L(w, F) + P_{ext}(\mathbf{x}, t); \quad (1a)$$

$$D\Delta\Delta F(\mathbf{x}, t) = -\frac{Eh}{2}L(w, w), \quad (1b)$$

where  $D = \sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}}$  is the plate rigidity,  $\rho$  is the material density,  $h$  is the thickness,  $E$  is Young's modulus,  $\nu$  is the Poisson's ratio.  $F$  is the Airy stress function which quantifies the amount of motion in the in-plane direction. It is assumed that the thickness is much smaller than the plate dimensions ( $h \ll L_x, L_y$ ).  $L(\cdot, \cdot)$  is the von Kármán operator and reads

$$L(w, F) = w_{,xx}F_{,yy} + w_{,yy}F_{,xx} - 2w_{,xy}F_{,xy}, \quad (2)$$

where  $_{,x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ . Note that the system so defined is undamped, but it presents an external forcing  $P_{ext}$  that is here realised as a pointwise sinusoid with ramping amplitude (see Fig. 1). Physical boundary



**Figure 1.** Forcing Amplitude for case 1 (left); typical displacement field (centre); typical velocity field (right).

conditions are chosen: they describe simply supported edges allowed to move in the in-plane direction.

Such a system is dispersive with linear dispersion relation given by:

$$\omega_{\mathbf{k}} = hc|\mathbf{k}|^2, \quad c = \sqrt{\frac{E}{12(1-\nu^2)\rho}}. \quad (3)$$

The WT formalism allows to derive a form for the velocity power spectral density (PSD) spectra,  $S_{vv}(f)$ :

$$S_{vv}(f) \propto \epsilon^{1/3} \log^{1/3} \left( \frac{f_c}{f} \right), \quad (4)$$

where  $\epsilon$  is the injected power, and  $f_c$  denotes some cutoff frequency *e.g.* the frequency of dissipation.

## 2.1 The Finite Difference Scheme

Time and space are discretised so that the continuous variables  $(x, y, t)$  are approximated by their discrete counterparts  $(lh_x, mh_y, nh_t)$ , where  $(l, m, n)$  are integer indices and  $(h_x, h_y, h_t)$  are the steps. Boundedness of the domain implies that  $(l, m) \in [0, N_x] \times [0, N_y]$  so that the grid size is given by  $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$ . The continuous variables  $w(\mathbf{x}, t)$ ,  $F(\mathbf{x}, t)$  are then approximated by  $w_{l,m}^n$ ,  $F_{l,m}^n$  at the discrete time  $n$  for the grid point  $(l, m)$ . Time shifting operators are introduced as

$$e_{t+} w_{l,m}^n = w_{l,m}^{n+1}, \quad e_{t-} w_{l,m}^n = w_{l,m}^{n-1}. \quad (5)$$

Time derivatives can then be approximated by:

$$\delta_{t\cdot} = \frac{1}{2h_t}(e_{t+} - e_{t-}), \quad \delta_{t+} = \frac{1}{h_t}(e_{t+} - 1), \quad \delta_{t-} = \frac{1}{h_t}(1 - e_{t+}), \quad \delta_{tt} = \delta_{t+}\delta_{t-}. \quad (6)$$

Time averaging operators are introduced as:

$$\mu_{t+} = \frac{1}{2}(e_{t+} + 1), \quad \mu_{t-} = \frac{1}{2}(1 + e_{t-}), \quad \mu_{t\cdot} = \frac{1}{2}(e_{t+} + e_{t-}), \quad \mu_{tt} = \mu_{t+}\mu_{t-}. \quad (7)$$

Similar definitions hold for the space operators. Hence, the Laplacian  $\Delta$  and the double Laplacian  $\Delta\Delta$  are given by:

$$\delta_{\Delta} = \delta_{xx} + \delta_{yy}, \quad \delta_{\Delta\Delta} = \delta_{\Delta}\delta_{\Delta}. \quad (8)$$

The von Kármán operator at interior points  $L(w, F)$  can then be discretised as:

$$l(w, F) = \delta_{xx} w \delta_{yy} F + \delta_{yy} w \delta_{xx} F - 2\mu_{x-}\mu_{y-}(\delta_{x+y+} w \delta_{x+y+} F). \quad (9)$$

Thus the discrete counterpart of eqs. (1) is:

$$D\delta_{\Delta\Delta} w + \rho h \delta_{tt} w = l(w, F) + F_{l,m}^n; \quad (10a)$$

$$\mu_{t-} D\delta_{\Delta\Delta} F = -\frac{Eh}{2} l(w, e_{t-} w). \quad (10b)$$

Such a scheme is stable and energy conserving, as proved in [3]. Implementation of boundary conditions is explained thoroughly in [3]. The first numerical experiments with the scheme have been used to investigate the transition to turbulence in plates [8].

## 2.2 Simulation Parameters

For this work, eight case studies are considered. Some plate parameters are kept constant in all simulations, and they are: density  $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ , Young's modulus  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ , Poisson's ratio  $\nu = 0.3$ , dimensions  $L_x \times L_y = 0.4 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}$ . The varying parameters are the maximum amplitude of forcing, the thickness, the injection frequency and the grid points. These are listed in Table 1. Note that the injection frequency changes with the thickness to always be around the 4<sup>th</sup> eigenfrequency. Fig. 1 represents the first second of forcing for case 1, as well as typical displacement and velocity fields produced after the turbulent regime sets in. Note that the displacement field presents some traces of the eigenmodes of the plate, whereas the velocity field is much more homogeneous.

	Max Force (N)	Thickness (mm)	Excit. Freq (Hz)	Grid Points
<b>Case 1</b>	10	1	75	102 × 153
<b>Case 2</b>	20	1	75	102 × 153
<b>Case 3</b>	30	1	75	102 × 153
<b>Case 4</b>	45	1	75	102 × 153
<b>Case 5</b>	2.5	0.5	37.5	102 × 153
<b>Case 6</b>	5	0.5	37.5	102 × 153
<b>Case 7</b>	0.005	0.1	7.5	102 × 153
<b>Case 8</b>	0.02	0.1	7.5	144 × 215

Table 1. Case Studies

### 3 Simulation Analysis: Spectra, Energy Cascade, Injected Power

The first quantity used in the analysis is the *cutoff frequency*  $f_c$ . This is defined as:

$$f_c = \frac{\int_0^\infty f S_{vv} df}{\int_0^\infty f df}. \quad (11)$$

In this equation  $S_{vv}$  is (the estimate of) the PSD of the velocity  $v$ , whose theoretical behaviour is described by Eq. (4). The velocity is taken from one arbitrary point on the surface of the plate (not at the injection point). The cutoff frequencies so defined are time dependent as dissipation is absent. Fig. 2 pictures the cascade velocity in the turbulent state. It is found that the dependence is linear with time, as seen in Table 2.

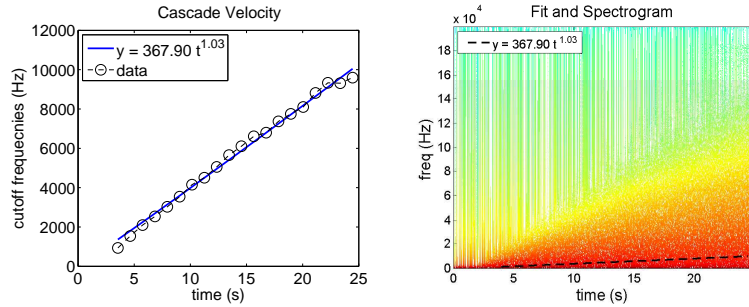
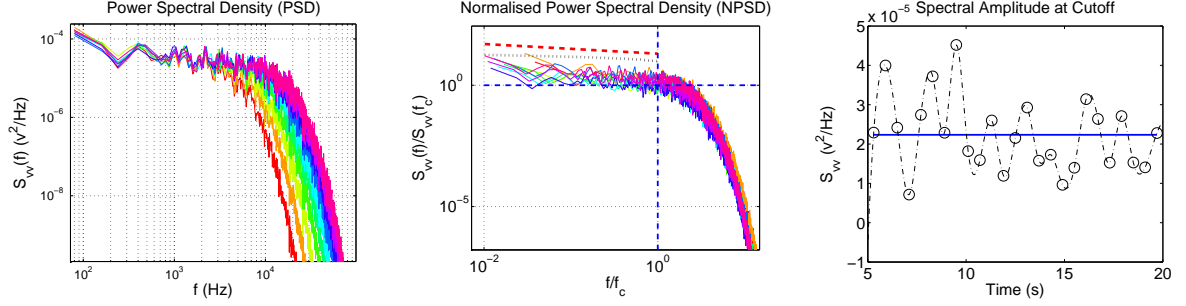


Figure 2. Cascade Velocity for case 1.

PSDs corresponding to case 1 are pictured in Fig. 3(a). The spectra tend to cover larger portions of the graph as time goes by: this happens because there is no dissipation and the energy keeps flowing to smaller wavelengths. Fig. 3(b) shows self similarity of the spectra when they are plotted on a normalised scale  $f/f_c$  and when the spectra are divided by their value at cutoff. The log correction and a power law with slope  $-0.2$  are also plotted. Note that the slope from experimental data was found to be much larger, close to  $-0.5$  [4]; so one could conclude that the presence of damping does affect the shape of the spectra. From the present analysis, the slope of the spectra is  $-0.2$ , a value which is consistent with the shape of the log correction. The spectral amplitude at cutoff was found to be a constant for each one of the case studies, with values reported in Table 2. The injected power is also considered. Table 2 reports the mean values and power law coefficients for the standard deviation. The standard deviation grows as  $t^{0.4}$ , as seen in Fig. 4(a) and (b) for case 1. When the mean injected power is plotted against the spectral amplitude, Fig. 4(c) is produced. A power law fit allows to conclude that

$$SA \propto \epsilon^{0.5}. \quad (12)$$

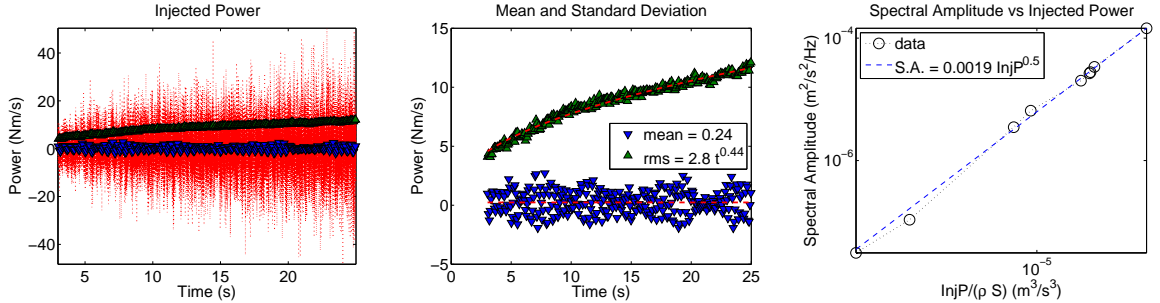




**Figure 3.** PSD for case 1 (left): note that the cutoff moves to higher frequencies as more modes are activated; NPSD for case 1 (centre) presenting the log correction (black dotted line) and a power law fit with slope  $-0.2$  (red dashed line); spectral amplitude at cutoff for case 1 (right).

	$f_c = a t^b$		SA( $f_c$ )	$\langle \epsilon \rangle$ and $\epsilon_{rms} = c t^d$		
	a	b		Mean	c	d
Case 1	367.9	1.03	$2.02 \cdot 10^{-5}$	0.250	2.8	0.44
Case 2	778.9	0.92	$2.66 \cdot 10^{-5}$	0.393	7.9	0.42
Case 3	994.8	0.91	$2.78 \cdot 10^{-5}$	0.417	15	0.38
Case 4	1114.4	1.01	$3.39 \cdot 10^{-5}$	0.522	26	0.43
Case 5	320.0	0.91	$3.51 \cdot 10^{-6}$	$4.95 \cdot 10^{-3}$	0.28	0.37
Case 6	637.3	0.9	$6.53 \cdot 10^{-6}$	$6.32 \cdot 10^{-3}$	0.85	0.40
Case 7	18.19	0.92	$3.11 \cdot 10^{-8}$	$5.48 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	0.42
Case 8	76.91	1.04	$1.08 \cdot 10^{-7}$	$3.61 \cdot 10^{-5}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	0.34
	avg: 0.95					avg: 0.40

**Table 2.** Results from fits: cutoff frequencies  $f_c$  grow linearly with time (left); values of the spectral amplitudes at cutoff (centre); mean values and standard deviation of the injected power  $\epsilon$  (right).



**Figure 4.** Injected Power for case 1 (left and centre); spectral amplitude as a function of the injected power (right).

## 4 Discussion and conclusion

Early-stage simulations of a turbulent elastic plate were presented. The plate was simulated thanks to a finite difference, energy conserving scheme with physical boundary conditions and pointwise forcing. Undamped simulations were run first to get rid of damping effects in the power spectra. Velocity Power Spectra were considered, and self-similarity was obtained after normalisation by the cutoff frequency (characteristic frequency of the end of the cascade). The slope of the spectra was found to be about  $-0.2$ , a value which resembles the log correction [6] and larger than the experimental value of  $-0.5$  [4,5]. It is concluded that the damping has a large, yet undetermined effect on the slope of the experimental spectra. An important finding of the present simulation is that the spectra amplitude scales as  $\epsilon^{\frac{1}{2}}$  instead

of the predicted scaling of  $\epsilon^{\frac{1}{3}}$  obtained from the WT formalism [2,6]. Scaling with  $\epsilon^{\frac{1}{2}}$  was also obtained in experiments [4,5]. Future work will focus on a test for homogeneity and isotropy of the velocity field; the relation of the injected power and its standard deviation will be investigated in terms of local and global energy fluxes. Finally, damping will be introduced in the scheme, as well as geometrical imperfections.

## References

1. V. E. ZAKHAROV, V. S. LVOV & G. FALKOVISCH, Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence, Springer, Berlin Heidelberg (1992).
2. S. NAZARENKO, Wave Turbulence, *Lectures Notes in Physics*, Springer, Berlin Heidelberg (2011).
3. S. BILBAO, A family of conservative finite difference schemes for the dynamical von Kármán plate equations, *Numerical Methods for Partial Differential equations*, **24**, 1 (2008).
4. A. BOUDAUD, O. CADOT, B. ODILLE & C. TOUZÉ, Observation of Wave Turbulence in Vibrating Plates, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 234504 (2008).
5. N. MORDANT, Are There Waves in Elastic Wave Turbulence?, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 234505 (2008).
6. G. DÜRING, C. JOSSEAND & S. RICA, Weak turbulence for a vibrating plate: can one hear a Kolmogorov spectrum?, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 025503 (2006).
7. T. VON KÁRMÁN, Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, *Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften*, **4**, 4 (1910).
8. C. TOUZÉ, O. CADOT & S. BILBAO, Transition scenario to turbulence in thin vibrating plates, *J. Sound Vib.*, **331**, 412–433 (2012).

# Transitions de phase et dynamique de spin dans un condensat de Bose dipolaire à composantes multiples

B. Pasquiou<sup>2,1</sup>, A. De Paz<sup>1,2</sup>, A. Chotia<sup>2,1</sup>, A. Sharma<sup>1,2</sup>, E. Maréchal<sup>2,1</sup>, P. Pedri<sup>1,2</sup>, L. Vernac<sup>1,2</sup>, B. Laburthe-Tolra<sup>2,1</sup> & O. Gorceix<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique des Lasers, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, 93430 Villetaneuse, France

<sup>2</sup> Laboratoire de Physique des Lasers, CNRS, UMR 7538, 93430 Villetaneuse, France

olivier.gorceix@univ-paris13.fr

**Résumé.** Nous étudions les propriétés d'un condensat de Bose-Einstein formé d'atomes de chrome. Nos expériences permettent d'analyser les états d'équilibre et la dynamique d'aimantation de ce fluide quantique constitué d'atomes fortement magnétiques et de spin élevé. Les interactions dipolaires entre atomes sont anisotropes et de longue portée; elles induisent des effets physiques originaux qui sont non-locaux et non-linéaires.

**Abstract.** We study the properties of a Bose-Einstein Condensate with internal degrees of freedom. In our experiments, we investigate the steady states and the magnetization dynamics of a quantum fluid made of chromium atoms; these spin-3 atoms carry a large permanent magnetic dipole. The interactions between these dipoles are anisotropic and long-range. They induce specific phenomena interpreted within a seven-component non-local and non-linear mean field theory.

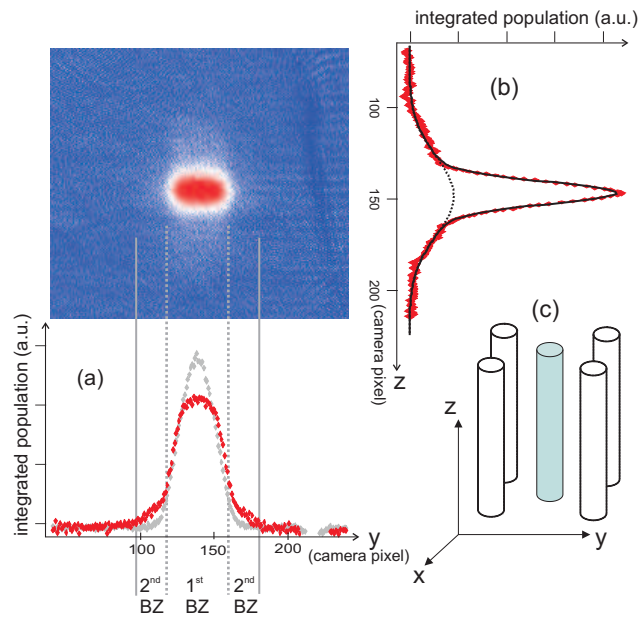
## 1 Introduction

Les interactions magnétiques dipôle-dipôle entre les atomes d'un gaz sont anisotropes et de longue portée. Lorsqu'elles deviennent comparables aux interactions de van der Waals (vdW), elles modifient profondément les propriétés des condensats de Bose-Einstein atomiques. Nous produisons des condensats de chrome (CBE-Cr) dans des géométries variées (3D à 0D) [1–4]. L'atome de chrome a dans son état fondamental un spin égal à 3 et il porte un moment magnétique élevé égal à six magnétons de Bohr ( $6 \mu_B$ ). Il en résulte des interactions magnétiques dipolaires 36 fois plus importantes que dans le cas plus couramment étudié des CBE alcalins. En transférant nos condensats dans des pièges optiques et en opérant à bas champ magnétique, nous libérons les degrés de liberté de spin et nous mettons en évidence des effets liés aux interactions dipolaires. La série d'expériences décrite ici concerne une approche du magnétisme quantique par l'analyse des dynamiques cohérentes et incohérentes du spin atomique et par la mise en évidence de modifications spontanées de l'aimantation de nos CBE-Cr [5, 6]. Notre système est décrit théoriquement par une spinéur solution d'un système d'équations de Gross-Pitaevskii couplées [7]. Le Hamiltonien du système peut être décomposé en trois parties. Un premier terme est la somme des Hamiltoniens à une particule de spin donné dans le potentiel de piégeage et dans le champ magnétique appliqué, le deuxième terme est le terme usuel de champ moyen décrivant les interactions de vdW. Le Hamiltonien comporte un troisième terme qui rend compte des interactions dipolaires. C'est ce terme additionnel qui introduit dans les équations couplées de Schrödinger non-linéaires une composante non locale et anisotrope. Toute la physique nouvelle ouverte par les condensats dipolaires comme par exemple les liens inattendus avec les cristaux liquides [8] ou la phase supersolide [9], résulte de ce terme qui est non négligeable par rapport au terme de vdW pour les condensats de chrome.

## 2 Dynamique de relaxation du spin dans un condensat dipolaire

Les interactions dipolaires étant anisotropes et de longue portée, elles induisent un couplage entre les degrés de liberté de spin et les degrés de liberté de rotation. Ceci permet l'apparition de phénomènes

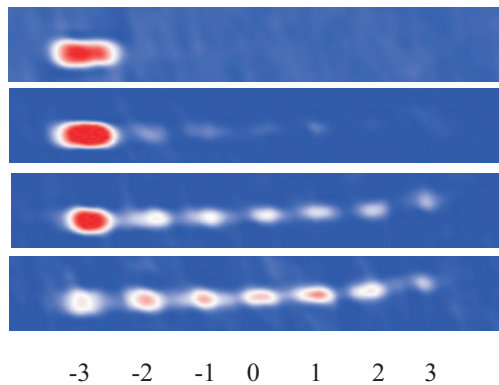
physiques similaires à l'effet Einstein-de Haas (EdH) dans lesquels magnétisme et rotation sont intimement liés. Dans ce cadre, nous avons étudié les processus de relaxation dipolaire (RD), c'est-à-dire les collisions inélastiques entre deux atomes qui ne sont pas dans l'état le plus bas en énergie de leur multiplicité Zeeman, et qui subissent dans le champ magnétique  $B$  imposé, un basculement de spin. Pour mener à bien ces études, il nous suffit de transférer les atomes du condensat de l'état fondamental  $+3$  à l'état excité  $-3$ , et de mesurer les taux de pertes dans un champ  $B$  ajustable. Nous avons mené à bien ces études dans un piège 3D et aussi dans des géométries restreintes de 2D à 0D par transfert des condensats dans des réseaux optiques. Nous avons pu montrer que la relaxation dipolaire est très fortement inhibée lorsque les CBE-Cr sont confinés dans des pièges en forme de tubes suffisamment profonds pour que la relaxation dipolaire devienne interdite [3]. Lorsque le champ magnétique est assez intense pour que la relaxation devienne possible, c'est-à-dire lorsque  $B$  est plus grand que la valeur seuil  $B_s$  telle que  $g \mu_B B_s = hf$  (où  $f$  est la fréquence dans le fond du puits 2D constitué par un tube du réseau), la collision de RD libère une énergie plus grande que le quantum de vibration au fond du puits de potentiel ce qui produit des pertes d'atomes que nous mesurons. Nous observons alors sur les figures d'absorption après temps de vol [3], des transitions entre bandes du réseau optique (voir Fig. 1). Ces transitions induites par le basculement de spin se produisent uniquement au-dessus du seuil  $B_s$ . Si la bande excitée était assez profonde, nous pourrions observer la formation de vortex et un effet de type EdH. Ce n'a malheureusement pas été le cas dans l'expérience réalisée en 2011 car l'effet tunnel dans la bande excitée permettait une désexcitation vibrationnelle et la dissipation rapide des vortex sous forme de chaleur. Nous chercherons courant 2013 à réaliser une expérience de détection de vortex dans une géométrie 2D en présence d'un réseau suffisamment profond.



**Figure 1.** L'analyse des distributions de population se fait par imagerie d'absorption après temps de vol (à gauche en haut). L'analyse montre, à gauche en bas, que la première bande excitée du réseau optique est spontanément peuplée par les collisions de relaxation dipolaire (RD) lorsque le champ magnétique est au-dessus du seuil  $B_s$  alors que seule la bande fondamentale est peuplée pour  $B$  inférieur à  $B_s$  (courbe grise). BZ signifie zone de Brillouin. À droite en bas, la figure donne la géométrie ; les pièges 1D sont alignés selon la direction  $Oz$  du champ. À droite en haut, l'intégration des profils selon  $Oy$  montre une distribution non-gaussienne liée à la formation de paires d'atomes par RD. Nous obtenons une température effective à partir du second moment de la distribution et nous utilisons cette température pour analyser la dynamique de la relaxation de spin. En dessous du seuil, la relaxation est très fortement inhibée lorsque les tubes sont de sections bien circulaires et à condition de réaliser un très bon alignement du champ  $B$  sur l'axe des tubes.

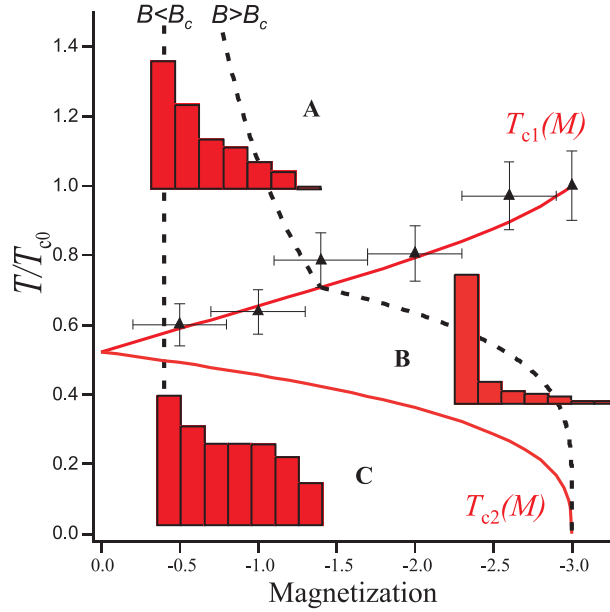
### 3 Désaimantation spontanée et diagramme de phase

Nous avons étudié le comportement à champ magnétique très faible du condensat formé d'atomes dans l'état fondamental à un corps, l'état  $m = -3$ . A champ fort et même modéré (au-dessus de 1 mG pour nos densités), notre gaz quantique peut être qualifié de ferromagnétique puisque tous les moments sont alignés. Lorsque l'intensité du champ magnétique descend sous une valeur critique de l'ordre de 0,5 mG, il se produit une dépolarisation spontanée du condensat (voir Fig. 2) comme le révèle l'analyse Stern-Gerlach après la libération du CBE du piège optique [10]. Ceci s'explique par le fait qu'à très bas champ, l'état ferromagnétique cesse d'être l'état fondamental du système. Du fait des interactions de type Van der Waals entre atomes, dites interactions de contact dans ce régime de très basses températures, il est plus favorable du point de vue énergétique pour le système d'adopter une phase magnétique non polarisée. Le diagramme des phases magnétiques du chrome à température nulle a été étudié théoriquement [8, 11]; l'état fondamental du système dépend des valeurs des longueurs de diffusion dans les quatre canaux moléculaires autorisés. Notre expérience [5] ne permet pas d'analyser finement ce diagramme des phases particulièrement complexe mais elle constitue une preuve de l'émergence spontanée d'une structure spinorielle non triviale dans notre système quantique. Précisons comment le CBE peut subir un changement de son aimantation. En effet, les interactions de contact sont isotropes et de ce fait les collisions associées ne permettent pas de changement ni du moment cinétique global ni de l'aimantation. La phase ferromagnétique devrait donc être métastable. Le système adopte une phase magnétique dépolarisée d'énergie plus basse grâce aux collisions dipôle-dipôle qui autorisent la non-conservation du moment orbital. De plus, dans le cas du chrome, les interactions dipolaires sont assez intenses pour déclencher la transition de phase avec une cinétique assez rapide à l'échelle de nos expériences. Même si nous n'avons pas encore pu mettre en évidence une mise en rotation ou la formation de vortex, les principes de conservation déjà invoqués permettent d'affirmer que nous retrouvons encore une fois une physique proche de celle de l'effet EdH.



**Figure 2.** Analyse par temps de vol et séparation Stern-Gerlach de la composition en spin d'un condensat de chrome à très bas champ magnétique. Le BEC se dépolarise spontanément lorsque le champ est abaissé. Images d'absorption prises après application du champ  $B$  pendant 155 ms pour : a) 1 mG ; b) 0,5 mG ; c) 0,25 mG ; d) un champ quasi-nul. Au champ le plus faible, la distribution de spin correspond à une aimantation par atome de  $-0.5 g_S \mu_B$ .

Complétant l'analyse de la désaimantation spontanée à très faible champ, nous avons démontré l'abaissement de la température critique de condensation induite par la libération des degrés de liberté de spin, et nous avons obtenus de forts indices pour l'existence de deux transitions de phase successives [6]. Pour cela, nous avons étudié le comportement d'un nuage formé d'atomes de chrome à champ très faible et à des températures  $T$  situées autour de la température critique de condensation (de 100 nK à 1  $\mu$ K). À champ fort (au-dessus de 100 nT pour nos densités), les moments tendent à s'aligner dans l'état de plus



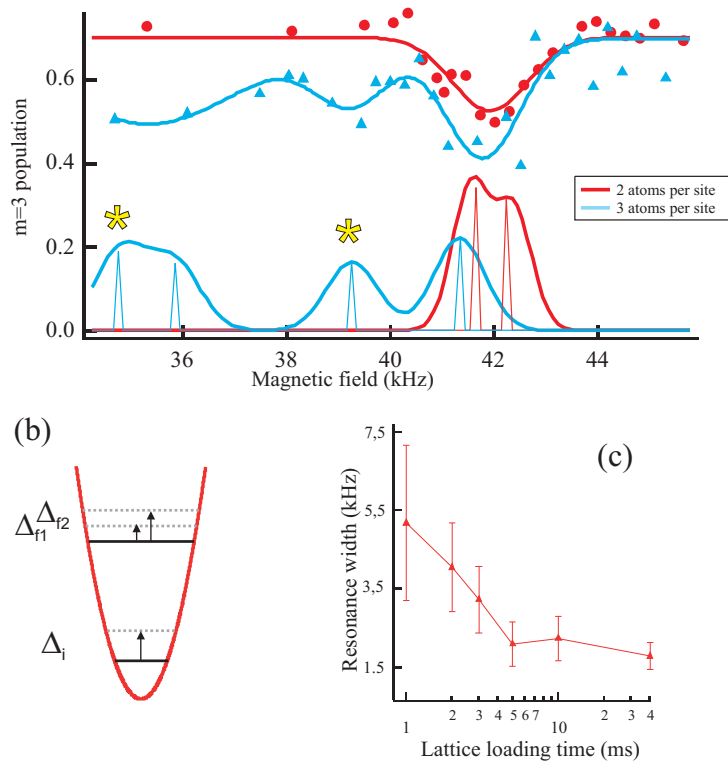
**Figure 3.** Diagramme de phase du condensat atomique. Les lignes continues marquent les limites des trois phases accessibles. Les histogrammes donnent des exemples de populations relatives mesurées dans ces phases. Dans la phase A, les sept sous-niveaux de spin sont non-dégénérés ; les populations sont données par des distributions de Bose quasi-Boltzmanniennes. Dans la phase B, l'état de spin  $m = -3$  est condensé et les autres états obéissent aux lois précédentes. Dans la phase C, tous les états sont condensés. Les lignes pointillées représentent deux trajectoires dans l'espace des phases. L'une au-dessus du seuil en  $B$  montre qu'en refroidissant le système tend vers un condensat ferromagnétique. L'autre, au-dessous du seuil, montre qu'alors le CBE évolue vers une phase non ferromagnétique et qu'il subit deux transitions de phase. La température de la première transition est abaissée par la libération du degré de liberté de spin ; les triangles noirs sont des points expérimentaux.

basse énergie de nombre quantique magnétique  $m = -3$  et le CBE adopte une phase ferromagnétique (phase A de la Fig. 3). Lorsque  $B$  est abaissé sous une valeur critique  $B_c$  de l'ordre de 50 nT, il se produit la dépolariation spontanée déjà discutée et le gaz explore les phases B et C. Le diagramme des phases magnétiques d'un gaz d'atomes de spin non nul a fait l'objet d'analyses théoriques que nous avons étendues à notre situation dans laquelle le spin est égal à 3. Les interactions dipolaires autorisent une modification spontanée de l'aimantation. Notre expérience permet de suivre la trajectoire du système dans son diagramme de phase (voir Fig. 3) lorsque sa température est abaissée. Au-dessus de  $B_c$  et à mesure que  $T$  diminue, le CBE initialement formé d'un mélange quasi-Boltzmannien d'états magnétiques condense dans le seul état  $m = -3$  et le caractère majoritaire de cet état s'amplifie jusqu'à  $T$  nulle tandis que les autres états magnétiques ne condensent jamais. Le système est alors un condensat pur d'aimantation extrême. Pour un refroidissement sous  $B_c$ , la trajectoire dans l'espace des phases est différente car le système présente deux transitions de phase : la première correspond à la condensation dans l'état  $-3$ , elle se produit à une température plus basse. La seconde transition de phase correspond à l'entrée dans une nouvelle phase pour laquelle tous les états de spin sont condensés et l'aimantation est plus faible [6].

#### 4 Relaxation dipolaire et dynamique de spin cohérente dans un réseau optique 3D

Dans le prolongement naturel des travaux présentés plus haut sur l'inhibition de la relaxation dipolaire par le confinement, nous avons placé les atomes de chrome du CBE dans un réseau optique 3D. Nous avons montré qu'alors la RD d'atomes dans l'état excité  $m = 3$  revêt un caractère résonant. Le processus

ne se produit que quand l'énergie magnétique libérée par le basculement de spin correspond à un quantum d'excitation dans le fond du site du réseau optique [4]. L'analyse de ces résonances en champ magnétique démontre une nouvelle manifestation de l'anisotropie des interactions dipolaires. De plus, les résonances en champ magnétique ont une structure qui est impactée par l'occupation des sites du réseau optique. En choisissant un temps de chargement du CBE dans le réseau long (typiquement plus de 5 ms), nous pouvons dans une première expérience imposer aux sites du réseau de contenir exactement deux atomes ; nous préparons alors le CBE dans un état isolant de Mott à deux atomes par site. En diminuant le temps de chargement, nous pouvons dans une seconde expérience préparer le CBE dans un état où des sites contiennent deux atomes et des sites trois atomes ou davantage ; les deux situations conduisent à des résonances qualitativement et quantitativement distinctes (voir Fig. 4). Le spectre en  $B$  est profondément modifié par la distribution non uniforme des atomes. Qui plus est, les sites à trois atomes donnant lieu à une RD produisent des états corrélés entre degrés de liberté de spin et degrés orbitaux.



**Figure 4.** Spectroscopie de désaimantation résonnante dans un réseau optique 3D montrant la sensibilité vis-à-vis de l'occupation des sites. La préparation dans un état isolant de Mott à deux atomes par site conduit au spectre symétrique supérieur. La préparation d'un système dans lesquels cohabitent deux ou trois atomes par site, conduit à la structure à pics multiples. (b) Schéma explicatif du décalage induit par les interactions intrasites. (c) Largeur de la résonance en  $B$  en fonction du temps de chargement du CBE dans le réseau.

Pour finir ce tour d'horizon de nos expériences récentes, nous avons préparé dans un réseau optique 3D profond un CBE-Cr dans un état isolant de Mott avec deux atomes par site. Ensuite, nous avons porté les atomes dans l'état Zeeman  $m = -2$  en utilisant l'effet de déplacement lumineux d'un laser quasi-résonant (nommé laser QZE pour quadratic Zeeman effect). Nous avons ainsi préparé un condensat métastable à l'écart des résonances de RD mentionnées ci-dessus. Après coupure du laser QZE, nous mesurons en fonction du temps la dynamique cohérente de spin du système induite par les collisions élastiques entre atomes. Des oscillations rapides de période de l'ordre de 0,1 ms, sont induites par les

interactions de van der Waals entre deux atomes d'un même site; il s'agit d'oscillations d'échange de spin qui s'amortissent par effet tunnel. Sur une échelle de temps bien supérieure (de l'ordre de 5 ms), nous observons des oscillations de spin que nous interprétons comme étant induites par les interactions dipolaires entre atomes de sites distincts.

## 5 Conclusion

Notre condensat dipolaire à composantes multiples placé dans un réseau 3D et hors résonance de relaxation, est un candidat de premier ordre pour l'étude et la simulation du magnétisme quantique [12, 13]. En effet, la description des condensats en réseau avec des interactions dipolaires utilise une extension du modèle de Bose-Hubbard comportant en plus des termes d'interaction entre proches voisins des termes faisant intervenir des sites éloignés entre eux pour tenir compte de la longue portée des interactions dipolaires. Les travaux théoriques dans cette direction prédisent entre autres l'apparition de phases quantiques exotiques [9] et des analogies fécondes avec l'effet Hall quantique [14].

Notre effort de recherche est soutenu par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche dans le cadre du CPER et par le Conseil Régional Île-de-France par l'intermédiaire de l'IFRAF (DIM Nano-K).

## Références

1. Q. BEAUFILS *et al.*, All-optical production of chromium Bose-Einstein condensates, *Physical Review A*, **77**, 061601R (2008).
2. B. PASQUIOU *et al.*, Control of dipolar relaxation in external fields, *Physical Review A*, **81**, 042716 (2010).
3. B. PASQUIOU *et al.*, Spin Relaxation and Band Excitation of a Dipolar Bose-Einstein Condensate in 2D Optical Lattices, *Physical Review Letters*, **106**, 015301 (2011).
4. A. DE PAZ *et al.*, Resonant demagnetization of a dipolar BEC in a 3D optical lattice, [arXiv:1212.5469](https://arxiv.org/abs/1212.5469) (2012).
5. B. PASQUIOU *et al.*, Spontaneous Demagnetization of a Dipolar Spinor Bose Gas in an Ultralow Magnetic Field, *Physical Review Letters*, **106**, 255303 (2011).
6. B. PASQUIOU *et al.*, Thermodynamics of a Bose-Einstein Condensate with Free Magnetization, *Physical Review Letters*, **108**, 045307 (2012).
7. T. OHMI & K. MACHIDA, Bose-Einstein Condensation with internal degrees of freedom, *J. of the Phys. Soc. of Japan*, **67**, 1822 (1998).
8. R. DIENER & T.-L. HO, Chromium spinor condensate : a biaxial or uniaxial spin nematic, *Physical Review Letters*, **96**, 190405 (2006).
9. I. DANSHITA & C. SA DE MELO, Supersolid phases of dipolar bosons in optical lattices, *Physical Review Letters*, **103**, 225301 (2009).
10. E. MARÉCHAL *et al.*, Longitudinal Stern-Gerlach effect for slow cesium atoms, *European Physical Journal D*, **2**, 195 (1998).
11. L. SANTOS & T. PFAU, Spin-3 Chromium Bose-Einstein Condensate, *Physical Review Letters*, **96**, 015301 (2006).
12. S. NASCIBENE *et al.*, Quantum simulations with ultracold quantum gases, *Nature Physics*, **8**, 267–276 (2012).
13. A. AUERBACH, *Quantum magnetism*, Springer-Verlag NY (1994).
14. M. BARANOV *et al.*, Condensed Matter Theory of Dipolar Quantum Gases, *Chemical Reviews*, **112**, 5012 (2012).



# Décomposition en Modes Dynamiques Économique pour l'identification de structures cohérentes dans des écoulements 3D

Florimond Guéniat, Maxime Delorme, Luc R. Pastur & François Lusseyran

LIMSIS CNRS, Université Paris Sud, Bât. 508, BP 133, 91403 ORSAY Cedex  
 florimond.gueniat@limsi.fr

**Résumé.** Dans cette contribution, nous présentons une méthode pour extraire des structures spatiales cohérentes de grands jeux de données, par une variante économique de la décomposition en modes dynamiques. La convergence de l'algorithme repose sur une décimation pertinente de l'information. Une nouvelle définition de qualité des observables conservées est introduite, qui ne nécessite pas de connaître les équations d'évolutions du système.

**Abstract.** In this paper, we present an efficient way to use Dynamical Mode Decomposition on large dataset. This method relies on a smart decimation of the dataset. Therefore, an equation-free definition for the quality of selected observables is proposed.

## 1 Introduction

Un système physique ouvert possède, potentiellement, un nombre infini de degrés de liberté. Néanmoins, les écoulements sont le plus souvent organisés autour de structures cohérentes qui jouent un rôle décisif dans la dynamique. On peut par exemple penser aux grandes structures tourbillonnaires des allées de Von Karman, que l'on observe aussi bien dans des expériences de laboratoire que dans le sillage de structures à grande échelle telles que des navires ou des îles, pour lesquels les nombres de Reynolds sont très grands et la turbulence pleinement développée sur la gamme des échelles inertielles. Ces structures invitent à chercher des moyens de réduction de la dimension effective des écoulements considérés.

Une méthode récente, la Décomposition en Modes Dynamiques (DMD) [1, 2], permet, sous l'hypothèse d'existence d'un opérateur d'évolution stationnaire, de décomposer toute réalisation  $\mathbf{u}$  du champ mesuré sous forme de modes spatiaux  $\Phi$  dépendant de l'espace  $\mathbf{r}$  appelés modes dynamiques et de modes temporels  $\alpha(t)$ , qui prennent la forme d'exponentielles complexes. Cette méthode ne peut, malheureusement, pas toujours être utilisée dans le cas de grands jeux de données – par exemple en simulation numérique 3D –, résolues à la fois temporellement et spatialement, la mémoire et les puissances de calcul requis étant hors de portée pour l'application de la DMD.

Dans cet article, nous présentons une méthode efficace pour l'extraction des structures spatiales et temporelles DMD dans le cas de grosses bases de données. L'algorithme se base sur une dégradation de la résolution spatiale. Décimer les observables implique de choisir attentivement celles conservées, *ie* qu'elles portent une information pertinente relativement à la dynamique du champ. Cela rejoint la question de l'observabilité du système réduit. Construire les matrices de Kalman ou d'observabilité [5, 6] n'est pas possible dans le cas de grands jeux de données, où la dimension du vecteur d'état de l'ordre du million. Afin de s'assurer qu'il n'y a aucune perte d'information critique, une méthode de vérification de qualité de l'observabilité des composantes sélectionnées est proposée.

Dans cette contribution, nous présentons la méthode en détail et l'illustrons sur un écoulement de cavité 3D entraînée par couche cisailée.

## 2 Décomposition en mode dynamique

L'objectif de la décomposition en mode dynamique (DMD) est d'extraire d'un jeu de données, des bases spatiales et temporelles pertinentes, au vu de la dynamique, pour décrire les réalisations des champs

observés, par exemple de vitesse. Nous rappelons rapidement ici l'algorithme. Le lecteur intéressé pourra trouver plus de détails dans [2–4].

## 2.1 Algorithme

**Opérateur d'évolution** Soit un système dynamique évoluant sur une variété  $\mathcal{D}$  de dimension  $n_{\mathcal{D}}$ , et  $X$  le vecteur d'état appartenant à  $\mathcal{D}$ . Soit encore  $\phi_{\Delta t}$  le flot de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{D}$ , amenant  $X(t)$  au temps  $t$  à l'état  $X(t + \Delta t)$  au temps  $t + \Delta t$ ; où  $\Delta t$  est le pas de temps. Soit  $\Pi$  la mesure de  $\mathcal{D}$  sur l'espace des observables  $\Omega$ , de dimension  $n_p$ . L'observable  $\mathbf{u}$  s'écrit donc  $\mathbf{u}(t) = \Pi(X(t))$ . Dans la suite, par abus de notation,  $\mathbf{u}(t_0 + n\Delta t)$  sera écrit comme  $\mathbf{u}_n$ .

On considère l'opérateur  $A$  défini par :

$$A \circ \Pi = \Pi \circ \phi_{\Delta t}, \quad (1)$$

où  $\circ$  est l'opérateur de composition. On peut remarquer, de l'équation (1) et de la définition du flot  $\phi_{\Delta t}$ , que l'on a :

$$A\mathbf{u}_n = A\mathbf{u}_{n+1}. \quad (2)$$

$A$  est donc un opérateur d'évolution sur les observables. L'objectif de la DMD est d'extraire des vecteurs propres et des valeurs propres de cet opérateur.

**Opérateur similaire** En mécanique des fluides, la dimension de l'opérateur  $A$  est prohibitivement grande. L'algorithme DMD vise à chercher un opérateur similaire à  $A$ , de taille réduite, afin de pouvoir estimer une partie des valeurs et vecteurs propres de  $A$ . Cet opérateur réduit est construit à partir des informations disponibles, *ie* le jeu de données. Par souci de simplicité, nous ne présentons que la méthode proposée par Schmid en 2008 [1], basée sur la construction d'une matrice compagnon.

Si  $N + 1$  est le nombre de réalisations à disposition, et en notant  $K_i^j$  un jeu de données des réalisations, ordonnées en temps, *ie*  $K_i^j = \{\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_j\}$ , alors :

$$\begin{aligned} AK_1^N &= \{A\mathbf{u}_1, \dots, A\mathbf{u}_N\} \\ &= \{\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{N+1}\} \\ &= K_2^{N+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

On suppose que la dernière réalisation est linéairement dépendante des  $N$  premières. Cette hypothèse est pertinente dès lors que l'on ne rajoute pas d'informations dynamique nouvelle en rajoutant des réalisations à la base de données. On a alors :

$$\mathbf{u}_{N+1} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_N\mathbf{u}_N + \mathbf{r}, \quad (4)$$

où  $\mathbf{r}$  est un résidu. Les éléments  $c_i$  peuvent être identifiés par minimisation de la norme :

$$\mathbf{c}_{opt} = \min_{\mathbf{c}} \left\| \mathbf{u}_{N+1} - \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{u}_j \right\|_2. \quad (5)$$

En utilisant l'équation (3), on obtient :

$$K_2^{N+1} = K_1^N S + R. \quad (6)$$

$R$  est un résidu.  $S$  est une matrice compagnon de taille  $N \times N$ . Elle permute les  $i$  premières réalisations sur les suivantes, à l'exception de la dernière, qui est développée sur la dernière colonne suivant l'équation (4). Si l'on néglige  $R$  alors la matrice compagnon est similaire à  $A$ , et donc les valeurs propres de  $S$  sont des valeurs propres de  $A$ . De plus, pour tout vecteur propre  $\zeta$  de  $S$ ,  $\Phi \equiv K_1^N \times \zeta$  est un vecteur propre de  $A$ .

### 3 Décomposition en mode dynamique économique

La DMD s'est montrée très efficace pour le traitement de données et l'identification de structures à partir de données parcellaires ou faiblement résolues [4]. Néanmoins, dans le cadre de simulations numériques, où le nombre de points par réalisation est typiquement de l'ordre du million pour des champs 3D, manipuler les jeux de données de plusieurs dizaines de Go peut s'avérer problématique.

On peut reformuler la décomposition en mode dynamique, en utilisant ses propriétés spectrales :

$$K_1^N = MV + R \approx MV, \quad (7)$$

$R$  est une matrice de résidu.  $V \in \mathbb{C}^{n_p \times N}$  est matrice de Vandermonde généralisée suivante :

$$V := \begin{pmatrix} \lambda_1^{t_1} & \lambda_1^{t_2} & \dots & \lambda_1^{t_N} \\ \lambda_2^{t_1} & \lambda_2^{t_2} & \dots & \lambda_2^{t_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N_{\text{md}}}^{t_1} & \lambda_{N_{\text{md}}}^{t_2} & \dots & \lambda_{N_{\text{md}}}^{t_N} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

et  $M \equiv \{\Phi_1 \dots \Phi_{N_{\text{md}}}\} \in \mathbb{C}^{n_p \times N_{\text{md}}}$  contient les modes spatiaux.

En fait, il est connu [7,8] que les matrice de Vandermonde diagonalisent les matrices compagnons. On peut alors réécrire :

$$M \approx KV^+$$

avec, en général,  $N_{\text{md}} = N$ . On a alors  $V^+ = V^{-1}$ . Dans le cas contraire,  $V^+$  est la pseudo inverse de Moonrose de la matrice de Vandermonde  $V$ .

Identifier les valeurs propres permet donc de reconstruire les modes. Une idée naturelle pour extraire les valeurs propres de l'opérateur est d'utiliser la DMD pour capter, sur des ensembles dégradés de données, les valeurs propres indispensable à la construction de la matrice de Vandermonde.

La question du choix des observables conservées lors de la dégradation spatiale se pose alors, la qualité de l'identification des fréquences étant cruciale.

#### 3.1 Qualité des observables

On cherche à dégrader le champ, c'est-à-dire à ne conserver qu'un vecteur  $\tilde{\mathbf{u}}$ , de taille  $\tilde{n}_p < n_p$ , issu de  $\mathbf{u}$ .  $\tilde{\mathbf{u}}$  appartient à l'espace réduit  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ . On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} = A\mathbf{u}_n \\ \tilde{\mathbf{u}}_n = C\mathbf{u}_n \end{cases},$$

$C$  est la matrice de passage de  $\Omega$  à  $\tilde{\Omega}$ . Par conséquent,  $C$  est une matrice de taille  $\tilde{n}_p \times n_p$ , composée de 1 et 0. La  $i$ ème ligne de  $C$  est en pratique emplie de 0 sauf pour un élément  $c_{ij}$ , tel que  $\tilde{u}_i = u_j$ .

L'observabilité d'un système est habituellement déterminée par l'estimation du rang de la matrice d'observabilité de Kalman  $\mathcal{K} \in \mathcal{M}_{n_p \times \tilde{n}_p, n_p}$  :

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n_p-1} \end{pmatrix}.$$

Si le rang de  $\mathcal{K}$  est  $n_p$ , alors  $\tilde{\mathbf{u}}$  est observable [6].

En mécanique des fluides, l'opérateur  $A$  n'est en général pas accessible, mais la DMD permet une estimation de l'opérateur en utilisant l'équation (6) :

$$A \approx K_1^N S K_1^N.$$

En pratique, calculer  $A^i$ , pour  $i > 1$ , est risqué. L'opérateur est seulement estimé, et le module des valeurs propres de  $A$  peut être suffisamment supérieur à 1 pour que le conditionnement de  $A^i$  s'effondre. De plus, la dimension de  $\mathcal{K}$  peut rapidement mettre hors de portée un calcul de rang.

Lors de la propagation de  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{u}_{n+1} = A\mathbf{u}_n,$$

la  $i$ ème composante de  $\mathbf{u}_{n+1}$  est donné par  $\sum a_{ij}u_n^j$ . Si de nombreuses composantes  $u_n^j$  sont nécessaires pour obtenir  $u_{n+1}^i$ , c'est-à-dire si de nombreuses composantes  $a_{ij}$  sont significativement non nulles sur la  $i$ ème ligne de  $A$ , alors la sortie  $u_{n+1}^i$  prend de l'information dans une grande partie du vecteur d'état,  $\mathbf{u}$ . Donc, une telle composante est probablement à même d'être considérée dans la recherche d'une bonne observable pour le champ réduit,  $\tilde{\mathbf{u}}$ .

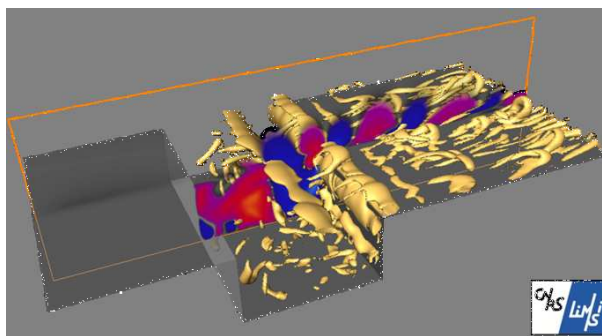
De la même façon, une minorité de composantes  $a_{ji}$  significativement non nulles sur la  $i$ ème colonne de  $A$  indique que la  $i$ ème composante de  $\mathbf{u}$  influe peu sur l'évolution des autres composantes  $j \neq i$  du vecteur état. Sa dynamique est spatialement localisée. En suivant la définition de l'observabilité, capter toute la dynamique du système implique de devoir prendre en compte une telle composante.

Se basant sur ces deux remarques, nous proposons une nouvelle définition de la qualité d'une observable, liée à sa dépendance dynamique vis-à-vis des différents points du champ. On définit la  $i$ ème composante du vecteur  $\boldsymbol{\nu}$ , que l'on nomme vecteur de pertinence dynamique, en comptant les composantes significatives de la  $i$ ème ligne de la matrice  $A$  moins le nombre de composantes significatives de la  $i$ ème colonne.  $\boldsymbol{\nu}$  est donc un vecteur de dimension  $n_p \times 1$ , comme  $\mathbf{u}$ .

Seules les composantes  $u_i$  du vecteur d'état, associées aux  $\tilde{n}_p$  composantes  $v_i$  les plus grandes de  $\boldsymbol{\nu}$ , seront à considérer en tant qu'observables de qualité.

Cependant, la construction de  $A$ , de taille  $n_p \times n_p$ , et donc l'estimation de la qualité *a priori* des observables, peut être délicate dans le cas de grands jeux de données. Il est néanmoins possible de vérifier *a posteriori* l'intérêt des observables choisies. Il suffit de construire l'opérateur  $\tilde{A}$  qui agit sur des observables réduites choisies arbitrairement, en suivant le processus d'estimation de  $A$ . Par itération, on peut rejeter et remplacer les composantes ayant de mauvaises qualités d'observabilité par d'autres, en suivant la méthode proposée, jusqu'à obtenir un panel d'observables  $\tilde{\mathbf{u}}$  ayant des propriétés d'observabilité maximale.

## 4 Résultats sur un jeu de données 3D

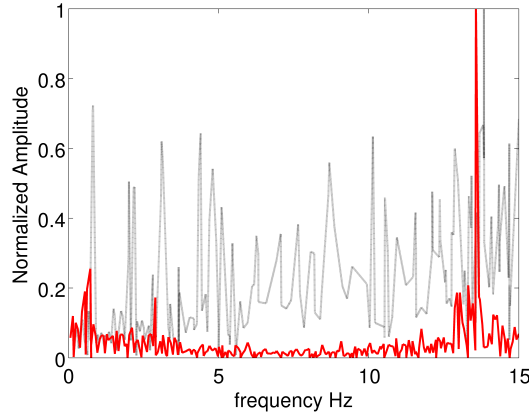


**Figure 1.** Vue d'un instantané de l'écoulement produit par simulation numérique 3D. L'écoulement incident vient de la gauche de l'image. Sont représentées des isosurfaces du facteur  $Q$  (zones de rotation) auxquelles se superposent le champ de vorticité, dans un plan de coupe parallèle à l'écoulement.

Pour illustrer la méthode, nous considérons un écoulement de cavité 3D entraînée par une couche cisailée, cf. figure 1. Les écoulements de cavité sont connus pour présenter des spectres de puissance

piqués autour des fréquences d'oscillations auto-entretenues de la couche cisailée. Plus de détails peuvent être trouvés dans [9].

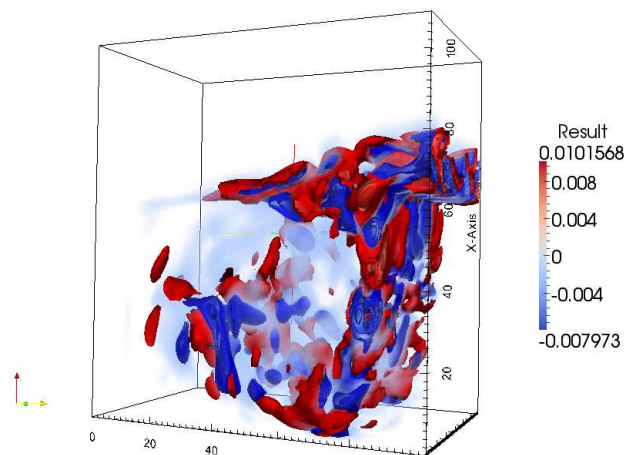
La sélection des points d'observations, a posteriori, a été effectué. Nous avons sélectionné  $\tilde{n}_p = 3500$  points d'observation sur un total de  $n_p \approx 1\,200\,000$  points. La qualité des points sélectionnés se révèle sur les spectres de la figure 2.



**Figure 2.** Spectre extrait de l'opérateur  $\tilde{A}$ , en rouge pour des observables bien choisies, en noir pointillé pour des observables mal choisies. Voir texte pour le détail.

Le spectre provient de l'interprétation de l'équation (8). Pour chaque mode  $k$ , la valeur propre correspondante de l'opérateur est associée à une fréquence  $f_k$ , que l'on peut expliciter en réécrivant la valeur propre :  $\lambda_k = \exp(\sqrt{-1} 2\pi f_k \Delta t)$ . Le spectre est obtenu en associant à cette fréquence la norme du mode correspondant, au sens  $\mathcal{L}^2$ .

Pour illustrer l'importance du choix des points d'observation, le spectre est tracé dans le cas d'observables bien choisies (en rouge, gris foncé), et dans le cas d'observables mal choisies, en pointille (gris clair). Comme attendu, le spectre est inutilisable dans le second cas, les observables considérées ne rendant pas bien compte de la dynamique globale.



**Figure 3.** Norme de la vitesse du mode dominant à  $f = 13.57$  Hz, orientée par le signe de la composante transverse de vitesse.

Le mode de couche cisailée, représenté sur la figure 3, correspond à une fréquence  $f = 13.57\text{Hz}$ . C'est le mode dominant, correspondant au pic principal du spectre de la figure 2. Le mode exhibe des structures tourbillonnaires dans la couche cisailée, caractéristique de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz. On remarque que ces structures sont intrinsèquement tri-dimensionnelles, ce qui suggère l'existence d'un mode d'instabilité transverse se développant sur les tourbillons de couche cisailée avant l'impact sur le mur aval.

## 5 Conclusion

Dans cette contribution, on a tiré parti de la résilience de la décomposition en mode dynamique aux dégradations spatiales pour proposer une variante de l'algorithme, permettant de traiter, pour un coût raisonnable, de grands jeux de données. On peut ainsi approcher les valeurs propres de l'opérateur d'évolution calculé par la méthode classique de décomposition en modes dynamiques. Ces valeurs propres permettent la reconstruction de la matrice de Vandermonde asservissant l'évolution temporelle des modes dynamiques. L'inversion de cette matrice de Vandermonde donne, finalement, accès aux modes dynamiques 3D correspondant au jeu de données complet.

Cet algorithme requiert la qualité d'observable des points spatiaux conservés, afin de ne pas introduire d'erreurs dans l'identification des valeurs propres, et donc, de ne pas polluer les modes. La qualité d'une observable est évaluée *a posteriori*, par l'étude de l'interdépendance des composantes du vecteur d'état, au travers de l'opérateur d'évolution approximé. Cette approximation est permise par l'algorithme de la décomposition en mode dynamique. Au contraire des méthodes classiques d'évaluation de l'observabilité, basées par exemples sur les matrices de Kalman, cette méthode ne nécessite pas les équations d'évolution du système.

L'algorithme a été testé avec succès sur un écoulement de cavité ouverte 3D duquel les modes dynamiques 3D ont pu être extraits à partir de données spatialement dégradées.

## Références

1. P. J. SCHMID & J. SESTERHENN, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, in *61st annual meeting of the APS division of fluid dynamics*, APS, San Antonio, Texas, USA (2008).
2. C. W. ROWLEY, I. MEZIC, S. BAGHERI, P. SCHLATTER & D. S. HENNINGSON, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **641**, 115–127 (2009).
3. F. GUÉNIAT, J. BASLEY, C. DOUAY, L. PASTUR, F. LUSSEYRAN & T. M. FAURE, Opérateur de Koopman et identification de structures cohérentes : application à un écoulement de cavité, *Rencontre du Non Linéaire* (2011).
4. P. J. SCHMID, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *Journal of Fluid Mechanics*, **656**, 6–28, (2010).
5. R. E. KALMAN. On the General Theory of Control Systems, *Proc. 1st Int. Cong. of IFAC*, Moscow 1960, London 1961.
6. G. M. STANLEY & R. S. H. MAH, Observability and Redundancy in Process Data Estimation, *Chem. Engng. Sci.*, **36**, 259 (1981).
7. R. BELLMAN, *Introduction to Matrix Analysis*, SIAM (1987).
8. K. CHEN, J. H. TU & C. W. ROWLEY, Variants of Dynamic Mode Decomposition : Boundary Condition, Koopman, and Fourier Analyses, *Journal of Nonlinear Science*, **22**, 887–915 (2012).
9. J. BASLEY, L. R. PASTUR, F. LUSSEYRAN, T. M. FAURE & N. DELPRAT, Experimental investigation of global structures, in an incompressible cavity flow using time-resolved PIV, *Experiments in Fluids*, **50**, 905–918 (2010).

# Émergence d'une circulation grande échelle en turbulence 2D

Johann Héroult, Guillaume Michel, François Pétrélis & Stéphan Fauve

Laboratoire de Physique Statistique, UMR 8550, CNRS & Université Paris Diderot, Ens Paris, 24 rue Lhomond 75005 Paris, France.

jherault@lps.ens.fr

**Résumé.** La cascade inverse d'énergie est l'une des propriétés les plus étonnantes des écoulements 2D turbulents. L'énergie est transférée des échelles d'injection aux structures grandes échelles, grâce aux termes non-linéaires des équations de Naviers-Stokes 2D. Lorsque la puissance injectée  $\epsilon$  est suffisamment grande, l'échelle la plus grande de la cascade inverse est limitée par la taille du domaine, et l'énergie s'accumule à cette échelle. Ce phénomène est appelé condensation et une circulation à grande échelles (LSC) apparaît. Est-il possible de quantifier cette transition de la LSC? Quelle est la structure de cette LSC? Telles sont les questions, que nous aborderons dans notre présentation à travers nos résultats expérimentaux.

**Abstract.** One of the striking features of two dimensional turbulence is the presence of large coherent structures, formed by the inverse cascade of energy. In 2D turbulent flow, the energy cascades from the energy injection scale to the large scales and if the injected power is sufficiently large, a large scale flow can be generated at the scale of the domain. We report the experimental study of the emergence of this large scale circulation (LSC) for an electromagnetically forced flow in a liquid metal. We will analyze and quantify the emergence of this large scale circulation.

## 1 Introduction

La persistance de structures grandes échelles est un phénomène couramment observé dans les écoulements océaniques et atmosphériques. Découverte en 1665 par Cassini, la tache rouge de Jupiter, trois fois plus grande que la Terre, existe depuis au moins trois cent ans alors que son temps de rotation n'est que de sept jours. Cette apparente stabilité de ces grandes structures hydrodynamiques est tout à fait surprenante car elles coexistent et interagissent avec toute une population de structures tourbillonnaires de plus petites échelles dont le comportement est chaotique.

Afin d'étudier les mécanismes d'instabilités de structures grandes échelles en présence de turbulence, nous avons conçu une expérience de turbulence bi-dimensionnelle. Les écoulements turbulents 2d ont la particularité de générer des structures grandes échelles [1] par le biais de la cascade inverse d'énergie, qui transfère l'énergie injectée vers les grandes échelles. Nous allons étudier et quantifier l'apparition d'une circulation globale au sein de l'écoulement turbulent en fonction des paramètres de contrôle de l'expérience.

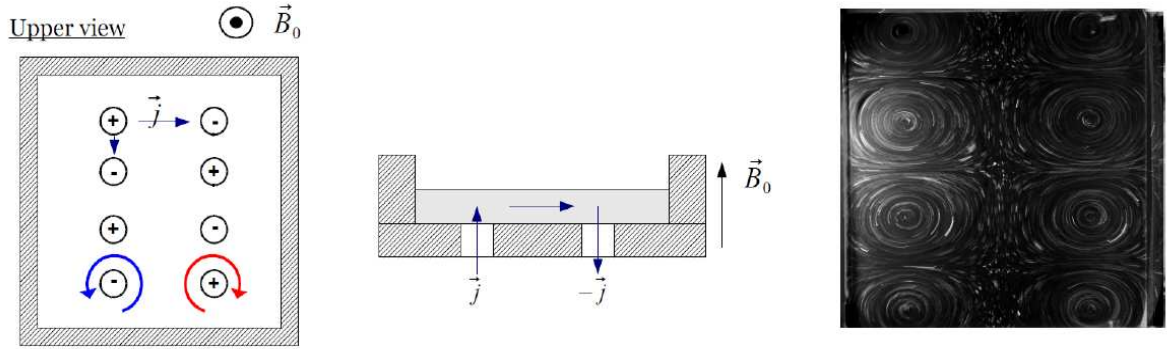
## 2 Le montage

Le fluide utilisé est un métal liquide, le Galinstan, liquide à température ambiante. C'est un alliage eutectique de gallium, d'indium et d'étain. L'intérêt du métal liquide réside dans la possibilité de générer un écoulement via les forces de Laplace [2], en imposant un champ magnétique et en injectant du courant. Le liquide est contenu dans une cellule de section carrée de côté  $L = 12$  cm avec une hauteur de fluide de 2 cm (cf. figure 1). Cette cellule est placée au centre de deux bobines de Helmholtz dont le champ magnétique vertical  $B_z$  peut atteindre 0.1 Tesla. Au fond de la cellule se trouve un réseau de huit électrodes, injectant un courant continu dans le métal liquide. La polarité des électrodes est alternée spatialement.

Comme le courant rentre ou sort par les électrodes, la densité de courant est localement radiale  $\mathbf{j} = j_r \mathbf{e}_r$ . Le fluide est alors soumis à une force de Laplace donnée par le produit vectoriel du courant avec le champ magnétique :  $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ . Le champ magnétique étant vertical, la force de Laplace est alors azimuthale et un réseau de huit vortex contra-rotatifs apparaît (cf. figure 1 de droite). Ce forçage est symétrique par rapport aux plans centraux de la cellule.

Les mesures de vitesse sont effectuées par des sondes Vives qui mesurent la tension électrique entre deux électrodes. Cette tension est directement proportionnelle au flux  $\phi$  de vitesse entre ces électrodes. Les mesures présentées dans la section 4 sont celle du flux  $\phi_L$  entre le centre de la cellule et la paroi. Seules les structures dont la taille est supérieure à  $L/2$  contribuent au flux  $\phi_L$ .

Nous avons utilisé une méthode de *particle tracking* à l'aide d'une caméra rapide qui permet de suivre les trajectoires des particules advectées par l'écoulement. De ces trajectoires, on reconstruit le champ de vitesse. Cette méthode est une alternative à la *Particle Image Velocimetry* (PIV), impossible à mettre en place pour un fluide opaque et réfléchissant.



**Figure 1.** Gauche : schéma vu du dessus de la cellule. Milieu : schéma vu en coupe de la cellule. Droite : photographie de l'écoulement laminaire induit par le forçage.

### 3 Nombres sans dimension et paramètres de contrôle

Les équations de Navier-Stokes pour un écoulement 2D incompressible dans le plan  $x0y$  sont

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} - \frac{1}{\tau} \mathbf{v} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Le membre de gauche correspond à l'opérateur de dérivée lagrangienne. Dans le membre de droite, on retrouve les termes de pression, de diffusion visqueuse et de forçage, noté  $\mathbf{f}$ . Le dernier terme de droite est la dissipation linéaire due à la friction de l'écoulement par les couches limites.

Expérimentalement, il est impossible d'obtenir des écoulements purement bidimensionnels à cause des effets tridimensionnels induits par les couches limites transverses (dans la direction  $z$ ). Dans le cas où ces couches limites sont fortement localisées, on peut approximer la dissipation par un terme linéaire de friction égal à  $\tau^{-1} \mathbf{u}$  avec  $\tau$  un temps de dissipation associé. En présence d'un champ magnétique important, celui-ci contrôle l'épaisseur de la couche limite présente au fond de la cellule. On nomme cette couche limite la couche d'Hartmann.

La dynamique de l'écoulement est régie par la compétition entre les effets inertiels et dissipatifs et on peut construire deux nombres sans dimension

$$\text{Re} = \frac{[v \cdot \nabla v]}{[\nu \Delta v]} = \frac{UL}{\nu} \quad \text{et} \quad \text{Rh} = \frac{[v \cdot \nabla v]}{[(\tau^{-1})v]} = \frac{\tau U}{L} \quad (2)$$



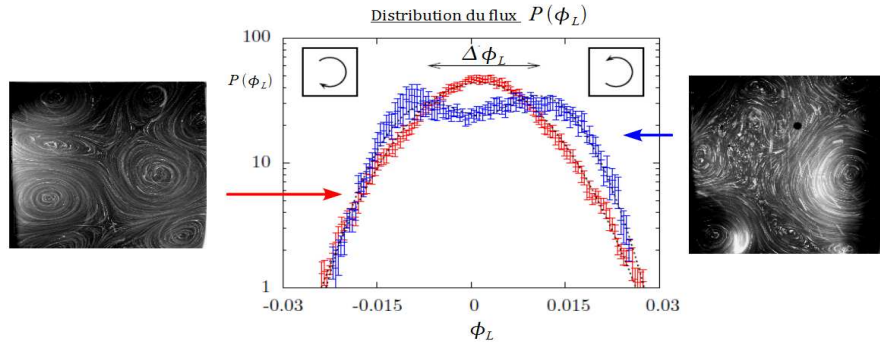
avec  $L$ , la taille de la cellule et  $U$  la vitesse du forçage, telle que  $U = \sqrt{fL}$ . Les nombres sans dimension dépendent du courant injecté  $I$  et du champ magnétique  $B$  tels que  $Re \sim \sqrt{IB}$  et  $Rh \sim \sqrt{I/B}$ .

Les effets dissipatifs à grande échelle sont dominés par la friction, car  $Re \approx 10^3 Rh$ . Le paramètre de contrôle de l'expérience est alors  $Rh$ . Lorsque  $Rh > 5$ , les termes non-linéaires de l'équation de N-S transfèrent l'énergie des échelles du forçage vers les grandes échelles : l'écoulement devient progressivement turbulent.

Dans la section suivante, nous allons quantifier l'apparition des structures à l'échelle de la cellule (de l'ordre de  $L$ ) grâce à la mesure du flux  $\phi_L$ .

## 4 Émergence de la circulation grande échelle

L'écoulement étant turbulent, la mesure du flux  $\phi_L$  par la sonde Vives montre un signal fortement chaotique et dont la densité de probabilité  $P(\phi_L)$  est gaussienne et le maximum en zéro (cf. figure 2, courbe rouge) pour  $Rh < 12$ . Cependant en augmentant  $Rh$ , la distribution devient bimodale avec deux maxima symétriques pour  $Rh > 12$  (cf. figure 2, courbe bleue).



**Figure 2.** Distribution du flux  $\phi_L$  entre le centre et la paroi de la cellule pour  $Rh = 10$  en rouge et  $Rh = 14$  en bleu. Les photographies correspondent à l'écoulement pour  $Rh < Rh_c$  à gauche et  $Rh > Rh_c$  à droite.

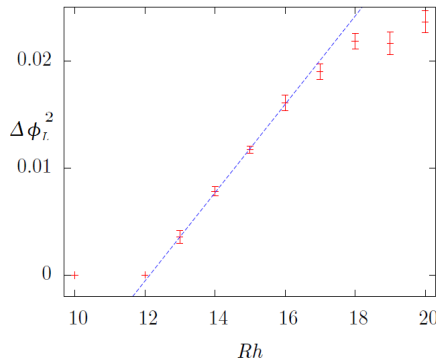
Il existe alors un point critique  $Rh_c = 12$ , tel que la courbure de la distribution  $P(\phi_L)$  en  $\phi_L = 0$  change de signe. Le développement limité de  $P(\phi_L)$  en  $\phi_L = 0$  est

$$P(\phi_L) = \alpha_0 + \frac{\alpha_2}{2}(Rh - Rh_c)\phi_L^2 - \frac{\alpha_4}{4}\phi_L^4 + \mathcal{O}(\phi_L^6). \quad (3)$$

Seuls les termes pairs sont conservés du fait de la symétrie ( $\phi_L \rightarrow -\phi_L$ ) du forçage.  $\alpha_2$  et  $\alpha_4$  sont positifs. Le changement de courbure est pris en compte par le coefficient devant le terme quadratique qui change de signe pour  $Rh > Rh_c$ . Il est au premier ordre linéaire avec l'écart au seuil  $Rh - Rh_c$ . On peut alors prédire l'évolution des maxima grâce au développement limité de  $P(\phi_L)$  pour  $Rh$  proche du point critique :

- Pour  $Rh < Rh_c$ , la dérivée de  $P(\phi_L)$  s'annule en  $\phi_L = 0$ , correspondant à un maximum de  $P$  ( $P''(\phi_L) < 0$ ).
- Pour  $Rh > Rh_c$ , la dérivée de  $P(\phi_L)$  s'annule en trois points :  $\phi_L = 0$  et  $\phi_L = \pm\Delta\phi_L = \pm\sqrt{(\alpha_2/\alpha_4)}(Rh - Rh_c)$ . Le premier correspond à un minima et les deux autres aux maxima de  $P(\phi_L)$ .

L'amplitude du maximum de la distribution  $\Delta\phi_L$  au carré est tracée en fonction de  $Rh$  sur la figure 3. Proche du point critique  $Rh_c$ ,  $\Delta\phi_L^2$  croît bien linéairement en fonction de  $Rh - Rh_c$ , en accord avec le calcul précédent.



**Figure 3.** L'amplitude du maximum de la distribution au carré,  $\Delta\phi_L^2$ , en fonction de  $Rh$

Ce résultat est analogue au comportement d'une bifurcation fourche où la solution stable  $\phi_L = 0$  en dessous du point critique, se déstabilise pour  $Rh \geq Rh_c$  en donnant deux nouvelles solutions dont l'amplitude croît en  $\phi_L \sim \sqrt{Rh - Rh_c}$ . Cependant les fluctuations turbulentes permettent au système d'explorer ces deux solutions, normalement déconnectés dans l'espace de phases dans le cas d'une bifurcation fourche. Ce développement limité est aussi analogue à celui de l'énergie libre au seuil d'une transition ferromagnétique qui passe d'un minimum en dessous du point critique à deux minima au dessus. Notons que malgré l'existence de fluctuations turbulentes,  $\phi_L$  suit un comportement de type champ moyen (comme obtenu dans une transition de phase à l'équilibre en négligeant les fluctuations).

Dans cette section, nous avons présenté la bifurcation du maximum de  $\phi_L$  en présence de turbulence. Cette bifurcation est due à l'émergence de structures cohérentes dont la taille est supérieure à  $L/2$  et dont les temps de vie vont de la seconde à la minute. Une de ces structures est présente sur la photographie à droite de la figure 2 (en bas à droite de la cellule). À partir de  $Rh > 40$ , on observe une circulation grande échelle cohérente dont le temps de vie peut dépasser l'heure. La section suivante décrit la structure de cette circulation.

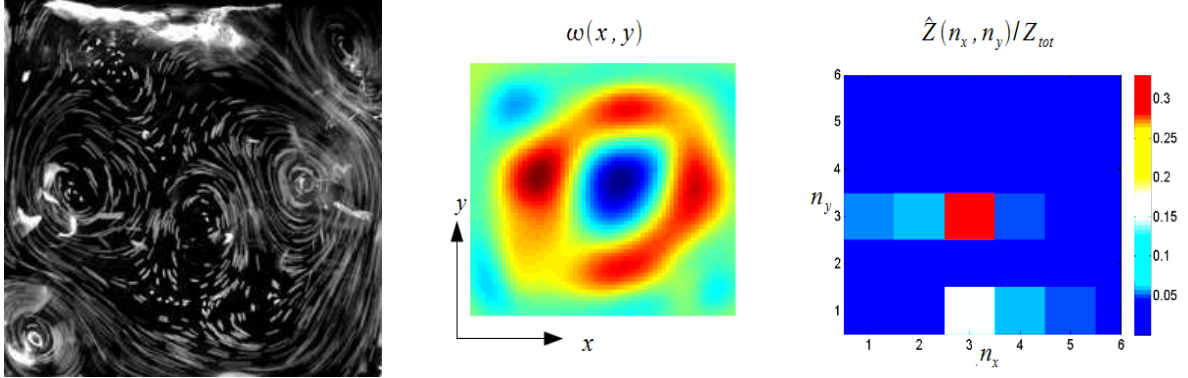
## 5 Structure de l'écoulement dans la limite faible dissipation

Lorsque  $Re > 10^4$  et  $Rh > 40$ , les effets dissipatifs deviennent très faibles comparés aux effets inertiels pour les structures à l'échelle du forçage. Dans cette limite, une circulation cohérente à grande échelle se forme (cf. figure 4). Elle est constituée d'une circulation à l'échelle du domaine  $L$  et de vortex cohérents à l'échelle du forçage  $L_f \approx L/4$ . De plus, elle est globalement stable sur des temps très longs (supérieures à 1 heure).

Quelle est l'origine de la stabilité de cette circulation à  $Rh > 40$ ? Il semble exister une séparation entre les structures concentrant la vorticité et la circulation à l'échelle de la cellule. Afin d'analyser les transferts entre ces différentes échelles, on décompose le champ de vitesse  $\mathbf{u}(x, y)$  en modes de Fourier tels que

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \sum_{n_x, n_y} \hat{u}_x(n_x, n_y) \sin(n_x k_0 x) \cos(n_y k_0 y), \\ u_y(x, y) &= \sum_{n_x, n_y} \hat{u}_y(n_x, n_y) \cos(n_x k_0 x) \sin(n_y k_0 y), \end{aligned} \quad (4)$$

avec  $k_0 = \pi/L$ . De même pour la vorticité  $\omega(x, y)$  :



**Figure 4.** A gauche : photographie de la circulation grande échelle. Milieu : moyenne temporelle de la vorticité  $\langle \omega(x, y) \rangle$ . Droite : densité spectrale d'entrophie  $\hat{Z}_{n_x, n_y} = |\hat{\omega}_{n_x, n_y}|^2$  divisée par l'entrophie totale  $Z_{tot}$ .

$$\omega(x, y) = \sum_{n_x, n_y} \hat{\omega}(n_x, n_y) \sin(n_x k_0 x) \sin(n_y k_0 y). \quad (5)$$

$(\hat{u}_x, \hat{u}_y)$  et  $\hat{\omega}$  sont liées par la relation suivante :  $\hat{\omega} = k_0(n_y \hat{u}_x - n_x \hat{u}_y)$ . Grâce à cette décomposition, on peut identifier trois modes importants pour la dynamique :

- Le mode  $(n_x, n_y) = (1, 1)$  correspond à la circulation grande échelle
- Le mode  $(n_x, n_y) = (2, 4)$  est le mode du forçage  $\mathbf{f}$ .
- Le mode  $(n_x, n_y) = (3, 3)$ .

Comme l'indique la figure 4 du milieu et de droite, la vorticité est dominée par le mode  $(3, 3)$  qui concentre plus de 30% de l'entrophie totale (l'entrophie est le carré de la norme de la vorticité). Le mode  $(2, 4)$  joue aussi un rôle important dans la stabilité car il fixe l'injection d'énergie  $\epsilon$  dans le système ( $\epsilon = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \rangle$ ).

Or le terme quadratique de l'équation de N-S ( $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ ) permet le couplage direct de ces trois modes. En effet l'interaction de deux modes de Fourier  $(n_{x1}, n_{y1})$  et  $(n_{x2}, n_{y2})$  a une projection sur les modes de Fourier :  $n_{x3} = |n_{x1} \pm n_{x2}|$  et  $n_{y3} = |n_{y1} \pm n_{y2}|$ . Par exemple si le mode 1 est le mode grande échelle  $(1, 1)$ , le mode 2 correspond au mode  $(3, 3)$  et le mode 3 à  $(2, 4)$ , on a bien  $n_{x3} = 4 = 3 + 1$  et  $n_{y3} = 2 = 3 - 1$ .

L'interaction triadique entre les modes  $(1, 1)$ ,  $(2, 4)$  et  $(3, 3)$  permet d'avancer deux hypothèses en faveur d'une plus grande stabilité de la circulation

1. L'interaction non-linéaire directe de la grande échelle  $(1, 1)$  avec le forçage  $(2, 4)$  grâce au mode  $(3, 3)$  permet de transférer directement l'énergie du forçage vers la grande échelle. Ce transfert direct peut être favorable à la stabilité du système car il est vraisemblablement moins fluctuant qu'un processus impliquant une série de plusieurs interactions non-linéaires.
2. Les modes  $(1, 1)$  et  $(3, 3)$  sont les modes les plus énergétiques (plus de 40% de l'énergie). On peut supposer que la rétroaction de ces deux modes sur le mode  $(2, 4)$  stabilise le système, en réduisant l'injection d'énergie dans le système.

La stabilité semble donc être connectée aux interactions triadiques entre les modes  $(1, 1)$ ,  $(2, 4)$  et  $(3, 3)$ .

## 6 Conclusion

Nous avons présenté deux résultats portant sur l'émergence et la stabilité des structures grandes échelles coexistant avec un background turbulent en turbulence 2d. Le premier résultat porte sur la bifurcation de l'amplitude la plus probable du flux  $\Delta\phi_L$ . Ce flux est directement relié à la présence de structures à l'échelle de la cellule. L'amplitude  $\Delta\phi_L$  augmente comme la racine de l'écart au seuil

$\sqrt{\text{Rh} - \text{Rh}_c}$ , mais contrairement à une bifurcation fourche usuelle, les deux solutions  $\pm\Delta\phi_L$  sont connectées dans l'espace des phases et le système explore ces deux solutions au cours du temps.

Le second résultat porte sur la stabilité de la circulation cohérente pour  $\text{Re}$  et  $\text{Rh}$  grand. Nous avons montré que la structure de la vorticité petites échelles permettait à la circulation grande échelle de transférer directement l'énergie des échelles d'injection aux échelles de dissipation. Inversement, elle permet aux échelles de dissipation de rétroagir sur les échelles d'injection. Ce résultat expérimental est en accord avec de récents calculs numériques [3] et analytiques [4] pour des écoulement à grand  $\text{Re}$ , où les grandes échelles rétroagissent sur les petites échelles d'injection d'énergie.

## Références

1. P. TABELING, Two-dimensional turbulence : a physicist approach , *Phys. Reports*, **362**, 1–62, (2002).
2. J. SOMMERIA, Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box , *J. Fluid Mech.*, **170**, 139–168, (1986).
3. Y.-K. TSANG & W. R. YOUNG, Forced-dissipative two-dimensional turbulence : A scaling regime controlled by drag, *Phys. Rev. E*, **79**, 045308(R) (2009).
4. B. GALLET & W. R. YOUNG, A two-dimensional vortex condensate at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **715**, 359–388 (2013).

# Dynamiques complexes de rebonds d'une goutte placée sur un bain vibré : résonances et anti-résonances

Maxime Hubert & Nicolas Vandewalle

GRASP, Institute of Physics, University of Liege, B4000 Liege, Belgium  
 maxime.hubert@ulg.ac.be

**Abstract.** We present herebelow a model for bouncing droplets consisting of two masses joined by a spring and a damper bouncing onto an oscillating plate. We analyze the dynamics through the bouncing threshold and spatio-temporal diagrams. We obtain an analytic expression for the threshold. Resonance and Anti-resonance phenomena are found and investigated. The behavior of the bouncing spring is compared to the bouncing droplet dynamics. In particular, key features of the bouncing droplet dynamics are reproduced.

## 1 Introduction

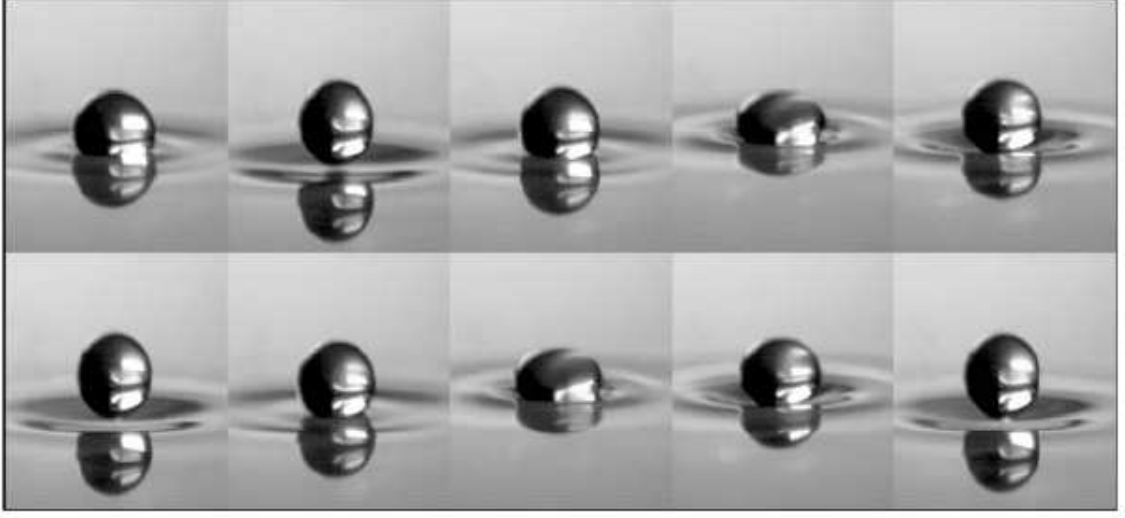
Diverses techniques ont été proposées pour empêcher la coalescence d'une goutte sur un bain de même liquide. Citons l'utilisation de molécules amphiphiles [1], l'exploitation de l'effet Marangoni [2,3] ou encore l'utilisation d'un ressaut hydraulique [4]. En 2005, Couder *et al.* ont étudié les gouttes rebondissantes [5]. Cette expérience consiste à faire vibrer verticalement la surface d'un liquide et d'y faire rebondir une goutte. Une illustration de l'expérience est donnée en figure 1.

Ces gouttes rebondissantes exhibent des phénomènes inédits. En effet, Dorbolo *et al.* [6] ont observé divers phénomènes de résonance au sein des gouttes selon l'amplitude et la fréquence du forçage appliqué. En particulier, les gouttes sont capables grâce à leurs déformations de rouler le long de la surface et de se déplacer horizontalement. Pour certaines gammes de paramètres de forçage et de gouttes [7], les gouttes deviennent des marcheurs et avancent spontanément le long de la surface du liquide vibré. Cette marche est possible grâce à la symbiose existant entre la goutte et l'onde qu'elle génère sur la surface du bain par ses impacts successifs. Les marcheurs parviennent à reproduire diverses expériences normalement réservées au monde atomique. Citons l'effet tunnel [8], la diffusion par des fentes [9] où la quantification d'orbites de révolution [10]. La compréhension complète de la dynamique de rebond d'une goutte est donc essentielle pour l'appréhension de tels phénomènes.

Le but de ce travail est de modéliser une goutte et ses déformations afin de comprendre leurs effets dans la dynamique de rebond. Nous proposons d'étudier un modèle considérant le rebond d'un ressort. Ce modèle a l'avantage de simplifier la modélisation tout en capturant l'essentiel des propriétés de la goutte rebondissante.

## 2 Définition du modèle

L'utilisation d'un tel modèle se justifie par diverses constatations expérimentales reprises dans [6] et dans [11]. En effet, une goutte, dans la limite de faibles déformations, se comporte comme un ressort amorti. Le modèle du ressort rebondissant est défini comme suit : deux masses  $m_1$  et  $m_2$  sont liées par un ressort et un amortisseur. Chacun ayant pour but de reproduire les propriétés élastiques et visqueuses de la goutte. Le ressort est de raideur  $k$  et de longueur naturelle  $L$ , l'amortisseur possède une viscosité  $\beta$ . Ce système rebondit sur un plan rigide oscillant à l'amplitude  $A$  et à la pulsation  $\omega$ . Une représentation schématique de ce modèle est donnée sur la figure 2. Cherchant à exprimer les équations du mouvement dans le référentiel du laboratoire, nous obtenons



**Figure 1.** Rebond d'une goutte sur une surface de fluide vibrée verticalement. Notons le décollage périodique de la goutte ainsi que sa déformation importante. D'après [12].

$$z_p(t) = A \cos(\omega t). \quad (1)$$

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + \beta \left( \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right) + k(z_1 - z_2 - L) + m_1 g = 0, \\ m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} - \beta \left( \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right) - k(z_1 - z_2 - L) + m_2 g = N_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

où  $z$  désigne la hauteur par rapport à la position moyenne du plan et les indices  $p$ , 1 et 2 désignent respectivement le plan, la masse 1 et la masse 2. La réaction normale due au plan est notée  $N_2$ . Définissant la pulsation naturelle du ressort comme  $\omega_0 = \sqrt{k/(m_1 + m_2)}$ , le coefficient de dissipation de l'amortisseur comme  $\xi = \beta/2\omega_0(m_1 + m_2)$  et le rapport de masse comme  $\mu = m_1/m_1 + m_2$ , nous pouvons introduire les quantités sans dimension suivantes : la fréquence réduite  $\Omega = \omega/\omega_0$ , l'accélération réduite  $\Gamma = A\omega^2/g$ , le temps réduit  $\phi = \omega t$ , la hauteur réduite  $\alpha = z/A$  et la longueur réduite  $l = L/A$ . Les équations du mouvement deviennent

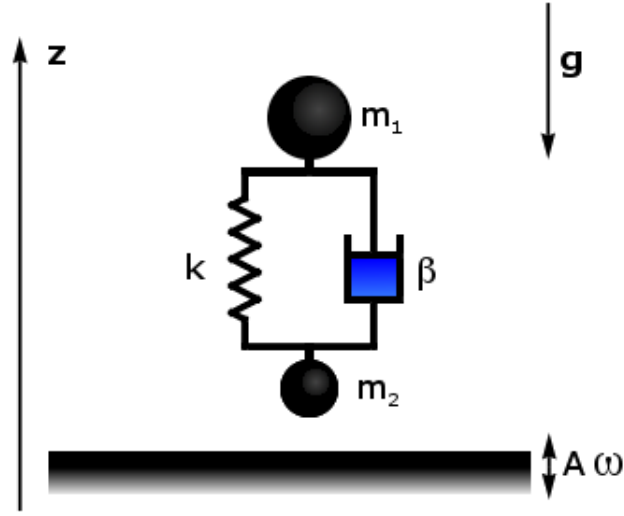
$$\alpha_p(\phi) = \cos(\phi). \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \alpha_1}{d\phi^2} + \frac{2\xi}{\mu\Omega} \left( \frac{d\alpha_1}{d\phi} - \frac{d\alpha_2}{d\phi} \right) + \frac{1}{\mu\Omega^2} (\alpha_1 - \alpha_2 - l) + \frac{1}{\Gamma} = 0, \\ \frac{d^2 \alpha_2}{d\phi^2} - \frac{2\xi}{(1-\mu)\Omega} \left( \frac{d\alpha_1}{d\phi} - \frac{d\alpha_2}{d\phi} \right) - \frac{1}{(1-\mu)\Omega^2} (\alpha_1 - \alpha_2 - l) + \frac{1}{\Gamma} = n_2(\phi), \end{cases} \quad (4)$$

où  $n_2$  correspond à la réaction normale sans dimension.

### 3 Seuil de rebond

Afin d'étudier le comportement du ressort rebondissant, il est utile de calculer la valeur minimale de l'accélération réduite  $\Gamma_{\text{th}}$  qu'il faut appliquer au plan oscillant afin de permettre au ressort de décoller. Afin d'obtenir ce seuil de rebond, partons de l'hypothèse que le ressort repose sur le plan. La masse  $m_2$  en suit donc le mouvement tandis que nous supposons que la masse  $m_1$  oscille à la fréquence du plan, avec un déphasage éventuel. Ceci nous donne comme solution



**Figure 2.** Représentation du modèle du ressort rebondissant. Deux masses  $m_1$  et  $m_2$  sont liées entre elles par un ressort de raideur  $k$  et par un amortisseur de viscosité  $\beta$ . L'objet est contraint de rebondir sur un plan rigide oscillant à amplitude  $A$  et pulsation  $\omega$ .

$$\begin{cases} \alpha_1(\phi) = \alpha' \cos(\phi + \theta), \\ \alpha_2(\phi) = \cos(\phi). \end{cases} \quad (5)$$

les paramètres  $\alpha'$  et  $\theta$  correspondent respectivement à l'amplitude et à la phase du mouvement de la masse  $m_1$ . Une première étude des équations (2) nous offre les expressions de ces deux paramètres

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\Omega)^2}{(1 - \mu\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}}, \quad (6)$$

$$\theta = -\arccos\left(\frac{(1 - \mu\Omega^2) + (2\xi\Omega)^2}{\sqrt{(1 + (2\xi\Omega)^2)((1 - \mu\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2)}}\right). \quad (7)$$

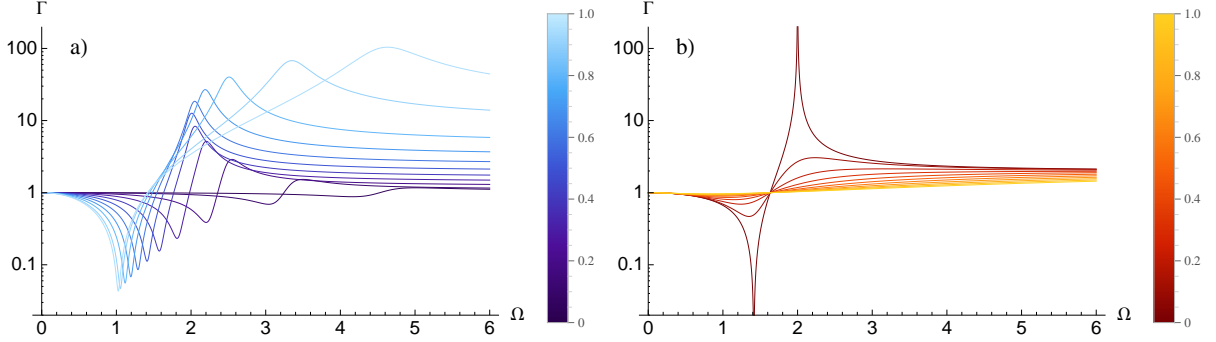
Cherchant l'instant où la réaction normale s'annule dans les équations (2), nous obtenons, après quelques manipulations, le seuil de rebond en fonction des paramètres  $\xi$  et  $\mu$

$$\Gamma_{\text{th}}(\Omega) = \sqrt{\frac{(1 - \mu\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}{(1 - \mu(1 - \mu)\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}}. \quad (8)$$

## 4 Discussion

Le seuil de rebond décrit par l'équation (8) est proposé graphiquement sur la figure 3 pour diverses valeurs du rapport en masse et du coefficient de dissipation. Nous pouvons observer l'existence d'un minimum et d'un maximum. Afin d'expliquer l'existence de ces deux extrema, nous raisonnerons à viscosité nulle. Selon l'équation (8), le minimum apparaît pour une fréquence réduite  $\Omega = 1/\sqrt{\mu}$ . Ce phénomène correspond à une résonance du ressort. En effet, si nous nous penchons sur l'équation (6), nous constatons qu'à cette fréquence, le ressort possède une élongation maximale. Dans ce cas, le plan, de par sa vibration, communique au ressort de l'énergie élastique de manière optimale. Le ressort décolle dès lors pour de

très faibles valeurs de l'accélération réduite, en particulier pour  $\Gamma < 1$ , i.e. une accélération maximale du plan inférieure à la gravité. Une illustration du mouvement à la résonance est donnée sur la diagramme spatio-temporel de la figure 4(a). Un retour sur la figure 3 nous permet de comprendre l'effet du rapport de masse et de la dissipation sur la résonance. Une viscosité croissante tend à déplacer le minimum vers les basses fréquences tout en diminuant son amplitude, tandis que le rapport de masse croissant déplace le minimum vers les hautes fréquences, toujours en diminuant son amplitude.



**Figure 3.** Seuil de rebond du ressort en fonction de la fréquence réduite (en échelle logarithmique). En (a), la valeur du coefficient de dissipation a été fixée à  $\xi = 0.02$  et le rapport de masse  $\mu$  a varié de 0 à 1. En (b), nous avons fixé le rapport de masse  $\mu = 0.5$  tandis que le coefficient de dissipation était libre de varier de 0 à 1. Nous pouvons constater que le rapport de masse et la dissipation ont tout deux un effet sur la position et l'amplitude des extrema.

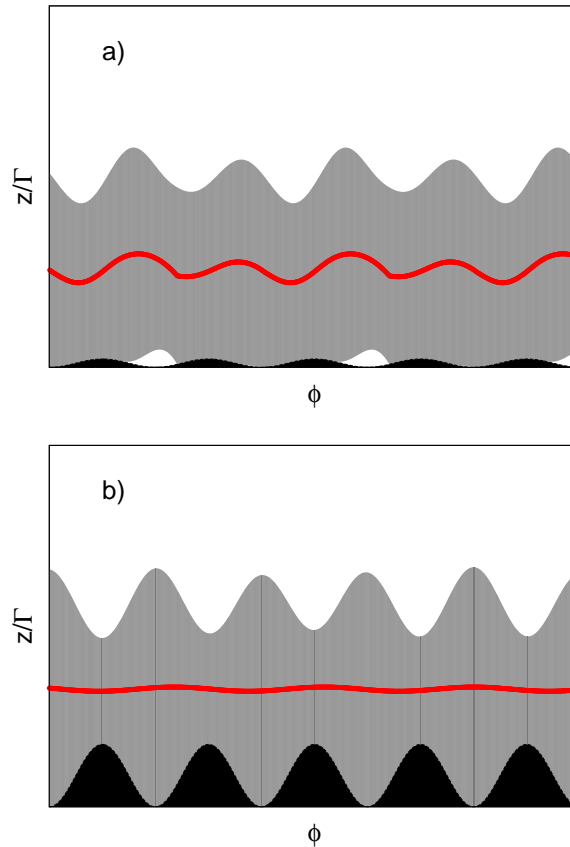
Nous observons aussi un maximum dans la courbe de seuil de rebond. Celui-ci apparaît pour  $\Omega = 1/\sqrt{\mu(1-\mu)}$  et tend à inhiber le décollage. Afin de marquer la différence entre ce phénomène et celui de résonance, nous parlerons d'anti-résonance. La figure 3 nous permet d'appréhender le comportement du maximum d'anti-résonance en fonction du rapport de masse et de la viscosité. Une viscosité croissante déplace le maximum vers les hautes fréquences tout en atténuant son amplitude. Nous pouvons même montrer que ce maximum disparaît pour une dissipation supérieure à  $\xi_{\text{lim}} = \sqrt{\mu(\mu-1)/2\mu-4}$ . Le comportement vis-à-vis du rapport de masse est plus complexe à décrire. Le maximum se déplace vers les basses fréquences lorsque  $\mu$  augmente puis ensuite revient vers les hautes fréquences lorsque  $\mu$  excède 0.5. Le maximum gagne en amplitude lorsque  $\mu$  augmente. Nous pouvons appréhender le comportement du ressort à l'anti-résonance par une analyse de l'expression (7). Dans ce cas, toujours à viscosité nulle, nous constatons que le ressort oscille en opposition de phase avec le plan. Les deux effets en présence, l'élasticité du ressort et la propulsion par le plan, luttent donc à chaque instant l'un contre l'autre, empêchant le décollage. Le mouvement est illustré sur la figure 4(b).

Le phénomène de résonance a déjà été reporté pour les gouttes et expliqué dans la littérature [6, 13], la présence d'un maximum dans le courbe de seuil de rebond a quant à lui été observé par Dorbolo *et al.* [6] mais assimilé alors à une résonance du film d'air seul. Notre modèle amène ici une conclusion différente en présentant le maximum comme une anti-résonance au sein de la goutte.

## 5 Conclusion

Nous avons créé un modèle de ressort rebondissant capable de reproduire les effets élastiques et visqueux d'une goutte. Nous avons dérivé des équations du mouvement l'expression du seuil de rebond du ressort et sommes parvenu à isoler deux phénomènes. Le premier, au minimum de la courbe de seuil de rebond, correspond à la résonance du ressort. Le plan lui communique une grande quantité d'énergie qu'il exploite pour décoller à de faibles amplitudes d'oscillations. Ce phénomène a déjà été observé par





**Figure 4.** Diagrammes spatio-temporelle du ressort rebondissant à la résonance (a) et à l’anti-résonance (b), les oscillations du ressort sont en gris, celles du plan en noir. Le mouvement du centre de masse est indiqué en rouge. Dans chaque cas, le rapport de masse a été fixé à  $\mu = 0.5$  et le coefficient de dissipation à  $\xi = 0$ . Pour la résonance, nous avons pris  $\Gamma = 0.5$ . Nous pouvons constater que le ressort décolle déjà malgré une accélération maximale du plateau plus faible que la valeur de  $g$ . Pour l’anti-résonance, nous avons pris  $\Gamma = 8$ . Malgré l’amplitude de vibration le ressort ne décolle pas, ceci est dû à l’oscillation en opposition de phase avec le plan.

Dorbolo [6] et par Gilet [13] pour les gouttes rebondissantes. Le second phénomène, au maximum de la courbe de seuil de rebond, correspond à une anti-résonance. Le ressort ne peut décoller du plan que lorsqu’il oscille à de grandes amplitudes de forçage. Ce comportement s’explique au travers du déphasage qui existe entre les oscillations du plan et celles du ressort. Ce comportement est aussi observé pour les gouttes dans Dorbolo *et al.* [6]. Nous avons aussi étudié le comportement de ces résonances en fonction de la viscosité et du rapport de masse au sein du ressort.

Un travail futur serait d’obtenir une relation liant les paramètres du ressort aux propriétés visqueuses et élastiques d’une goutte afin de la décrire pleinement en terme de ressorts. De plus, le phénomène d’anti-résonance pourrait être utilisé comme un filtre pour les gouttes. Sachant que la fréquence d’anti-résonance dépend de la masse, et donc du diamètre, nous pourrions construire un filtre nous permettant de sélectionner une taille donnée de goutte ou bien d’en éliminer une. Cette technique, aux conséquences utiles en microfluidique, permettrait une meilleur contrôle de la taille des gouttes manipulées.

## Références

1. Y. AMAROUCHENE, G. CRISTOBAL & H. KELLAY, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 206104 (2001).

2. R. SAVINO, D. PATERNA & M. LAPPÀ, *J. Fluid Mech.*, **479**, 307 (2003).
3. R. SAVINO, F. NOTA & S. FICO, *Microgravity Sci. Technol.*, **14**, 3 (2003).
4. K. R. SREENIVAS, P. K. DE & J. H. ARAKERI, *J. Fluid Mech.*, **380**, 297 (1996).
5. Y. COUDER, E. FORT, C.-H. GAUTHIER & A. BOUDAUD, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 177801 (2005).
6. S. DORBOLO, D. TERWAGNE, N. VANDEWALLE & T. GILET, *New J. Phys.*, **10**, 113021 (2008).
7. S. PROTIÈRE, A. BOUDAUD & Y. COUDER, *J. Fluid Mech.*, **554**, 85 (2006).
8. A. EDDI, E. FORT, F. MOISY & Y. COUDER, *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 240401 (2009).
9. Y. COUDER & E. FORT, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 154101 (2006).
10. E. FORT, A. EDDI, A. BOUDAUD, J. MOUKHTAR & Y. COUDER, *PNAS*, **107**, 17515 (2010).
11. K. OKUMURA, F. CHEVY, D. RICHARD, D. QUÉRÉ & C. CLANET, *Europhys. Lett.*, **62**, 237 (2003).
12. D. TERWAGNE, *Bouncing Droplets, the role of deformations*, Ph.D. thesis, Université de Liège (2011).
13. T. GILET, D. TERWAGNE, N. VANDEWALLE & S. DORBOLO, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 167802 (2008).

# Turbulence d'ondes dans les plaques minces en vibration : effet de l'amortissement

T. Humbert<sup>1,2</sup>, C. Josserand<sup>1</sup>, O. Cadot<sup>2</sup> & C. Touzé<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut D'Alembert, UMR 7190 CNRS-UPMC, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France.

<sup>2</sup> Unité de Mécanique (UME), ENSTA ParisTech, 828 Bd des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex, France  
thomas.humbert.box@gmail.com

**Résumé.** L'effet de l'amortissement sur le régime de turbulence d'ondes dans les plaques minces en vibration est étudié. Une méthode expérimentale permettant une mesure précise de la dissipation du système à toutes les échelles est premièrement introduite. Des dispositifs pratiques permettant d'accroître l'amortissement expérimentalement sont ensuite présentés. Il en résulte une augmentation significative de la pente des spectres de puissance de la vitesse transverse de telle sorte que les lois de puissance observées ne correspondent pas à des gammes inertielles. En introduisant les lois de puissance mesurées en fonction de la fréquence pour l'amortissement dans un code numérique, des conclusions similaires sont tirées.

**Abstract.** The effect of damping on the wave turbulence regime in thin vibrating plates is studied. An experimental method, allowing precise measurement of dissipation in the system at all scales, is first introduced. Practical experimental devices for augmenting the dissipation are shown. This results in a significant increase in the steepness of the power spectral density of the normal velocity so that the observed power laws are not inertial ranges. By using the measured damping power-laws in numerical simulations, similar conclusions are drawn out.

## 1 Introduction

La théorie de la turbulence d'ondes (ou turbulence faible) a pour but de décrire le comportement à long terme de systèmes faiblement non linéaires où l'énergie est échangée par les différentes échelles, prédisant à long terme l'établissement de spectres de Kolmogorov-Zakharov, par analogie avec la turbulence hydrodynamique [1–3]. Un grand nombre d'applications a été étudié depuis le contexte initial des ondes à la surface de l'eau [4–7] jusqu'à par exemple l'optique nonlinéaire [8] ou les ondes Alfvén dans un plasma [9].

La turbulence d'ondes dans les plaques minces élastiques a été étudiée théoriquement en 2006 [10] en considérant les équations de Von Kármán pour une plaque d'épaisseur  $h$ , de coefficient de Poisson  $\nu$ , de densité  $\rho$  et de module d'Young  $E$ . Celles-ci s'écrivent

$$\rho h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 \zeta + \mathcal{L}(\chi, \zeta), \quad (1)$$

$$\Delta^2 \chi = -\frac{Eh}{2} \mathcal{L}(\zeta, \zeta), \quad (2)$$

où  $\zeta$  est le déplacement transverse et  $\chi$  la fonction d'Airy. L'opérateur  $\mathcal{L}$  est bilinéaire symétrique, et s'écrit en coordonnées cartésiennes :  $\mathcal{L}(f, g) = f_{xx}g_{yy} + f_{yy}g_{xx} - 2f_{xy}g_{xy}$ . Une telle dynamique entraîne des ondes dispersives régies par la relation de dispersion  $\omega_{\mathbf{k}} = hc \|\mathbf{k}\|^2$  avec  $c = \sqrt{E/12\rho(1-\nu^2)}$ . De là, en opérant les développements classiques de la turbulence d'ondes, les solutions hors-équilibre de l'équation cinétique correspondante ont été établies dans [10]. Ce sont bien les spectres de Kolmogorov-Zakharov caractérisés par la relation entre la densité spectrale de puissance  $P_v$  de la vitesse  $v$  et la fréquence,

$$P_v \propto \epsilon_f^{\frac{1}{3}} \log^{\frac{1}{3}} \left( \frac{f c}{f} \right), \quad (3)$$

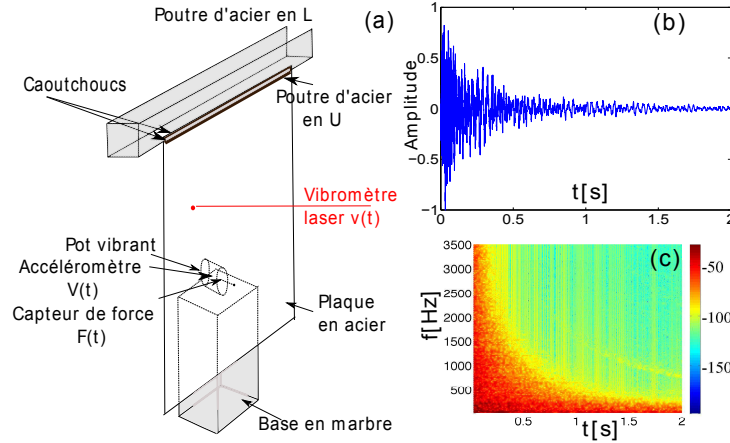
où  $\epsilon_f$  est le flux d'énergie circulant le long de la cascade jusqu'à ce qu'il soit dissipé aux abords de  $f_c$ , la fréquence de coupure du spectre. De tels spectres ont été observés numériquement [10] en injectant de l'énergie aux basses fréquences (grandes échelles) et en dissipant aux hautes fréquences (petites échelles). Les deux études expérimentales indépendantes effectuées peu après [11, 12], bien que présentant des spectres de turbulence, ne retrouvent par contre pas les spectres prédits théoriquement et numériquement. En effet, les deux expériences ont mesuré des spectres de puissance de la forme

$$P_v \propto \epsilon_I^{\frac{1}{2}} \left( \frac{f}{f_c} \right)^{-\frac{1}{2}}, \text{ avec } f_c \propto \epsilon_I^{1/3}. \quad (4)$$

Trois causes principales ont alors été évoquées pour expliquer les différences entre spectres théoriques et expérimentaux : 1) la taille finie du système expérimental [13, 14]; 2) une séparation incorrecte des échelles temporelles linéaires et nonlinéaires [15]; 3) la dissipation car elle peut affecter la fenêtre de transparence où il y a dynamique de cascade. La théorie de turbulence faible requiert que les échelles dissipatives soient largement séparées des échelles de forçage afin que l'énergie circule de façon conservative dans une gamme inertielle d'échelles. Or, dans les solides, la dissipation agit à toutes les échelles [16] de telle sorte que cette hypothèse puisse être fortement questionnée. Le but de cette étude est donc de quantifier à la fois expérimentalement et numériquement l'influence de la dissipation sur les spectres de turbulence.

Cette contribution est organisée de la façon suivante : une méthode expérimentale, permettant une mesure précise de la dissipation du système à toutes les échelles est premièrement introduite. Dans un second temps, différents régimes de dissipation sont étudiés via la dépendance du coefficient d'atténuation en fonction de la fréquence et les spectres de turbulence. Une comparaison avec des simulations numériques est également reportée en utilisant les lois de dissipation mesurées expérimentalement.

## 2 Méthode expérimentale



**Figure 1.** (a) Montage expérimental : la plaque d'acier est encastrée et forcée par un pot vibrant. Un capteur de force et un accéléromètre enregistrent la force et la vitesse à l'injection, un vibromètre laser enregistre la vitesse transverse de la plaque à un point donné. (b) Amplitude de la réponse impulsionnelle comme une fonction du temps pour la plaque en configuration *2SP* (voir texte). (c) Spectrogramme (en dB) de la réponse impulsionnelle (b) en fonction du temps  $t$  et de la fréquence  $f$ .

La plaque est composée d'acier avec  $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$  et  $\nu = 0.3$ , la vitesse des ondes étant donc  $c = 1570 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cette plaque a pour dimensions latérales  $2 \times 1 \text{ m}$  et une épaisseur de

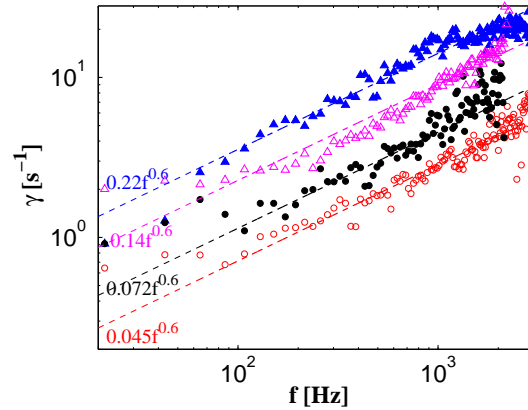
$h = 0.5$  mm. Elle pend sous son propre poids grâce à un encastrement comme décrit par la figure 1(a). Un pot-vibrant LDS V455MS est placé à mi-largeur de la plaque et 62 cm du bas. Un capteur de force Bruel & Kjaer Type 8230-002 est monté entre le pot-vibrant et la plaque afin de mesurer la force appliquée  $F(t)$ . Un accéléromètre Bruel & Kjaer Type 4517 monté sur le pot-vibrant donne la vitesse d'injection  $V(t)$ .  $V(t)$  et  $F(t)$  permettent de déduire la puissance injectée moyenne

$$\epsilon_I = \frac{\langle F(t).V(t) \rangle}{\rho S}, \quad (5)$$

où les crochets dénotent une moyenne temporelle et  $S$  la surface de la plaque. Celle-ci est mise en régime turbulent grâce à un forçage sinusoidal de fréquence correspondant à un des premiers modes de la plaque à  $f_0 = 30$  Hz. Un vibromètre laser Polytec OFV 056 mesure la vitesse transverse  $v(t)$  à un point situé à 1 m du bas de la plaque et à 40 cm du bord gauche (voir figure 1(a)). Les données acquises sont échantillonnées à 22 kHz. Les spectres de puissance sont moyennés en temps sur des fenêtres d'1 s sur 180 s, de telle sorte que la résolution fréquentielle soit 1 Hz.

L'amortissement naturel de la plaque (configuration  $N$ ) a été augmenté en utilisant deux techniques différentes. La première consiste à ajouter un amortissement homogène en peignant une (configuration  $1SP$ ) ou les deux ( $2SP$ ) faces de la plaque. La seconde méthode consiste à placer des amortisseurs sur tous les bords libres de la plaque naturelle dans le but d'atténuer les ondes réfléchies (configuration  $ED$ ). Ces amortisseurs ont une forme cylindrique, un diamètre de 1.7 cm, et sont généralement utilisés pour l'isolation thermique de tuyaux hydrauliques. Chaque configuration est caractérisée par une mesure d'amortissement dans le régime linéaire.

A cause de la grande densité modale de la plaque expérimentale, une mesure fondée sur la réponse impulsionnelle est la plus appropriée. Cependant, et ce du fait de la grande taille système, la technique classique utilisant un marteau d'impact mène à un rapport signal-sur-bruit trop faible. La réponse impul-



**Figure 2.** Evolution du facteur d'amortissement  $\gamma$  en fonction de la fréquence. Cercles rouges vides : configuration  $N$ , cercles noirs pleins :  $1SP$ , triangles magentas vides :  $2SP$ , triangles bleus pleins :  $ED$ . Lignes pointillées + équations : lois de puissance estimées en vue des simulations numériques.

sionnelle  $y_I(t)$  est donc ici construite à partir de la réponse  $y(t)$  à un signal d'excitation large bande  $x(t)$  et du filtre inverse  $x(T-t)E(t)$ , où  $E(t)$  dépend de l'excitation choisie  $x(t)$  afin de remplir la condition  $x(t) \otimes x(T-t)E(t) = \delta$ , où  $T$  est la longueur du signal,  $\delta$  le delta de dirac et  $\otimes$  le produit de convolution. Il vient alors

$$y_I = y(t) \otimes x(T-t)E(t). \quad (6)$$

La méthode développée dans [17] pour l'acoustique des salles et adaptée aux plaques réverbérantes dans [18] consiste en l'utilisation d'un sinus glissant logarithmique

$$x(t) = \sin \left[ \frac{2\pi f_1 T}{\ln(f_2/f_1)} (e^{\frac{t}{T} \ln(f_2/f_1)} - 1) \right], \quad (7)$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont respectivement la plus petite et la plus grande fréquence du signal. Dans ce cas

$$E(t) = e^{\frac{t}{T} \ln(f_2/f_1) (\frac{-6}{\log_{10}(2)})}. \quad (8)$$

Le sinus glissant logarithmique est particulièrement intéressant pour les systèmes non linéaires car il permet de faire une claire distinction entre les composantes linéaires et non linéaires du signal enregistré. Dans le signal résultant  $y_I(t)$ , la réponse linéaire commence à  $t = T$  alors que les contributions de chaque harmonique produite par la distorsion non linéaire arrivent avant  $t = T$ . Dans notre cas, même pour les plus faibles amplitudes de  $x(t)$ , les distorsions sont toujours observées. Nous vérifions que la réponse impulsionnelle linéaire ne dépend pas de l'amplitude du signal d'excitation, confirmant la précision de la technique. La figure 1(b) montre la réponse impulsionnelle de la configuration *2SP*. Le facteur d'amortissement est alors calculé à partir de la Transformée de Fourier à Court Terme (figure 1(c)). L'énergie décroît de façon exponentielle avec le temps, et plus rapidement pour les hautes fréquences que pour les basses. Le facteur d'amortissement est donné pour chaque bande de fréquence par la pente de la décroissance exponentielle.

La figure 2 montre l'évolution du facteur d'amortissement  $\gamma$  pour les quatre conditions expérimentales. Il est intéressant de noter que malgré les différentes sources d'atténuation, les facteurs d'amortissement présentent tous un comportement qui peut être caractérisé par une dépendance à la fréquence sous forme d'une loi de puissance avec un exposant proche de  $0.6 \pm 0.05$ . Grâce à cette remarque, une loi générale d'amortissement peut être fixée pour l'analyse

$$\gamma(f) = \alpha f^{0.6}. \quad (9)$$

Nous pouvons alors déterminer pour chaque configuration le coefficient  $\alpha$  permettant la meilleure interpolation. Les quatre configurations sont alors discriminées par un coefficient relatif  $\gamma_*$ , rapport du paramètre  $\alpha$  avec celui du cas naturel  $\alpha_N$  :

$$\gamma_* = \frac{\alpha}{\alpha_N}. \quad (10)$$

Les facteurs d'amortissement  $\gamma_*$  sont reportés pour chaque configuration dans la Table 1 montrant une variation de l'atténuation d'un facteur 1 à 5.

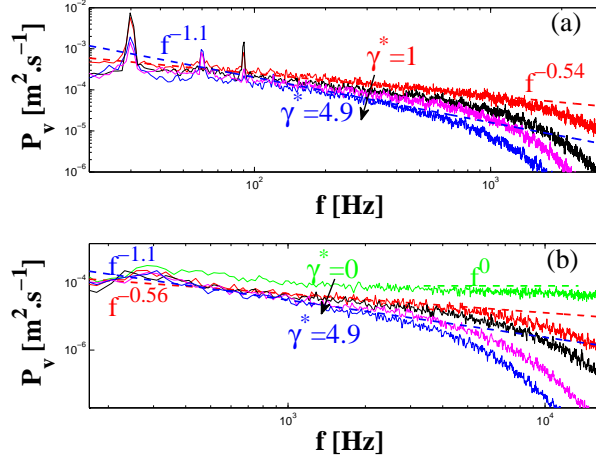
**Table 1.**  $\gamma_*$

Configuration	$N$	<i>1SP</i>	<i>2SP</i>	<i>ED</i>
$\gamma_*$	1	1.6	3.1	4.9

Les simulations numériques des équations de plaque de von Kármán sont effectuées à l'aide d'une méthode pseudo-spectrale déjà introduite dans [10]. Nous simulons une plaque avec des conditions aux limites périodiques et les mêmes propriétés mécaniques que celle utilisée expérimentalement ( $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$  et  $h = 0.5 \text{ mm}$ ), mais une surface de  $62\text{cm} \times 62\text{cm}$ . La plaque simulée est plus petite que dans les expériences pour prendre en compte les conditions aux limites différentes de telle sorte que le numérique doit être comparé avec le centre de la plaque uniquement.  $256 \times 256$  modes spatiaux sont résolus, en bon accord quantitatif avec la gamme de fréquence résolue expérimentalement. Les mêmes coefficients d'atténuation que dans l'expérience sont pris et l'injection est faite dans la gamme de fréquence [65 : 230]Hz.

### 3 Résultats

Les résultats expérimentaux et numériques sont présentés en parallèle pour les quatre configurations. De plus, le cas idéal  $\gamma_* = 0$  est considéré numériquement comme témoin des prédictions théoriques de la turbulence d'ondes.



**Figure 3.** Densités spectrales de puissance de la vitesse transverse pour les quatre configurations. Lignes pointillées rouges + equations : plus petite pente. Lignes pointillées bleues + equations : plus grande pente. (a) Expériences : pour  $\gamma_* = 1$  (rouge)  $\epsilon_I = 0,56 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-3}$ , pour  $\gamma_* = 1.6$  (noir)  $\epsilon_I = 0,54 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-3}$ , pour  $\gamma_* = 3.1$  (magenta)  $\epsilon_I = 0,52 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-3}$  et pour  $\gamma_* = 4.9$  (bleu)  $\epsilon_I = 0,48 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-3}$ . (b) Numérique : pour  $\gamma_* = 0$  (vert)  $\epsilon_I = 0,057 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-3}$ , autres cas  $\epsilon_I = 0,024 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-3}$ .

La figure 3(a) présente les densités spectrales de puissance de la vitesse transverse pour les quatre configurations expérimentales et des puissances injectées similaires. Il est important de premièrement noter que tous les spectres présentent un comportement turbulent puisque toute la gamme de fréquence est remplie par un important couplage nonlinéaire entre les modes de vibration, couplage engendrant un processus de cascade des grandes aux petites échelles. Tous les spectres se comportent approximativement comme des lois de puissance dans la gamme de cascade avec des exposants qui deviennent clairement plus petits quand  $\gamma_*$  augmente. Pour la plaque naturelle, l'exposant  $-0.5$  est consistant avec les résultats précédents [11, 12]. Pour la plaque la plus amortie, l'exposant est presque deux fois plus élevé.

La figure 3(b) montre les densités spectrales de puissance de la vitesse normale simulées numériquement pour des puissances injectées plus grandes. Des spectres similaires sont trouvés, avec des comportements en lois de puissance munies d'exposants atteignant presque les même valeurs qu'expérimentalement. Pour le cas théorique  $\gamma_* = 0$  avec un amortissement seulement aux petites échelles (formellement uniquement après une fréquence critique  $f_c$  correspondant à la longueur d'onde de coupure  $\lambda_c \sim 1 \text{ cm}$ ), le spectre est presque plat comme attendu par la théorie de turbulence d'onde.

Ces résultats montrent clairement que la pente des spectres turbulents de plaques minces en vibration présente une forte dépendance avec l'amortissement, indiquant que ce phénomène constitue un facteur important des différences entre spectres théoriques et expérimentaux.

### 4 Conclusions et perspectives

L'effet de l'amortissement sur le comportement turbulent de plaques en vibration a été investigué à la fois expérimentalement et numériquement. L'augmentation de la dissipation entraîne une augmentation considérable de la pente des spectres de puissance. Bien que la présence d'un régime turbulent dans lequel

un processus de cascade est impliqué ne soit pas remis en cause, notre analyse souligne qu’une comparaison directe entre les spectres de turbulence mesurés et les prédictions théoriques n’est pas approprié. En effet, le comportement des lois de puissance indique que le flux d’énergie n’est pas constant car la dissipation à toutes les échelles ne peut être négligée. Un tel effet n’est pour le moment pas pris en compte dans la théorie de turbulence d’ondes et des avancées théoriques dans cette direction seraient utiles afin de fournir un cadre permettant une comparaison intéressante entre théorie et expériences.

Nos recherches actuelles tentent de comprendre pourquoi des différences sont observées quant à la dépendance des spectres avec la puissance injectée. En effet, alors que la théorie et les simulations numériques en présence d’amortissement présentent une dépendance en puissance  $1/3$ , les expériences sont plutôt favorables à une loi en fonction de la racine carrée de la puissance injectée. La première interprétation pourrait être que les expériences sont dominées par des interactions à trois ondes alors que la théorie considère des interactions à quatre ondes. Mais là encore, l’importance de l’amortissement dans la dynamique de notre système ainsi que la dépendance de la fréquence de coupure avec la puissance injectée rendent incertaine la comparaison entre les observations expérimentales et les prédictions théoriques.

## Références

1. V. E. ZAKHAROV, V. S. LVOV & G. FALKOVICH, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I : Wave Turbulence*, Springer, (1992).
2. A. C. NEWELL & B. RUMPF, Wave Turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **43** 59–78 (2011).
3. S. NAZARENKO, *Wave Turbulence*, Springer (1899).
4. K. HASSELMANN, On the Non-Linear Energy Transfer in a Gravity-Wave Spectrum, *J. Fluid Mech.*, **15**, 273–281 (1962).
5. V. E. ZAKHAROV & N. N. FILONENKO, Energy Spectrum for Stochastic Oscillations of the Surface of a Liquid, *Sov. Phys. Dokl.*, **11**, 881–884 (1967).
6. P. JANSSEN, Nonlinear Four-Waves Interactions and Freak Waves, *J. Phys. Oceanog.*, **33**, 863–884 (2003).
7. É. FALCON, C. LAROCHE & S. FAUVE, Observation of Gravity-Capillary Wave Turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 094503 (2007).
8. S. DYACHENKO, A. C. NEWELL, A. PUSHKAREV & V. E. ZAKHAROV, Optical Turbulence : Weak Turbulence, Condensates and Collapsing Filaments in the Nonlinear Schrödinger Equations, *Physica D*, **57**, 96–150 (1992).
9. S. GALTIER, S. V. NAZARENKO, A. C. NEWELL & A. POUQUET, A Weak Turbulence Theory for Incompressible Magnetohydrodynamics, *J. Plasma Phys.*, **63**, 447–488 (2000).
10. G. DÜRING, C. JOSSE RAND & S. RICA, Weak Turbulence for a Vibrating Plate : Can One Hear a Kolmogorov Spectrum?, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 025503 (2006).
11. A. BOUDAUD, O. CADOT, B. ODILLE & C. TOUZÉ, Observation of Wave Turbulence in Vibrating Plates, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 234504 (2008).
12. N. MORDANT, Are There Waves in Elastic Wave Turbulence?, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 234505 (2008).
13. B. MIQUEL & N. MORDANT, Nonstationary Wave Turbulence in an Elastic Plate, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 034501 (2011).
14. E. KARTASHOVA, Weakly Nonlinear Theory of Finite-Size Effects in Resonators, *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 2013–2016 (1994).
15. B. MIQUEL & N. MORDANT, Nonlinear Dynamics of Flexural Wave Turbulence, *Phys. Rev. E.*, **84**, 066607 (2011).
16. A. CHAIGNE & C. LAMBOURG, Time-Domain Simulation of Damped Impacted Plates, *JASA*, **109**, 569–590 (2001).
17. A. FARINA, *Simultaneous Measurement of Impulse Response and Distortion with a Swept-Sine*, *Technique Audio Engineering Society Convention 108*, AES (2000).
18. K. ARCAS, *Simulation numérique d’un réverbérateur à plaque*, Thèse de l’École Polytechnique (2009).



# Turbulence d'ondes gravito-capillaires engendrée par des vibrations horizontales du récipient

Bruno Issenmann & Éric Falcon

Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, MSC, UMR 7057 CNRS, F-75013 Paris, France  
bruno.isсенmann@univ-lyon1.fr

**Résumé.** Nous étudions expérimentalement le rôle du forçage sur la turbulence d'ondes gravito-capillaires. Les expériences réalisées précédemment utilisant des forçages localisés spatialement à l'aide de batteurs ont montré que l'exposant de la loi de puissance en fréquence du spectre de gravité dépendait des paramètres de forçage. Ici, la totalité du récipient est vibrée horizontalement. L'exposant du spectre est alors trouvé indépendant du forçage pour les régimes de gravité et de capillarité. Ce forçage étendu spatialement conduit ainsi à un spectre de gravité en meilleur accord avec la théorie que pour un forçage localisé. Le rôle de la forme du récipient a aussi été étudiée car elle modifie l'isotropie du forçage. Enfin, quel que soit le type de forçage utilisé, l'amplitude du spectre est trouvée proportionnelle à la puissance injectée pour les deux régimes. Ce désaccord avec la théorie proviendrait du fait que seule une petite partie de la puissance injectée dans le fluide nourrit la cascade de turbulence d'ondes, la plus grande partie étant dissipée à grande échelle.

**Abstract.** We experimentally study the role of forcing on gravity-capillary wave turbulence. Previous laboratory experiments using a spatially localized forcing thanks to vibrating blades have shown that the frequency power-law exponent of the gravity wave spectrum depends on the forcing parameters. Here, the whole container is horizontally vibrated. We observe that the spectrum exponent is found to be forcing independent for both gravity and capillary regimes. This spatially extended forcing leads to a gravity spectrum in better agreement with the theory than by using a spatially localized forcing. The role of the vessel shape has been also studied since it modifies the isotropy of the forcing. Finally, whatever the type of forcing used, the spectrum amplitude is found to be proportional to the injected power for both regimes. This disagreement with the theory may be due to the fact that only a small part of the injected power feeds the wave turbulence cascade, the greatest part being dissipated at large scale waves.

Quand des ondes d'amplitude suffisamment élevées se propagent dans un milieu dispersif, les interactions non linéaires engendrent des ondes à différentes échelles. Ce transfert d'énergie des grandes échelles (où l'énergie est injectée) aux petites échelles (où elle est dissipée) s'appelle la turbulence d'ondes. On l'observe dans de nombreux systèmes, comme les ondes optiques, les ondes de surface ou les ondes internes en océanographie, les ondes élastiques ou de spin dans les solides (pour des revues récentes, voir les références [1–3]). Depuis la fin des années 1960, la théorie de la turbulence faible décrit la turbulence d'ondes pour quasiment tous les systèmes impliquant des ondes [4]. Ses hypothèses sont cependant très contraignantes. Les ondes sont supposées faiblement non linéaires, isotropes, aléatoires, homogènes et se propageant dans un milieu infini avec une séparation d'échelle entre l'injection et la dissipation de l'énergie. La théorie prédit notamment les solutions analytiques pour le spectre d'ondes faiblement non linéaires à l'équilibre ou en régime stationnaire loin de l'équilibre.

Alors que l'homogénéité et l'isotropie sont deux des hypothèses de base de la théorie, les expériences en laboratoire utilisent en général des forçages localisés spatialement pour générer de la turbulence d'ondes. Dans le cas des ondes à la surface d'un fluide, ces expériences montrent un écart à la prédiction pour le spectre des ondes de gravité [5, 6] : l'exposant du spectre en loi de puissance de la fréquence des ondes de gravité dépend des paramètres de forçage (amplitude et bande-passante) au lieu d'être indépendant comme le prédit la théorie. L'origine de ce désaccord reste un problème ouvert. Il est donc particulièrement intéressant d'étudier le rôle d'un forçage spatialement homogène pour tester le domaine de validité de la théorie. Des expériences ont déjà été réalisées en vibrant verticalement un récipient rempli de fluide pour

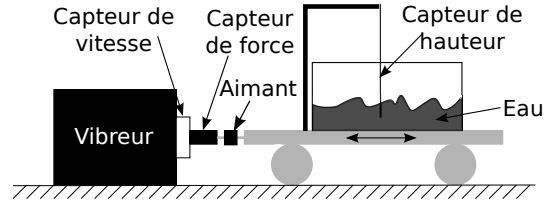


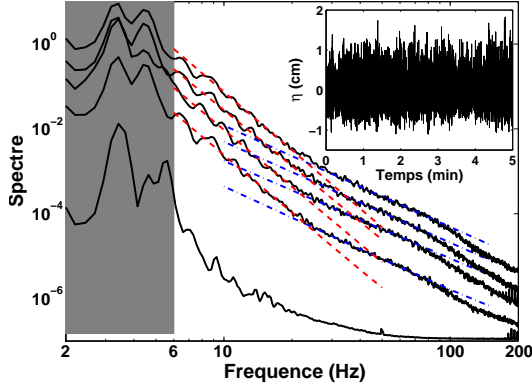
Figure 1. Montage expérimental

engendrer de la turbulence d'ondes capillaires de façon homogène [7–9]. Cependant, ce forçage génère des structures localisées et des pics de résonance discrets dans le spectre.

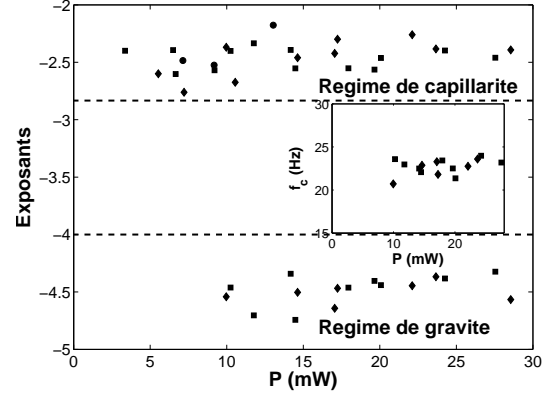
Dans cet article, nous étudions la turbulence d'ondes gravito-capillaires soumise à des vibrations aléatoires horizontales du récipient. Les lois de puissance en fréquence des spectres de hauteur de vagues sont trouvées indépendantes des paramètres de forçage dans les deux régimes de gravité et de capillarité, et sensiblement en accord avec la théorie de la turbulence faible. La loi de distribution de probabilités de la hauteur des vagues et l'évolution du spectre des ondes avec l'amplitude de forçage sont mesurées également.

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 1. Un récipient circulaire de diamètre 22 cm, est monté sur un chariot à quatre roues et est vibré horizontalement à l'aide d'un vibreur électromagnétique. Le récipient contient de l'eau sur une profondeur  $h = 3$  cm, proche de la limite d'eau profonde ( $\lambda \lesssim 2\pi h$  dans la gamme de longueurs d'ondes  $\lambda$  utilisée ici). Le vibreur est excité par un bruit aléatoire sur une gamme de fréquence entre 1 Hz et  $f_p$  ( $f_p$  allant de 5 à 7 Hz). Un capteur de force est fixé à l'axe du vibreur pour mesurer la force instantanée  $F(t)$  que le vibreur applique sur le récipient. La vitesse instantanée  $V(t)$  du récipient est mesurée à l'aide d'une bobine placée sur l'axe du vibreur [10]. Le récipient est fixé à l'axe du vibreur (et à celui des deux capteurs) à l'aide d'un aimant, qui permet d'imposer sur le récipient une force parallèle à l'axe du vibreur. La hauteur de la surface,  $\eta(t)$  est mesurée à l'aide d'un capteur capacitif [5]. Ce capteur est fixé au récipient, de sorte que  $\eta(t)$  est mesuré dans le référentiel du récipient. La raideur moyenne typique des vagues  $s = k^*/\sigma_\eta$  se situe entre 0,01 et 0,10, où  $\sigma_\eta$  est la hauteur RMS des vagues et  $k^*$  est le nombre d'onde du premier mode propre du récipient.  $F(t)$  et  $V(t)$  sont acquis pendant 5 min et permettent de calculer la puissance moyenne  $P$  injectée dans le système (voir ci-dessous).  $\eta(t)$  est enregistré pendant 5 et 30 minutes, respectivement pour calculer son spectre et sa distribution de probabilités. La localisation exacte du capteur capacitif n'a pas d'influence sur le spectre. Le système est loin des conditions de résonance des modes de ballonnement engendrant des vagues fortement couplées avec l'écoulement en volume, comme des modes tournants [11]. Notons aussi que l'amplitude maximum du forçage est aussi inférieure au seuil d'éjection de gouttelettes.

L'insert de la figure 2 montre une acquisition typique de la hauteur des vagues  $\eta(t)$ .  $\eta(t)$  évolue de façon erratique avec le temps avec  $\langle \eta \rangle = 0$ . Son spectre est représenté sur la figure 2. Les deux pics visibles à basse fréquence (3,4 et  $4,5 \pm 0,2$  Hz) correspondent aux modes propres théoriques du récipient [12]. Ici, nous nous intéressons à la partie du spectre qui n'est pas directement excitée par le vibreur ( $f > 6$  Hz). À faibles amplitudes de forçage, aucune loi de puissance n'est observée et le régime de turbulence d'ondes n'apparaît pas. Pour des amplitudes suffisantes, deux lois de puissance peuvent être observées sur le spectre, qui correspondent aux régimes de turbulence d'ondes de gravité et de capillarité, respectivement à basse et haute fréquence. Des résultats similaires ont déjà été obtenues avec un forçage par batteur [5]. La fréquence de transition entre les deux régimes est de l'ordre de 20 Hz, ce qui correspond à  $\lambda \approx 1$  cm. Le spectre décroît fortement à haute fréquence ( $\gtrsim 100$  Hz) à cause de la dissipation. Quand l'amplitude de forçage croît, les lois de puissance restent parallèles entre elles dans les deux régimes. La figure 3 montre leurs exposants en fonction de la puissance injectée. Cette figure montre que les exposants des deux régimes sont indépendants des paramètres de forçage dans la gamme de puissances injectées que nous avons utilisées et valent  $-4,5 \pm 0,2$  pour le régime de gravité et  $-2,4 \pm 0,3$  pour le régime de capillarité. Ces résultats diffèrent des études précédentes utilisant des batteurs localisés [5, 6], qui montraient un exposant du spectre de gravité fortement dépendant des paramètres de forçage et prenant des valeurs



**Figure 2.** Spectres de hauteur des vagues pour différentes puissances injectées :  $P = 1, 2; 14, 6; 17, 2; 23, 6$  et  $28, 5$  mW (de bas en haut). Le récipient est forcé entre 1 et 6 Hz (zone grise). Les courbes sont décalées verticalement pour la lisibilité du graphe. — (rouge) : fit en loi de puissance des spectres de gravité. - · (bleu) : fit en loi de puissance des spectres de capillarité. Insert : évolution typique de  $\eta(t)$ .



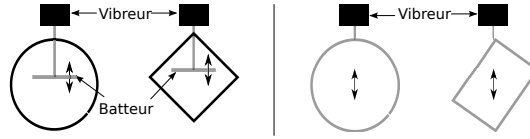
**Figure 3.** Exposants des spectres en lois de puissance de la fréquence des régimes de gravité et de capillarité en fonction de la puissance injectée, pour différentes fréquences de forçage : 1–5 Hz (■), 1–6 Hz (◆), et 1–7 Hz (●). Exposants théoriques : (—)  $-17/6$  capillarité et  $-4$  gravité. Insert : Fréquence de transition entre les deux régimes. Mêmes symboles que ci-dessus.

entre  $-7$  et  $-4$  pour la même gamme de puissances injectées [5]. Les exposants que nous obtenons ici diffèrent cependant sensiblement des valeurs théoriques. En effet, l'exposant du spectre de gravité est compris entre  $-4$  et  $-5$ . Ces valeurs correspondent respectivement au spectre prédit par la théorie de la turbulence faible  $S_{\eta}^{\text{grav}}(f) \propto \epsilon^{1/3} g f^{-4}$  [13] et au spectre prédit par Phillips  $\propto \epsilon^0 g f^{-5}$  pour des ondes fortement non linéaires [14].  $\epsilon$  est le flux d'énergie,  $f$  la fréquence et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Une explication de cet écart proviendrait de la présence d'ondes fortement non linéaires dont la forme singulière de leur sommet se propage sans modification [15]. Le spectre d'ondes avec des crêtes singulières de dimension fractale  $D$  comprise entre 0 et 2 est de la forme  $\epsilon^{(2-D)/3} g^{1+D} f^{-3-D}$  [6]. Le spectre de gravité expérimental en  $f^{-4,5}$  correspondrait à  $D = 1,5$ . L'exposant du spectre de gravité est lui-aussi légèrement différent (cf. figure 3) de la prédiction de la théorie de la turbulence faible  $S_{\eta}^{\text{cap}}(f) \propto \epsilon^{1/2} (\gamma/\rho)^{1/6} f^{-17/6}$ , où  $\gamma$  et  $\rho$  sont la tension de surface et la masse volumique du fluide [16].

La fréquence de transition  $f_c$  entre les deux régimes est définie sur les spectres de la figure 2 par l'intersection entre les deux fits en loi de puissance. Elle est représentée sur l'insert de la figure 3 pour différents paramètres de forçage.  $f_c$  est indépendant des paramètres de forçage. Ce résultat diffère là encore des résultats précédents utilisant un forçage par batteur [5], où  $f_c$  prenait des valeurs entre 15 et 35 Hz suivant les paramètres de forçage, sur la même gamme de puissances injectées et la même taille de récipient.

En résumé, faire vibrer horizontalement le récipient contenant le fluide permet d'atteindre un régime continu de turbulence d'ondes indépendant des paramètres de forçage contrairement au forçage paramétrique ou avec des batteurs. La raison principale est que ce forçage est supposé plus homogène spatialement, et donc à ce qu'il satisfasse mieux cette hypothèse de la théorie, même si d'autres ne sont pas respectées, comme la faible non linéarité et un milieu de taille infini.

Pour observer le rôle de la forme du récipient et du type de forçage sur la turbulence d'onde gravito-capillaire, nous avons réalisé des expériences sur deux récipients différents : le récipient circulaire utilisé précédemment (22 cm de diamètre) et un récipient rectangulaire ( $15 \times 19$  cm<sup>2</sup>). Deux types de forçage ont été testés sur chaque récipient : un batteur localisé spatialement et un forçage horizontal du récipient, comme schématisé sur la figure 4. Pour éviter la prédominance des modes de propre et de ballonnement de la cuve rectangulaire, sa diagonale est alignée avec l'axe du vibreur. L'exposant de la loi de puissance en fréquence du régime de gravité est trouvé dépendre des paramètres de forçage : (i) avec un forçage par batteur quelle que soit la forme du récipient et (ii) avec la cuve rectangulaire quel que soit le type

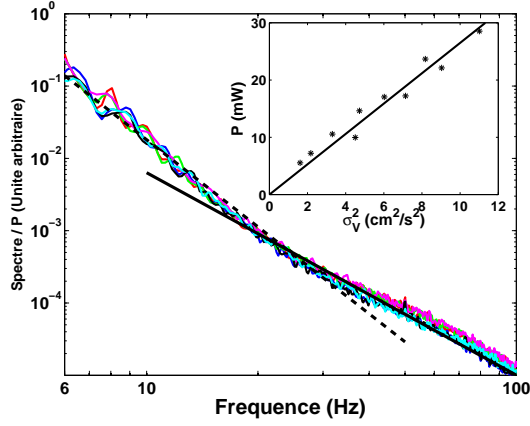


**Figure 4.** Dispositifs testés, vus de haut. Le vibreur fait vibrer un batteur horizontalement à la surface de l'eau (gauche) ou la totalité du récipient (droite). Les deux expériences sont réalisées sur une cuve circulaire et une cuve rectangulaire. Les parties grises (rouges) désignent les parties en mouvement, les noires celles immobiles.

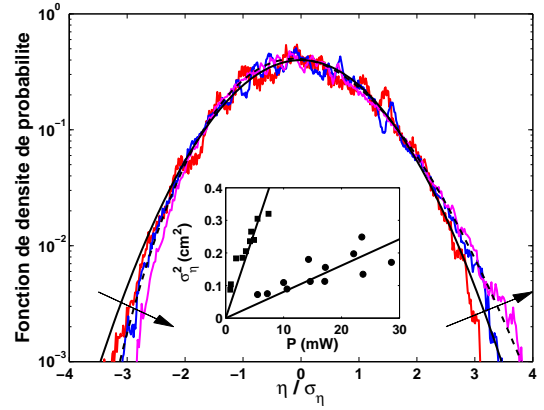
de forçage. L'exposant du spectre de gravité n'est indépendant des paramètres de forçage que lorsque le récipient est vibré horizontalement et qu'il est circulaire. Bien que la direction du forçage soit favorisée dans tous les cas, la cuve circulaire est plus isotrope que la cuve rectangulaire à cause des multiples directions de réflexion des ondes sur les parois circulaires. Par conséquent, en plus de l'homogénéité du forçage, l'isotropie est aussi nécessaire pour atteindre un spectre de gravité avec un exposant de la fréquence indépendante des paramètres de forçage.

Focalisons nous maintenant sur la dépendance du spectre avec la puissance injectée. La puissance injectée par le vibreur dans le système, corrigée de l'inertie, vaut  $\mathcal{P}(t) = (F - mdV/dt)V$ .  $m = 3,1$  kg est la masse du système en mouvement (y compris le fluide). La puissance injectée moyenne,  $P \equiv \langle \mathcal{P} \rangle$ , croît linéairement avec la variance de la vitesse imposée par le vibreur  $\sigma_V^2 \equiv \langle V^2 \rangle$  (cf. insert de la figure 5).  $\langle \cdot \rangle$  désigne la moyenne temporelle. Nous trouvons que le spectre de hauteur est proportionnel à  $P^{1 \pm 0,1}$  pour les deux régimes sur presque une décade en  $P$  (cf. figure 5). Cette loi d'échelle ne dépend pas de la géométrie du récipient utilisé. Une dépendance similaire en  $P^1$  a déjà été observé pour les deux régimes avec un forçage par batteur [5] sur la même gamme de  $P$ , pour le régime capillaire avec un forçage paramétrique [9] et pour la cascade inverse de la turbulence d'onde de gravité [17]. Cette loi d'échelle linéaire est en désaccord avec la théorie de la turbulence faible, qui prédit un spectre en  $\epsilon^{1/3}$  en régime de gravité et en  $\epsilon^{1/2}$  en régime de capillarité (cf. ci-dessus). Expérimentalement, le flux d'énergie moyen  $\epsilon$  est estimé par la mesure de  $P/(\rho\mathcal{S})$ , où  $\mathcal{S}$  est la surface mobile immergée. Il est probable qu'une partie de la puissance soit directement injectée dans le volume et dissipée par viscosité sans cascader dans le système d'ondes. Bien que ce mécanisme soit certainement présent, il est peu probable qu'il soit dominant. En effet, la loi de dépendance du spectre avec  $P$  est la même quel que soit le type de forçage (paramétrique, par batteur ou par vibration horizontale du récipient) alors que ces forçages engendrent des écoulements de volume très différents. Il est plus probable que seule une petite partie de la puissance générant des ondes à grande échelle cascade vers les petites échelles, le reste étant dissipé à grande échelle par la viscosité. Cette hypothèse est renforcée par des expériences récentes de déclin de la turbulence d'onde à la surface d'un fluide, qui ont montré que seulement une petite partie de la puissance initialement injectée dans le système d'ondes nourrit la cascade capillaire, alors que la majorité est dissipée à grande échelle [18]. Cette fraction inconnue de la puissance injectée qui est dissipée pourrait expliquer le désaccord avec la théorie de la turbulence faible sur la dépendance du spectre avec  $P$ . D'autres origines possibles de ce désaccord pourraient être liées aux effets de taille finie [5] ou à la présence de fortes fluctuations de la puissance injectée [10].

Enfin, la figure 6 montre la fonction de densité de probabilité (PDF) de la hauteur des vagues normalisée par sa valeur RMS,  $\eta/\sigma_\eta$ . À faible forçage, elle est symétrique et bien décrite par une fonction gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type 1. Pour des amplitudes suffisamment élevées, elle devient asymétrique, les crêtes hautes étant plus probables que les creux profonds, résultat conforme aux expériences de laboratoire utilisant des batteurs [5, 19, 20] ou aux observations océanographiques [21–23]. À fort forçage, la PDF tend vers une distribution de Tayfun (la première correction non linéaire de la gaussienne), qui s'écrit  $p[\tilde{\eta}] = \int_0^\infty \exp([-x^2 - (1-c)^2]/(2s^2)) / (\pi s c) dx$  où  $c = \sqrt{1 + 2s\tilde{\eta} + x^2}$ ,  $\tilde{\eta} = \eta/\sigma_\eta$  et  $s$  est la raideur moyenne des vagues [20, 24]. Aucun paramètre ajustable est utilisé ici. La forme de la PDF est similaire à celle obtenue avec un forçage par batteur. Nous trouvons aussi que  $\sigma_\eta^2 = aP$  pour les deux types de forçage avec différentes constantes de proportionnalité  $a$  (cf. insert de la figure 6). Pour un forçage par batteur, il a été montré que  $P$  était proportionnel à la surface immergée  $\mathcal{S}$  [5]. Ici, nous



**Figure 5.** Spectres de la hauteur des vagues rapportés à la puissance injectée moyenne  $P$  pour  $P = 10; 14,6; 17,2; 22,1; 23,6$  et  $28,5$  mW. Forçage entre 1 et 6 Hz. Ligne pointillée (resp. continue) : loi de puissance de pente  $-4$  (resp.  $-2,8$ ). Insert :  $P$  en fonction de  $\sigma_v^2$ . La pente de la droite continue est  $2,5 \text{ mWs}^2/\text{cm}^2$ . Forçage de 1 à 6 Hz.



**Figure 6.** Fonction de densité de probabilité de la hauteur des vagues pour  $P = 1,2$  (rouge),  $2,7$  (bleu) et  $14,8$  mW (magenta) (les flèches indiquent une puissance croissante), correspondant à  $s = 0,018; 0,037$  et  $0,075$ . (—) : gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type 1. (---) : distribution de Tayfun avec  $s = 0,075$ . Forçage de 1 à 6 Hz. Insert :  $\sigma_\eta^2$  en fonction de  $P$  pour un forçage de la totalité du récipient (●) ou par un batteur (■). Les pentes valent respectivement  $8,1$  et  $53 \text{ cm}^2/\text{W}$ . Forçage : 1–6 Hz.

avons vérifié que  $a \propto 1/\mathcal{S}$  pour les deux méthodes de forçage. En effet, le rapport des pentes dans l'insert de la figure 6 est égal (à 4% près) à l'inverse du rapport de la surface immergée du batteur et de la paroi immergée du récipient. Finalement, les résultats expérimentaux  $P \propto \sigma_\eta^2$  et  $S_\eta(f) \propto P^1$  sont cohérents puisque par définition,  $\int_0^\infty S_\eta(f) df = \sigma_\eta^2/(2\pi)$ .

En conclusion, nous avons introduit un nouveau type de forçage pour étudier la turbulence d'ondes gravito-capillaires. Avec ce forçage étendu spatialement, les lois de puissance des spectres de hauteur sont indépendantes des paramètres de forçage pour les deux régimes de gravité et de capillarité, contrairement aux résultats des expériences précédentes qui utilisaient un forçage localisé spatialement, où l'exposant du spectre de gravité dépendait des paramètres de forçage [5,6,25]. Notre étude suggère que cette dépendance pourrait être liée à l'inhomogénéité et à l'anisotropie du forçage localisé. L'exposant du spectre de gravité mesuré ici diffère légèrement de sa valeur prédite par la théorie de la turbulence faible à cause de la présence d'ondes fortement non linéaires. Enfin, une explication du désaccord observé avec la théorie sur la dépendance du spectre avec la puissance est aussi proposée et s'applique quel que soit le forçage utilisé.

Nous remercions M. Berhanu pour ses remarques constructives, et A. Lantheaume, C. Laroche et J. Servais pour leur assistance technique. B. I. remercie le CNRS pour avoir financé son stage de recherche postdoctoral. Ce travail a été financé par l'ANR Turbulon 12-BS04-0005.

## Références

1. É. FALCON, *Discret. Contin. Dyn. Syst. B*, **13**, 819 (2010).
2. A. NEWELL & B. RUMPF, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **43**, 59 (2011).
3. J. LAURIE, U. BORTOLOZZO, S. NAZARENKO & S. RESIDORI, *Physics Report*, **514**, 121 (2012).
4. V. E. ZAKHAROV, V. L'VOV & G. FALKOVICH, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I*, Springer-Verlag (1992); S. NAZARENKO, *Wave Turbulence*, Springer, Berlin (2010).
5. É. FALCON, C. LAROCHE & S. FAUVE, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 094503 (2007).

6. P. DENISSENKO, S. LUKASCHUK & S. NAZARENKO, *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 014501 (2007); S. NAZARENKO, S. LUKASCHUK, S. MCLELLAND & P. DENISSENKO, *J. Fluid Mech.*, **642**, 395 (2010).
7. E. HENRY, P. ALSTRØM & M. T. LEVINSSEN, *Europhys. Lett.*, **52**, 27 (2000); M. YU. BRAZHNIKOV *et al.*, *Europhys. Lett.*, **58**, 510 (2002).
8. D. SNOUCK, M.-T. WESTRA & W. VAN DE WATER, *Phys. Fluids*, **21**, 025102 (2009).
9. H. XIA, M. SHATS & H. PUNZMANN, *Europhys. Lett.*, **91**, 14002 (2010).
10. É. FALCON, S. AUMAÎTRE, C. FALCÓN, C. LAROCHE & S. FAUVE, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 064503 (2008).
11. A. ROYON-LEBEAUD, E. J. HOPFINGER & A. CARTELLIER, *J. Fluid Mech.*, **577**, 467 (2007) et références citées.
12. H. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, London, 6th Ed. (1975).
13. V. E. ZAKHAROV & N. N. FILONENKO, *Sov. Phys. Dokl.*, **11**, 881 (1967).
14. O. M. PHILLIPS, *J. Fluid. Mech.*, **4**, 426 (1958); A. C. NEWELL & V. E. ZAKHAROV, *Phys. Lett. A*, **372**, 4230 (2008).
15. E. A. KUZNETSOV, *JETP Lett.*, **80**, 83 (2004).
16. V. E. ZAKHAROV & N. N. FILONENKO, *J. App. Mech. Tech. Phys.*, **8**, 37 (1967).
17. L. DEIKE, C. LAROCHE & É. FALCON, *Europhys. Lett.*, **96**, 34004 (2011).
18. L. DEIKE, M. BERHANU & É. FALCON, *Phys. Rev. E*, **85**, 066311 (2012).
19. M. ONORATO *et al.*, *Phys. Rev. E*, **70**, 067302 (2004); M. ONORATO *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 114502 (2009).
20. É. FALCON & C. LAROCHE, *Europhys. Lett.*, **95**, 34003 (2011).
21. M. K. OCHI, *Ocean waves*, Cambridge University Press (1998).
22. G. Z. J. FORRISTALL, *Phys. Oceanogr.*, **30**, 1931 (2000).
23. H. SOCQUET-JUGLARD *et al.*, *J. Fluid. Mech.*, **542**, 195 (2005).
24. M. A. TAYFUN, *J. Geophys. Res.*, **85**, 1548 (1980).
25. P. COBELLI, A. PRZADKA, P. PETITJEANS, G. LAGUBEAU, V. PAGNEUX & A. MAUREL, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 214503 (2011).

## Vortices catapult droplets in atomization

J. John Soundar Jerome<sup>1</sup>, S. Marty<sup>2</sup>, J.-P. Matas<sup>2</sup>, S. Zaleski<sup>1</sup> & J. Hoepffner<sup>1</sup>

<sup>1</sup> UPMC Univ Paris 06 & CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France

<sup>2</sup> Laboratoire des Écoulements Géophysique et Industriels (LEGI), CNRS - Université Joseph Fourier, 38041 Grenoble Cedex 9, France

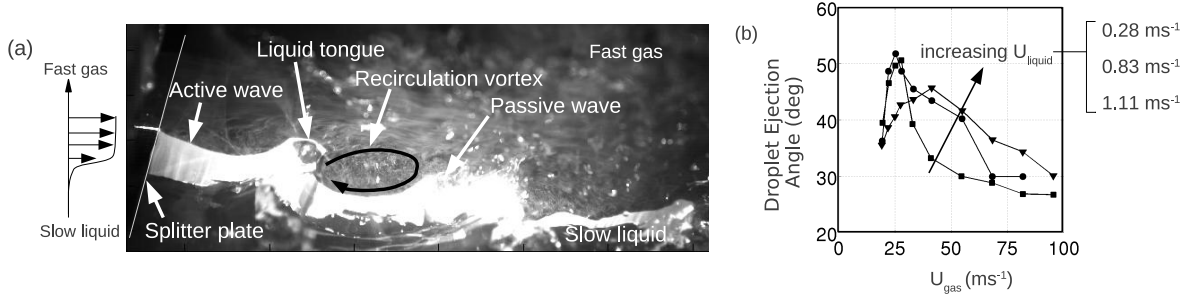
soundar@dalembert.upmc.fr

**Résumé.** Nous étudions un nouveau mécanisme d'éjection de gouttes dans des couches de mélange  $2D$  diphasiques constitués d'un flux de gaz rapide et de liquide lent. Une perturbation sur l'interface du gaz et liquide se développe en onde de Kelvin-Helmholtz. Lorsque le rapport densité entre le gaz et le liquide est faible, l'onde croît dans la manière auto-similaire et la crête d'onde forme un filament qui oscille. Nous observons, dans les expériences et les simulations numériques, que la crête de l'onde est soumise à une rupture similaire d'un « bag-breakup » mais de dessous. L'angle d'éjection des gouttes résultantes de ce « bag-breakup », peut atteindre 50 degrés. Dans un écoulement où la plupart du mouvement est dans la direction horizontale, il est étonnant d'observer de telles si grandes angles d'éjection. Les visualisations de flux et les simulations numériques montrent que le sillage derrière l'onde grandit et devient instable. L'instabilité de sillage donc donne lieu au phénomène de lâcher tourbillonnaire, comme celui d'un sillage de cylindre. Le sillage gonfle d'en bas la langue liquide qui subit violemment un « bag-breakup ». Alors, le lâcher tourbillonnaire, à son tour, catapulte finalement ces gouttelettes dans le flux de gaz.

**Abstract.** The mechanism of droplet ejection in  $2D$  two-phase mixing layer consisting of a fast-moving gas flow and slow-moving liquid flow is studied via direct numerical simulations and experimental investigations. A disturbance on the gas-liquid interface grows into a Kelvin-Helmholtz wave and the wave crest forms a filament that oscillates as the wave grows downstream. Increasing the speed of the gas, it is observed, in both experiments and numerical simulations, that the wave crest undergoes a bag-breakup from below and the resulting droplets are thrown in to the gas stream at angles as large as 50 degrees. In a flow where most of the momentum is in the horizontal direction, it is very surprising to observe such acute droplet ejections. Flow visualizations techniques and direct computations point out that the recirculation region behind the wave grows and becomes unstable leading to vortex shedding similar to the wake behind a cylinder. During the process, the liquid filament of the wave crest swells up from below and undergoes bag breakup. The shed vortex eventually catapults these droplets in to the gas stream.

## 1 Introduction

Atomization is the process by which a liquid stream fragments or breaks up into droplets. It is a very common phenomenon in nature and also in many industrial applications [1, 8]. One of the ways to make droplets or sprays is to form waves on the gas-liquid interface by a fast-moving gas on a liquid surface, for example, air-blast injectors systems. These waves grow by extracting the kinetic energy of the liquid and gas stream. If the kinetic energy is sufficiently large, thin liquid sheets and filaments are formed which break into droplets [4]. This step is called primary atomization. During the final and secondary atomization, these droplets form a fine spray via collision, stretching, etc. While the latter process determines the size and distribution of the droplets, the former plays an important role in determining the rate at which droplets are produced, the initial conditions for the extent of the dispersed two-phase flow, etc. The physical mechanisms of primary atomization are often complex, nonlinear and hence, are poorly understood. This is true not only for co-flowing gas-liquid mixing layers but also jets [5, 7, 9], planar sheets [3], etc. In this article, primary atomization process in a co-flowing gas-liquid mixing layer is illustrated, in particular, when the horizontal gas flow is fast. Consider for example figure 1a which shows such interactions in the presence of complex flow structures during the atomization process in a two-phase mixing layer experiment at LEGI. It is a snapshot taken by a high-speed camera (Photron SA1.1) in the



**Figure 1.** (a) Co-flowing air-water mixing layer visualized with a LASER sheet (LEGI) and smoke showing a liquid filament that breaks up into droplets on top of a recirculation vortex. (b) The variation of the droplet ejection angle  $\alpha$  versus the gas speed ( $U_g$ ) in two-phase mixing layer experiments by [14].

splitter plate experimental setup [10]. In figure 1a, an Argon LASER sheet illuminates the liquid surface showing two waves: the active wave which grows while remaining attached to the splitter plate and the passive wave (the previous active wave) that has left the plate. Between these waves, there is clearly a recirculation region and just above it, a liquid filament is observed. Experimental evidence shows that, as the liquid filament develops, it oscillates and eventually breaks up violently to form droplets via what looks like a “bag-break up” but from below. The measured values of angle of droplet ejection vary with the gas speed as shown in the same figure 3b. The angle increases steeply until about a critical value and then decreases monotonically, however slowly, with further increase in gas speed. Such a phenomena has already been observed in two-phase mixing layers by [14] and [2]. The physical mechanisms causing such a phenomena is, however, not clearly known. Note that these droplets are thrown into the air stream at angles as high as 50 degrees with respect to the horizontal axis. It is intriguing to find that, in a flow system with large horizontal momentum, droplets move in such oblique trajectories. The experimental results of [14] and [2] in figure 1 correspond to the case where the velocity of the air-flow (the lighter fluid) is much greater compared to that of water (the heavier fluid) with a air-flow recirculation region as identified in figure 1. The interaction of this zone with the wave crest and hence its influence on primary atomization processes have rarely been considered before. This is largely due to the fact that such events are complex and involve a large variety of scales. In this article, the phenomenon of vortex shedding in a 2D two-phase mixing layer is pointed out via experimental investigations. A droplet catapult mechanism via vortex shedding is then put forward to explain large angle of ejections observed by [14] and [2]. This mechanism is thoroughly studied via the evolution of a localized wave in 2D two-phase mixing layers using direct numerical simulations. Finally, supporting evidences are provided to show that vortices catapult droplets in atomization.

As observed in figure 1, the air-flow visualization of such vortices and related processes are, nonetheless, cumbersome and difficult because of the 3D nature of the two-phase mixing layer due to the influence of capillary waves and side walls which results in such violent events that are inhomogeneous in the transverse direction. This effect masks the visualization of the vortex behind the wave. Moreover, due to the presence of large number of droplets during the droplet catapult process, it is not easy to identify the air-water interface using the LASER sheet as it is reflected unequally by the droplets. However, these short-comings could be overcome by using a direct numerical simulation.

## 2 Localized self-similar wave

The evolution of a localized initial disturbance in an infinite 2D two-phase mixing layer is considered in this section. This is the simplest model that is pertinent to the phenomena introduced in the previous section. Under these conditions, only the dynamics of active wave and the effect of fast gas flow are investigated while the role of the passive wave, the splitter plate dimensions, the boundary layer thickness



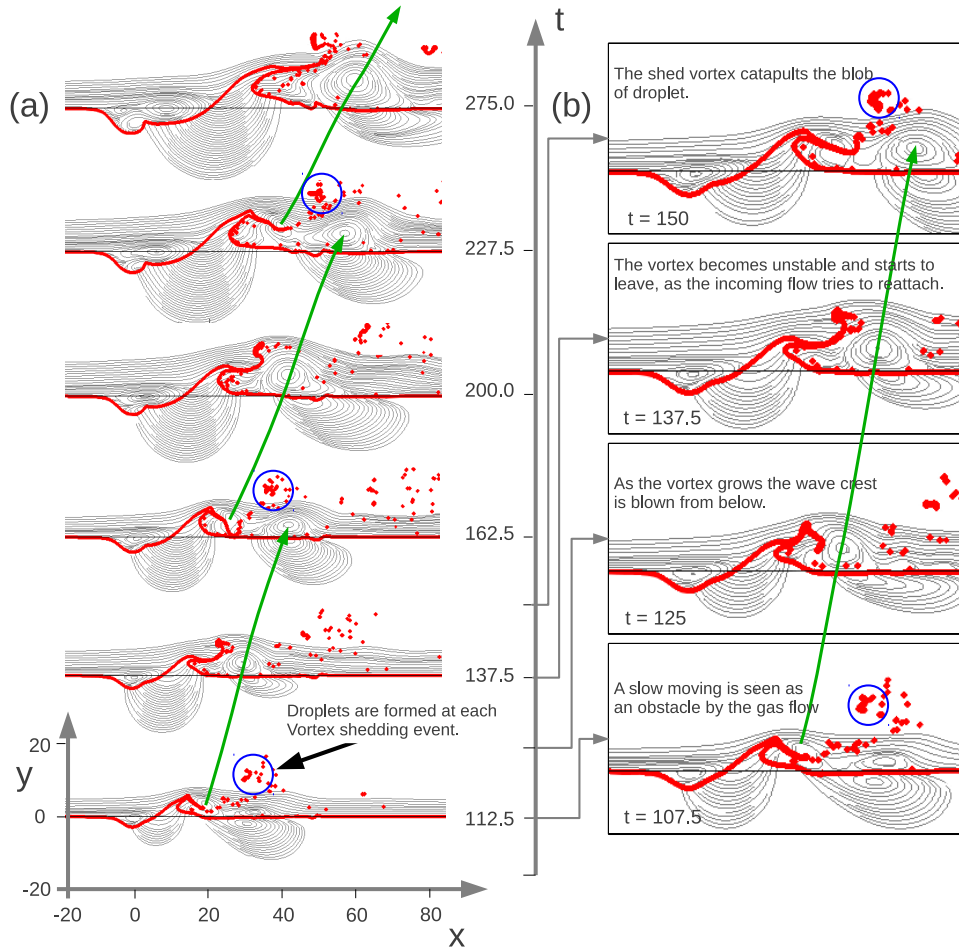
of the incoming flow, gravity, etc are neglected. An open source Navier-Stokes solver called GERRIS [13] is used in order to numerically solve this toy problem. An initial impulse disturbance in such flows eventually develops into a non-linear Kelvin-Helmholtz wave that grows and propagates downstream in a self-similar manner (for more details, [6] and [11]).

Our numerical investigation consists of an infinite  $2D$  two-phase mixing layer with a fast-moving gas flow (density  $\rho_g$ ) on top of a slow-moving heavier liquid flow (density  $\rho_l$ ). Sufficiently far away from the gas-liquid interface, the gas flows at a speed  $U_g = 1$  in the  $x$ -direction while the heavier liquid is at rest ( $U_l = 0$ ). The viscosity of the two fluids is taken to be the same. Thus, the initial velocity field in the liquid and gas streams, is made up of error functions that satisfy the stress continuity at the interface. The non-dimensional parameters that characterize this analysis are, namely, the Reynolds number  $Re = U\delta/\nu$  where  $\delta$  and  $\nu$  are the mixing layer thickness and the dynamic viscosity, respectively, and the Weber number  $We = \rho_g U_g^2 \delta / \sigma$  where  $\sigma$  is the surface tension of the liquid. In the simulations, they are taken to be  $Re = 100$  and  $We = 1000$ . They are large enough so that they do not play a deciding role on the droplet catapult phenomenon. The size of the simulation domain is  $500\delta$  in length ( $x$ -direction) and  $250\delta$  in height ( $y$ -direction). These simulations are performed with periodic boundary conditions in the streamwise direction and symmetry boundary conditions at the top and bottom boundaries. The initial condition consists of a very small amplitude impulse disturbance on the component of velocity normal to the interface such that it disappears before a distance of  $\delta$  units in the  $x$ -direction. Various spatial discretization levels were tried to validate the results and a spatial discretization of approximately  $0.06\delta$  units is chosen for which the error in the location of wave is found to be only  $\leq 1\%$ .

If one neglects, viscosity and capillarity effects, the only length scales in an infinite  $2D$  two-phase mixing layer are  $U_g t$  and  $\delta$ . If vorticity field  $\omega$  is considered as a function of  $x$ ,  $y$ ,  $t$ ,  $U_g$  and  $\delta$ , at sufficiently large time  $t \gg \delta/U_g$ , it can be shown that  $\omega = U/\delta f(x/U_g t, y/U_g t, \rho_g/\rho_l)$  ([6]). Hence, in the self-similar coordinates  $x' = x/U_g t$  and  $y' = y/U_g t$ , the shape, size and the dynamics of the wave depends only on a single parameter, namely, the density ratio  $r = \rho_g/\rho_l$ .

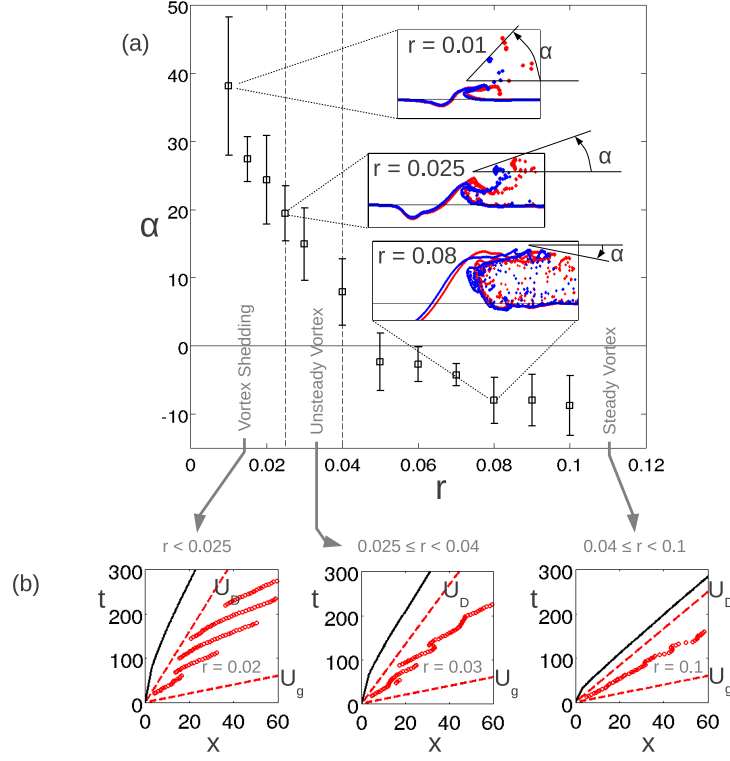
In figure 2, temporal evolution of a gas-liquid mixing layer subjected to a localized disturbance is presented for a density ratio,  $r = 0.02$ . The time axis is specified in  $\delta/U$  units. Thick lines denote the gas-liquid interface whereas thin lines represent snapshots of the gas flow streamlines. Here, certain streamlines are left out for the sake of better visibility. Similar to the case of spatially evolving wave in the experiments shown before (figure 1a), the gas-liquid interface in figure 2b displays a liquid filament at the crest of the wave. A recirculation vortex is present at all times shown here. The interface is deformed by the incoming flow and the recirculation vortex, thus it oscillates and forms droplets at regular intervals. In figure 2a, the gas flow streamlines show the presence of periodic vortex shedding behind the wave; three such shedding events in the gas flow are displayed. Note that each shedding accompanies droplet formation from wave/gas-liquid interface. Thus, figure 2 already indicates that vortex shedding is connected to droplet ejection process.

This droplet ejection process is illustrated during one vortex shedding event in figure 2b. At this density ratio ( $r = 0.02$ ), the wave moves much slower than the gas stream and hence, it acts as an obstacle in the gas flow. This implies that the gas flow past the wave is in a large manner similar to the flow past a backward facing step. Thus, the flow over the wave separates; and the separated flow reattaches after a small recirculation zone. Initially, the recirculation region is small as observed at  $t = 107.5$  in figure 2(b). However, it grows and becomes unstable at subsequent times similar to the unstable recirculation region behind a backward facing step and this vortex is eventually shed. During this process of shedding, the liquid filament swells up until it breaks up into a blob of droplet. A droplet catapult mechanism is thus observed: (1) The incoming gas flow sees the slow-moving wave as an obstacle and thus, separates on the crest of the wave to form a small separation bubble as seen at  $t = 107.5$ . (2) As this recirculation region grows in to a vortex which swells up the liquid filament from below. At this stage (figure 2(b) for  $t = 125$ ), the liquid filament resembles that in the initial stages of bag-breakup but from below. A bag breakup is analogous to bursting of soap bubbles blown from a soap film attached to a ring (see for example, [12,15]). While the incoming gas flow shears the liquid filament, the recirculation vortex is blowing it up from below. However, the wake has grown very large and is unstable. Hence, the vortex is shed as the liquid filament breaks-up from below and forms droplets. (3) During break-up the liquid



**Figure 2.** (a) Temporal evolution of gas-liquid interface (thick lines) and streamlines (thin lines) showing periodic vortex shedding and droplet ejection (circles) when the density ratio,  $r = 0.02$ . (b) Different stages during one such shedding-catapult process is displayed to illustrate the droplet catapult mechanism via vortex shedding.

filament is pushed downward by the incoming flow which momentarily remains attached while flowing past the crest of the ever-growing wave as seen at  $t = 137.5$ . (4) Such a gas flow is, however, unstable and so it eventually separates to form a tiny separation bubble on top of the liquid filament. At this stage, see figure 2(b):  $t = 150$ , the gas-liquid interface and the gas flow is the same as that at  $t = 107.5$ . Thus, a recirculation region is again formed behind the wave which further grows and leaves the wave while catapulting the liquid filament to result in break-up and hence, the droplet ejection. A quantitative measure of the effect of this change in gas flow morphology on the droplet dynamics can be deduced from the figure 3a. It displays the measured droplet angle of ejection over various density ratios. The error bars display the standard error over various measured angles at different times for a given density ratio. The angle of ejection  $\alpha$  is computed by superposing snapshots of gas-liquid interface locations obtained from GERRIS for two consecutive time units. It is given by the angle that the superposed droplets make with the streamwise direction as shown in figure 3a for the cases  $r = 0.08$ ,  $0.025$  and  $0.01$ . As the density ratio  $r$  decreases, figure 3a shows that  $\alpha$  remains almost constant but below zero until about  $r = 0.04$ . When the density ratio is decreased further, there is a steep increase in the angle of ejection  $\alpha$ . Note that  $\alpha$  as high as  $\approx 40$  degrees is observed.



**Figure 3.** (a) Variation of droplet angle of ejection with density ratio,  $r = \rho_g/\rho_l$ . (b) Streamwise variation of the position of the wave centres and vortex centres at different times. Here,  $U_D$  represents the Dimotakis speed given by  $\sqrt{r}/(1 + \sqrt{r})$ .

Figure 3b presents the spatio-temporal evolution of the wave and recirculation vortex for various density ratios by displaying their respective streamwise positions (thick lines and  $\circ$  represent wave and vortex centres, respectively) with respect to time. For all the values of density ratios shown here, the position of wave monotonically increases with time. Thus, with respect to the gas flow, it moves at a constant horizontal speed which can be compared with the Dimotakis speed,  $U_D = \sqrt{r}/(1 + \sqrt{r})$  (plotted in dashed lines). It moves much slower than the gas flow ( $\sim U/5$  to  $U/15$ ) while its speed decreases with the density ratio,  $r$ . On the other hand, the streamwise of recirculation vortices vary non-monotonically with time over various values of  $r$ . For the cases when  $0.04 \leq r < 0.1$ , an approximately linear horizontal displacement of vortices with time is observed. Their horizontal speed nonetheless decreases with density ratio, however, much slower than that of the horizontal speed of the wave. This corresponds to the steady recirculation vortex that remains attached to the rear of the wave. When  $0.025 \leq r < 0.04$ , the vortex centres show large undulations in time while the centre of the wave moves at approximately steady speed  $U_D$ . Finally, for  $r < 0.025$  regular vortex shedding is observed. Thus, three different gas flow configurations, namely, steady recirculation vortex, unsteady recirculation vortex and vortex shedding, can be identified from figure 3b over various decreasing values of density ratio. The vortex behind the wave moves downstream with approximately constant speed. As  $r$  decreases, this vortex shows strong unsteady motion in the streamwise direction. This flow configuration finally leads to vortex shedding as the density ratio  $r$  is further reduced. It is very clear from figure 3a and 3b that the onset of vortex shedding coincides exactly with the steep increase in droplet ejection angle. This is a direct evidence to the hypothesis that the dynamics of the recirculation region behind the wave is coupled to the phenomenon of droplet catapult. Thus, the vortex shedding can indeed eject droplets at large angles with respect to the gas flow via the droplet catapult mechanism.

### 3 Conclusions and Discussions

The process of droplet ejection in 2D two-phase mixing layer consisting of a fast-moving gas flow and slow-moving liquid flow is studied. A droplet catapult mechanism is thus identified and described: (1) A fast gas flow sees the slow-moving gas-liquid wave as an obstacle and thus, separates on the crest of the wave to form a small separation bubble. (2) The crest of the wave grows to form a liquid filament. At the same time, this recirculation region grows in to a vortex which swells up the liquid filament from below similar to bag-breakup but from below. However, the growing vortex becomes unstable and leaves the wake while the liquid filament breaks-up from below and forms droplets. (3) During break-up the liquid filament is pushed downward by the gas flow over it. The gas flow momentarily remains attached while flowing past the crest of the wave. (4) But such a flow situation is unstable and so it eventually separates to form a separation bubble on top of the liquid filament. Thus, a recirculation vortex is again formed behind the wave which further grows and leaves the wave while catapulting the liquid filament to result in break-up and hence, the droplet ejection.

J. J. S. J. and J. Hoepffner acknowledge Daniel Fuster, Pascal Ray and Gilles Agbaglah of the Institut D'Alembert for useful discussions on using GERRIS flow solver. We also thank Antoine Delon's kind assistance during our visit to LEGI, Grenoble. J. J. S. J. extends his acknowledgement to the financial support from the Fuel Injector Research for Sustainable Transport (FIRST) program during the course of the work.

### References

1. L. P. BAYVEK & Z. ORZECZOWSKI, *Liquid Atomization*, Taylor & Francis (1993).
2. F. BEN RAYANA, Contribution à l'étude des instabilités interfaciales liquide-gaz en atomisation assistée et tailles de gouttes. PhD thesis, INP Grenoble, France (2007).
3. D. DUKE, D. HONNERY & J. SORIA, Experimental investigation of nonlinear instabilities in annular liquid sheets, *J. Fluid Mech.*, **691**, 594–604 (2012).
4. J. EGGERS, Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows, *Rev. Mod. Phys.*, **69**, 865–929 (1997).
5. J. EGGERS & E. VILLERMAUX, Physics of liquid jets, *Rep. Prog. Phys.*, **71**, 036601 (2008).
6. J. HOEPFFNER, R. BLUMENTHAL & S. ZALESKI, Self-similar wave produced by local perturbation of the Kelvin-Helmholtz shear-layer instability, *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 104502 (2011).
7. J. C. LASHERAS & E. J. HOPFINGER, Liquid jet instability and atomization in a coaxial gas stream, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **32**, 275–308 (2000).
8. A. H. LEFEBVRE, *Atomization and Sprays*, Taylor & Francis (1989).
9. S. P. LIN & R. D. REITZ, Drop and spray formation from a liquid jet, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**, 85–105 (1998).
10. J.-P. MATAS, S. MARTY & A. CARTELLIER, Experimental and analytical study of the shear instability of a gas-liquid mixing layer, *Phys. Fluids*, **23**, 094112 (2011).
11. A. ORAZZO & J. HOEPFFNER, The evolution of a localized nonlinear wave of the Kelvin-Helmholtz instability with gravity, *Phys. Fluids*, **24**, 112106 (2012).
12. M. PILCH & C. ERDMAN, Use of breakup time data and velocity history data to predict the maximum size of stable fragments for acceleration-induced breakup of a liquid drop, *Int. J. Multiph. Flow.*, **13**, 41–57 (1987).
13. S. POPINET, An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows, *J. Comp. Phys.*, **228**, 5838–5866 (2002).
14. L. RAYNAL, *Instabilité et entraînement à l'interface d'une couche de mélange liquide-gaz*, PhD thesis, Université J. Fourier, Grenoble 1, France (1997).
15. E. VILLERMAUX, Fragmentation, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **39**, 419–446 (2007).

# Sur la synchronisation de systèmes chaotiques bidirectionnellement couplés

Laurent Laval<sup>1</sup>, Jean-Pierre Barbot<sup>1</sup> & Christophe Letellier<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ECS-Lab / ENSEA, 6 avenue du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise, France

<sup>2</sup> CORIA, Université de Rouen, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex, France

laval@ensea.fr

**Résumé.** Basé sur la considération de systèmes chaotiques de Rössler, cet article présente une étude de la synchronisation forcée de deux systèmes couplés, de manière bidirectionnelle, au travers de la transmission de signaux unidimensionnels ne dépendant explicitement que d'une seule variable d'état (côté émetteur) et n'influençant directement que la dynamique correspondante à l'état transmis (côté récepteur). En regard de cette configuration et d'une analyse basée sur la Théorie de la Commande, nous mettons alors en exergue que la synchronisation (partielle ou complète) relève essentiellement de conditions sur la *stabilisabilité* des écarts de trajectoires des deux systèmes. De plus, nous mettons en évidence que, même si elle s'avère effective, la synchronisation complète ne peut pas, d'un point de vue théorique, être garantie de manière absolue pour tout temps  $t$ ; celle-ci dépendant explicitement de la région de l'espace (borné) dans laquelle les trajectoires des systèmes évoluent majoritairement.

**Abstract.** Considering two chaotic Rössler systems, this paper presents a study on the forced synchronization of two systems, bidirectionally coupled by transmitting unidirectional signals which explicitly depend on a single state variable (from the emitter) and only affect directly the dynamics corresponding to the transmitted state variable (of the receiver). According to an analysis based on the control theory, we exhibit that (partial or complete) synchronization mainly depends on conditions about the *stabilisability* of variations between the trajectories of the two systems. Moreover, we point out that, even if it is effective, complete synchronization can not, from a theoretical point of view, be absolutely guaranteed for all time  $t$ , as it explicitly depends on the domain of the (bounded) space in which the trajectories of systems mostly evolve.

## 1 Introduction

Depuis le résultat de Pecora et Carroll [1], une multitude d'articles a été consacrée à la synchronisation de systèmes chaotiques<sup>1</sup> (voir, par exemple, [2, 3] et les références internes). Dans la très grande majorité des cas, ces articles considèrent des configurations de type Maître/Esclave, synonymes de couplages unidirectionnels (seul le système Maître transmettant des informations ou des ordres de commande à l'Esclave chargé de se synchroniser). En regard de cette forme de couplage et de l'appairage, à l'identique ou hétérogène, de divers systèmes chaotiques (tels que ceux de Lorenz, Chua, Rössler, Chen...), de nombreux critères de synchronisabilité ont alors été définis, que ce soit dans le cadre de la synchronisation libre ou forcée. Toutefois, à notre connaissance, hormis l'investigation de certaines approches telle que la théorie des graphes et du consensus [8], très peu d'études relatives au cas d'un couplage bidirectionnel (où chaque système est à la fois Maître et Esclave) avec contrôle de chaque système, ont été menées en considérant la Théorie de la Commande pour support (à l'instar, par exemple, de [4] pour le cas unidirectionnel). Pourtant, dans une telle configuration, chaque système influence la dynamique de l'autre par le biais des couplages. De ce fait, la synchronisation relève de l'évolution de chaque système vers un comportement consensuel; augmentant alors la complexité de son analyse comparativement au cas d'un simple suivi d'une trajectoire de référence. Cet article vise ainsi à étudier, sur le plan théorique, l'existence de conditions sur l'obtention d'un tel consensus, synonyme de synchronisation des deux systèmes.

Dans ce cadre, la section 2 présente la configuration considérée et la problématique étudiée. La section 3 est consacrée à la dynamique de l'erreur de synchronisation, en cherchant à définir des critères d'obtention d'une synchronisation partielle ou complète. Enfin, au travers d'une conclusion, les résultats obtenus sont résumés en section 4 et accompagnés de suggestions d'extensions potentielles aux travaux présentés.

1. qu'il s'agisse de paires ou d'ensembles (i.e. de réseaux) de systèmes.

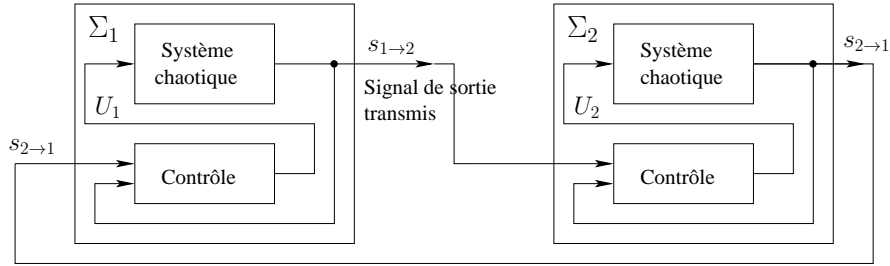
## 2 Définition du problème

Cette étude considère deux systèmes de Rössler identiques (c.a.d. possédant la même structure mathématique et les mêmes paramètres de modèles), évoluant à partir de conditions initiales différentes (de telle sorte que, en l'absence de couplage et de tout contrôle, leurs trajectoires respectives soient décorrélées). Ces deux systèmes, notés respectivement  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , sont alors définis, dans leur forme non couplée, comme suit [5] :

$$\Sigma_{i=1..2} \begin{cases} \dot{x}_i = -y_i - z_i \\ \dot{y}_i = x_i + ay_i \\ \dot{z}_i = b + z_i(x_i - c) \end{cases} \quad (1)$$

où  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $y_i \in \mathbb{R}$  et  $z_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1..2$ ) sont les états respectifs des systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les paramètres, supposés identiques pour les deux systèmes et tels que  $a \in [0.126; 0.43295]$ ,  $b = 2$ , et  $c = 4$  pour obtenir une évolution en régime chaotique [6].

Ces systèmes sont supposés être couplés, de manière bidirectionnelle et symétrique, au travers de la transmission de signaux unidimensionnels définis explicitement en fonction d'une unique variable d'état (côté émetteur) et n'influençant directement que la dynamique correspondante à l'état transmis (côté récepteur). Enfin, en complément de cette configuration, chaque système est supposé contrôlé par une commande (scalaire) par injection de sortie, conduisant au final à une représentation schématisée telle que celle de la Figure 1.



**Figure 1.** Représentation schématique des systèmes bidirectionnellement couplés

En adoptant une notation compacte, chaque système contrôlé peut ainsi être défini par :

$$\Sigma_{i=1..2} : \quad \dot{X}_i = F_i(X_i) + U_i \quad (2)$$

où  $X_i = [x_i, y_i, z_i]^T$  ( $i = 1..2$ ) est le vecteur d'état du système  $\Sigma_i$ ,  $F_i$  est un champ de vecteur et  $U_i$  est le vecteur de commande.

*Remarque 1.* Si les composantes de  $U_i$  pouvaient agir sur toutes les dynamiques du système en n'étant fonction que d'une partie de l'état de l'autre système, nous serions alors en présence d'un problème d'*observabilité* ou, de façon moins restrictive, de *déteçtabilité* [9]. De même, si les composantes de  $U_i$  ne pouvaient agir que sur une partie des dynamiques du système mais être fonction de tous les états, nous serions alors face à un problème de *commandabilité* ou, de façon moins restrictive, de *stabilité* [9].

Par hypothèse, le couplage est ici censé s'effectuer uniquement suivant l'un des trois états  $x$ ,  $y$  ou  $z$  et n'affecter directement que la dynamique correspondante à l'état transmis. Nous pouvons ainsi envisager trois configurations possibles de commande, à savoir :

$$\begin{aligned} U_i &= [1 \ 0 \ 0]^T u_x(x_i - x_j) \\ \text{ou } U_i &= [0 \ 1 \ 0]^T u_y(y_i - y_j) \\ \text{ou encore } U_i &= [0 \ 0 \ 1]^T u_z(z_i - z_j) \end{aligned} \quad \text{avec } i = 1..2, j = 1..2 \text{ et } i \neq j \quad (3)$$

Enfin, toujours par hypothèse, les couplages sont supposés être symétriques, impliquant  $U_1 = -U_2$ .

En regard de cette configuration, l'objectif de la présente étude est ainsi de définir des conditions nécessaires et, si possible, suffisantes pour garantir l'obtention d'une synchronisation partielle ou complète [7] (c.a.d. la convergence de tout ou partie des trajectoires des variables d'état prises deux à deux).

*Remarque 2.* La réalisation de cet objectif de synchronisation (forcée) suppose naturellement le respect de certaines hypothèses. En l'occurrence, en se focalisant sur les propriétés structurelles des systèmes, on pourrait par exemple souhaiter (ou exiger) que le système  $\Sigma_1$  soit *observable* par rapport au signal  $s_{1 \rightarrow 2}$  transmis et que le système  $\Sigma_2$  soit *commandable* en regard du signal  $s_{1 \rightarrow 2}$  reçu. Malheureusement, il ne suffit pas de remplir les critères d'observabilité et de commandabilité pour garantir le suivi de trajectoire (synonyme de synchronisation, dans le cas d'une trajectoire commune aux deux systèmes). Il convient donc de s'intéresser également aux propriétés des écarts de trajectoires, tout en supposant que chacun des deux systèmes est au moins *déTECTABLE*<sup>2</sup> (par rapport au signal transmis) et *STABILISABLE*<sup>3</sup> (par rapport au signal reçu), garantissant ainsi que chaque système est au moins *gouvernable*.

### 3 Dynamique de l'erreur de synchronisation

Puisque la configuration choisie, c'est-à-dire les deux systèmes et leurs couplages, est symétrique, considérons arbitrairement (sans perte de généralité) la synchronisation de  $\Sigma_2$  par rapport à  $\Sigma_1$ . Notons alors  $e_x$ ,  $e_y$  et  $e_z$  les erreurs de synchronisation définies respectivement par  $e_x = x_1 - x_2$ ,  $e_y = y_1 - y_2$  et  $e_z = z_1 - z_2$ . En considérant, à titre d'exemple, un couplage via l'état  $y$  et la commande par injection de sortie correspondante, nous pouvons alors exprimer la dynamique de l'erreur de synchronisation de  $\Sigma_2$  par rapport à  $\Sigma_1$  comme :

$$\Sigma_{err} \begin{cases} \dot{e}_x = -e_y - e_z \\ \dot{e}_y = e_x + a e_y + u_y(y_1, y_2) - u_y(y_2, y_1) \\ \dot{e}_z = b + z_1(x_1 - c) - b - z_2(x_2 - c) \end{cases} \quad (4)$$

En posant  $x_2 = x_1 - e_x$  et sachant que le couplage est symétrique (autrement dit que  $u_y(y_1, y_2) = -u_y(y_2, y_1)$ ), l'expression précédente devient alors :

$$\Sigma_{err} \begin{cases} \dot{e}_x = -e_y - e_z \\ \dot{e}_y = e_x + a e_y + 2 u_y(y_1, y_2) \\ \dot{e}_z = e_z(x_1 - e_x - c) + z_1 e_x. \end{cases} \quad (5)$$

*Remarque 3.* On peut naturellement, par des calculs analogues, obtenir les deux autres formes de la dynamique de l'erreur de synchronisation en fonction de la variable d'état  $x$  ou  $z$  considérée comme base pour le couplage.

En accord avec notre problématique de synchronisation, étudions à présent la convergence vers 0 des écarts des trajectoires d'état des systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Du point de vue de la Théorie de la Commande, ceci peut être assimilé à une étude de *stabilité*, matérialisée par la recherche de l'existence d'une fonction de Lyapunov (définie positive) dont la dérivée soit définie négative. Considérons pour cela une fonction de Lyapunov candidate de la forme quadratique suivante :

$$V = \frac{1}{2} e^T P e \quad \text{dont la dérivée est} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \dot{e}^T P e + \frac{1}{2} e^T P \dot{e} \quad \text{avec} \quad \dot{e} = \frac{de}{dt}, \quad (6)$$

où  $e = [e_x \ e_y \ e_z]^T$  est le vecteur des erreurs de synchronisation et  $P$  est une matrice supposée symétrique, définie positive et de dimension appropriée (ici,  $3 \times 3$ ).

L'objectif est alors d'établir des conditions sur les composantes de la matrice  $P$  garantissant conjointement le respect des propriétés de cette matrice (symétrie et positivité) et l'existence d'une telle fonction  $V$  (avec  $V > 0$  et  $\dot{V} < 0$ ). Dans ce qui suit, nous allons ainsi exprimer une partie de ces conditions et la démarche d'établissement de leur ensemble, tout en mettant en exergue certains problèmes.

- 
2. c'est-à-dire que les états non observables sont stables.
  3. c'est-à-dire que les états non commandables sont stables.

### 3.1 Définition de conditions sur $P$

En regard de la relation (6), considérons la matrice symétrique ( $P = P^T$ ) telle que :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

$P$  étant supposée être définie positive, ses composantes doivent au moins remplir les trois conditions suivantes imposées par le critère de Sylvester, soient :

$$\begin{aligned} \mathbf{CS1} : & \quad p_{11} > 0; \\ \mathbf{CS2} : & \quad p_{11} p_{22} - p_{12}^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{11} p_{22} > p_{12}^2 \quad (> 0); \\ \mathbf{CS3} : & \quad p_{11} p_{22} p_{33} - p_{11} p_{23}^2 + 2 p_{12} p_{23} p_{13} - p_{12}^2 p_{33} - p_{22} p_{13}^2 > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

*Remarque 4.* Au regard des inégalités précédentes, il découle de **CS2** que, hormis le fait que  $p_{12}$  peut prendre a priori n'importe quelle valeur réelle, il existe une condition sous-jacente à respecter, à savoir :

$$\mathbf{CS2}_1 : \quad p_{22} > 0 \quad (9)$$

De même, il découle de **CS3** que :

$$\begin{aligned} \mathbf{CS3}_1 : & \quad p_{33} > 0 \quad \text{et} \\ \mathbf{CS3}_2 : & \quad p_{11} p_{22} p_{33} > p_{11} p_{23}^2 - 2 p_{12} p_{23} p_{13} + p_{12}^2 p_{33} + p_{22} p_{13}^2 > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

En effet, il faut nécessairement que le produit  $p_{11} p_{22} p_{33}$  soit strictement positif, sachant que :  $p_{11}$  et  $p_{22}$  le sont de par les conditions **CS1** et **CS2**<sub>1</sub>, que  $p_{11} p_{23}^2$ ,  $p_{12}^2 p_{33}$  et  $p_{22} p_{13}^2$  sont (forcément) positifs, et que seul  $p_{12} p_{23} p_{13}$  peut éventuellement être négatif si  $p_{12}$  l'est.

A ce stade, nous ne disposons que de conditions générales (issues du critère de Sylvester) sur les composantes de la diagonale de la matrice  $P$ . Il convient donc de rechercher d'autres contraintes, impliquant notamment les autres composantes de la matrice, liées cette fois à la propriété attendue de négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov (propriété qui dépend de la structure de la dynamique de l'erreur de synchronisation et, de fait, de la structure même des systèmes de Rössler).

Intéressons nous ainsi à l'expression de la dérivée de la fonction de Lyapunov, sans présumer du signal transmis, et donc de la dynamique directement affectée. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \quad [(z_1 - e_z)p_{13} + p_{12}]e_x^2 + [p_{12} a + (z_1 - e_z)p_{23} + p_{22} - p_{11}]e_y e_x \\ & \quad + 2(p_{33}u_z + p_{23}u_y + p_{13}u_x)e_z + [(x_1 - c)p_{13} - p_{11} + p_{23} + z_1 p_{33}]e_z e_x \\ & \quad + 2(p_{13}u_z + p_{12}u_y + p_{11}u_x)e_x + (a p_{22} - p_{12})e_y^2 + [-p_{13} - p_{12} + p_{23}(x_1 - c + a)]e_z e_y \\ & \quad + 2(p_{23}u_z + p_{12}u_x + p_{22}u_y)e_y + [-p_{13} + (x_1 - c - e_x)p_{33}]e_z^2, \end{aligned} \quad (11)$$

sachant toutefois que seul un des trois termes de commande ( $u_x$ ,  $u_y$  ou  $u_z$ ) sera non nul, après sélection.

Considérons également, par souci de simplicité mais sans perte de généralité, des commandes proportionnelles aux écarts de trajectoires de la forme  $u_x = K_x e_x$ ,  $u_y = K_y e_y$  et  $u_z = K_z e_z$  où  $K_x \in \mathbb{R}$ ,  $K_y \in \mathbb{R}$  et  $K_z \in \mathbb{R}$  représentent des gains de commande. Il advient alors :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \quad [2K_x p_{11} + p_{12} + (z_1 - e_z)p_{13}]e_x^2 + [(2K_x + 2K_y + a)p_{12} + (z_1 - e_z)p_{23} + p_{22} - p_{11}]e_y e_x \\ & \quad - e_z^2 p_{33} e_x + [(x_1 - c + 2K_x + 2K_z)p_{13} - p_{11} + p_{23} + z_1 p_{33}]e_z e_x + (2K_y p_{22} - p_{12} + a p_{22})e_y^2 \\ & \quad + [(2(K_y + K_z) + a - c + x_1)p_{23} - p_{13} - p_{12}]e_z e_y + [(2K_z + x_1 - c - e_x)p_{33} - p_{13}]e_z^2. \end{aligned} \quad (12)$$

*Remarque 5.* Au regard des relations (11) ou (12), il n'apparaît pas possible de conclure directement sur le signe de la dérivée de la fonction de Lyapunov. De plus, l'expression de  $\frac{dV}{dt}$  dépend explicitement des variables d'états  $z_1$  et  $x_1$  du système à synchroniser. Autrement dit, comme annoncé en introduction, la stabilisabilité des écarts de trajectoires et la synchronisation des deux systèmes dépendent donc explicitement de la région de l'espace dans laquelle les systèmes évoluent.



En regard de la remarque 5 précédente et afin de s'affranchir partiellement de la dépendance de l'expression de  $\dot{V}$  vis à vis de certains états, posons, par exemple,  $p_{13} = 0$  et  $p_{23} = 0$ . Ceci conduit alors à l'expression simplifiée :

$$\frac{dV}{dt} = (2K_x p_{11} + p_{12})e_x^2 + [(2(K_x + K_y) + a)p_{12} - p_{11} + p_{22}]e_y e_x + ((z_1 - e_z)p_{33} - p_{11})e_z e_x + ((a + 2K_y)p_{22} - p_{12})e_y^2 + (-p_{12})e_z e_y + ((2K_z + x_1 - c)p_{33})e_z^2. \quad (13)$$

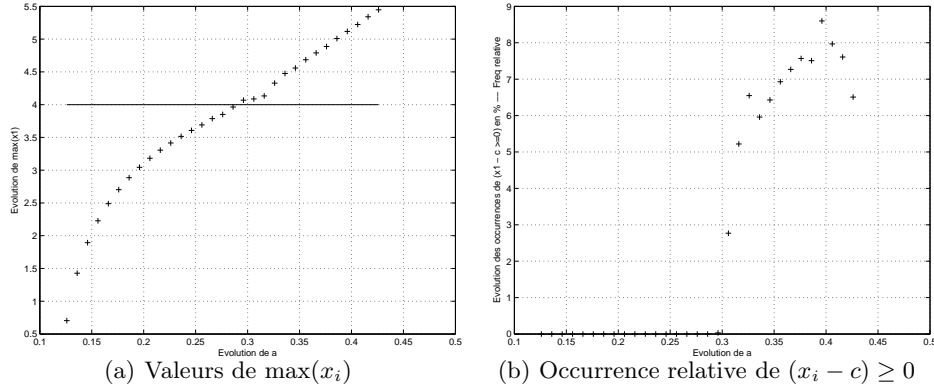
Afin de garantir la négativité de  $\frac{dV}{dt}$ , il est naturel de chercher, au travers des termes de commande (ici, un unique terme), à influencer sur les termes quadratiques de (13) : seuls termes pour lesquels il est possible de garantir le signe. Néanmoins, fondamentalement, trois cas sont envisageables :  $\{K_x \neq 0, K_y = K_z = 0\}$ ,  $\{K_y \neq 0, K_x = K_z = 0\}$ ,  $\{K_z \neq 0, K_x = K_y = 0\}$ . Intéressons-nous arbitrairement (sans perte toutefois de généralité) au second cas, qui conduit alors à définir la dérivée de la fonction de Lyapunov comme suit :

$$\frac{dV}{dt} = p_{12}e_x^2 + [(2K_y + a)p_{12} - p_{11} + p_{22}]e_y e_x + [(z_1 - e_z)p_{33} - p_{11}]e_z e_x + [(a + 2K_y)p_{22} - p_{12}]e_y^2 + (-p_{12})e_z e_y + [(x_1 - c)p_{33}]e_z^2 \quad (14)$$

*Remarque 6.* Le terme quadratique  $p_{12}e_x^2$  peut être rendu négatif en optant pour  $p_{12} < 0$  (inégalité compatible avec la remarque 4). Sachant que  $a$  et  $p_{22}$  sont positifs et  $p_{12} < 0$ , le terme quadratique  $[(a + 2K_y)p_{22} - p_{12}]e_y^2$  peut également être rendu négatif par une sélection appropriée du gain  $K_y$  tel que :

$$K_y < \frac{1}{2} \left( \frac{p_{12}}{p_{22}} - a \right) \quad (\text{avec } p_{22} > 0 \text{ et } p_{12} < 0). \quad (15)$$

En revanche, il n'existe aucune garantie (ni d'intervention possible) pour la négativité de  $[(x_1 - c)p_{33}]e_z^2$  sachant que, d'après **CS3**<sub>1</sub>,  $p_{33} > 0$ . Cela signifie que cette négativité est effective si  $c$  majore  $x_1$ , ce qui ne peut être garanti pour tout temps  $t$  mais uniquement en moyenne (voir Fig. 2).



**Figure 2.** Comportement de  $x_i$  et  $x_i - c$  en fonction du paramètre  $a$ , à partir de la simulation du système de Rössler en évolution libre. Autres paramètres :  $b = 2$  et  $c = 4$ .

Restent enfin les termes croisés relatifs à  $e_y e_x$ ,  $e_z e_x$  et  $e_z e_y$ . Pour cela, effectuons un changement de variables en posant :  $\alpha = p_{12}$ ,  $\beta = (2K_y + a)p_{12} - p_{11} + p_{22}$ ,  $\gamma = (2K_y + a)p_{22} - p_{12}$ ,  $\delta = (z_1 - e_z)p_{33} - p_{11}$ ,  $\theta = (x_1 - c)p_{33}$  et enfin  $\kappa = -p_{12}$ . Nous obtenons alors une nouvelle expression de la dérivée de la fonction de Lyapunov, de la forme :

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{\left( \frac{\alpha}{2}e_x^2 + \beta e_x e_y + \frac{\gamma}{2}e_y^2 \right)}_{T_1} + \underbrace{\left( \frac{\alpha}{2}e_x^2 + \delta e_z e_x + \frac{\theta}{2}e_z^2 \right)}_{T_2} + \underbrace{\left( \frac{\gamma}{2}e_y^2 + \kappa e_y e_z + \frac{\theta}{2}e_z^2 \right)}_{T_3} \quad (16)$$

pour laquelle on souhaite que  $T_1 < 0$ ,  $T_2 < 0$ , et  $T_3 < 0$ . En reconnaissant trois inégalités du second degré de formes analogues, nous pouvons alors établir des conditions supplémentaires, à savoir, d'une part,  $\beta^2 < \alpha \cdot \gamma$ ,  $\delta^2 < \alpha \cdot \theta$ ,  $\kappa^2 < \gamma \cdot \theta$ , et, d'autre part,  $\alpha < 0$ ,  $\gamma < 0$  et  $\theta < 0$ , qui peuvent, après retour aux variables initiales, aboutir à des conditions explicites de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{CL1} : & \quad \alpha = p_{12} < 0; \\ \mathbf{CL2} : & \quad \gamma = (2K_y + a)p_{22} - p_{12} < 0; \\ \mathbf{CL3} : & \quad \theta = (x_1 - c)p_{33} < 0, \dots \end{aligned} \tag{17}$$

Notons, une fois encore, que la négativité de  $\theta$  ne peut pas être garantie pour tous instants  $t$  car,  $p_{33}$  étant positif, cette négativité dépend uniquement de  $x_1 - c$  et donc du domaine visité par les trajectoires du système  $\Sigma_1$  (La configuration étant symétrique, une conclusion identique peut être obtenue pour  $\Sigma_2$ ).

Au final, nous sommes donc capables d'établir un ensemble de conditions sur les composantes de la matrice  $P$ , susceptibles d'être vérifiées par un choix approprié de valeurs (de ces composantes) ou des paramètres de la commande. Toutefois, la validation de certaines conditions dépend uniquement des propriétés structurelles des systèmes concernés et de leur comportement.

## 4 Conclusion

Dans cet article, nous avons mis en exergue que la synchronisation (forcée) de systèmes bidirectionnellement couplés ne relève pas uniquement de propriétés structurelles d'observabilité et de commandabilité de chacun des systèmes mais également de la *stabilisabilité* des écarts des trajectoires (sous couvert néanmoins que les systèmes soient au moins détectables et stabilisables). Une étude de stabilité, au sens de Lyapunov, nous a alors permis de définir un ensemble de conditions explicites relatives à l'obtention d'une synchronisation partielle ou complète, conditions qui nous amèneront à établir, dans de futurs travaux, des critères de sélection de la variable d'état à transmettre et de la commande (en regard, naturellement, d'une configuration donnée). Enfin, cette étude a montré que, même si elle s'avère effective, la synchronisation complète des deux systèmes ne peut pas, d'un point de vue théorique, être garantie de manière absolue pour tout temps  $t$ . Autrement dit, certaines directions de l'erreur de synchronisation ne sont stables qu'en moyenne sur la trajectoire, mais pas sur toute la trajectoire. De futurs travaux tenteront de démontrer, d'un point de vue théorique, que ces singularités de stabilité autorisent néanmoins, sous certaines conditions (notamment de faibles occurrences), l'obtention d'une synchronisation.

## Références

1. L. M. PECORA & T. L. CARROLL, Synchronization in chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 821 (1990).
2. S. BOCCALETTI, J. KURTHS, G. OSIPOV, D. L. VALLADARES & C. ZHOU, The synchronization of chaotic systems, *Phys. Reports*, **366**, 1 (2002).
3. A. PIKOVSKY, M. ROSENBLUM & J. KURTHS, *Synchronization : A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (2003).
4. H. NIJMEIJER & I. M. Y MAREELS, An observer looks at synchronization, *IEEE Trans. Circ. Syst.*, **44**, 874–890 (1997).
5. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Phys. Lett. A*, **57**, 397–398 (1976).
6. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5**, 271–282 (1995).
7. M. ROSENBLUM, A. PIKOVSKY & J. KURTHS, Phase synchronization in driven and coupled chaotic oscillators, *IEEE Trans. Circ. Syst.*, **44**, 874–881 (1997).
8. L. SCARDOVI, R. SEPULCHRE & N. E. LEONARD, Stabilization of collective motion in three dimensions : a consensus approach, *Proc. 46th IEEE Conf. Decision and Control*, 2931–2936 (2007).
9. T. KAILATH, *Linear Systems*, Prentice Hall (1979).

# Étude du piège de l'utriculaire : modèle élastique et comportements dynamiques associés

Coraline Llorens<sup>1</sup>, Médéric Argentina<sup>1</sup> & Yann Bouret<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut Non Linéaire de Nice, CNRS UMR 7335, 1361 Route des Lucioles, 06560 Valbonne, France,

<sup>2</sup> Laboratoire J. A. Dieudonné, CNRS UMR 7351, Université de Nice Sophia-Antipolis, 06100 Nice, France

coraline.llorens@unice.fr

**Résumé.** L'utriculaire est une plante carnivore aquatique qui capture ses proies à l'aide de pièges à aspiration présents sur les ramifications de ses feuilles sous-marines. Nous avons présenté un modèle dynamique [1] permettant de déterminer les principaux paramètres caractéristiques et de prédire les différents états possibles du piège : excitable, métronomique [3] ou même défaillant. Afin de compléter ces résultats, nous proposons ici un modèle élastique simple de la porte du piège de l'utriculaire. Nous montrons que le pincement de la porte est à l'origine de la diversité des comportements observés. Les résultats obtenus pour *Utricularia inflata* sont en accord avec ceux observés expérimentalement dans [2].

**Abstract.** *Utricularia* is an aquatic carnivorous plant which catches preys with its underwater millimeter-sized traps. We have recently presented a dynamical model [1] allowing the determination of the characteristic parameters and capturing the diversity of possible trap states: excitability, spontaneous or periodic firings [3], or even failing. We propose here a simple elastic model for the trap door to complete our previous results. We find that the clamping is the relevant parameter for the description of the trap behaviors. The results obtained for *Utricularia inflata* match the experimental values in [2].

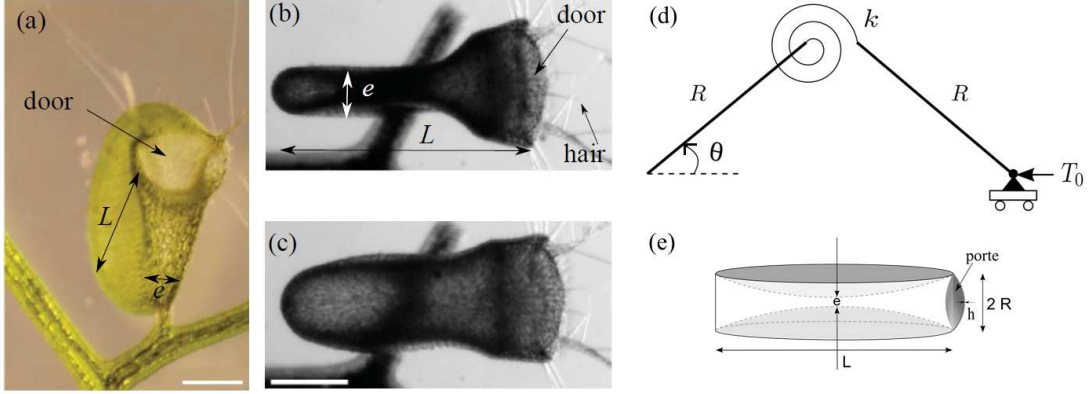
## 1 Introduction

*Utricularia inflata* est une plante aquatique dépourvue de racines qui vit dans les marais. Pour survivre dans cet environnement pauvre en nutriments, la plante se nourrit grâce au fonctionnement de nombreux petits pièges présents sur les ramifications de ses feuilles sous-marines. Chaque piège millimétrique est une outre déformable, capable de se gonfler et de se dégonfler, fermée par une porte élastique. Si une proie s'approche du piège et touche l'un des poils sensitifs (Fig. 1.(a) et (b)), la porte subit alors une instabilité de flambage et s'ouvre : la proie ainsi que le liquide qui l'entoure sont aspirés en à peine quelques millisecondes et se retrouvent alors pris au piège (la porte se refermant instantanément). L'outre est alors complètement gonflée (Fig. 1.(c)). La proie sera assimilée par la plante grâce aux sécrétions de glandes digestives. L'eau contenue à l'intérieur du piège est ensuite lentement évacuée par les glandes membranaires : l'outre se dégonfle progressivement et revient alors dans sa configuration piège (Fig. 1.(b)).

Nous proposons dans la Section 2 un modèle mécanique simple (Fig. 1.(d)) pour paramétrer l'énergie élastique de la porte. Le résultat obtenu corrobore l'hypothèse utilisée dans le modèle dynamique que nous avons récemment proposé [1], dont quelques résultats sont exposés dans la Section 3. Dans la Section 4, nous discutons de la validité du modèle en le comparant aux résultats expérimentaux obtenus dans [2].

## 2 Modélisation du comportement élastique de la porte

Chaque outre constitue un véritable piège à aspiration. En pompant l'eau à l'intérieur du piège, les glandes membranaires créent une différence de pression entre l'extérieur et l'intérieur du piège avec un temps caractéristique de l'ordre de la centaine de minutes. Pour une différence de pression critique, la porte s'ouvre, permettant ainsi l'aspiration du fluide (et de la proie potentielle) en quelques millisecondes.



**Figure 1.** Piège de *Utricularia inflata* (a) : Piège vu de face. Les traits fins près de la porte sont les poils sensitifs. Le piège dans ses deux états extrêmes : (b) : l'outre est dégonflée et en configuration piège. (c) : le piège s'est déclenché : l'outre est entièrement gonflée. La barre d'échelle est de 500  $\mu\text{m}$ . (d) : La porte est modélisée par deux barres rigides de longueur  $R$  et d'épaisseur  $h$ , reliées par un ressort de torsion de constante de raideur  $k$ . L'angle  $\theta$  est l'angle formé par la barre par rapport à l'horizontale. L'extrémité de la deuxième barre rigide est mobile et soumise à une force  $T_0$ . (e) : Géométrie cylindrique du piège adoptée dans [1]. Le piège est un disque biconcave que l'on modélise par un cylindre déformable de diamètre  $L \approx 1.5$  mm et de hauteur variable  $e$  ( $0.4 < e < 0.8$  mm [2]). La porte est une coquille sphérique de rayon  $R$  ( $R = 3 \cdot 10^{-4}$  m) et d'épaisseur  $h$  ( $h = 3 \cdot 10^{-5}$  m) [3].

La porte du piège possède trois états d'équilibre : deux stables (porte fermée et porte ouverte) et un instable (lorsque la porte est en train de flamber). Sa partie haute est clampée au reste du piège alors que son extrémité basse est en compression sur un substrat rigide appelé seuil. Lors du flambage, la porte glisse sur ce seuil avant de s'ouvrir.

Nous assimilons la porte à deux barres rigides de longueur  $R$  reliées entre elles par un ressort de torsion (de constante de raideur  $k$ ), comme représenté sur la figure 1.(d). L'angle  $\theta$  est l'angle formé par la barre par rapport à l'horizontale. Nous adoptons les conventions suivantes : pour  $\theta > 0$ , la porte est fermée ; pour  $\theta < 0$ , la porte est ouverte. Le clampage de la porte induit un angle  $\theta_0$  entre l'horizontale et la barre [AB]. Une force  $T_0$  ( $T_0 > 0$ ) s'exerce sur l'extrémité libre de la barre [BC]. En effectuant un bilan sur les moments des forces, nous pouvons décrire la dynamique de ce problème :

$$mR^2\ddot{\theta} = -k(\theta - \theta_0) + 2T_0R \sin \theta \quad (1)$$

Nous adimensionnons le système en posant :  $t = \tau_i \mathcal{T}$  avec  $\tau_i = \sqrt{\frac{mR}{2T_0}}$ . L'équation (1) devient alors :

$$\ddot{\theta} = -\Gamma(\theta - \theta_0) + \sin \theta \quad (2)$$

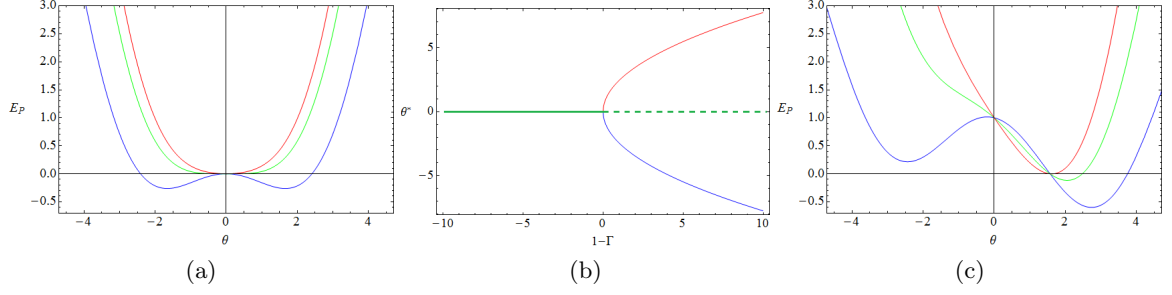
où  $\Gamma$  est un paramètre sans dimension défini par :  $\Gamma = \frac{k}{2T_0R}$ . En multipliant l'équation (2) par  $\dot{\theta}$  puis en l'intégrant par rapport au temps, nous obtenons :

$$\frac{\dot{\theta}}{2} + \frac{\Gamma(\theta - \theta_0)^2}{2} + \cos \theta + e_1 = E_M \quad (3)$$

où  $E_M$  est l'énergie mécanique du système et  $e_1$  une constante d'intégration. Le terme de gauche représente l'énergie cinétique  $E_C$  et les deux autres termes correspondent à l'énergie potentielle  $E_P$ . L'étude des extrema de cette énergie potentielle permet de déterminer les points fixes du système (i.e. les solutions stationnaires pour lesquelles  $E_C = 0$ ).

Intéressons-nous dans un premier temps au cas où  $\theta_0 = 0$ . En choisissant  $e_1 = -1$ , l'énergie potentielle  $E_P$  s'écrit alors :

$$E_P = \frac{\Gamma\theta^2}{2} + (\cos \theta - 1) \quad (4)$$



**Figure 2.** (a) : Energie potentielle en fonction de  $\theta$  pour 3 valeurs du paramètre  $\Gamma$  :  $\Gamma = 1.2$  en rouge,  $\Gamma = 1$  en vert et  $\Gamma = 0.6$  en bleu. (b) : Diagramme de bifurcation :  $\theta$  en fonction de  $(1 - \Gamma)$ .  $\theta^* = 0$  est tracée en vert,  $\theta^* = \sqrt{6(1 - \Gamma)}$  en rouge et  $\theta^* = -\sqrt{6(1 - \Gamma)}$  en bleu. Les lignes continues correspondent aux états stables et les lignes en pointillés aux états instables. (c) : Energie potentielle en fonction de  $\theta$  avec  $\theta_0 = \pi/4$ , pour 3 valeurs du paramètre  $\Gamma$  différentes :  $\Gamma = 1.2$  en rouge,  $\Gamma = 0.7$  en vert et  $\Gamma = 0.2$  en bleu.

Cette énergie est tracée sur la figure 2.(a). Pour calculer les extrema de  $E_P$ , nous posons  $\frac{\partial E_P}{\partial \theta^*} = 0$  et nous utilisons le développement limité de la fonction sinus, nous obtenons alors :

$$\theta^* \left( -(1 - \Gamma) + \frac{(\theta^*)^2}{6} \right) = 0 \quad (5)$$

Deux cas sont alors possibles. Si  $\Gamma > 1$ , la solution stationnaire est  $\theta^* = 0$ . Si  $\Gamma < 1$ , trois solutions stationnaires existent :  $\theta^* = 0$ ,  $\theta^* = \sqrt{6(1 - \Gamma)}$  et  $\theta^* = -\sqrt{6(1 - \Gamma)}$ . Une solution est stable si  $\frac{\partial^2 E_P}{\partial \theta^{*2}} > 0$ , i.e. elle correspond à un minimum local de  $E_P$ . C'est l'inverse pour une solution instable. Nous résumons ces différents résultats sur la figure 2.(a) et (b). Pour  $\Gamma = \Gamma_c = 1$ , la solution  $\theta^* = 0$  perd sa stabilité au profit de deux autres solutions stables, ce qui est la signature d'une bifurcation fourche.

Le paramètre  $\Gamma$  détermine donc les positions d'équilibre du système. Rappelons que  $\Gamma = \frac{k}{2T_0R}$  où  $k$  est la constante de raideur en N.m du ressort de torsion. Ce ressort modélise la réponse élastique de la porte. Nous posons  $k = \alpha E h^3$  où  $E$  est le module d'Young de la porte,  $h$  son épaisseur et  $\alpha$  une constante qui dépend de la géométrie. On peut alors définir la force critique  $T_c$  comme :

$$T_c = \frac{k}{2R\Gamma_c} = \frac{\alpha E h^3}{2R} \quad (6)$$

En divisant par la surface  $hR$ , on en déduit que la pression critique  $P_b$  est proportionnelle à  $Eh^2/R^2$ . Lorsque  $\Gamma < 1$ ,  $T_0$  est supérieure à  $T_c$  : la porte flambe et est dans un des deux états courbés : vers le haut ou vers le bas, les solutions stationnaires équivalentes sont  $\theta^* = \pm\sqrt{6(1 - \Gamma)}$ . Le paramètre  $\Gamma$  mesure donc le rapport entre la force critique associée au flambage de la poutre et la force exercée par le seuil rigide. Pour un piège donné,  $\Gamma$  est une constante qui dépend des caractéristiques du piège : le module d'Young, l'épaisseur et la longueur. Ici, pour  $\theta_0 = 0$ , les deux états flambés ont la même énergie (Fig. 2.(a)) puisque l'équation 4 pour  $E_P$  respecte la symétrie  $\theta$  en  $-\theta$ , cependant cette équiprobabilité des deux états n'est pas compatible avec les observations expérimentales. En effet, la porte est fermée la plupart du temps et elle ne s'ouvre que pendant quelques millisecondes. L'état porte fermée est donc énergétiquement plus favorable que l'état porte ouverte. C'est l'angle de clampage  $\theta_0$  qui va permettre de briser cette symétrie. Nous avons alors :

$$E_P = \frac{\Gamma(\theta - \theta_0)^2}{2} + \cos \theta + e_1 \quad (7)$$

et nous prenons  $e_1 = -1 - (\Gamma\theta_0^2)/2$ . Un développement limité de cette équation permet d'obtenir une approximation de l'énergie potentielle :

$$E_P(\theta) \approx \frac{\theta^2}{2}(\Gamma - 1) + \frac{\theta^4}{4!} - \Gamma\theta_0\theta \quad (8)$$

Cette énergie potentielle est représentée sur la figure 2.(c). L'ajout du pincement de la porte permet de briser la symétrie et de favoriser l'état flambé pour lequel  $\theta$  est positif. Grâce à ce modèle, nous obtenons une loi pour l'énergie élastique. Nous en déduisons que la force élastique induite est une cubique de la forme  $-\theta^3 + \theta + \text{constante}$ .

### 3 Modèle dynamique du piège

Nous résumons ici la construction du modèle dynamique que nous avons précédemment développé dans [1] et présentons une partie des résultats.

#### 3.1 Principaux ingrédients du modèle

**Géométrie du piège :** Nous considérons le piège comme un cylindre déformable de diamètre  $L$  et de hauteur variable  $e$ , comme représenté sur la figure 1.(e). Son volume  $V$  est alors donné par  $V = \pi \left(\frac{L}{2}\right)^2 e$ . Lorsque le piège est complètement gonflé,  $e = 0.8$  mm et le volume est maximal :  $V_{\max} = 1.41$  mm<sup>3</sup>. Dans le cas où il est totalement dégonflé,  $e = 0.4$  mm et le volume est  $V_{\min} = 0.67$  mm<sup>3</sup> [2].

**Variations temporelles du volume du piège et élasticité membranaire :** Trois mécanismes contribuent aux variations du volume  $V$  du piège :

- le pompage : les glandes membranaires éjectent constamment l'eau hors du piège avec un débit  $q$  constant ( $q = 2.3 \cdot 10^{-13}$  m<sup>3</sup> · s<sup>-1</sup> [2]).
- la porosité du piège et le phénomène d'osmose : pour contrebalancer le pompage, un écoulement de Darcy est induit par les pores membranaires. Cet écoulement est proportionnel à  $\Delta P$ , à la surface membranaire  $S_m$  et à la porosité  $\delta_e$  (nous prenons  $\delta_e = 2.4 \cdot 10^{-12}$  m · s<sup>-1</sup> · Pa<sup>-1</sup>).
- l'aspiration du fluide : lorsque la porte est ouverte, un important volume d'eau rentre à l'intérieur du piège avec un débit  $Q = \pi R^2 s(Z/Z_0)U$  où  $Z$  est la position de la porte,  $U$  la vitesse du fluide et  $s(x) = -fx\mathcal{H}(-x)$  avec  $\mathcal{H}(x)$  la fonction d'Heaviside et  $f$  un facteur géométrique. En utilisant la relation de Bernoulli, nous déterminons cette vitesse comme  $U = \text{sign}(\Delta P) \sqrt{\frac{2}{\rho} |\Delta P|}$ .

Les variations temporelles du volume  $V$  sont donc données par l'équation suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -q + \delta_e S_m \Delta P + \text{sign}(\Delta P) \pi R^2 \sqrt{\frac{2}{\rho} |\Delta P|} s\left(\frac{Z}{Z_0}\right) \quad (9)$$

L'élasticité de la membrane relie le volume du piège à la différence de pression  $\Delta P$ . Les expériences et les simulations [2] montrent que :

$$\Delta P = -d(V - V_{\max}), \quad (10)$$

où  $V_{\max}$  est le volume pour lequel l'énergie élastique est minimale et  $d$  est un coefficient qui mixe les effets de l'élasticité et de la géométrie du piège. Dans les expériences, une variation du volume de  $V_{\max}$  à  $V_{\min}$  équivaut à une différence de pression de l'ordre de 0.15bar [2], donc  $d = 2.027 \cdot 10^{13}$  Pa · m<sup>-3</sup>.

**Dynamique de la porte** Soit  $Z$  la position du centre de masse de la porte. L'équation de la dynamique de la porte est donnée par :

$$m\ddot{Z} = f_{\text{élastique}} + f_{\text{frottement}} - \pi R^2 \Delta P \quad (11)$$

$m$  est la masse effective de la porte et elle est égale à la masse de la porte plus celle de la masse ajoutée. Nous avons donc  $m = \rho\pi R^2 h + \kappa\rho R^3$  avec  $\rho$  la masse volumique de la porte ( $\rho \approx \rho_{\text{eau}} = 10^3$  kg · m<sup>-3</sup>),  $R$  le rayon de la porte,  $h$  son épaisseur et  $\kappa$  un facteur d'ordre 1.

Deux types de frottements s'exercent sur la porte :

- lors de l'ouverture, la porte se déplace très rapidement, l'écoulement induit, avec un nombre de Reynolds élevé, génère une traînée proportionnelle à  $\rho(\dot{Z})^2$  [4].

– pour des petits déplacements, la porte est soumise à la traînée de Stokes proportionnelle à  $\eta R \dot{Z}$  avec  $\eta$  la viscosité dynamique de l'eau ( $\eta = 10^{-3}$  Pa.s).

D'où  $f_{\text{frottement}} = -a\rho R^2(\dot{Z})^2 \text{sign}(\dot{Z}) - b\eta R \dot{Z}$ , où  $a$  et  $b$  sont deux constantes d'ordre 1 qui dépendent de la géométrie du piège.

$f_{\text{élastique}}$  est définie comme  $f_{\text{élastique}} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z}$  où  $\mathcal{E}$  est l'énergie élastique donnée par :

$$\mathcal{E} = -P_b R \left[ \frac{Z^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{Z}{Z_0} \right)^2 \right) + c Z_0 Z \right] \quad (12)$$

où  $P_b$  est la pression de flambage pour une coquille de rayon  $R$  et d'épaisseur  $h$  [5] et  $c$  une constante. Cette énergie respecte bien la loi déduite dans la Section 2.

### 3.2 Modèle dynamique complet

En utilisant les équations (9) à (11), nous obtenons :

$$m \ddot{Z} = P_b R \left( Z - \left( \frac{Z}{Z_0} \right)^2 Z + c Z_0 \right) - \pi R^2 \Delta P - a\rho R^2 (\dot{Z})^2 \text{sign}(\dot{Z}) - b\eta R \dot{Z} \quad (13)$$

$$\Delta P = -d \left[ -q + \delta_e S_m \Delta P + \text{sign}(\Delta P) \pi R^2 \sqrt{\frac{2}{\rho} |\Delta P| s} \left( \frac{Z}{Z_0} \right) \right] \quad (14)$$

Nous adimensionnons le système en posant  $Z = Z_0 z$ ,  $\Delta P = P_b p$  et  $t = \sigma s$ . Le rapport entre le terme d'accélération et la réponse élastique donne le temps caractéristique  $\sigma$  pour l'ouverture de la porte :  $\sigma = \sqrt{\frac{m}{P_b R}} \sim 100 \mu\text{s}$ , où  $P_b \approx E(h/R)^2$  et  $E = 2.7$  MPa. Comme  $\sigma$  est le temps le plus court du système, le temps adimensionnel  $s$  est très long. Nous obtenons le système sans dimension suivant :

$$\ddot{z} + \alpha \dot{z}^2 \text{sign}(\dot{z}) + \beta \dot{z} = z - z^3 + c - \lambda p \quad (15)$$

$$\dot{p} = \frac{1}{\tau_p} (p_0 - p) - \text{sign}(p) \gamma \sqrt{|p|} s(z) \quad (16)$$

où  $\alpha = a \frac{\rho Z_0 R^2}{m} \sim 0.34$ ,  $\beta = b \frac{\eta R \sigma}{m} \sim 3.7 \cdot 10^{-4}$ ,  $\gamma = \sigma d \pi R^2 \sqrt{\frac{2}{\rho P_b}} \sim 0.16$ ,  $\lambda = \frac{\pi R}{Z_0} = \pi$ ,  $p_0 = \frac{q}{\delta_e S_m P_b} \sim 0.56$ , et  $\tau_p = \frac{1}{\sigma d \delta_e S_m} \sim 3.2 \cdot 10^7$ .

### 3.3 Analyse du modèle et principaux résultats

Pour étudier les états stationnaires du système (15,16), nous nous intéressons aux deux nullclines qui sont les solutions de  $\dot{z}_s = 0$  et  $\dot{p}_s = 0$ . Elles sont données par :

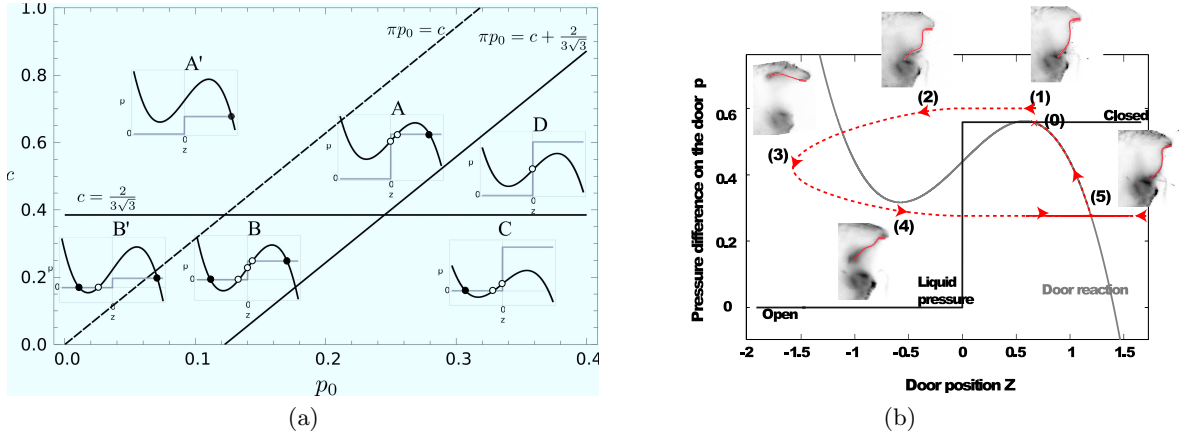
$$p_s = \frac{z_s - z_s^3 + c}{\pi} \quad (17)$$

$$p_s = p_0 \quad \text{si } z \geq 0 \quad (18)$$

$$p_s \simeq 0 \quad \text{si } z < 0 \quad (19)$$

L'équation (17) est une cubique et les équations (18) et (19) donnent une fonction marche. Les intersections de ces deux fonctions sont les points fixes du système (15,16) et leur nombre varie en fonction des deux paramètres  $p_0$  et  $c$ . Nous obtenons ainsi le diagramme de phase du système qui est représenté sur la figure 3.(a). Nous pouvons distinguer 4 régions :

– Région A-A' : le seul état stable est la porte fermée. Lorsque  $p_0$  est proche de  $p_c$ , où  $\pi p_c = c + 2/(3\sqrt{3})$ , le système est très sensible à la moindre variation de la pression ou de la position de la porte. Le portrait de phase de la région A est détaillé dans la figure 3.(b).



**Figure 3.** (a) Diagramme de phase du modèle en fonction des deux paramètres de contrôle  $c$  et  $p_0$ . Les lignes séparent les différents comportements possibles du piège. Les encarts représentent les nullclines du système dans le plan  $(z, p)$ . Les points noirs correspondent aux points fixes stables et les points blancs représentent les points instables. (b) : Dynamique d'un piège prêt à flamber : (0) Configuration piège. (1) Une perturbation, comme une proie qui touche un des poils sensitifs, augmente la différence de pression au-delà du seuil critique, (2) la porte flambe et (3) s'ouvre totalement,  $p$  diminue. (4) La porte se referme après quelques oscillations. (5)  $p$  augmente lentement jusqu'à atteindre sa valeur d'équilibre  $p_0$  (0). Ce portrait de phase correspond à celui de la région A avec les paramètres suivants :  $c = 1.38$  et  $p_0 = 0.56$  et les conditions initiales :  $z = 1$ ,  $\dot{z} = 0$ ,  $p = 0$  et  $v = 1$ . Les encarts sont des photos du piège de *Utricularia australis*.

- Région B-B' : dans cette gamme de paramètres, le système possède deux états stables. Suivant la condition initiale, la porte restera fermée ou ouverte.
- Région C : le seul état stable est la porte ouverte.
- Région D : le piège ne possède pas d'état stable.  $p$  oscille entre les deux extrema de la cubique.

Les résultats des simulations numériques de chacune de ces régions sont présentés dans [1].

## 4 Discussion

Pour  $p_0$  fixé, la variation de  $c$  permet de traverser les régions A, D et C du diagramme de phase qui correspondent aux trois comportements observés expérimentalement chez l'utriculaire. Dans la région A, le système est sensible aux perturbations. Tel une tapette à souris, le piège est prêt à être déclenché : si une proie touche un des poils sensitifs, elle déclenche immédiatement son ouverture. Le système est dit excitable et correspond au cas le plus observé. Le piège associé à la région D est dit métronomique : le piège s'ouvre et se referme périodiquement : ce sont les *spontaneous firings* décrits dans [3]. Dans la région C, la porte reste grande ouverte, le piège n'est alors plus qu'une poche remplie d'eau inutile : le piège est dit défaillant ou mort. Dans ce modèle,  $p_0$  est le paramètre « naturel » : il dépend des caractéristiques du piège. La constante  $c$  qui permet de dissymétriser l'énergie élastique est à relier au terme  $\Gamma\theta_0$  du système barres-ressort. Pour un piège donné,  $\Gamma\theta_0$  détermine le profil de la porte dans son état d'équilibre.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous présentons un modèle dynamique complet permettant de capturer toute la physique du piège de l'utriculaire et d'expliquer la diversité des comportements observés. L'ancrage de la porte semble déterminer la nature du piège. Pour valider ce résultat, un modèle élastique complet qui prend en compte les non-linéarités est nécessaire.



## Références

1. C. LLORENS, M. ARGENTINA, Y. BOURET, P. MARMOTTANT & O. VINCENT, *J. R. Soc. Interface*, **9**, 3129–3139 (2012).
2. M. JOYEUX, O. VINCENT & P. MARMOTTANT, *Phys. Rev. E*, **83**, 021911 (2011).
3. O. VINCENT, I. RODITCHEV & P. MARMOTTANT, *PLoS ONE*, **6**, e20205 (2011).
4. L. D. LANDAU & E. M. LIFSHITZ, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press (1987).
5. L. D. LANDAU & E. M. LIFSHITZ, *Theory of Elasticity*, Pergamon Press (1987).

# Dynamique lente de particules matérielles dans un écoulement de von Kármán

N. Machicoane<sup>1</sup>, L. Fiabane<sup>1</sup>, R. Zimmermann<sup>1</sup>, M. Bourgoïn<sup>2</sup>, J.-F. Pinton<sup>1</sup> & R. Volk<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique - ENS Lyon - 46, allée d'Italie, 69007 Lyon.

<sup>2</sup> Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels, CNRS, UJF INPG, 38041 Grenoble.

nathanael.machicoane@ens-lyon.fr

**Résumé.** Nous étudions la dynamique aux temps longs de grosses particules dans un écoulement de von Kármán, produisant une turbulence inhomogène et anisotrope. Les particules ont des tailles légèrement inférieures à l'échelle intégrale de l'écoulement, leur densité est légèrement supérieure à celle du fluide, et nous suivons leurs positions dans tout le volume. L'étude de leurs statistiques lagrangiennes a permis de mettre en évidence un phénomène nouveau : si les petites particules explorent l'écoulement de façon homogène, les particules excédant une certaine taille explorent l'écoulement de façon hétérogène. En effet, les grosses particules ont tendance à être piégées dans les grandes structures de l'écoulement, au voisinage des disques, et ont une faible probabilité de visiter le centre. Cette exploration préférentielle modifie profondément leur dynamique : l'aller-retour des particules entre les zones préférentielles se traduit par l'apparition d'une loi de puissance dans leurs spectres de position. Ces caractéristiques dynamiques sont reproduites par un modèle stochastique à une dimension simulant le mouvement d'une particule sur-amortie, piégée dans un double puits de potentiel et soumise à un bruit à corrélations exponentielles.

**Abstract.** We study the dynamics of large particles in a von Kármán flow, creating an inhomogeneous and anisotropic turbulence. The particles sizes are slightly below the integral length scale, their density is slightly above the fluid's, and we track their positions in the whole volume. The study of their Lagrangian statistics sheds lights on a new phenomenon: when the small particles sample the flow homogeneously, the particles above a certain size sample the flow inhomogeneously. The larger particles tend to be trapped in the large scales of the flow, near the disks, and have a small probability of visiting the center. This sampling effect deeply affects the dynamics: the particles comings and goings between the preferential areas give way to a power law in their position power spectra. These dynamics behaviours can be observed in a stochastic one-dimensional model simulating the motion of an overdamped particle trapped in a double-well potential, animated by a noise with exponential correlations.

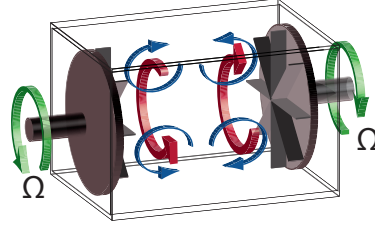
## 1 Introduction

La dynamique de particules matérielles dans un écoulement turbulent est un problème complexe que l'on retrouve aussi bien dans la nature que dans les procédés industriels : transport de pierres ou sédiments par une rivière, effet du vent sur un ballon météorologique ou zones de l'écoulement visitées par une particule solide se dissolvant dans un mélangeur industriel.

La turbulence est caractérisée par la présence d'une vaste gamme d'échelles spatiales et temporelles, qui rend sa description difficile. Dans le cas de particules transportées par un écoulement turbulent, dont la taille est plus grande que l'échelle de dissipation, l'interaction particule-écoulement est non linéaire et l'influence de la taille sur la dynamique aux temps longs des particules matérielles reste un problème ouvert. A ce jour, la dynamique des particules matérielles n'a été étudiée que dans le cas d'écoulements homogènes se focalisant sur les échelles les plus rapides du mouvement [3, 8, 9, 12].

Dans ce cadre, nous étudions la dynamique de particules sphériques dans un écoulement turbulent de von Kármán. Deux disques à pales droites tournent en contra-rotation dans une cellule cubique remplie d'eau, produisant un fort écoulement moyen composé de deux cellules contra-rotatives et de recirculations axiales (figure 1). L'écoulement est fortement anisotrope, n'est homogène que dans une petite région au centre de l'écoulement, et les fluctuations sont fortes (de l'ordre de 30 % de l'écoulement moyen). Nous

souhaitons étudier l'influence du nombre de Reynolds et de la taille des particules sur leur dynamique. La turbulence est pleinement développée aux fréquences de rotation utilisées. Les particules étudiées ont les diamètres suivants :  $D = 6, 10, 18$  et  $24$  mm, et leur densité vaut  $d = 1,14$  dans l'eau à  $20^\circ\text{C}$ . La taille des particules est légèrement inférieure à l'échelle intégrale  $L_{\text{int}} = 3$  cm, et est très supérieure à l'échelle de Kolmogorov (tableau 1).



**Figure 1.** Schéma de l'écoulement moyen dans une cellule de von Kármán à section carrée, produit par deux disques tournant en contra-rotation. Les flèches rouges représentent les cellules contra-rotatives et les flèches bleues les recirculations méridiennes.

$\Omega$ (Hz)	$u'$ ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	$R_\lambda$	$\varepsilon$ ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ )	$\eta$ ( $\mu\text{m}$ )	$\tau_\eta$ (ms)
2	0,23	290	0,48	38	1,4
3	0,35	410	1,68	28	0,8
4	0,46	505	4,03	22	0,5

**Table 1.** Paramètres de l'écoulement pour les différentes fréquences de rotation  $\Omega$ . Nous définissons le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor  $R_\lambda = (15u'^4/\nu\varepsilon)^{-1/2}$ , où  $u'$  est la vitesse fluctuante et  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide.  $\varepsilon$  est le taux de dissipation, estimé par une mesure de la puissance consommée, nous définissons  $\tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$  et  $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$  le temps et l'échelle de Kolmogorov.

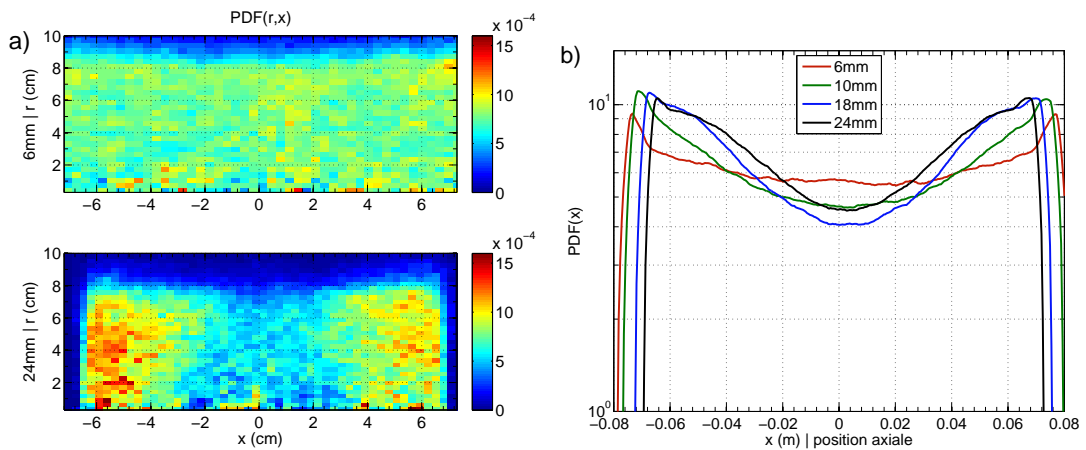
Deux caméras rapides filment les particules dans deux plans perpendiculaires sur environ 80 % du volume de l'écoulement. Une fois les particules détectées, des algorithmes de *tracking* permettent d'obtenir les trajectoires lagrangiennes [13]. Pour étudier la dynamique des particules dans l'écoulement sur une grande gamme d'échelles de temps, nous réalisons des expériences en changeant les fréquences d'acquisition (5, 45 et 3000 Hz), ce qui permet de changer la durée moyenne des trajectoires. Afin d'assurer des trajectoires les plus longues possible, nous ne suivons qu'une particule à la fois.

## 2 Dynamique lente

### 2.1 Exploration préférentielle

Les petites particules de densité très différente de celle du fluide sont connues pour avoir une exploration préférentielle marquée, se regroupant dans les zones de forte vorticité ou de fort cisaillement en fonction de leur densité. Une étude récente [5] montre que l'effet diminue lorsque la taille augmente, dans la gamme  $D/\eta \sim [4.5, 17]$ , et est absent dans le cas des particules dont la densité est proche de celle du fluide. Cependant, aucune étude n'a été conduite pour des particules de tailles plus importantes, ou pour un écoulement ayant une structure moyenne. Dans notre cas, la densité des particules n'est que très légèrement supérieure à celle de l'eau, leur exploration de l'écoulement est donc *a priori* homogène, mais l'écoulement de notre dispositif expérimental possède une structure moyenne prépondérante. L'étude des trajectoires sur des durées longues a mis en évidence un phénomène nouveau. Les plus petites particules (6 mm) explorent l'écoulement de façon homogène, mais à partir d'une certaine taille (entre 6 et 10 mm), les particules explorent l'écoulement de façon très hétérogène. Ces grosses particules ( $D > 6$  mm) ont une probabilité forte d'être au voisinage des disques.

Afin de caractériser cette exploration, nous nous intéressons aux densités de probabilité (PDF) de la position des particules. Comme le dispositif expérimental possède une symétrie de rotation, il est possible de se placer dans un plan  $(r, x)$  pour discuter la position des particules,  $x$  étant l'axe de rotation et  $r$  l'axe radial. La figure 2(a) présente la PDF à deux dimensions dans le plan  $(r, x)$ , obtenue après une intégration selon l'angle  $\theta$  du repère cylindrique. La différence d'exploration de l'écoulement est clairement visible. Par ailleurs, nous notons que cette exploration hétérogène se fait essentiellement selon la direction de l'axe de rotation  $x$ . En effet, les PDF à une dimension, obtenue après une intégration selon  $r$ , capturent très bien cet effet. La transition vers l'exploration préférentielle quand le diamètre des particules augmente est très claire sur la figure 2(b). Pour les particules de 6 mm, la PDF est constante dans la majeure partie de l'écoulement (sur une zone d'environ 10 cm), nous notons uniquement une légère augmentation de la probabilité près des disques, qui est due au confinement. Dès 10 mm, les PDF se creusent au centre, et les régions les plus probables sont dans deux zones, d'environ 3 cm, proches des disques. En variant la vitesse de rotation des disques, il apparaît que l'exploration préférentielle ne dépend pas du nombre de Reynolds de l'écoulement.

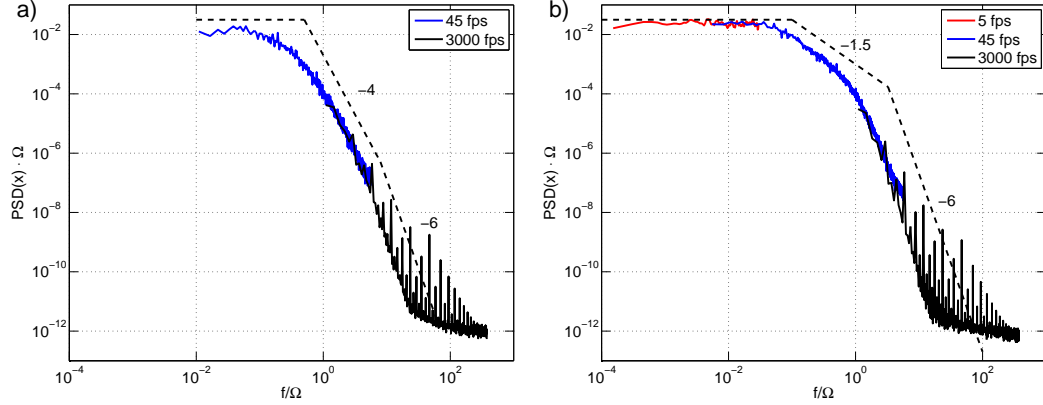


**Figure 2.** (a) Densités de probabilité de la position à deux dimensions  $(r, x)$ , après une intégration selon l'angle de rotation, pour des particules de 6 et 24 mm, à  $R_\lambda = 500$ . (b) Densités de probabilité de la position axiale, à  $R_\lambda = 500$ , pour les différents diamètres des particules.

## 2.2 Spectres de position

L'effet de l'exploration préférentielle sur la dynamique des grosses particules influe également sur les densités spectrales de puissance de la position axiale (figure 3). Les expériences à différentes fréquences d'échantillonnage ont permis de reconstituer des spectres sur une large gamme de fréquences. Pour les plus petites particules, les spectres présentent un plateau aux basses fréquences, dû au confinement des particules dans la cuve, suivi d'une loi de puissance d'exposant  $-4$ . Cette pente, qui correspond à une pente  $-2$  pour un spectre de la vitesse, est celle observée en turbulence homogène isotrope [7]. Aux plus hautes fréquences, cette pente s'accroît ( $-6$ ) du fait d'un phénomène de coupure lié à la taille de la particule.

Pour les plus grosses particules, le plateau est suivi d'une pente de valeur  $-1,5$  correspondant au mouvement de va-et-vient entre les deux cellules contra-rotatives, signature de l'exploration préférentielle. La pente  $-4$  n'est pas observée, car elle est partiellement remplacée par la pente de l'exploration préférentielle suivie d'une pente  $-6$  intervenant à des fréquences de plus en plus basses lorsque la taille augmente.

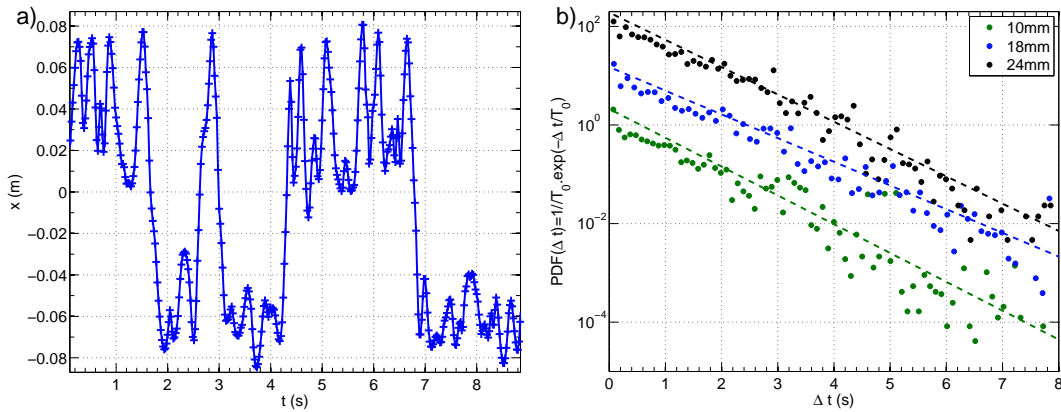


**Figure 3.** Densités spectrales de puissance de la position axiale d'une particule de 6 mm (a) et 18 mm (b), normalisées par la fréquence de rotation des disques.

### 2.3 Temps de résidence

La figure 4(a) est un exemple caractéristique de la dynamique des grosses particules. Nous constatons que la particule est piégée d'un côté de l'écoulement, puis, au bout d'un certain temps, elle fait une excursion vers le côté opposé, où elle est à nouveau piégée. L'excursion d'une cellule à l'autre est très brève et les grosses particules ne restent pas au centre du dispositif. Le piégeage des particules se fait par l'écoulement moyen à grande échelle et ce sont les fluctuations fortes que subissent les particules, quelle que soit leur taille, qui permettent les excursions.

Nous pouvons caractériser ce mouvement de va-et-vient des particules entre les deux cellules contra-rotatives par le temps de résidence, noté  $\Delta t$ , d'une particule d'un côté avant d'en changer. La distribution de ces temps suit la loi exponentielle suivante :  $\text{PDF}(\Delta t) = 1/T_0 e^{-\Delta t/T_0}$ , où  $T_0$  vaut la valeur moyenne de  $\Delta t$  (figure 4(b)). La forme de ces distributions, qui est très similaire à celle d'une particule piégée dans un potentiel à deux puits [6], a également été observée dans différents systèmes présentant une bistabilité en régime turbulent [1, 2, 4].



**Figure 4.** (a) Évolution temporelle de la position axiale d'une grosse particule de taille  $D = 18$  mm. (b) Distribution des temps de résidence d'une particule pour des particules explorant préférentiellement l'écoulement. Les distributions sont multipliées successivement d'un facteur 10 pour faciliter la lecture.

### 3 Modèle de Langevin

#### 3.1 Description

Nous simulons la dynamique d'une particule soumise à un potentiel  $V$  et un bruit  $w$  qui, dans le cas sur-amorti, prend la forme adimensionnelle [11] :

$$dx = -\frac{dV}{dx}dt + dw. \quad (1)$$

Le potentiel vérifie  $V(x) = \delta(x^4 - x^2)$  pour  $|x| < 1$  et  $V(x) = 4(x^4 - x^2)$ . Ainsi, la particule est confinée dans une boîte qui présente ou non une barrière de potentiel, selon la valeur de  $\delta$ . En l'absence de confinement ( $V = 0$ ), la particule n'est soumise qu'au bruit  $w$  et  $dx/dt$  s'identifie à la vitesse lagrangienne  $v$ . Pour notre cas, nous modélisons donc ce bruit tel que  $dw = vdt$  où  $v$  possède les caractéristiques essentielles d'une vitesse turbulente lagrangienne : ses corrélations sont exponentielles et son spectre présente une loi de puissance d'exposant  $-2$  à hautes fréquences [7]. Ces caractéristiques peuvent être obtenues par l'intégration d'une équation de Langevin, nous travaillons donc avec le système suivant :

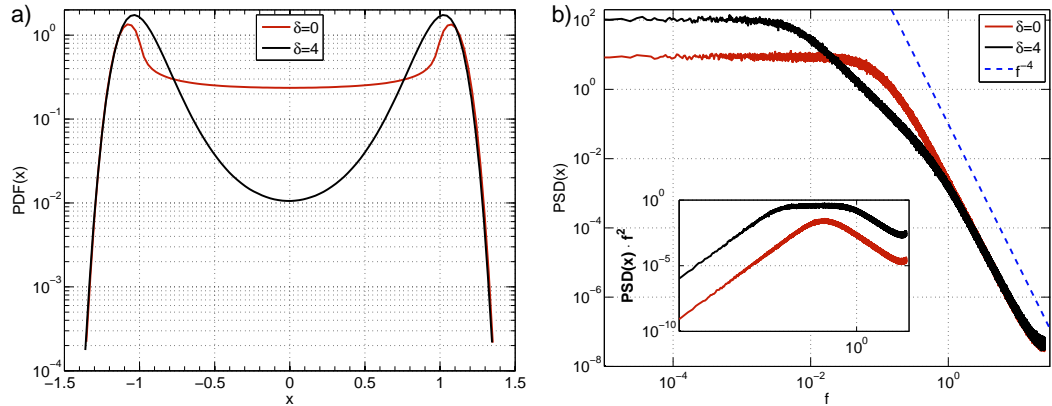
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dx} + v \quad \text{et} \quad dv = -\frac{vdt}{\tau_v} + \sqrt{\frac{2u^2}{\tau_v}}d\xi, \quad (2)$$

où  $\tau_v$  est le temps de corrélation de la vitesse,  $u^2$  sa variance et  $\xi(t)$  un bruit blanc gaussien qui satisfait la relation  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t')$ . Nous choisissons  $\tau_v = 1$  et  $u = 1$  afin d'obtenir une vitesse de variance unité pour toutes les simulations,  $\delta$  est ainsi notre seul paramètre.

Ce type de modèle stochastique reproduit la dynamique aux temps longs de divers systèmes bistables, tel que le retournement du champ magnétique [2, 4] ou le renversement d'un écoulement turbulent [1, 10].

#### 3.2 Résultats

En jouant sur l'influence du potentiel qui piège la particule autour de  $x = \pm 1$  (paramètre  $\delta$ ), nous pouvons reproduire des PDF de position similaires à celles du dispositif expérimental (figure 5(a)).



**Figure 5.** (a) PDF de position de particules simulées par le modèle. (b) Spectres de position pour  $\delta = 0$  et  $\delta = 4$ . Dans l'encadré, les spectres sont compensés par  $f^2$  et sont décalés (facteur 100) pour plus de visibilité.

De même, nous pouvons calculer les densités spectrales de la position (figure 5(b)). Les spectres sont très différents selon la présence ou non du double puits. Pour  $\delta = 0$ , la dynamique est très proche de celle des expériences : nous observons un plateau puis une transition lente vers une pente légèrement

supérieure à  $-4$ . En présence d'un double puits, nous observons en plus une pente  $-2$  (légèrement plus forte que pour les expériences) aux fréquences intermédiaires. Comme pour les expériences, le plateau correspond au confinement, tandis que la pente aux hautes fréquences vient de la turbulence.

Par ailleurs, les particules du modèle soumises au double puits présentent également des distributions de temps de présence dans les puits exponentielles.

## 4 Conclusion

L'étude de grosses particules dans un écoulement turbulent a mis en évidence le phénomène d'exploration préférentielle. À partir d'une certaine taille, les particules n'explorent plus l'écoulement de façon homogène. Cette exploration implique un mouvement de va-et-vient des particules, qui se traduit par l'apparition d'une loi de puissance d'exposant  $-1,5$  aux fréquences intermédiaires des densités spectrales de puissance de la position axiale. Les temps de résidence dans une zone préférentielle avant une excursion vers l'autre zone suivent une distribution exponentielle. Un modèle simulant la dynamique d'une particule sur-amortie piégée dans un potentiel à deux puits, animée par un bruit coloré, reproduit qualitativement la dynamique due à l'exploration préférentielle. Ce modèle met en évidence la compétition entre le piégeage des grosses particules, dû à l'écoulement moyen à grande échelle, et le rôle des fluctuations turbulentes qui permettent aux particules d'effectuer des excursions entre les zones préférentielles. La sensibilité des particules aux échelles de l'écoulement inférieures à leur taille reste une question ouverte, nous ne pouvons donc pas conclure quant à l'éventuelle augmentation du piégeage avec la taille des particules. En revanche, les grosses particules sont connues pour subir des accélérations moins fortes, elles subissent donc des fluctuations moins fortes ou moins fréquentes. Ces deux effets conduisent à un piégeage plus fort lorsque le rapport  $D/L_{\text{int}}$  augmente.

## Références

1. R. BENZI, Flow Reversal in a Simple Dynamical Model of Turbulence, *Physical Review Letters*, **95**, 024502 (2005).
2. M. BERHANU *et al.*, Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo, *Europhysics Letters*, **77**, 59001 (2007).
3. R. BROWN *et al.*, Acceleration Statistics of Neutrally Buoyant Spherical Particles in Intense Turbulence, *Physical Review Letters*, **103**, 13 (2009).
4. C. CONSTABLE, On rates of occurrence of geomagnetic reversals, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **118**, 181–193 (2000).
5. L. FIABANE *et al.*, Clustering of finite-size particles in turbulence, *Physical Review E*, **86**, 035301 (2012).
6. H. A. KRAMERS, Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions, *Physica*, **7**, 284–304 (1940).
7. N. MORDANT *et al.*, Measurement of Lagrangian Velocity in Fully Developed Turbulence, *Physical Review Letters*, **87**, 19–22 (2001).
8. N. QURESHI *et al.*, Turbulent Transport of Material Particles : An Experimental Study of Finite Size Effects, *Physical Review Letters*, **99**, 1 (2007).
9. N. QURESHI *et al.*, Acceleration statistics of inertial particles in turbulent flow, *The European Physical Journal B*, **66**, 531–536 (2008)
10. A. DE LA TORRE & J. BURGUETE, Slow Dynamics in a Turbulent von Kármán Swirling Flow, *Physical Review Letters*, **99**, 054101 (2007)
11. N. G. VAN KAMPEN, *Stochastic processes in physics and chemistry*, Elsevier (1981).
12. R. VOLK *et al.*, Acceleration of heavy and light particles in turbulence : Comparison between experiments and direct numerical simulations. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, **237**, 14–17 (2008).
13. R. ZIMMERMANN *et al.*, Rotational Intermittency and Turbulence Induced Lift Experienced by Large Particles in a Turbulent Flow, *Physical Review Letters*, **106**, 154501 (2011).

## Fluides complexes sous cisaillement : quelques instabilités à nombre de Reynolds nul

Christophe Perge, Vincent Grenard, Marc-Antoine Fardin, Thibaut Divoux, Nicolas Taberlet & Sébastien Manneville

Laboratoire de Physique, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07  
sebastien.manneville@ens-lyon.fr

**Résumé.** Les fluides complexes comme les émulsions, les gels colloïdaux ou encore les solutions de polymères ou de molécules tensioactives possèdent une « microstructure » susceptible de se modifier sous l'effet d'un écoulement, à des échelles de temps facilement accessibles à l'expérience. Ce couplage entre microstructure et écoulement conduit fréquemment à des instabilités sous cisaillement faible correspondant à des nombres de Reynolds quasi-nuls. Nous décrivons trois exemples de telles instabilités qui ont suscité récemment de nombreux efforts théoriques et expérimentaux : (i) les solutions de tensioactifs formant des « micelles géantes » qui présentent à la fois des bandes de cisaillement et des instabilités élastiques, (ii) les matériaux mous vitreux qui possèdent un seuil d'écoulement au voisinage duquel fractures, glissement et localisation du cisaillement sont omniprésents et (iii) des systèmes de particules attractives qui se structurent spontanément en agrégats macroscopiques formant des rouleaux orientés perpendiculairement à la direction du cisaillement. Pour chacun de ces exemples, nous dressons un état des lieux des recherches actuelles et nous indiquons quelques pistes à poursuivre dans le domaine.

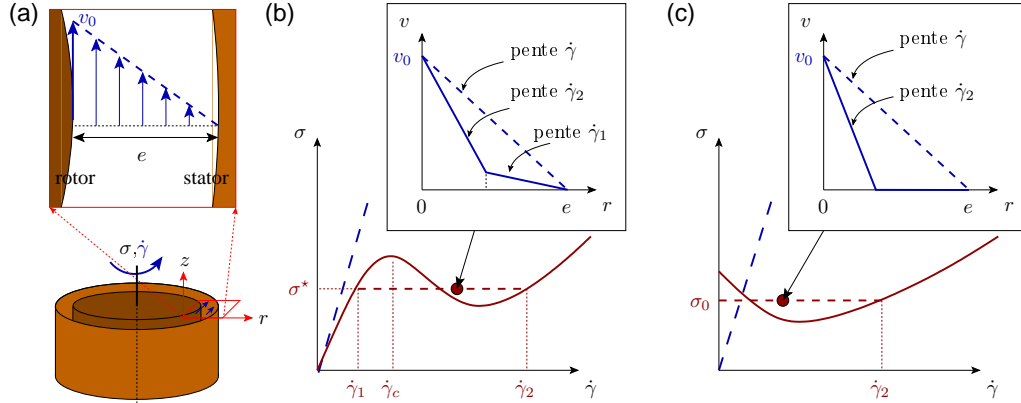
**Abstract.** Complex fluids such as emulsions, colloidal gels, polymer or surfactant solutions are all characterized by the existence of a “microstructure” which may couple to an external flow on timescales that are easily probed in experiments. Such a coupling between flow and microstructure usually leads to instabilities under relatively weak shear flows that correspond to vanishingly small Reynolds numbers. Here three examples of these instabilities, which have focused much theoretical and experimental effort in recent years, are described: (i) “wormlike” micellar surfactant solutions that present both shear banding and elastic instabilities, (ii) soft glassy materials that show a yield stress characterized by fractures, wall slip, or shear localization, and (iii) attractive colloidal systems that get spontaneously structured into a pattern of log-rolling aggregates aligned perpendicularly to the shear direction. For each of this examples, the current state of research is reviewed and a few perspectives are highlighted.

### 1 Instabilités à nombre de Reynolds nul dans les fluides complexes cisailés

Un fluide complexe est caractérisé par sa *microstructure*, c'est-à-dire une organisation supramoléculaire à laquelle on peut associer une (ou parfois plusieurs) échelle(s) de longueur intermédiaire(s) entre la taille des molécules qui le constituent et celle du récipient qui le contient [1]. Dans une émulsion, par exemple, cette échelle de longueur, dite échelle *mésoscopique*, est simplement le diamètre des gouttelettes d'huile soit usuellement quelques micromètres. De façon très générale, sa microstructure confère à un fluide complexe une *viscoélasticité* notable : lorsqu'on déforme faiblement un tel matériau, sa réponse possède à la fois une composante solide liée au rappel élastique des éléments mésoscopiques qui le constituent et une composante liquide due au fait que ces éléments peuvent se réarranger facilement les uns par rapport aux autres et donc « s'écouler ». Ces propriétés viscoélastiques sont d'autant plus facilement mesurables que les temps de relaxation de la microstructure suite à une déformation sont macroscopiques et généralement compris entre la milliseconde et la dizaine de secondes. Lorsque le matériau possède une microstructure amorphe d'objets empilés de façon compacte mais désordonnée, les temps de relaxation peuvent devenir très longs devant la durée de l'expérience mise en œuvre pour les mesurer, typiquement supérieurs à  $10^3$  s. On parle alors de « matériaux mous vitreux » [2].

Au-delà de la viscoélasticité du matériau au voisinage de l'équilibre, les fluides complexes présentent de nombreuses autres particularités par rapport aux fluides simples lorsqu'il sont soumis à un écoulement





**Figure 1.** (a) Cisaillement en géométrie de Taylor-Couette et notations utilisées. Courbes d'écoulement  $\sigma$  vs  $\dot{\gamma}$  et profils de vitesse  $v(r)$  attendus pour (b) une solution de micelles géantes et (c) un fluide à seuil présentant des bandes de cisaillement à l'état stationnaire. Les pointillés bleus indiquent le cas d'un fluide newtonien.

permanent. Ainsi, sous l'effet d'un cisaillement, noté  $\dot{\gamma}$  dans la suite (cf. figure 1a), la microstructure d'un fluide complexe est susceptible de se réorganiser complètement ce qui conduit à une viscosité  $\eta$  fortement dépendante du taux de cisaillement appliqué [1]. En général, la viscosité diminue avec  $\dot{\gamma}$  (comportement rhéo-fluidifiant) comme c'est le cas pour les solutions de polymères au sein desquelles les molécules s'étirent et s'alignent avec l'écoulement. Le but des expériences de *rhéologie non-linéaire* est de déterminer la courbe d'écoulement  $\sigma = \eta\dot{\gamma}$  en fonction de  $\dot{\gamma}$  [3] dont les figures 1b et 1c présentent deux exemples pour les systèmes discutés plus bas.

Pour un fluide complexe de viscosité  $\eta \simeq 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  soumis à un taux de cisaillement raisonnable  $\dot{\gamma} = 10 \text{ s}^{-1}$  sur la taille caractéristique  $e = 1 \text{ mm}$  typique d'une expérience de rhéologie non-linéaire, le nombre de Reynolds est  $Re = \rho\dot{\gamma}e^2/\eta \simeq 10^{-2}$  (où  $\rho \simeq 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  est la densité du fluide). Pour un nombre de Reynolds aussi faible, l'inertie du fluide ne joue quasiment aucun rôle et les instabilités inertielles classiques dans les fluides simples, comme l'instabilité de Taylor-Couette, sont exclues. Pourtant, depuis près d'un demi-siècle, de nombreuses *instabilités à nombre de Reynolds « nul »* ont été observées dans les fluides complexes. Ainsi, la montée d'une solution de polymère le long d'une tige en rotation (effet Weissenberg ou « rod-climbing ») dont la première explication détaillée remonte à 1946 [4] ou encore le gonflement d'un fluide complexe lors de son extrusion [5] peuvent être attribués à l'existence de *forces normales* qui s'exercent perpendiculairement à la direction de la vitesse.<sup>1</sup> Dans le cas de certaines solutions viscoélastiques de polymères cisillées en géométrie de Taylor-Couette, on observe une instabilité d'origine *purement élastique* dont la phénoménologie est remarquablement similaire à l'instabilité inertielle classique de Taylor-Couette : apparition d'un écoulement secondaire toroïdal constitué de vortex contrarotatifs empilés selon la direction de la vortacité, transitions successives vers la « turbulence élastique » via différentes instabilités secondaires, etc. [6, 7].

Par ailleurs, comme dans les fluides simples, la présence de parois peut être à l'origine d'instabilités dans les fluides complexes. Toutefois, là encore, ce n'est pas l'inertie du fluide mais son élasticité et/ou la possibilité de glissement apparent aux parois qui est mise en jeu, par exemple dans l'instabilité en « peau de requin » d'un extrudat (sharkskin instability) [8] ou dans l'effet « spurt » décrit en détail dans les fondus de polymère par Vinogradov en 1973 [9]. Enfin, comme nous le verrons dans la suite, le couplage entre microstructure et écoulement peut aussi être source d'instabilités en l'absence d'inertie. Le but des sections suivantes est de décrire quelques avancées récentes concernant ces instabilités « à nombre de Reynolds nul » à travers les expériences menées dans notre équipe du Laboratoire de Physique à l'Ens de Lyon.

1. Il faut noter que nous prenons ici le terme d'instabilité en un sens très large. En particulier, l'existence d'un seuil d'instabilité n'est pas nécessairement avérée pour les phénomènes cités ci-dessus.

## 2 Bandes de cisaillement et instabilités élastiques dans les micelles géantes

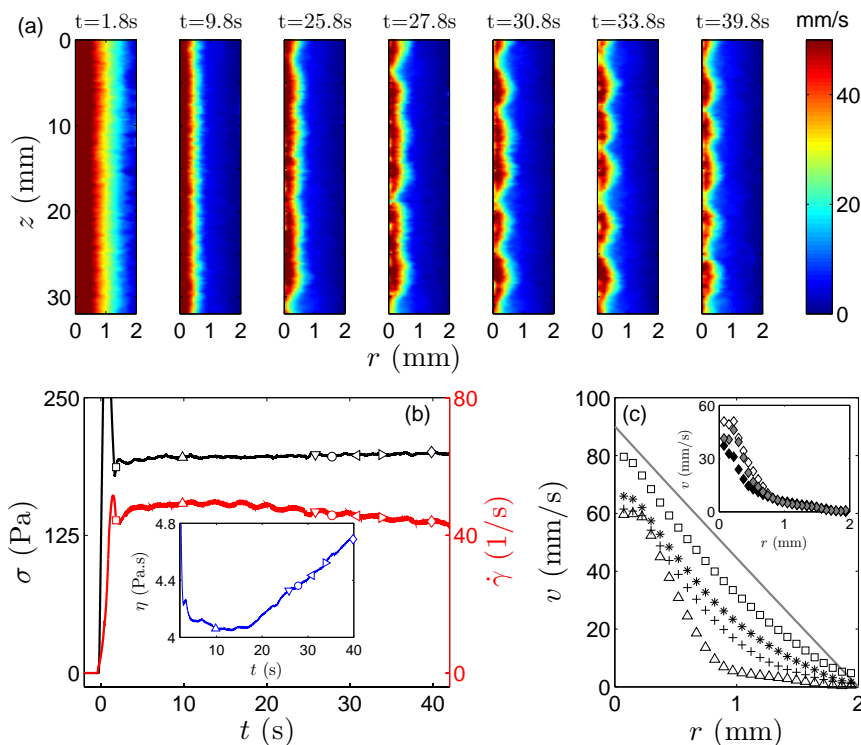
Sous certaines conditions de température, de concentration et de salinité, les molécules de tensioactifs en solution aqueuse peuvent s'organiser spontanément pour former de longs agrégats micellaires cylindriques semi-flexibles pouvant atteindre plusieurs micromètres de long pour un diamètre de l'ordre de la dizaine de nanomètres [10]. Dans les régimes semi-dilués et concentrés, ces *micelles géantes* s'enchevêtrent pour former un réseau viscoélastique. Contrairement aux polymères dont la longueur est fixée par la chimie des molécules, les micelles géantes sont susceptibles de se couper et de se recombinaison en permanence sous l'effet de l'agitation thermique. Cela leur confère des propriétés de viscoélasticité très particulières : ces systèmes possèdent généralement un seul temps de relaxation  $\tau_e \simeq 0.1\text{--}1$  s et suivent très bien le modèle de Maxwell avec un module élastique  $G_0 \simeq 10\text{--}100$  Pa (et donc une viscosité  $\eta_0 = G_0\tau_e \simeq 1\text{--}100$  Pa·s).

Aux faibles cisaillements, les micelles géantes sont newtoniennes ou faiblement rhéo-fluidifiantes : comme les polymères classiques, elles s'étirent et s'alignent progressivement à mesure que  $\dot{\gamma}$  augmente. Toutefois, au-delà d'un certain taux de cisaillement critique  $\dot{\gamma}_c$ , les micelles géantes se désenchevêtrent brutalement et s'alignent conduisant à un ordre quasiment nématique. Il en résulte une *instabilité mécanique* caractérisée par une portion de pente négative dans la courbe d'écoulement  $\sigma$  vs  $\dot{\gamma}$  (cf. figure 1b) et prédite théoriquement au début des années 1990 [11]. Expérimentalement, la zone instable se traduit par un *plateau de contrainte à une valeur fixée*  $\sigma^*$  où la viscosité apparente de l'échantillon décroît comme  $\eta \sim \dot{\gamma}^{-1}$  qui sépare deux branches croissantes pour  $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_1$  et  $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_2$  respectivement. Par analogie avec une transition de phase à l'équilibre du premier ordre où la branche à bas (resp. haut) taux de cisaillement correspond aux micelles enchevêtrées (resp. alignées), on s'attend à une « coexistence de phase » pour  $\dot{\gamma}_1 < \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_2$  sous la forme d'un écoulement hétérogène constitué de plusieurs régions cisailées localement avec les taux de cisaillement caractéristiques  $\dot{\gamma}_1$  et  $\dot{\gamma}_2$ .<sup>2</sup> Un tel écoulement dit en *bandes de cisaillement* a été clairement mis en évidence pour la première fois en géométrie de Taylor-Couette cylindrique il y a une dizaine d'années grâce à l'utilisation de techniques de vélocimétrie permettant de sonder localement le champ de vitesse lors d'expériences de rhéologie [12].

Le scénario décrit ci-dessus est désormais bien établi expérimentalement et expliqué théoriquement dans de nombreuses solutions de micelles géantes, au moins lorsqu'on considère l'écoulement moyen en régime permanent. Toutefois, depuis quelques années, des approches résolues en temps ont montré que les bandes de cisaillement s'accompagnent fréquemment de *fluctuations* importantes du champ de vitesse [13]. Grâce à des mesures rhéo-optiques, l'équipe de Sandra Lerouge au Laboratoire Matières et Systèmes Complexes a pu expliquer ces fluctuations comme émanant d'une instabilité élastique dans la « phase alignée » [14]. Alors que c'est la force d'inertie (centrifuge) qui est le moteur de l'instabilité de Taylor-Couette dans un fluide simple, l'instabilité élastique est engendrée par les forces normales (centripètes) qui s'exercent le long de lignes de courant courbées [15]. Dans le cas d'un écoulement en bandes de cisaillement, l'instabilité se développe uniquement dans la région fortement cisailée. Il s'en suit un écoulement très particulier où les rouleaux de type Taylor-Couette déforment l'interface entre les deux bandes de cisaillement.

La figure 2a montre l'établissement d'un tel écoulement au cours du temps après l'application du cisaillement à l'instant initial. Le champ de vitesse azimuthal est mesuré par imagerie ultrasonore simultanément à la réponse rhéologique du système (cf. figure 2b) [16]. Aux temps courts ( $t \lesssim 10$  s), l'écoulement reste homogène selon la direction verticale  $z$  et les profils de vitesse moyennés selon  $z$  dans la figure 2c montrent la séparation radiale de l'écoulement selon deux bandes de cisaillement, la « phase alignée » et fortement cisailée se trouvant au voisinage du cylindre intérieur en rotation. Ces résultats sont conformes à diverses études antérieures [10] mais la technique d'imagerie utilisée ici permet de plus de visualiser l'instabilité qui se développe dans la « phase alignée » près du rotor. En effet, pour  $t \gtrsim 10$  s, la symétrie verticale est brisée et des ondulations de l'interface entre les bandes de cisaillement apparaissent. La dissipation supplémentaire liée au développement de rouleaux de Taylor-Couette se traduit par une augmentation de la viscosité (cf. insert de la figure 2b) et les profils de vitesse montrent clairement

2. Cette vision naïve de l'instabilité en bandes de cisaillement (« shear-banding instability ») dans les micelles géantes n'explique pas la sélection du plateau de contrainte à  $\sigma^*$  qui dépasse le cadre de cet article, de même que la question de savoir si la description en termes de transition de phase hors équilibre est pertinente.



**Figure 2.** (a) Champ de vitesse  $v(r, z, t)$  mesuré par imagerie ultrasonore dans une solution de micelles géantes cisailée à  $\dot{\gamma} = 40 \pm 4 \text{ s}^{-1}$  en géométrie de Taylor-Couette cylindrique d'entrefer 2 mm.  $r$  correspond à la distance au cylindre intérieur tournant et  $z$  à la position verticale. (b) Réponses rhéologiques  $\dot{\gamma}(t)$  (en noir),  $\sigma(t)$  (en rouge) et  $\eta(t)$  (insert, en bleu). (c) Profils de vitesse moyennés selon  $z$  à  $t = 1.8$  ( $\square$ ),  $2.3$  ( $*$ ),  $2.8$  ( $+$ ) et  $9.8$  s ( $\triangle$ ). La droite grise montre le profil attendu pour un fluide newtonien. Insert : profils de vitesse  $v(r, z, t)$  à  $t = 39.8$  s pour différentes positions verticales  $z = 10.5$  (blanc),  $9.5$  (gris) et  $8.5$  mm (noir). Figure extraite de [16].

que le champ de vitesse dans la bande faiblement cisailée n'est pas affecté de façon significative (cf. insert de la figure 2c).

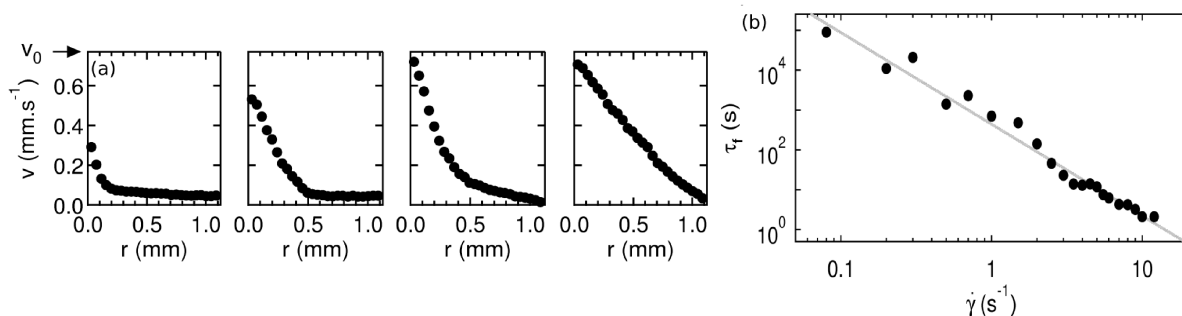
Les dernières avancées sur les écoulements de micelles géantes évoqués ici ouvrent de nouvelles voies de recherche et posent de nouvelles questions. En particulier, une étude des propriétés statistiques de la turbulence élastique s'impose dans le cas où des bandes de cisaillement sont présentes. De même, il faut s'interroger sur l'effet des conditions aux bords dans ces écoulements : quelle est l'influence du glissement aux parois sur les instabilités élastiques ? un glissement apparent (clairement visible sur les données de la figure 2) est-il inhérent à ces écoulements ? comment traduire théoriquement la présence du bord « libre » que représente l'interface entre les bandes de cisaillement ? Enfin, les bandes de cisaillement sont présentes dans de nombreux autres fluides complexes (solutions de polymères et de copolymères, suspensions colloïdales) : une instabilité élastique est-elle susceptible de se développer dans de tels systèmes à l'instar de ce qui se passe dans les micelles géantes ?

### 3 Fluidification des matériaux mous vitreux

Les émulsions et les suspensions concentrées, les gels colloïdaux ou encore les mousses sont des matériaux dont la microstructure est désordonnée et qui présentent des caractéristiques de solides élastiques au repos. Lorsqu'on leur applique une contrainte  $\sigma$  supérieure à une certaine *contrainte seuil*  $\sigma_0$ , ils sont susceptibles de s'écouler comme des liquides. Leur courbe d'écoulement, schématisée sur la figure 1c, peut être vue comme analogue à celle des micelles géantes dans la limite  $\dot{\gamma}_1 \rightarrow 0$  et en considérant  $\sigma_0 = \sigma^*$ . On peut donc s'attendre à la présence d'écoulements en bandes de cisaillement où une partie du matériau

se comportant comme le solide au repos n'est pas cisailée ( $\dot{\gamma}_1 = 0$ ) et coexiste avec une partie fluidifiée cisailée à  $\dot{\gamma}_2$ . Une telle *localisation du cisaillement* a été effectivement observée dans divers matériaux mous vitreux comme des suspensions d'argiles synthétiques (laponite ou bentonite) [17] ou des gels de silice colloïdale [18]. Dans ce dernier cas, la branche décroissante sous-jacente à la courbe d'écoulement a même pu être mise en évidence grâce à des mesures rhéologiques transitoires.

Si ce scénario de bandes de cisaillement semble largement répandu, il n'est toutefois pas universel au sein des matériaux mous vitreux puisqu'il existe une classe de matériaux à seuil dits « simples » qui ne présentant pas de coexistence solide-liquide à l'état stationnaire. Pour ces derniers, la courbe d'écoulement peut être vue comme la limite de la précédente pour  $\dot{\gamma}_2 \rightarrow 0$ . Dans l'analogie avec les transitions de phase déjà évoquée plus haut, ce cas correspondrait alors à une transition de phase du second ordre et le point ( $\dot{\gamma} = 0, \sigma = \sigma_0$ ) à un point critique. Toutefois, la question reste ouverte de savoir exactement ce qui dans la microstructure d'un matériau mou vitreux pilote le comportement de fluide à seuil simple, caractérisé par une courbe d'écoulement monotone et croissante généralement bien modélisée par la loi d'Herschel-Bulkley  $\sigma = \sigma_0 + A\dot{\gamma}^n$  et un état stationnaire de cisaillement homogène ou plutôt un comportement en bandes de cisaillement [19]. Il semblerait que la présence de liens attractifs entre constituants mésoscopiques [20,21], le confinement de la microstructure [22] voire les conditions aux bords [23] jouent un rôle important.



**Figure 3.** (a) Profils de vitesse  $v(r, t)$  mesurés par vélocimétrie ultrasonore dans un microgel de carbopol cisailé à  $\dot{\gamma} = 0.7 \text{ s}^{-1}$  en géométrie de Taylor-Couette cylindrique d'entrefer 1 mm pour  $t = 27, 1013, 1730$  et  $4913 \text{ s}$  de gauche à droite.  $v_0$  indique la vitesse du rotor et  $r$  correspond à la distance au cylindre intérieur tournant. (b) Temps de fluidification totale  $\tau_f$  vs  $\dot{\gamma}$ . L'ajustement en gris est  $\tau_f \sim \dot{\gamma}^{-2/3}$ .

Dans notre équipe, nous nous sommes récemment focalisés sur la *dynamique de fluidification* des matériaux mous vitreux. Grâce à des études résolues en temps et en espace, nous avons pu montrer que même si l'état stationnaire d'un fluide à seuil simple, un microgel de carbopol, est homogène, celui-ci passe par un régime de bandes de cisaillement transitoires dont la durée  $\tau_f$  décroît comme une loi de puissance du taux de cisaillement appliqué,  $\tau_f \sim \dot{\gamma}^{-\alpha}$ , où l'exposant  $\alpha$  dépend du matériau [24]. La figure 3 présente une succession typique de profils de vitesse ainsi que les temps de fluidification  $\tau_f$  vs  $\dot{\gamma}$ . Par ailleurs, des expériences à contrainte imposée ont mis en évidence un scénario de fluidification similaire avec  $\tau_f \sim (\sigma - \sigma_0)^{-\beta}$  qui permet de retrouver la rhéologie non-linéaire stationnaire d'Herschel-Bulkley où l'exposant  $n$  apparaît comme le rapport des deux exposants caractéristiques des processus transitoires de fluidification  $n = \alpha/\beta$  [25].

Ces résultats laissent de nombreuses questions encore ouvertes. Contrairement au cas des micelles géantes où la différence de microstructure entre bandes de cisaillement est bien comprise, les éventuelles différences structurelles entre fluide à seuil au repos et fluidifié ne sont pas évidentes. Le lien entre ces écoulements hétérogènes et les phénomènes de vieillissement (augmentation de la viscosité au repos au cours du temps) et de thixotropie (diminution lente de la viscosité sous cisaillement permanent) reste encore largement à explorer. Enfin, les recherches futures devront aussi s'intéresser aux dynamiques lors de la fluidification irréversible de certains systèmes à seuil comme les gels d'agar, de caséine ou de carraghénane connus pour présenter des phénomènes de fracturation sous cisaillement.

## 4 Structuration de suspensions attractives

Pour conclure, nous mentionnons très brièvement un cas où le couplage entre microstructure et écoulement conduit à la formation de motifs à l'échelle macroscopique  $e$  de la cellule de cisaillement. Lorsqu'elles sont confinées, certaines suspensions de particules colloïdales attractives comme le noir de carbone [26, 27], certaines émulsions de gouttelettes attractives [28] ou suspensions de nanotubes de carbone [29] se structurent spontanément en agrégats macroscopiques formant des rouleaux orientés perpendiculairement à la direction du cisaillement. L'explication couramment avancée pour expliquer une telle instabilité repose sur l'existence de forces normales négatives qui correspondraient à un effet Weissenberg au sein d'agrégats initialement isotropes et progressivement déformés par l'élasticité. Toutefois, cette explication est remise en question par l'observation d'une structuration similaire dans des simulations numériques de dynamique moléculaire en l'absence d'élasticité et dans un système de billes de verres non browniennes en suspension dans une huile et rendues attractives via des ponts aqueux [30]. Une prise en compte du fluide suspendant et des interactions hydrodynamiques semble indispensable pour mieux modéliser cette dernière instabilité en l'absence d'inertie.

## Références

1. R. G. LARSON, *The Structure and Rheology of Complex Fluids*, Oxford University Press (1999).
2. E. R. WEEKS, Soft jammed materials, in E. R. Maruyama, S. & Tokuyama, M. (Eds.), *Statistical Physics of Complex Fluids*, 243–255, Tohoku University Press, Sendai, Japon (2007).
3. C. W. MACOSKO, *Rheology : Principles, Measurements, and Applications*, Wiley-VCH (1994).
4. K. WEISSENBERG & S. M. FREEMAN, Principles of Rheological Measurement, in *Proceedings of the General Conference of the British Rheologists' Club*, Bedford College, London (1946).
5. R. I. TANNER, *J. Polym. Sci. A-2*, **8**, 2067–2078 (1970).
6. R. G. LARSON, E. S. G. SHAQFEH & S. J. MULLER, *J. Fluid Mech.*, **218**, 573–600 (1990).
7. A. GROISMAN & V. STEINBERG, *Nature*, **405**, 53–55 (2000).
8. M. M. DENN, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **33**, 265–287 (2001).
9. G. V. VINOGRADOV, *Rheol. Acta*, **12**, 357–373 (1973).
10. S. LEROUGE & J.-F. BERRET, *Adv. Polym. Sci.*, **230**, 1–71 (2010).
11. A. SPENLEY, M. E. CATES & T. C. B. MCLEISH, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 939–942 (1993).
12. J.-B. SALMON, S. MANNEVILLE, A. COLIN & F. MOLINO, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 228303 (2003).
13. L. BÉCU, S. MANNEVILLE & A. COLIN, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 018301 (2004).
14. M.-A. FARDIN *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 028302 (2009).
15. P. PAKDEL & G. H. MCKINLEY, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 2459–2462 (1996).
16. T. GALLOT *et al.*, submitted to *Rev. Sci. Instr.*, [arXiv cond-mat/1301.6957](https://arxiv.org/abs/1301.6957) (2013).
17. P. COUSSOT, Q. D. NGUYEN, H. T. HUYNH & D. BONN, *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 175501 (2002).
18. P. C. F. MØLLER, S. RODTS, M. A. J. MICHELS & D. BONN, *Phys. Rev. E*, **77**, 041507 (2008).
19. P. COUSSOT & G. OVARLEZ, *Eur. Phys. J. E*, **33**, 183–188 (2010).
20. L. BÉCU, S. MANNEVILLE & A. COLIN, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 138302 (2006).
21. A. RAGOULLIAUX *et al.*, *Phys. Rev. E*, **76**, 051408 (2007).
22. J. GOYON *et al.*, *Nature*, **454**, 84–87 (2008).
23. T. GIBAUD, C. BARENTIN & S. MANNEVILLE, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 258302 (2008).
24. T. DIVOUX, D. TAMARII, C. BARENTIN & S. MANNEVILLE, *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 208301 (2010).
25. T. DIVOUX, C. BARENTIN & S. MANNEVILLE, *Soft Matter*, **7**, 8409–8418 (2011).
26. C. O. OSUJI & D. A. WEITZ, *Soft Matter*, **4**, 1388–1392 (2008).
27. V. GRECARD, N. TABERLET & S. MANNEVILLE, *Soft Matter*, **7**, 3920–3928 (2011).
28. A. MONTESI, A. A. PEÑA & M. PASQUALI, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 058303 (2004).
29. S. LIN-GIBSON *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 048302 (2004).
30. V. GRECARD, *Structuration et fluidification de gels de noir de carbone*, Thèse de Doctorat, École normale supérieure de Lyon (2012).

# Expérience électro-optique générique de calculateur neuromorphique utilisant les transitoires complexes des dynamiques à retard

R. Martinenghi<sup>1</sup>, A. Baylon-Fuentes<sup>1</sup>, M. Jacquot<sup>1</sup>, Y. Chembo<sup>1</sup> & L. Larger<sup>1</sup>

FEMTO-ST / dpt. Optique, UMR CNRS 6174, Université de Franche-Comté, 25030 Besançon Cedex, France.  
romain.martinenghi@femto-st.fr

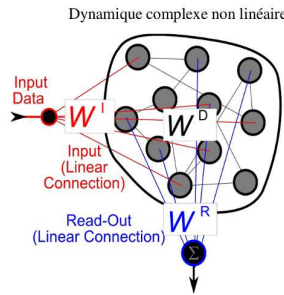
**Résumé.** Nous présentons une des premières versions matérielles hybrides, optique et électronique, de calculateur neuromorphique inspiré par des principes identifiés dans le fonctionnement du cerveau. Ces principes ont été récemment proposés dans la littérature en informatique, traitement de l'information, et apprentissage machine [1–3], mais sont encore très peu connus de la communauté des dynamiques non linéaires. Les premières implémentations expérimentales basées sur une approche originale utilisant la complexité des dynamiques à retard, ont en effet été récemment proposées avec succès, sur la base de systèmes dynamiques à retard avec des réalisations soit électroniques [4] soit optiques [5–7]. Nous proposons ici une expérience générique permettant d'illustrer ce nouveau concept de calcul, et de l'explorer afin de comprendre ses principes fondamentaux de fonctionnement dans le cas particulier des dynamiques non linéaires à retard.

**Abstract.** We present a hybrid hardware version of the first optical and electronic calculation units inspired by neuromorphic principles as they are suspected to be involved in the brain operation. These principles have been proposed recently in the literature of computer science, information processing and machine learning [1–3], but they are still rarely addressed in non-linear dynamics though their basic operation are intrinsically dynamical ones. The first experimental implementation based on this approach have been recently successfully proposed. They are based on delay dynamical systems delayed implemented in electronics [4] or optics [5–7]. We propose here a generic experiment to illustrate this new concept, design and explore it in order to understand the basic principles, in the particular case of nonlinear dynamics with delay.

## 1 Introduction

Les ordinateurs actuels, ou machines de Turing-Von Neumann, sont actuels reposent sur une approche tout numérique certes sans cesse plus performants, mais leur puissance de calcul apparaît largement insuffisante pour certains problèmes ou tâches toujours plus complexes que nous voulons leur faire résoudre. Ceci motive entre autre les recherches sur la mise au point de nouveaux paradigmes de calcul que l'on espère autrement plus performants. Ces recherches exigent cependant d'explorer aussi des approches radicalement différentes de celles des algorithmes de calcul que nous cherchons classiquement à programmer dans nos ordinateurs. Le calcul neuromorphique, inspiré par le cerveau, est une solution déjà proposée de longue date, mais leur exploration par des architectures de type réseaux complexes de neurones interconnectés, figure 1, sont généralement simulés par des ordinateurs. L'implémentation physique de tels calculateurs neuromorphiques est un enjeux majeur de ces recherches, pour aller au delà des concepts, vers une réalisation technologique dédiée et performante. C'est dans ce contexte que nous proposons une étude originale d'implémentation, issue de nouvelles approches du calcul à réseau de neurones.

Ce nouveau concept connu génériquement aujourd'hui sous le nom de « Reservoir Computing » a été publié indépendamment en 2001 et 2002 par des chercheurs en algorithmes de calculs par réseaux de neurones (Echo State Network [1]), et en sciences cognitives du cerveau (Liquid State Machines [8]). Les phénomènes de transitoires complexes de systèmes dynamiques non linéaires, et l'apprentissage de la « bonne lecture » de ces comportements transitoires, jouent un rôle central dans ce nouveau concept de calculateur universel. C'est à ce niveau qu'apparaissent des liens très étroits entre la théorie du chaos et des systèmes dynamiques complexes, et celle du Reservoir Computing.



**Figure 1.** Schéma de principe de fonctionnement d'un calculateur neuromorphique

## 2 Des dynamiques complexes à retards au Reservoir Computing

Les Reservoir Computers étudiés lors de ces travaux de recherches sont basés sur des dynamiques non linéaires à retards, en remplacement des réseaux de nœuds dynamiques couplés comme cela est traditionnellement abordé (réseau de neurones). Pour cela, nous utilisons un oscillateur opto-électronique, potentiellement chaotique, basé sur le modèle d'Ikeda.

### 2.1 Le modèle d'Ikeda

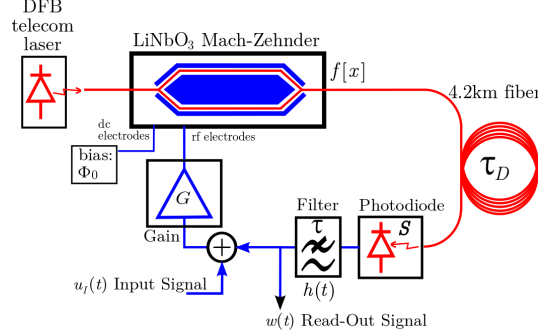
De nombreux systèmes physiques sont maintenant connus pour leur comportement chaotique. Un des premiers systèmes chaotiques imaginés en optique a été proposé en 1979, par le physicien japonais Kensuke Ikeda, qui étudiait le comportement d'une cavité en anneau dans laquelle se trouve un milieu non linéaire, et un retard temporel important du fait du temps de parcours de la lumière dans la cavité. Ce montage est appelé « anneau d'Ikeda ». En injectant un faisceau laser de puissance constante dans la cavité d'Ikeda, on observe le faisceau interféré avec lui-même après la traversée du milieu non linéaire. Ce dernier a la propriété de modifier son indice de réfraction en fonction de la puissance optique du faisceau laser (effet Kerr). L'interférence créant alors une variation d'intensité lumineuse dans la cavité provoque une modification de l'indice de réfraction de la boucle. Le phase optique est modifiée par la condition d'interférence et l'effet Kerr, qui vont définir la future condition d'interférence. Dans ce cas (et si l'intensité lumineuse lors de l'injection dans l'anneau d'Ikeda est suffisamment importante), un chaos d'intensité lumineuse s'installe au fur et à mesure que l'onde lumineuse se propage dans l'anneau d'Ikeda. Le système d'Ikeda peut-être modélisé par une simple équation différentielle scalaire, mais à retard :

$$\dot{x} + x(t) = f(x(t - \tau_D)) \quad \text{avec} \quad f(x) = \beta \sin^2(x + \phi). \quad (1)$$

Le retard  $\tau_D \gg 1$  joue le rôle de mémoire et stocke un grand nombre de variations possibles de  $x$  sur toutes les échelles de temps inférieures à  $\tau_D$  (le temps de réponse caractéristique de la cavité est ici normalisé à 1, c'est le temps de réponse du milieu Kerr). La complexité du chaos dépend du retard  $\tau_D$  (comparativement à l'unité), mais aussi du paramètre  $\beta$  qui est le gain normalisé (proportionnel à l'intensité lumineuse injectée dans la cavité, dans le cas du système d'Ikeda), ou encore le poids de la contre-réaction non linéaire retardée.

### 2.2 Version électro-optique de la cavité d'Ikeda

La forme physique d'origine de la cavité d'Ikeda est hélas difficilement contrôlable dans la pratique. De nombreux travaux ont cependant démontré qu'une version optoélectronique équivalente pouvait être proposée [9, 10]. Cette version est décrite schématiquement sur la Figure 2, avec des modifications qui nous ont permis d'en explorer le potentiel en traitement neuromorphique de données (entrée et sortie).



**Figure 2.** Schéma de principe de la dynamique non linéaire optoélectronique en intensité, dans sa version de calculateur neuromorphique

Le système peut être divisé en deux parties. Une partie optique et une partie électronique. La partie optique réalise la transformation non linéaire  $f(x) = \sin^2(x)$  (interférence à 2 ondes). Pour cela, on utilise une diode laser (ALCATEL A 1915LMI) de type *DFB* émettant un faisceau laser quasi monochromatique à une longueur d'onde de 1550 nm. L'intensité lumineuse est ajustée par un courant d'injection. Le faisceau résultant est injecté dans un modulateur d'intensité Mach-Zehnder (EOspace AZ-OKO-20-PFU-PFU-S) puis retardé d'une valeur de 20  $\mu$ s correspondant au temps de propagation de l'information dans les 4,2 km de fibre optique réalisant la fonction de retard temporel.

Le signal retardé est converti en signal électrique par une photodiode et un circuit de rétroaction électronique effectue un filtrage passe-bas (d'une fréquence de coupure de 680 kHz) définissant le temps caractéristique de l'oscillateur ( $\tau \simeq 234$  ns, soit  $\tau_D/\tau \simeq 85 \gg 1$ ).

### 3 Reservoir Computing basé sur une dynamique non linéaire à retards multiples

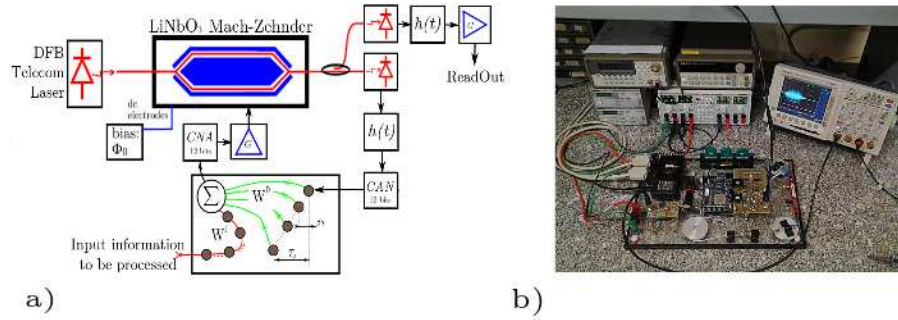
#### 3.1 Principe et réalisation expérimentale

Si cette expérience reprend en grande partie les principales caractéristiques de l'oscillateur électro-optique précédent, un élément important est modifié. Il s'agit du retard temporel (initialement fibré), qui est désormais obtenu via l'utilisation de mémoires FIFO programmées (et re-programmable à volonté) dans un circuit numérique FPGA (Field Programmable Gate Array). Ceci permet de concentrer l'étude des propriétés dynamiques du calculateur neuromorphique, sur la fonction centrale permettant de développer de la complexité dynamique à la place des réseaux de neurone classiques, le retard. Le schéma de principe est donné Figure 3a. À présent, ce circuit électronique, nous permet d'implémenter un retard numérique mais également de programmer des retards multiples. On obtient une ligne à retard extrêmement flexible dont la connectivité, entre nœuds virtuels, peut être modifiée et optimisée en fonction des tâches à réaliser (particulièrement attractif pour l'introduction physique de notions de plasticité neuronale). Le signal d'entrée  $u(t)$  est injecté dans le réservoir directement dans le circuit FPGA après avoir été numérisé puis quantifié par un convertisseur analogique numérique (12 bits). Puis les informations sont traitées par les retards multiples (nœuds virtuels) et leurs poids synaptiques respectifs  $w_k^D$ . Les informations des nœuds virtuels, une fois pondérées puis converties par un convertisseur numérique analogique (14 bits) sont ré-injectés dans la dynamique non linéaire afin de moduler l'intensité lumineuse du laser via le modulateur Mach-Zehnder. On peut décrire cette dynamique complexe suivant l'équation :

$$\tau \frac{dx}{dt} + x(t) + \frac{1}{\theta} \int x(s) ds = \beta \sin^2 \left\{ \sum_{k=1}^N w_k^D [x(t - k\delta\tau) + u(t - k\delta\tau)] + \phi_0 \right\}, \quad (2)$$



où  $x$  est la sortie du filtre passe-bande (et également le signal de lecture),  $u(t)$  est la donnée d'entrée,  $\phi_0$  est un offset de phase contrôlant le point de fonctionnement le long de la fonction non linéaire,  $\beta$  le gain de la boucle,  $x_0$  est une constante d'intégration formelle qui garantit une valeur moyenne nulle due au filtrage passe bande. Les coefficients synaptiques  $w_k^D$  sont programmés dans le FPGA, ils sont définis de façon aléatoire à partir d'une distribution uniforme. Les constantes de temps de ce montage sont importantes car elles définissent directement l'espacement entre deux nœuds virtuels successifs, ainsi  $\theta = 1,59$  ms et  $\tau = 398$  ns sont associées aux fréquences de coupures basses et hautes (100 Hz et 400 kHz) du filtre passe-bande. Le retard élémentaire délimitant deux nœuds successifs dans le retard temporel  $\tau_D = 32,4$   $\mu$ s est donc  $\delta\tau = 0,397$   $\mu$ s pour  $N = 400$  nœuds.



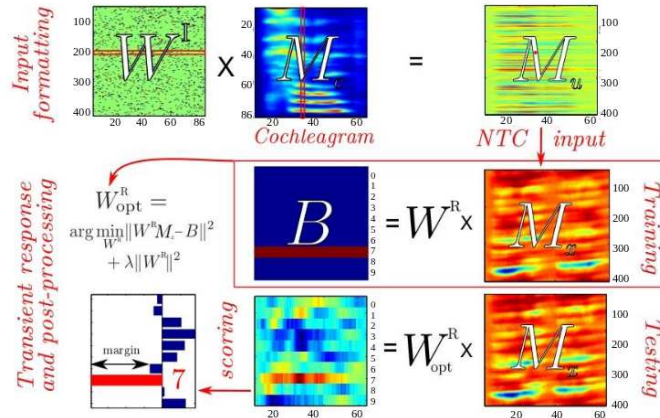
**Figure 3.** a) Schéma de principe du Reservoir Computing utilisant une dynamique non linéaire optoélectronique en intensité et un circuit électronique numérique FPGA ; b) Réalisation expérimentale

Afin de garantir un fonctionnement au repos de point fixe stable, le gain  $\beta$  de rétroaction doit être réglé au-dessous du seuil d'oscillation. Dans notre expérience la valeur du gain  $\beta$  est fixée à environ 1,2 mais elle est théoriquement associée à un point de fonctionnement  $\phi_0 = \pi/2$  qui nous permet de travailler dans un régime de point fixe stable (seuil d'oscillation  $|\beta \sin(2\Phi_0)|$  bien inférieur à 1). L'amplitude de l'information d'entrée  $u(t)$  est réglée de manière à ce qu'elle induise un fonctionnement non linéaire significatif (au moins 2 extrema de la fonction d'interférence sont ainsi balayés par l'amplitude de  $u$ ). Chaque information d'entrée contenue dans  $u$  consiste en une séquence d'échantillons, injectée dans le calculateur neuromorphique par un générateur de forme d'onde arbitraire (AWG, Arbitrary Function Generator). En contrôlant le débit d'injection, on peut adresser et répartir l'ensemble de la séquence d'entrée sur la totalité des  $N$  nœuds virtuels dans un retard temporel  $\tau_D$ . Cette répartition est réalisée par une matrice de connectivité  $W^I$  définie aléatoirement mais uniquement, pour un type particulier d'information à traiter. Chaque réponse transitoire du calculateur neuromorphique pour chaque donnée à traiter, est enregistrée par un oscilloscope numérique, pour pouvoir ensuite être traitée par un algorithme d'apprentissage.

### 3.2 Le test de reconnaissance vocale

Il existe différents types de tests standards permettant de quantifier la puissance de calcul d'un Reservoir Computing. La prédiction de séries temporelles (test appelé NARMA, Nonlinear Auto-Regressive Moving Average) en est un, mais celui qui nous intéresse plus particulièrement ici est un test de classification de données. Le test de reconnaissance vocale est un test qui nous permet d'évaluer simplement et surtout de comparer les performances de notre Reservoir Computer photonique et de valider, ou non, les nouveaux procédés mis en œuvre. L'objectif principal de ce test standard de classification est de reconnaître un chiffre parmi les dix possibles de 0 à 9 utilisés dans une base de données. Les 500 chiffres prononcés utilisés sont extraits de la base de données standard TI46 de Texas Instrument. Chaque chiffre

est prononcé 10 fois par 5 femmes différentes. Pour réaliser ce test, les données sont mises en forme suivant un pré-traitement. La forme d'onde acoustique correspondant à chaque chiffre prononcé est échantillonnée à une fréquence de 12,5 kHz puis est convertie sous forme 2D par une représentation temps-fréquence (cochleagramme) de l'onde acoustique suivant le modèle « Lyon Ear Model ».



**Figure 4.** Schéma de principe du pré-traitement et du post-traitement pour le test de reconnaissance vocale, pour un chiffre particulier.

Ce pré-traitement réalise un spectrogramme ( $N_f = 86$  canaux de fréquence) tout au long de la prononciation du chiffre ( $N_s =$  environ 60 à 80 échantillons en moyenne par chiffres prononcés). La matrice 2D ainsi obtenue est appelée cochléagramme (matrice  $M_c$ , Figure 4). Le cochléagramme représente le signal d'entrée, dont l'information est à distribuer sur les nœuds de la dynamique non linéaire, émulo temporellement par le principe de la dynamique à retard [4,5]. Cet étalement est réalisé aléatoirement par l'intermédiaire de la matrice de connectivité  $W^I$  dont les dimensions sont définies par le nombre de nœuds  $N$  utilisés ( $N = 400$ ), et  $N_f$  qui correspond aux nombres de canaux de fréquence du cochleagramme du « Lyon Ear Model ». On utilise une matrice sparse (sparsité de 0.1) et dont les éléments non nuls sont égaux à  $\pm 1$ . Les données d'entrée (sous forme de matrice) à injecter dans la dynamique non linéaire se composent donc d'une matrice  $M_u$  de dimension  $N \times N_s$ , avec un nombre de colonnes représentant la durée du chiffre prononcé ( $N_s$  échantillons, éventuellement différents d'un chiffre à l'autre). Chaque valeur de  $N$  éléments (le nombre de nœuds virtuels à l'intérieur d'un retard  $\tau_D$ ) d'une colonne, est construit selon  $W^I$  (identique pour tous les chiffres). Le signal d'entrée construit, on l'enregistre dans un AWG afin de l'injecter sous forme d'une simple trace temporelle au sein de la dynamique non linéaire. Le signal transitoire 1D issu du Reservoir (la dynamique non linéaire à retard) est enregistré en temps réel via un oscilloscope numérique. Ce signal de sortie correspond à la réponse transitoire des amplitudes des nœuds virtuels. Cette réponse, mise sous forme de matrice et appelée  $M_x$  (après un découpage du transitoire 1D en colonnes de la matrice, correspondant aux nœuds dans un intervalle de temps de durée  $\tau_D$ ), est multipliée à une matrice de lecture optimisée  $W_{opt}$ . Cette dernière est le résultat de la phase d'apprentissage effectuée sur un sous-ensemble de 475 chiffres prononcés dans la base de donnée. Le sous-ensemble complémentaire de 25 chiffres est utilisé pour tester la performance du Reservoir Computing, avec la matrice de lecture « apprise ». Le test et l'apprentissage sont répétés pour les 20 partitions différentes possibles (principe appelé validation croisée), pour que chaque chiffre prononcé joue une fois le rôle de chiffre test dans l'évaluation de la performance de classification. Ces différentes partitions croisées sont redéfinies plusieurs fois, aléatoirement, de telle sorte qu'une faible valeur de taux d'erreur de mots (Word Error Rate WER) puisse être obtenue même avec une base de données limitées à 500 chiffres prononcés. Les excellentes

performances (état de l'art), WER de  $10^{-4}$ , ont été obtenues pour un  $\phi = \pi/4$  ( $f(x)$  = fonction localement parabolique).

## 4 Conclusion

Le Reservoir Computing apparaît bien physiquement comme une alternative aux approches de calcul classiques basées sur des techniques algorithmiques implémentées dans des machines de Turing-Von Neumann. La solution physique que nous proposons avec une dynamique optoélectronique à retard a en plus le potentiel de fonctionner en « temps réel », ce qui lui donne un attrait particulier concernant la recherche fondamentale et/ou technologique. Les domaines d'applications sont nombreux, que se soit dans le traitement des images et/ou du son ou encore leurs utilisations dans le cadre du traitement automatique de données biomédicales (EEG, ECG, IRM). La version physique de calculateurs neuromorphiques que nous avons présentée est basée simplement sur un réseau neuronal artificiel émulé par une dynamique à retard. Partant de ce principe, nous avons étudié puis conçu plusieurs prototypes de calculateurs neuromorphiques optoélectronique. La capacité calculatoire de notre système optoélectronique a été validée expérimentalement par des performances, déjà au niveau de l'état de l'art, sur deux tests standards : reconnaissance vocale de chiffres prononcés, et prédiction de signaux déterministes complexes [5]. D'importants travaux sont encore nécessaires pour comprendre l'origine précise du pouvoir calculatoire de ces dynamiques complexes à retard, notamment pour en optimiser les performances. L'architecture hybride et programmable proposée devra permettre d'explorer de manière flexible, de multiples configurations possibles, notamment avec des retards multiples. L'institut de recherche FEMTO-ST propose aussi d'explorer des problèmes réels au lieu des tests standards : signaux EEG haute résolution, pronostic de fonctionnement des piles à combustibles, ou encore contrôle complexe temps-réel du profil de phase de lasers femtoseconde pour le nano-usinage.

## Références

1. H. JAEGER, The “echo state” approach to analysing and training recurrent neural networks, *GMD Report, German National Research Center of Information Technology*, **148** (2001).
2. W. MAASS, T. NATSCHLÄGER & H. MARKRAM, Real-time computing without stable states : a new framework for neural computation based on perturbations, *Neural Computation*, **14**, 2531–2560 (2002).
3. D. VERSTRAETEN, B. SCHRAUWEN, M. D'HAENE & D. STROOBANDT, An experimental unification of reservoir computing methods, *Neural Networks*, 391–403 (2007).
4. L. APPELLANT, M. C. SORIANO, G. VAN DER SANDE, J. DANCKAERT, S. MASSAR, J. DAMBRE, B. SCHRAUWEN, C. R. MIRASSO & I. FISCHER, Information processing using a single dynamical node as complex system, *Nature Commun.* **2**, 1–6 (2011).
5. L. LARGER, M. C. SORIANO, D. BRUNNER, L. APPELLANT, J. M. GUTIERREZ, L. PESQUERA, C. R. MIRASSO & I. FISCHER, Photonic information processing beyond Turing : an optoelectronic implementation of reservoir computing, *Opt. Express*, **20**, 3241–3249 (2012).
6. R. MARTINENGI, S. RYBALKO, M. JACQUOT, Y. K. CHEMBO & L. LARGER, Photonic Nonlinear Transient Computing with Multiple-Delay Wavelength Dynamics, *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 244101 (2012).
7. D. BRUNNER, M. C. SORIANO, C. R. MIRASSO & I. FISCHER, Parallel photonic information processing at gigabyte per second data rates using transient states, *Nature Commun.*, **4**, 1364 (2013).
8. V. MAASS, T. NATSCHLÄGER & H. MARKRAM, Real-time computing without stable states : a new framework for neural computation based on perturbations, *Neural computation.*, **148**, 2531–2560 (2002).
9. L. LARGER & J. M. DUDLEY, Nonlinear dynamics : Optoelectronics chaos, *Nature*, **465**, 41–42 (2010).
10. A. ARGYRIS, D. SYVRIDIS, L. LARGER, V. ANNOVAZZI-LODI, P. COLET, I. FISCHER, J. GARCIA-OJALVO, C. R. MIRASSO, L. PESQUERA & K. A. SHORE, Chaos-based communications at high bit rates using commercial fiber-optic links, *Nature*, **438**, 343 (2005).

## Bistabilité hydrodynamique engendrant deux branches dynamos dans l'expérience VKS

Sophie Miralles<sup>1</sup>, Nicolas Plihon<sup>1</sup>, Jean-François Pinton<sup>1</sup>, Philippe Odier<sup>1</sup>, Mickaël Bourgoïn<sup>1</sup>, Gautier Verhille<sup>1</sup>, Johann Hérault<sup>2</sup>, François Pétrélis<sup>2</sup>, Christophe Gissinger<sup>2</sup>, Stéphane Fauve<sup>2</sup>, Bérengère Dubrulle<sup>3</sup>, Sébastien Aumaître<sup>3</sup> & François Daviaud<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique, Ens Lyon, UMR 5672, 46 Allée d'Italie 69364 Lyon cedex 7

<sup>2</sup> Laboratoire de Physique Statistique, Ens Paris, UMR 8550, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05

<sup>3</sup> Systèmes Physiques Hors Équilibre, hYdrodynamique, éNergie et compleXite, CNRS 2464 CEA, Saclay

sophie.miralles@ens-lyon.fr

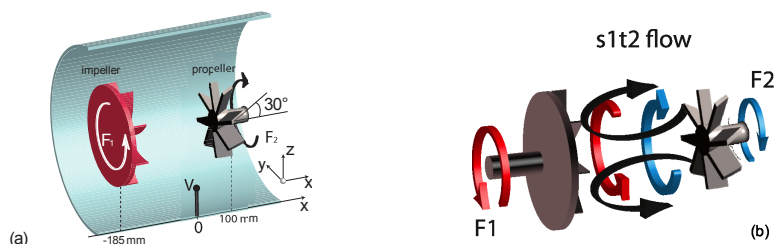
**Résumé.** Dans l'expérience von Kármán Sodium (VKS), la géométrie de l'écoulement turbulent de sodium liquide a été modifiée en remplaçant une des deux turbines par une hélice. Un champ magnétique auto-entretenu a été observé au dessus d'un certain seuil pour un forçage symétrique. Lorsque le forçage est asymétrique, aucun régime dynamique pour le champ magnétique n'a été observé mais dans une certaine gamme de paramètres, l'écoulement devient bistable. Cette bistabilité engendre deux branches dynamos stationnaires possédant des géométries semblables mais des seuils et des amplitudes bien distincts.

### 1 Introduction et dispositif expérimental

Le champ magnétique de la plupart des corps astrophysiques est auto-entretenu par effet dynamo. Cette conversion d'énergie mécanique en énergie magnétique a été intensivement étudié théoriquement et numériquement pour comprendre les différents mécanismes de génération de champ magnétique à partir d'écoulements de fluides conducteurs. Le rôle de la turbulence dans ces écoulements pose encore de nombreuses questions.

Depuis 2006, les conditions sont réunies pour observer l'effet dynamo dans l'expérience VKS (von Kármán Sodium) située à Cadarache [1]. Il s'agit d'un écoulement turbulent de sodium liquide entraîné par la contra rotation de deux turbines identiques en fer doux (constituées d'un disque muni de 8 pales courbes) dans une cuve cylindrique. L'influence des conditions aux limites ferromagnétique ne sera pas discuté ici. L'écoulement moyen résultant est composé de deux cellules azimutales tournant en sens opposés et se rejoignant dans le plan médian en un lieu de fort cisaillement. L'éjection du fluide sur les côtés par les pales engendrent une recirculation poloïdale se traduisant par un pompage axial (cet écoulement est du type  $s_2t_2$  selon la classification établie par Dudley et James [2]). Au delà d'une certaine fréquence de rotation des deux turbines ( $F_1 = F_2 > F_c$ ), l'instabilité dynamo se déclenche et un champ magnétique croît et s'auto-entretient.

Une série d'études avec des expériences en eau [3, 4] a montré que l'écoulement de von Kármán était sujet à des bifurcations lorsque le forçage est asymétrique ( $F_1 \neq F_2$ ). L'asymétrie est caractérisée par le paramètre adimensionné  $\theta = \frac{F_2 - F_1}{F_2 + F_1}$ ,  $\theta = 0$  représentant le régime contrarotatif symétrique et  $\theta = \pm 1$  représentant la rotation d'une seule turbine, l'autre étant à l'arrêt. Plus  $\theta$  est grand et plus la couche de cisaillement est translatée vers le disque le plus lent jusqu'à ce que l'écoulement bifurque et ne présente plus qu'une seule cellule azimutale et une seule cellule poloïdale (type  $s_1t_1$ ). En fonction de la géométrie des turbines, l'écoulement peut présenter une multistabilité pour les grandes valeurs de  $\theta$ . Pour la géométrie des disques de VKS, il n'y a pas de multistabilité et la transition 2 cellules/1 cellule a lieu pour  $\theta = 0.16$ . Malgré le fait qu'aucune mesure globale de l'écoulement n'ait montré cette bifurcation dans VKS, de grands changements sur le champ magnétiques ont été rapportés [5] pour  $\theta \in [0.16; 0.2]$  comme des inversions de polarité, des oscillations ou des bursts par exemple.



**Figure 1.** (a) Schéma de la configuration modifiée de l'expérience VKS. Sur le coté gauche de la cuve la turbine en fer doux, à droite, l'hélice en acier inox. (b) schéma de l'écoulement moyen : 2 cellules azimutales (rouge et bleue) et la cellule de recirculation poloïdale (noir).

Récemment, l'écoulement de base de l'expérience VKS a été modifié en remplaçant l'une des 2 turbines en fer par une hélice en acier inox (voir figure 1(a)). L'hélice est dessinée pour produire un écoulement azimutal ainsi qu'un écoulement poloïdal qui pousse le fluide le long de l'axe de la cuve. L'écoulement résultant est du type  $s_1t_2$  (voir figure 1(b)) et n'a jamais été étudié dans VKS.

En contrarotation exacte ( $F_1 = F_2 > 18$  Hz), un champ dynamo stationnaire se développe.

Dans les prochaines sections, nous verrons l'influence d'un forçage asymétrique ( $F_2 > F_1$ ) sur un tel écoulement ainsi que les conséquences sur le champ magnétique.

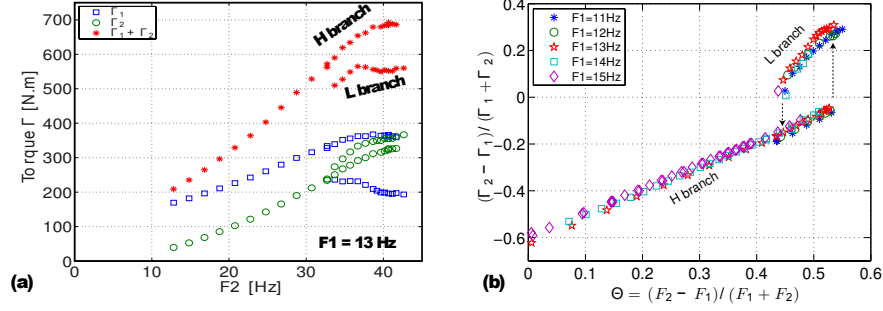
Soulignons que le champ magnétique qui se développe est stationnaire quelque soit la valeur de  $\theta$ . Aucun régime dynamique n'a été observé dans cette configuration.

Nous allons étudier l'évolution de quantités hydrodynamique (section 2) et magnétique (section 3) en fixant la valeur de la fréquence de rotation du disque  $F_1$  entre 11 et 15 Hz tout en faisant évoluer la fréquence de rotation de l'hélice  $F_2$  entre 13 et 44 Hz.

## 2 Bistabilité de l'écoulement

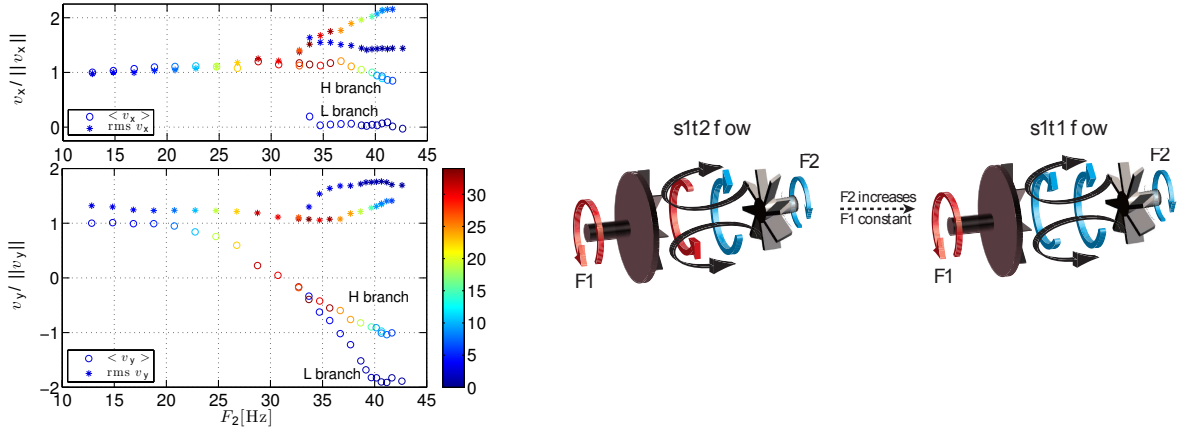
L'évolution du couple total  $\Gamma_{tot}$  pour un forçage asymétrique, avec  $F_1 = 13$  Hz constant est tracée sur la figure 2(a). En augmentant progressivement la fréquence de rotation de l'hélice  $F_2$  de 13 à 43 Hz,  $\Gamma_{tot}$  croît de manière monotone et atteint un plateau autour de  $F_2 = 40$  Hz. Pour  $F_2 = 43$  Hz, le couple total varie brutalement de  $700 \text{ N} \cdot \text{m}$  à  $550 \text{ N} \cdot \text{m}$ . En diminuant  $F_2$ , cette valeur reste approximativement constante jusqu'à  $F_2 = 34$  Hz où  $\Gamma_{tot}$  croît soudainement jusqu'à  $580 \text{ N} \cdot \text{m}$ , valeur obtenue précédemment pour les mêmes paramètres de contrôle. On observe alors que le couple total peut évoluer sur deux branches, l'une de fort couple (branche  $H$ ) et l'autre de couple plus faible (branche  $L$ ). Cette bistabilité est visible pour  $F_1$  allant de 11 à 15 Hz. La bifurcation se produit lorsque les couples du disque et de l'hélice sont égaux comme le montre la figure 2(b) représentant les couples normalisés en fonction du paramètre d'asymétrie. Pour toutes les valeurs de  $F_1$ , les courbes se superposent et la bifurcation a lieu pour  $\theta = 0.54$  ( $H \rightarrow L$ ) et pour  $\theta = 0.43$  ( $L \rightarrow H$ ).

Cette bifurcation de l'écoulement est également visible sur des mesures locales de vitesse effectuées avec des sondes de potentiel [6] à l'intérieur de la cuve dans le plan médian. La figure 3(a) montre l'évolution de la moyenne et de la déviation standard de la vitesse axiale et azimutale pour  $F_1 = 13$  Hz. Jusqu'à  $F_2 = 30$  Hz, la vitesse moyenne azimutale est positive; ce signe correspond au sens de rotation (antihoraire) du disque. Plus la fréquence de rotation de l'hélice devient élevée, plus  $\langle V_\theta \rangle$  diminue, passe par zéro et change de signe. Lorsque  $\langle V_\theta \rangle = 0$ , la situation correspond à une couche de cisaillement localisée dans le plan médian; puis lorsque le forçage devient de plus en plus asymétrique,  $\langle V_\theta \rangle$  prend le signe correspondant au sens de rotation de l'hélice. Ces évolutions s'interprètent comme un déplacement de la couche de cisaillement vers le disque, qui tourne plus lentement. Pour  $F_2 = 43$  Hz, un saut est observée sur les valeurs moyennes et sur les déviations standards des deux composantes de vitesse. On identifie alors les deux branches  $H$  et  $L$  correspondant aux deux états possibles de l'écoulement, comme



**Figure 2.** (a) Evolution du couple du disque  $\Gamma_1$ , de l'hélice  $\Gamma_2$  et du couple total  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  en fonction de  $F_2$  à  $F_1 = 13$  Hz fixé. Lors de la bifurcation,  $\Gamma_1$  varie de  $\sim 50$  % alors que  $\Gamma_2$  reste  $\sim$  constant. (b) Évolution de la différence de couple normalisée  $\Gamma_n = (\Gamma_2 - \Gamma_1)/(\Gamma_1 + \Gamma_2)$  en fonction du paramètre d'asymétrie  $\theta$  pour plusieurs valeurs de  $F_1$ . La bifurcation a lieu à  $\theta = 0.54$  (branche  $H \rightarrow L$ ) et à  $\theta = 0.43$  (branche  $L \rightarrow H$ )

pour les mesures de couples. Sur la branche  $L$ , les vitesses moyennes mesurées correspondent avec un bon accord à celles mesurées lorsque le disque est maintenu à l'arrêt ( $F_1 = 0$ ) et que l'hélice est en rotation. L'écoulement possède alors les symétries d'un écoulement  $s_1 t_1$  avec une seule cellule azimuthale et une seule cellule de recirculation poloïdale (cf. figure 3(b)).



**Figure 3.** (a) Évolution de la vitesse moyenne (o) et déviation standard (\*) axiale (en haut) et azimuthale (en bas) en fonction de  $F_2$  mesurées avec une sonde de potentiel plongée dans le sodium. (b) Transition de l'écoulement lorsque le forçage devient très asymétrique. L'écoulement bifurqué présente une seule cellule de recirculation poloïdale et une seule cellule azimuthale. Le disque ne participe plus ou peu à la rotation du fluide et la couche de cisaillement n'est plus localisée entre les deux turbines.

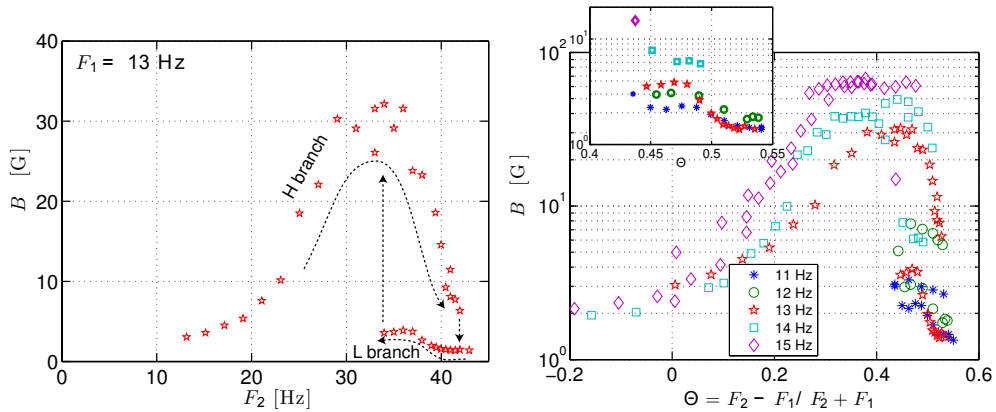
L'écoulement moyen et les fluctuations étant très différents entre les deux branches, on peut s'attendre à ce que la dynamo en soit grandement affectée. C'est l'objet de la section suivante.

### 3 Bifurcation du champ magnétique

Pour  $F_1 = 11$  et  $12$  Hz et  $F_2 \in [13; 44]$  Hz, un champ magnétique de moins de  $10$  G est mesuré, le seuil de l'instabilité dynamo n'est pas franchi. En revanche, pour  $F_1 \in [13; 15]$  Hz, l'amplitude du champ magnétique dépend de la valeur de  $F_2$  et peut atteindre  $30$  à  $60$  G. L'évolution de l'amplitude moyenne du champ magnétique mesurée en un point est représenté sur la figure 4 (a) pour  $F_1 = 13$  Hz. Lorsque  $F_2$  augmente de  $13$  à  $34$  Hz,  $\langle B \rangle$  augmente puis diminue continument pour  $F_2$  de  $34$  à  $43$  Hz. A cette valeur-ci, on observe une diminution soudaine du champ. L'amplitude reste faible lorsque  $F_2$  diminue de  $43$  à  $34$  Hz où le champ gagne brutalement un ordre de grandeur ( $6 \rightarrow 30$  G). On retrouve le comportement cyclique où le champ magnétique peut évoluer sur deux branches, l'une de grande amplitude ( $H$ ) et l'autre de faible amplitude ( $L$ ), déjà décrit pour les grandeurs hydrodynamiques.

Pour chacune des valeurs de  $F_1$  étudiées, le champ magnétique présente une bifurcation de la branche  $H$  vers la branche  $L$  à  $\theta = 0.54$  et une autre pour  $\theta = 0.43$  où le champ retrouve la branche  $H$ . Les valeurs du paramètre  $\theta$  pour lesquelles la bifurcation du champ magnétique se produit sont les mêmes que celles observées dans le paragraphe précédent concernant la bistabilité hydrodynamique.

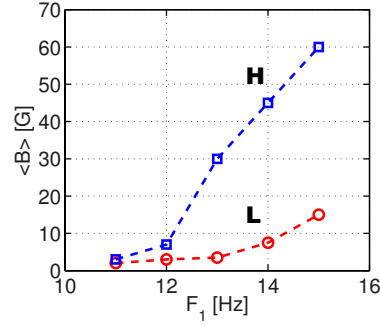
L'encadré dans la figure 4 en échelle semilog montre que l'amplitude du champ magnétique sur la branche  $L$  augmente pour les différentes valeurs de  $F_1$ . Le point de fréquence la plus élevée accessible expérimentalement est  $F_1 = 15$  Hz et le champ moyen  $\langle B \rangle$  possède une amplitude de plus de  $15$  G. Il s'agit donc d'une branche dynamo. L'évolution de l'amplitude moyenne du champ montre que le seuil de l'instabilité dynamo est dépassé pour  $F_1 > 13$  Hz (et que  $\langle B \rangle$  est très faible pour  $F_1 < 13$  Hz ; voir figure 5). La branche  $L$  est donc une branche dynamo stationnaire engendrée par un écoulement possédant les symétries  $s_1 t_1$  et dont le seuil est différent de la dynamo observée sur la branche  $H$ .



**Figure 4.** (a) Évolution du champ magnétique moyen en fonction de  $F_2$  pour  $F_1 = 13$  Hz fixée. Bifurcation ( $H \rightarrow L$ ) à  $\theta = 0.54$  et ( $L \rightarrow H$ ) à  $\theta = 0.43$ . (b) même chose pour plusieurs  $F_1$  en échelle semilog. En inset : zoom sur la branche  $L$ , l'amplitude du champ augmente avec  $F_1$ .

Les discontinuités de couples et de champ magnétique se produisent pour des valeurs  $\theta$  fixées et ce, quelque soit la fréquence  $F_1$ . Entre  $\theta = 0.43$  et  $\theta = 0.54$ , les grandeurs hydrodynamiques et l'énergie magnétique peuvent prendre deux valeurs différentes. Ces grandeurs sont liées dans le problème dynamo par les équations de Navier-Stokes d'une part et par l'équation d'induction d'autre part. Nous posons maintenant la question du lien entre ces deux bifurcations hydrodynamiques et magnétique. Les transitions sont-elles simultanées ou bien une des deux grandeurs est-elle précurseur d'un changement sur l'autre ?

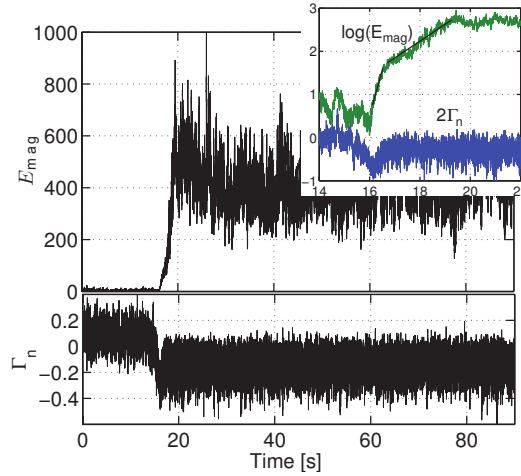




**Figure 5.** Evolution du champ magnétique moyen en fonction de  $F_1$  à  $\theta = 0.43$  fixé sur la branche  $H$  ( $\square$ ) et sur la branche  $L$  ( $\circ$ ). Les deux branches sont des dynamos présentant un seuil différent.

#### 4 Bifurcation dynamo guidée par la bistabilité de l'écoulement

Lorsque  $\theta = 0.43$ , le système peut bifurquer spontanément de la branche  $L$  à la branche  $H$ . Sur la figure 6, les fréquences  $F_1 = 14\text{ Hz}$  et  $F_2 = 37\text{ Hz}$  sont constantes. Au bout de quelques secondes, on observe un saut sur le couple normalisé  $\Gamma_n = (\Gamma_2 - \Gamma_1)/(\Gamma_2 + \Gamma_1)$  ainsi qu'une croissance exponentielle de l'énergie magnétique. Dans l'insert de la figure 6, le couple semble bifurquer légèrement avant que le champ magnétique n'évolue. En représentation logarithmique, deux temps de croissance se distinguent pour le champ magnétique, le premier étant plus court que le deuxième.

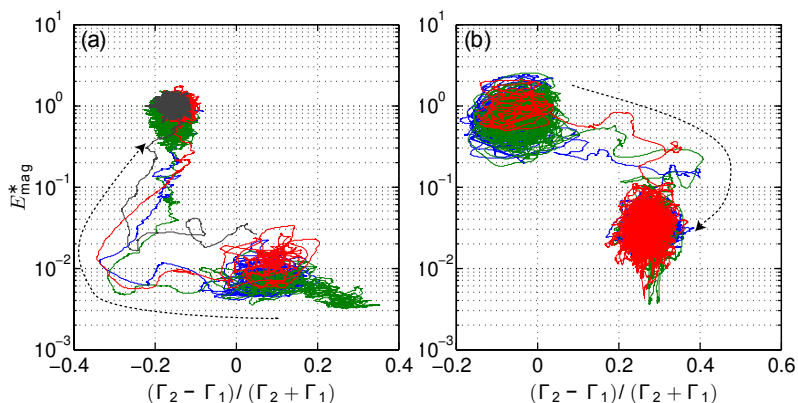


**Figure 6.** Trace temporelle de l'énergie magnétique et de la différence de couple normalisée à  $F_1 = 14\text{ Hz}$  et  $F_2 = 37\text{ Hz}$  fixe sur toute la durée de la mesure. Bifurcation spontanée du couple à 15 s suivi par la croissance du champ magnétique.

Pour continuer l'analyse, la figure 7(a) représente l'évolution dans l'espace des phases de l'énergie magnétique par rapport au couple pour la bifurcation de la branche  $L$  vers la branche  $H$  et sur la figure 7(b) pour la transition  $H$  vers  $L$ .

Pour les deux bifurcations, le couple évolue à énergie magnétique constante puis dans un second temps, l'énergie magnétique évolue à couple constant.





**Figure 7.** Energie magnétique en fonction du couple normalisé  $\Gamma_n$  pour les bifurcations  $L \rightarrow H$  à  $\theta = 0.43$  et  $H \rightarrow L$  à  $\theta = 0.54$ . Le couple opère une transition à  $E_{mag}$  constante avant que l'énergie magnétique n'évolue à son tour.

## 5 Conclusion

Nous rapportons ici l'observation d'une bistabilité hydrodynamique apparaissant pour des forçages non symétriques ( $F_2 > F_1$ ) et donnant lieu à une transition du champ magnétique. Les deux branches dynamos distinctes possèdent un mode magnétique similaire, des amplitudes très différentes et un seuil différent.

## Références

1. R. MONCHAUX *et al.*, Generation of a Magnetic Field by Dynamo Action in a Turbulent Flow of Liquid Sodium, *Phys. Review Letters*, **98**, 044502 (2007).
2. M. L. DUDLEY & R. W. JAMES, Time Dependant kinematic dynamos with stationary flows, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **425**, 407–429 (1989).
3. F. RAVELET *et al.*, Multistability and memory effect in a highly turbulent flow : Experimental evidence for a global bifurcation, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 164501 (2004).
4. J. BURGUETE *et al.*, Hysteresis and vortices dynamics in a turbulent flow, *Int. J. Bif. Chaos*, **19**, 2695–2703 (2009).
5. M. BERHANU *et al.*, Bistability between a stationary and a oscillatory dynamo in a turbulent flow of liquid sodium, *J. Fluid Mech.*, **641**, 217–226 (2009).
6. V. NOSKOV *et al.*, Dynamics of a turbulent spin-down flow inside a torus, *Phys. Fluids*, **21**, 045108 (2009).

# Segmentation capillaire : phénomène d'évitement de l'étranglement

Jérôme Hoepffner & Gounséti Paré

Institut Jean le Rond d'Alembert, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05  
 gounseti.pare@etu.upmc.fr

**Résumé.** Un ligament liquide, sous l'effet de sa tension de surface se rétracte en une seule goutte ou bien se segmente en plusieurs gouttelettes. Ce mécanisme de rétractation est assez classique et son étude est fondamentale pour comprendre la relaxation d'un volume de liquide. Nous nous intéressons dans notre étude à un mécanisme nouveau qui empêche un ligament de se segmenter : l'évitement de l'étranglement. Nous avons observé au cours de ce phénomène un lâcher tourbillonnaire qui joue un rôle central dans le mécanisme de la segmentation. Lors de la rétractation du ligament, un bourrelet se forme et reste connecté au reste du cylindre liquide par un cou dont le rayon tend à s'étrangler. Un flux se crée au niveau du cou et se détache sous forme de jet lorsque la viscosité du fluide dépasse un certain seuil. Ce détachement soudain crée un anneau tourbillonnaire qui modifie fortement la pression provoquant un retour de fluide au niveau du cou qui se ré-ouvre.

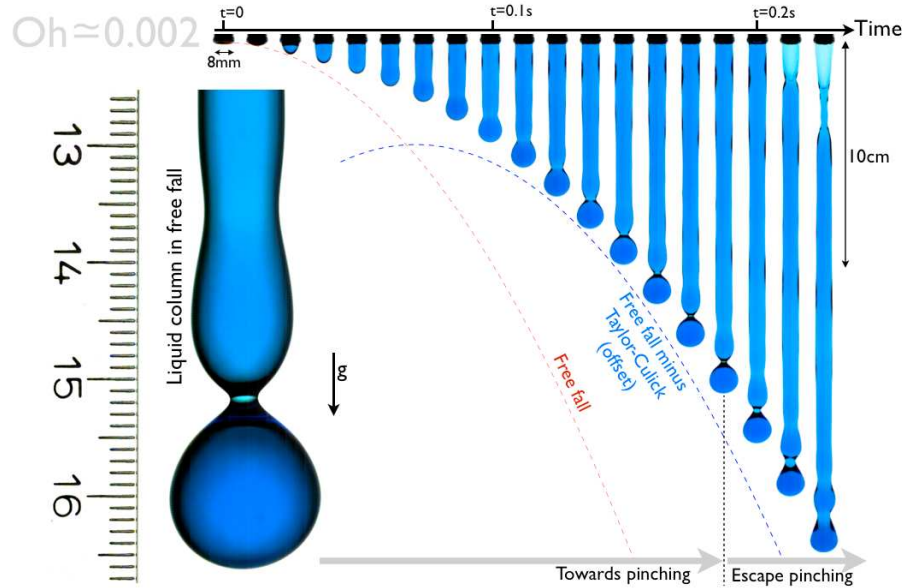
**Abstract.** A liquid filament recoils because of its surface tension. It may recoil to form one sphere : the geometrical shape with lowest surface, or otherwise it segments to several pieces which individually will recoil to spheres. The study of segmentation mechanism is classical and its exploration is fundamental to understand how liquid volumes relax. In this paper, we uncover a new mechanism involving the creation of a vortex ring which plays a central role in escaping the segmentation. When the filament recoil, a retracting blob remains attached to it by a neck. The radius of the neck decreases in time such that we may expect pinch-off. There is a flow through the neck because of the retraction, and this flow may detach into a jet downstream of the neck when fluid viscosity exceed a threshold. This sudden detachment creates a vortex ring which strongly modifies the flow pressure : fluid is expelled back into the neck which in turn reopens.

## 1 Introduction

Un corps liquide soumis à la tension de surface se rétracte en une goutte sphérique car la sphère est la forme géométrique qui, pour un volume de liquide donné, minimise sa surface, ou bien se segmente en plusieurs gouttelettes car la tension de surface agit rapidement et dans certains cas il est plus rapide de segmenter que de rétracter en une seule sphère. Un archétype pour comprendre ce phénomène de segmentation est l'instabilité de Rayleigh-Plateau (1873) [16] pour un cylindre infini. Malheureusement les ligaments liquides sont généralement finis. Il nous faut donc trouver une autre archétype pour décrire la segmentation. Celle-ci nous a été proposée par Stone *et al.* (1986), puis par Stone et Leal (1989) [19], appelé « end-pinching ». Considérons un ligament de demi-longueur finie  $L$ . Loin des deux bouts, le cylindre liquide est localement dans un état stationnaire, mais au niveau des bouts, l'augmentation de pression due à la courbure ne peut être équilibrée par la pression inertielle du liquide et celle-ci se rétracte. Dans ce document, nous nous intéressons aux mécanismes qui conduisent à la segmentation ou la non-segmentation (la rétractation en une seule goutte). Au lieu de faire comme Stone *et al.* (1986), Stone et Leal (1989) [19] avec un ligament visqueux dans un autre fluide visqueux, nous le faisons comme Schulkes (1996), Notz et Basaran (2004) [12], Castrejon-Pita *et al.* (2012) [4], en considérant un ligament liquide entouré d'air. Considérons un cylindre liquide de rayon  $R$ , de demi-longueur  $L$ , de tension de surface  $\sigma$ , de densité  $\rho$  et de viscosité  $\mu$ , sa rétractation se caractérise par deux nombres, son rapport d'aspect  $L/R$  (sa forme) et le rapport entre viscosité et l'effet moteur de l'inertie-capillarité qui est le nombre de Ohnesorge  $Oh = \mu/\sqrt{\rho\sigma R}$ .

## 2 Expériences et Simulations Numériques

L'expérience consiste à tremper une paille d'environ 8 mm de diamètre dans un bain liquide (de l'eau colorée) et la retirer en maintenant l'ouverture extérieure bouchée. Une fois sortie du bain, il reste une colonne liquide piégée dans la paille : la colonne se retrouve en situation d'instabilité de Rayleigh-Taylor [16] mais seulement stabilisée par la tension de surface. Une fois lâchée l'ouverture extérieure, la colonne liquide tombe en chute libre. Nous enregistrons cette chute à l'aide d'une caméra rapide. La



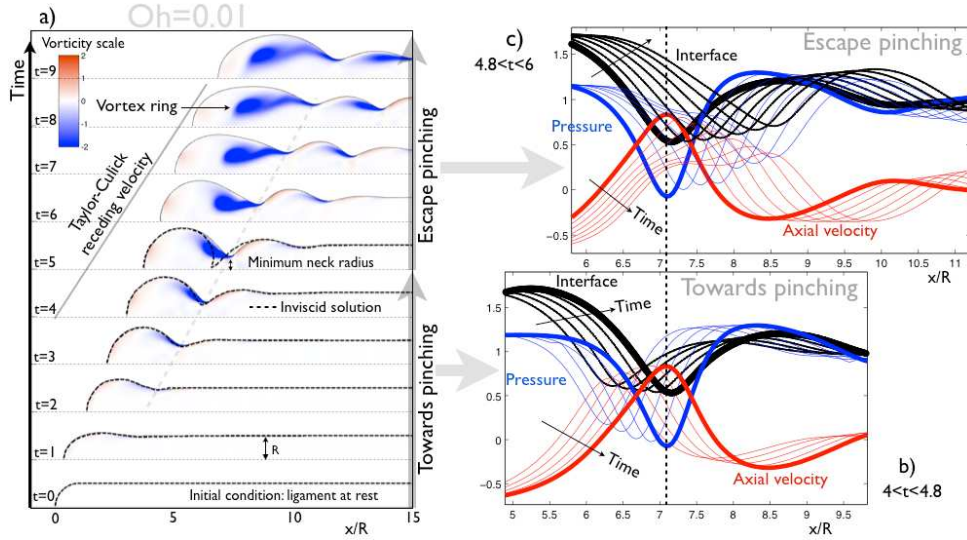
**Figure 1.** Phénomène d'évitement : une colonne liquide contenu préalablement dans une paille est lâcher en chute libre. Celle-ci se rétracte pendant se chute libre, un cou se forme et tend à segment la colonne en deux. Brusquement le cou se ré-ouvre et l'étranglement est évité.

figure 1 représente une séquence temporelle de cette chute. La position du bourrelet est comparée au cas de chute sans rétractation c'est à dire une tension de surface nulle (nommée « free fall » sur le graphe) et la vitesse de Taylor-Culick [5] dans le cas de la rétractation. Le nombre d'Ohnesorge pour cette expérience est environ  $Oh \approx 0.002$  ( $\sigma \approx 72 \text{ mJ} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $\rho \approx 999 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\mu \approx 0.95 \text{ mPas}$ ).

Pour s'assurer que la résistance de l'air n'influe pas sur la dynamique du ligament nous évaluons le nombre de Weber qui correspond au rapport des forces d'inertie et la tension superficielle  $\rho U^2 R / \sigma$ . Celle-ci est très faible, de l'ordre de 0.5 ( $R = 4 \text{ mm}$ ,  $\sigma \approx 72 \text{ mJ} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $\rho \approx 999 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $U = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) pour influencer sur la rétractation. La surface libre de la colonne liquide, pendant sa chute est soumise à la force capillaire. Il se rétracte, un bourrelet se forme et reste connecté au reste du cylindre liquide par un cou qui tend à s'étrangler pour segmenter le cylindre liquide en deux. Brusquement un phénomène inattendu se produit, le cou du bourrelet se ré-ouvre et l'étranglement est évité : il s'agit du phénomène d'évitement. Une inspection détaillée de ce phénomène montre qu'il est coïncident avec l'apparition d'un anneau tourbillonnaire à l'intérieur du bourrelet. Pour comprendre ce phénomène, nous avons effectué des simulations numériques sur des rétractations de ligaments liquides semi-infinis dans des conditions similaires à Notz et Basaran (2004) [12]. Ces simulations sont effectuées avec un logiciel libre Gerris flow solver, voir Popinet (2009) [15]. La condition initiale est un demi-cylindre de rayon  $R = 1$  et avec un bout sphérique entouré par un fluide non-visqueux de densité  $0.01\rho$ . La longueur initiale du ligament liquide est de  $47.5 R$  assez long pour segmenter ou éviter. Les propriétés physiques du ligament sont ( $\sigma = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\mu$ ).

Gerris implémente des méthodes de résolution numérique de type volumes finis pour l'équation de Navier-

Stokes en utilisant un maillage uniforme ou adaptative (basée sur l'interface, la vorticité ou encore la courbure) et une méthode de suivi en volume avec construction d'interface par morceaux (VOF : Volume-of-Fluid). Le logiciel est facilement installable sur une distribution Ubuntu Linux et utilise un fichier de paramètres contenant les conditions physiques de l'écoulement.



**Figure 2.** Simulation numérique de la rétractation d'un ligament cylindrique. a) Position de l'interface dans le repère spatio-temporel en trait continu, on y ajoute le cas non-visqueux (en pointillé) obtenu de Schulkes (1996) [17]. b)  volution temporelle des pression et vitesse axiales et de l'interface avant l'évitement : une évolution sous forme de venturi-capillaire. c) Après l'évitement : l'anneau tourbillonnaire détruit l'équilibre entre les pressions dynamique et capillaire, le cou se r ouvre.

### 3 Résultats et discussions

Les résultats obtenus pour  $Oh = 0.01$  sont présentés sur la figure 2.   gauche, une séquence temporelle de la position de l'interface, la couleur représente la vorticité. Un bourrelet se forme, nous observons la création du cou et de la réduction de son rayon à cause de la tension de surface et la pression dynamique. Au fil du temps, on voit l'apparition d'une fine couche de vorticité en aval du cou qui se détache finalement pour former un jet et un anneau tourbillonnaire. Cette anneau tourbillonnaire est crée par le détachement de l'interface d'une couche mince de vorticité, qui roule alors vers l'avant du cou. Au même instant que l'anneau se détache, le cou commence à se rouvrir. Dans cet exemple le temps de l'évitement est  $t_e = 4.8$ . Pour montrer la similitude de la rétractation avec le cas non-visqueux, avant l'évitement, nous avons tracer par dessus notre graphe les données de Schulkes (1996) [17]. En effet dans le cas non-visqueux nous avons observé, conformément aux résultats de Schulkes [17] mais aussi à Notz et Basaran [12], que la formation du cou conduit directement à l'étranglement : donc pas de phénomène d'évitement. Ce qui nous amène à la recherche d'une valeur critique du nombre d'Ohnesorge à partir de laquelle se produit le phénomène. Ce que nous avons obtenu,  $Oh_c \approx 0.0025$ .

Nous nous attachons ensuite à comprendre comment la création de l'anneau tourbillonnaire empêche la segmentation du ligament. La forme du ligament résulte de la compétition entre la pression inertielle due à l'écoulement intérieur du ligament et la pression de Laplace due à la tension de surface. Dans le cas d'un ligament statique Plateau (1873) [13] montre une solution périodique appelée onduloides. Cette forme d'onduloide résulte du saut de pression à travers l'interface :

$$\Delta p = \sigma \left[ 1/R(1 + R^2)^{1/2} - R/(1 + R^2)^{3/2} \right]. \quad (1)$$

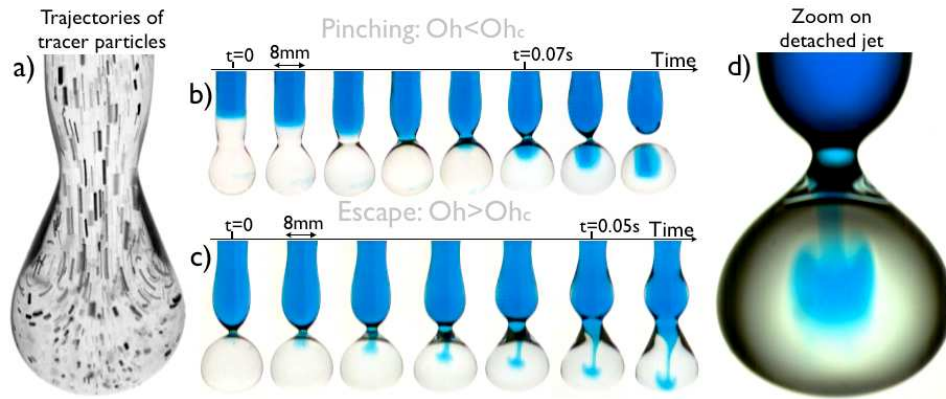
Considérant un écoulement stationnaire, la conservation du débit de la vitesse  $u$  le long du filament de rayon variable induit une variation de la pression axiale du fluide telle que décrite par l'équation de Bernoulli

$$p + \rho u^2/2 = \text{cste}, \quad (2)$$

Cette pression décroît lorsque le rayon du cou décroît. Dans le cas stationnaire la variation de la pression dynamique est égale au saut de pression à travers l'interface. La solution finale est un ligament dont la courbure de surface induit une pression qui est partout égale à la pression induite par les accélérations et décélérations de fluide. Ces solutions stationnaires sont périodiques. Considérons maintenant un ligament infini avec un seul cou et plaçons-nous dans le référentiel lié à ce cou : Il s'agit d'un venturi capillaire. En effet, le débit s'accélère à travers le rayon local de l'étranglement, induisant une faible pression, et décélère en aval de l'étranglement, pour récupérer la pression du ligament cylindrique  $p = \sigma/R$ . Mais la différence principale ici est que notre venturi n'est pas solide mais plutôt liquide et donc son interface va se déformer par le gradient de pression. Nous pouvons donc à partir de là, comprendre ce phénomène d'évitement. La rétractation du bourrelet pousse le cylindre pour devenir un venturi capillaire. Ce mécanisme est illustré dans la figure 2(b) pour  $t < 4.8$  : on observe dans la zone de l'étranglement un pic de la vitesse axiale correspondant à un creux de la pression axiale; et en aval du cou on récupère une pression élevée et une vitesse faible. À  $t = 4.8$ , on a le minimum du cou. Le reste de la rétractation est illustrée sur la figure 2(c) : tout comme pour un venturi solide lorsque le nombre de Reynolds est important, on observe un jet en aval du cou du ligament. La forte pression axiale correspondante au faible vitesse axiale n'est plus vérifiée. Pour le venturi capillaire cet événement brusque signifie que la faible pression du fluide ne peut plus équilibrer la pression capillaire élevée : le ligament est comprimé un peu plus loin de cette région, ce qui induit un retour de fluide qui à son tour oblige le cou à se rouvrir.

La figure 3 montre des observations expérimentales de l'avènement tourbillonnaire. Sur celle de gauche, figure 3(a), nous avons mélangé de l'eau avec des particules sombres afin de retracer les trajectoires des particules fluides. Le ligament est enregistré dans sa chute à l'aide de la caméra. On remarque le tourbillon bien visible. Pour visualiser l'anneau tourbillonnaire et le détachement du jet, nous élaborons une procédure pour assembler la colonne de liquide en un mélange stratifié d'eau claire et colorée. Le mélange stratifié est obtenue comme suit : nous préparons d'un côté un demi-litre d'eau du robinet mélangée avec 100 grammes de sel de table, et d'un autre côté un demi-litre d'eau du robinet mélangée avec du colorant alimentaire bleu. Le sel rend l'eau claire légèrement plus lourd, ce qui empêche donc le mélange des deux liquides pendant la préparation et de maintenir le front de l'eau colorée. La paille de 8 mm de diamètre est d'abord plongée dans l'eau colorée jusqu'à une profondeur souhaitée, puis replongé dans l'eau salée pour quelques centimètres de plus; le bon dosage des deux colorants étant d'obtenir lors de la chute, le front du colorant au niveau de la zone de l'étranglement. Pour varier la viscosité du mélange on y ajoute de l'éthanol. La figure 3(b) montre le cas d'un Ohnesorge inférieur à la valeur critique  $Oh_c$ . Le front du colorant se déplace vers la zone de l'étranglement. La figure 3(c) montre le cas où le nombre d'Ohnesorge est supérieur à  $Oh_c$ . On voit clairement un jet du front du colorant ainsi que les caractéristiques de la création d'un anneau tourbillonnaire en aval de la zone de l'étranglement.

Nous venons de décrire le phénomène de l'évitement dans les détails, nous allons maintenant nous en servir pour avoir une vue globale sur le mécanisme de la rétractation. Toutes les données numériques et expérimentales disponibles dans la littérature sont résumées sur la figure 4 de Castrejon-Pita *et al.* (2012) [4]. Dans un repère paramétré en abscisse par le nombre d'Ohnesorge et en ordonnée par le rapport d'aspect, Castrejon-Pita [4] trace la frontière entre le cas où un ligament se segmente et le cas de la non-segmentation. Pour un nombre de Ohnesorge donné, le graphe montre qu'il existe une valeur critique  $L_c$  du rapport d'aspect en dessous du quelle il est impossible de segmenter, c'est à dire que ligament va se rétracter en une seule goutte. Cette valeur critique augmente avec le nombre d'Ohnesorge : plus le fluide est visqueux, plus il a besoin d'être long pour se segmenter. Dans nos simulations nous avons considéré un demi-cylindre assez long (de rapport d'aspect égal à 47.5) pour se segmenter. Nous supposons en plus que les effets qui peuvent survenir lorsque les deux bouts du cylindre se rencontrent au milieu du ligament (dans le cas d'un cylindre entier) n'influent pas significativement sur la rétractation. Nous pouvons alors superposer nos résultats à ceux du graphe de Castrejon-Pita [4]. L'objectif ici est de mettre en évidence



**Figure 3.** Observation expérimentale de l’anneau tourbillonnaire lors de l’évitement. a) Trajectoire des particules après évitement, formation d’anneaux tourbillonnaires. b) Pour  $Oh$  inférieur à  $Oh_c$ , pas de détachement de jet. c) Pour  $Oh$  supérieur à  $Oh_c$ , un détachement du jet avec création d’anneaux tourbillonnaires.

la structure de la frontière obtenue sur ce graphe entre les zones de segmentation et de non segmentation. Nous montrons que l’évitement est le mécanisme caché, responsable de l’augmentation de la longueur du filament critique  $L_c$  lorsque le liquide devient visqueux. Plusieurs simulations ont donc été faites pour différentes valeurs de  $Oh$  pour tracer ce graphe. Les points de segmentation sont représentés sur le graphe par de petits carrés tandis que ceux de l’évitement sont de petits points ronds. Notz et Basaran (2004) [12] par des simulations ont trouvé une valeur critique de segmentation (voir le Tableau 3 de l’article). Nous retrouvons des valeurs semblables par nos simulations. Nous avons décomposé ce graphe en plusieurs zones : la région  $Oh \geq 1$ , régime visqueux, où on n’a presque pas de formation de cou. Pour  $L_c \leq 7$  le ligament se rétracte en sphère quelque soit son nombre  $Oh$ . La zone  $Oh \leq 0.001$ , non visqueuse, où le ligament se segmente une fois sa longueur supérieure à  $L_c$ . Et la zone d’évitement  $0.0021 \leq Oh \leq 1$ , où le ligament peut éviter plusieurs fois avant de se segmenter. Nous avons trouvé finalement une valeur critique d’Ohnesorge entre  $0.0021 \leq Oh_c \leq 0.003$  au delà de laquelle se produit l’évitement. Nous avons ajouté également les zones où le ligament évite une fois, deux fois ou plusieurs fois.

## 4 Conclusion

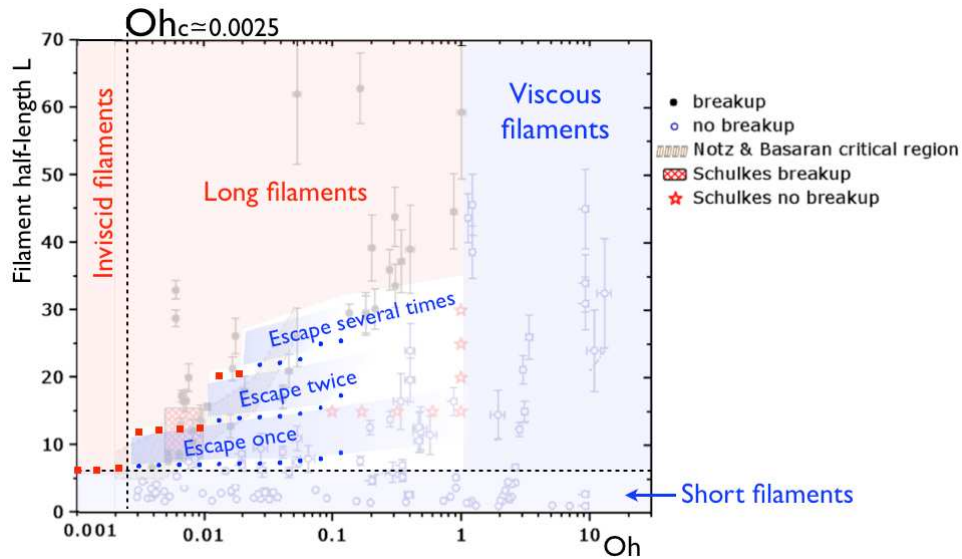
Dans le cas d’un ligament de rapport d’aspect supérieur à  $L_c$  et pour des nombres d’Ohnesorge inférieure à  $Oh_c = 0.0021$ , un cou se forme dans lors de la rétractation et se segmente : le cou se comporte comme un venturi capillaire. Au delà de cette valeur critique du nombre d’Ohnesorge, la couche de vortivité dans la zone de l’étranglement a le temps de se développer et induit un jet en aval du cou avec un lâcher tourbillonnaire. Ce soudain changement provoque la création d’un second cou qui induit un retour de fluide qui à son tour oblige le cou à se rouvrir.

Nous remercions tous nos collaborateurs, Arnaud Antkowiak, Howard Stone, Stéphane Zaleski pour leurs idées constructives, Jose-Eduardo Weisfreid, Grégoire Lemoult et Sara Abdi pour les particules traceurs, et aussi l’ANR pour le soutien financier.

## Références

1. A. ANTKOWIAK, N. BREMOND & S. LE DIZÈS, Short-term dynamics of a density interface following an impact, *J. Fluid Mech.*, **577**, 241–250 (2007).
2. G. K. BATCHELOR, An introduction to fluid dynamics, *Cambridge university press, New York* (1967).
3. M. BRENNER, J. EGGERS, K. JOSEPH, S. R. NAGEL & X. D. SHI, Breakdown of scaling in droplet fission at high Reynolds number, *Phys. Fluids*, **9**, 1573–1590 (1997).





**Figure 4.** Rapport d'aspect en fonction du nombre de Ohnesorge : les carrés rouges sont les points de segmentation, les points bleus ceux de l'évitement qui résultants de nos simulations. Données numériques et expérimentales de rétractation de ligament par Catrejon-Pita (2012).

4. A. A. CASTREJON-PITA, J. R. CASTREJON-PITA & I. M. HUTCHINGS, Analogy between higher instabilities in fluids and lasers, *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 074506 (2012).
5. F. E. C. CULICK, Comments on a ruptured soap film, *J. Appl. Phys.*, **31**, 1128–1129 (1960).
6. P. G. DE GENNES, D. QUÉRÉ & F. BROCHARD-WYART, *Capillary and wetting phenomena : Drops, bubble, pearls, waves*, Springer, New-York (2004).
7. J. EGGERS & T. F. DUPONT, Drop formation in a one-dimensional approximation of the Navier-Stokes equation, *J. Fluid Mech.*, **262**, 2050–221 (1994).
8. A. JAVADI, J. EGGERS, D. BONN, M. HABIBI & N. RIBE, Delayed capillary breakup of falling viscous jets, *Phys. Rev. Lett. Submitted* (2013).
9. J. B. KELLER, Breaking of liquid films and threads, *Phys. Fluids*, **26**, 3451–3453 (1983).
10. P.-S. LAPLACE, *Traité de mécanique céleste, Volume Supplément au Livre X*, Courcier, Paris (1805).
11. P. MARMOTTANT & E. VILLERMAUX, Fragmentation of stretched liquid ligaments, *Phys. Fluids*, **16**, 2732–2741 (2004).
12. P. K. NOTZ & O. A. BASARAN, Dynamics and breakup of a contracting liquid filament, *J. Fluid Mech.*, **512**, 223–256 (2004).
13. J. PLATEAU, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Gauthier-Villars, Paris.
14. H. POINCARÉ, *Capillarité*, Éditions Jacques Gabay, Paris.
15. S. POPINET, An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows, *J. Comp. Phys.*, **228**, 5838–5866 (2009).
16. J. W. STRUT Lord RAYLEIGH, On the instability of jets, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **10**, 277–300 (1879).
17. R. M. S. M. SCHULKES, The contraction of liquid filaments, *J. Fluid Mech.*, **10**, 309, 277–300 (1996).
18. A. SIEROU & J. R. LISTER, Self-similar recoil of inviscid drops, *Phys. Fluids*, **16**, 1379–1394 (2004).
19. H. A. STONE & L. G. LEAL, Relaxation and breakup of an initially extended drop in an otherwise quiescent fluid, *J. Fluid Mech.*, **198**, 399–427 (1989).

# Diffusion-mechanical instability of a spherical gel

Jorge Peixinho<sup>1</sup> & Shomeek Mukhopadhyay<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Ondes et Milieux Complexes, CNRS UMR 6294 et Normandie Université, 76600 Le Havre, France

<sup>2</sup> Department of Physics, University of California, Riverside, CA 92521, USA

jorge.peixinho@univ-lehavre.fr

**Résumé.** Lorsqu'une sphère composée de polymères hydrophiles est immergée dans de l'eau, celle-ci gonfle. Dans le cas de sphères en polyacrylamide, le rapport entre le volume final et le volume initial peut augmenter d'un facteur de l'ordre de mille et ce processus de gonflement est non linéaire. Nous présentons une étude expérimentale du gonflement de ces billes dans de l'eau. Au cours de la croissance, une instabilité liée à la diffusion de l'eau et à la déformation élastique de la sphère est observée et analysée. Les motifs à la surface de la sphère sont d'abord aléatoires et homogènes. Ensuite, des rides apparaissent et leurs longueurs d'onde et amplitudes augmentent en fonction du temps. Ces rides prennent d'abord la forme de lobes hémisphériques puis ceux-ci se déforment. Au fur et à mesure que le temps passe, le nombre de lobes diminue. Enfin, la sphère finale est lisse. Ces résultats sont comparés à des modèles mathématiques de type réaction-diffusion et noyau-coquille.

**Abstract.** When a sphere made of hydrophilic polymer is immersed in water, it experiences a volume phase transition and swells. In the case of polyacrylamide gels, the volume ratio can increase by a factor of the order of one thousand and this swelling process is nonlinear. We present an experimental study of the swelling of polyacrylamide spheres. During the growth, a diffusion-mechanical instability is observed and analyzed. The patterns on the surface of a sphere are first random and homogeneous. Then, wrinkles appear and their wavelength and amplitude increase as a function of time. The wrinkles were first well defined hemispherical lobes and then deformed. As time proceeds, the number of lobes decreases. Eventually, the sphere is smooth and well rounded. These patterns are discussed in relation to predictions of reaction-diffusion models and in core-shell models.

## 1 Introduction

Gels are very surprising materials : they are mostly made of liquid, but resist to flow. Examples are from the food we eat to the cosmetic we spread on our skin. Yet there is a large variety of gels and many surprising phenomena are observed everyday and remain unexplained.

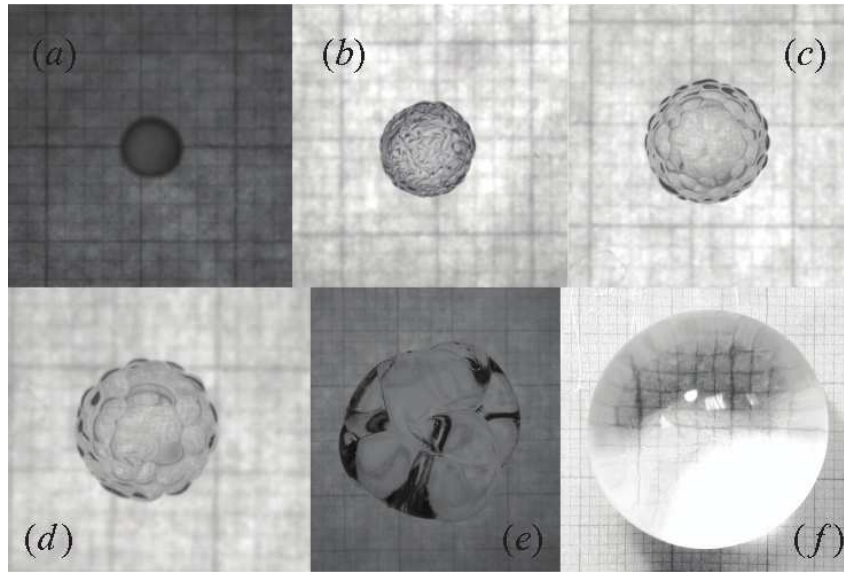
When a sphere of hydrophilic polymer is immersed in water, it experiences a volume phase transition. The water diffuses into the sphere and the polymer reacts. Such reaction-diffusion phenomena can lead to pattern formation. Turing and others [1] proposed that the different patterns found when solving the reaction-diffusion system on the surface of a sphere could explain the symmetry breaking which leads to the shape of the embryo or the evolution of tumors. Hence morphological instabilities of such soft swelling spheres may have important implications in order to understand the effect of the domain growth and curvature on pattern selection.

Most of the previous works on pattern transformation in swelling gels by elastic instability concentrated on films [2] and several models were developed. As gel grows by absorbing water, its elastic modulus decreases. Elastic models provide the wavelength of the patterns. Recently, core-shell soft sphere models [3] which describes wrinkle to fold transition into labyrinth folded patterns has been analyzed. Here our contribution consists in the study of the swelling of a single spherical gel. The details of the swelling shows a mechanical instability and the associated kinetics is measured and analyzed.

## 2 Growth experiments

The dried polymer spheres were obtained from Educational Innovations and the initial diameter of the beads used here is  $3.2 \pm 0.5$  mm. A time sequence of the swelling is presented in figure 1. The experiments





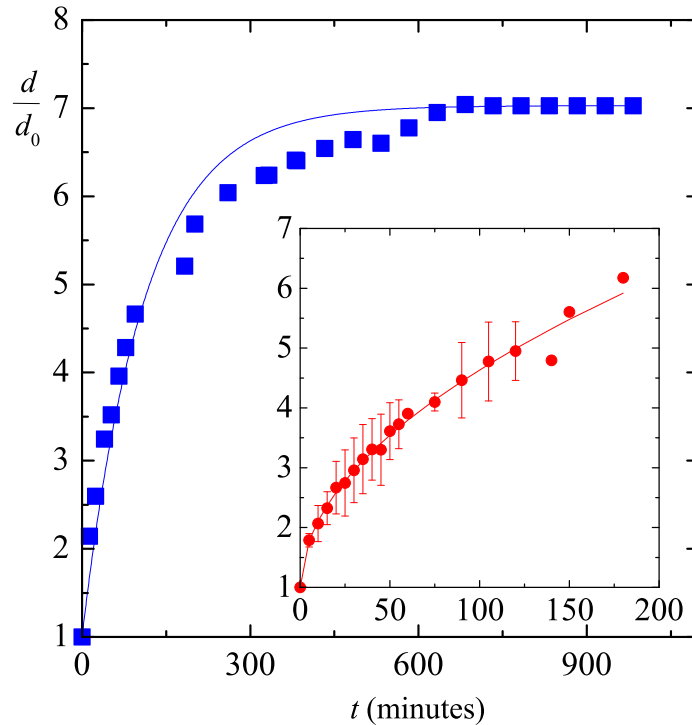
**Figure 1.** A sequence of images showing the swelling of a polymer particle : (a) the initial dry sphere, (b, c, d, and e) the various patterns observed 2, 5, 10 and 60 minutes, respectively, after immersion, (f) the grown-up hydrogel sphere

are as follows. Initially at  $t = 0$ , the dry polymer sphere is immersed in demineralized water; then at given times the polymer sphere is taken out using a spoon, weighed, pictured and immersed again. All the experiments were conducted at room temperature ( $T = 22 \pm 0.1^\circ\text{C}$ ). Using calibrated paper and an imaging software, a measure of the diameter could be obtained. The volume of the sphere increases by a factor of the order of one thousand.

At the beginning the sphere surface is fine having a texture similar to frosted glass (see figure 1(a)). At first wrinkle patterns are observed (see figure 1(b)). Then hexagonal or circular lobes appear and seem to merge (see figure 1(c, d, and e)). The swelling process is not homogeneous. Indeed, the lines between the lobes are due to local shrinking of the gel. The layer at the interface is under a mechanical constraint, namely, the outer surface of the layer is free to expand, whereas the inner surface is fixed to the core of the sphere. Thus the layer is under opposing demands on the upper surfaces, one to expand and the other to remain partially rigid. Initially, these opposing forces are resolved by stretching the gel unidirectionally perpendicular to the surface. When the osmotic pressure is large the outer surface is forced to buckle. The characteristic wavelength of the pattern must be proportional to the thickness of the swollen layer, as that is the only relevant length scale. As time goes on, the thickness of the swollen layer increases, as does the wavelength of the pattern.

The overall swelling duration until reaching equilibrium takes several hours. During this period, the mass and volume of the sphere increases roughly linearly. The swelling is a multistage process. First, a modification of the polymer surface corresponding to penetration of water molecules into the polymer takes place. The wetting of the shell of the polymer sphere is related to a slight expansion. During this stage, it is supposed that the core remains rigid [4]. Second, the roughness on the sphere surface appears as regularly spaced hexagonal lobes. Third, the number of the wrinkles decrease. Finally, the sphere becomes smooth and well rounded and continue to growth for several hours until reaching the final diameter.

A typical time evolution of the mean diameter is presented in figure 2 where the error bars represent the dispersion from three experiments. Again, three stages can be distinguished during the swelling process. First the dry layer of the polymer in contact with water becomes wet. As soon as the polymer is completely wet, water diffuses into the hydrogel. This is in agreement with the results presented in the inset of figure 2 where the diameter evolves as  $t^{0.5}$ . At later times, the swelling is well described by an exponential fit. This suggests that the material is relaxing due to viscoelasticity (Voigt model).



**Figure 2.** The diameter of the growing spheres as a function of time, the blue line represents an exponential fit. Inset : evolution during the lobed sphere régime, the red line represent a power law fit :  $d/d_0 \propto t^{0.5}$

### 3 Surface pattern analysis

The patterns observed at the growing sphere surface are due to the elastic properties of the material. Indeed, when a wrinkled sphere is cut with a sharp-edged tool, the wrinkle bounce back and disappears.

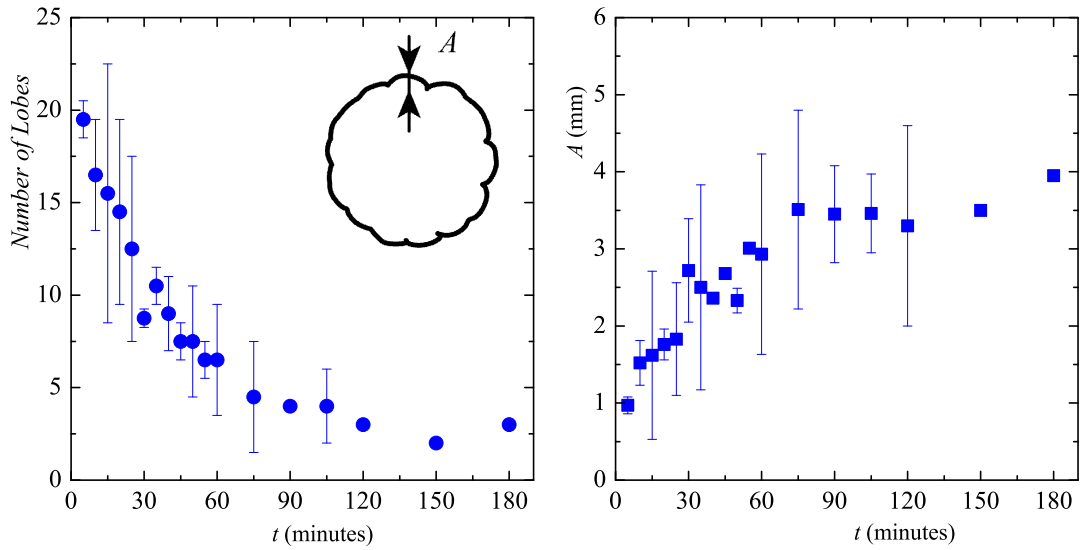
During the growth of the sphere, two patterns can be distinguished : (i) a wrinkled or lobed pattern (see figure 1(a)) and (ii) and a labyrinth pattern (see figure 1(e)) where the lobes merged is a complicated way. The patterns can be described using the number of lobes or wrinkles and its amplitude (see figure 3). The number of lobes decreases rapidly during the first hour of growth. Then a small number of lobes remains for quite some time before it disappears. Simultaneously, the amplitude of the lobes increases in the first hour and then remain constant for some time. These patterns are observe together with and continuous increase of the diameter of the sphere and change in the properties of the material.

It is suggested that the different patterns (wrinkle and labyrinth) correspond to changes in properties of the sphere, e.g. the ratio of modulus ratio between the shell and the core of the sphere [3]. With increasing deformation, transition to wrinkles to labyrinth patterns were observe. Yet here there is no well defined shell thickness, that is to say that the shell and the core are not two distinct materials.

### 4 Conclusion

We have presented an experimental study of the swelling of a hydrophilic polymer sphere in water. Specifically, several patterns corresponding to different stages during the growth of the spherical gel were observed. First the pattern contains many wrinkles and folds. Then as water is absorbed the number of lobes decreases rapidly. It seems that some lobes merge and give rise to a labyrinth pattern. The labyrinth pattern relaxes with a longer time scale.

Such hydrogel spheres have been used to study the so called ‘jammed’ state transition of matter or fracture in gels [5], taking advantage of their deformability, friction and optical properties.



**Figure 3.** (*left*) Number of lobes and (*right*) amplitude,  $A$ , of the lobes around the circumference

## Références

1. A. M. TURING, The chemical basis of morphogenesis, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*, **237**, 37 (1952); R. G. PLAZA, F. SÁNCHEZ-GARDUNO, P. DADILLA, R. A. BARRIO & P. K. MAINI, The effect of growth and curvature on pattern formation, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **16**, 1093–1121 (2004).
2. T. TANAKA, S.-T. SUN, Y. HIROKAWA, S. TAKAYAMA, J. KUCERA, Y. HIROSE & T. AMIYA, Mechanical instability of gels at the phase transition, *Nature*, **325**, 796–798 (1987); É. SULTAN & A. BOUDAUD, The buckling of a swollen thin gel layer bound to a compliant substrate, *J. Applied Mech.*, **75**, 051002 (2008).
3. J. YIN, Z. CAO, C. LI, I. SHEINMAN & X. CHEN, Stress-driven buckling patterns in spheroidal core/shell structures, *PNAS*, **105** 19132–19135 (2008); B. LI, F. JIA, Y.-P. CAO, X.-Q. FENG & H. GAO, Surface wrinkling patterns on a core-shell soft sphere, *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 234301 (2011).
4. T. TOMARI & M. DOI, Hysteresis and incubation in the dynamics of volume transition of spherical gels, *Macromolecules*, **28**, 8334–8343 (1995).
5. T. LACHHAB & C. WEILL, Compression of a soft sphere packing, *Eur. Phys. J. B*, **9**, 59–69 (1999); K. A. LŐRINCZ & P. SCHALL, Visualization of displacement fields in a sheared granular system, *Soft Matter*, **6**, 3044–3049 (2010); S. MUKHOPADHYAY & J. PEIXINHO, Packing of deformable spheres, *Phys. Rev. E*, **84** 011302 (2011); J. A. DIJKSMAN, F. RIETZ, K. A. LŐRINCZ, M. VAN HECKE & W. LOSERT, Refractive index matched scanning of dense granular materials, *Rev. Sci. Instrum.*, **83**, 011301 (2012); T. BAUMBERGER, C. CAROLI & D. MARTINA, Solvent control of a crack in a reversible hydrogel, *Nat. Mat.*, **5**, 552–555 (2006); K. E. DANIELS, S. MUKHOPADHYAY, P. J. HOUSEWORTH & R. P. BEHRINGER, Instabilities in droplets spreading on gels, *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 124501 (2007).

# Effets de quantification d'une association onde-particule soumise à une force centrale

S. Perrard<sup>1</sup>, M. Labousse<sup>1,2</sup>, M. Miskin<sup>1,3</sup>, E. Fort<sup>2</sup> & Y. Couder<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Matière et Systèmes Complexes, Université Paris Diderot, CNRS - UMR 7057, Bâtiment Condorcet, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75013 Paris, France

<sup>2</sup> Institut Langevin, ESPCI ParisTech and Université Paris Diderot, CNRS UMR 7587, 10 rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France

<sup>3</sup> James Franck Institute, University of Chicago, 929 East 57th Street, Chicago, IL 60637

stephane.perrard@univ-paris-diderot.fr

**Résumé.** Un marcheur, entité autopropulsée formée d'une goutte rebondissant sur un bain vibré et d'un champ d'onde sous-jacent a montré des similitudes surprenantes avec la dualité onde-particule du monde quantique. Grâce à un nouveau dispositif expérimental, nous pouvons maintenant étudier sa dynamique quand celui-ci est soumis à une force centrale. Quand les ondes générées par le marcheur sont peu amorties, i. e. lorsque la *mémoire de chemin* domine la dynamique, les trajectoires sont généralement complexes. Cependant, des orbites périodiques, circulaires ou non (lemniscates, trifolium) sont obtenues dans certaines plages de force appliquées. Ces trajectoires ordonnées correspondent à des états propres pour la trajectoire du marcheur, comme pour l'onde associée. Une comparaison avec les états propres quantiques de l'oscillateur harmonique 2D met en évidence la même règle de sélection des états. Enfin, les trajectoires désordonnées observées sont formées d'une superposition de ces modes purs, avec des transitions erratiques entre états voisins.

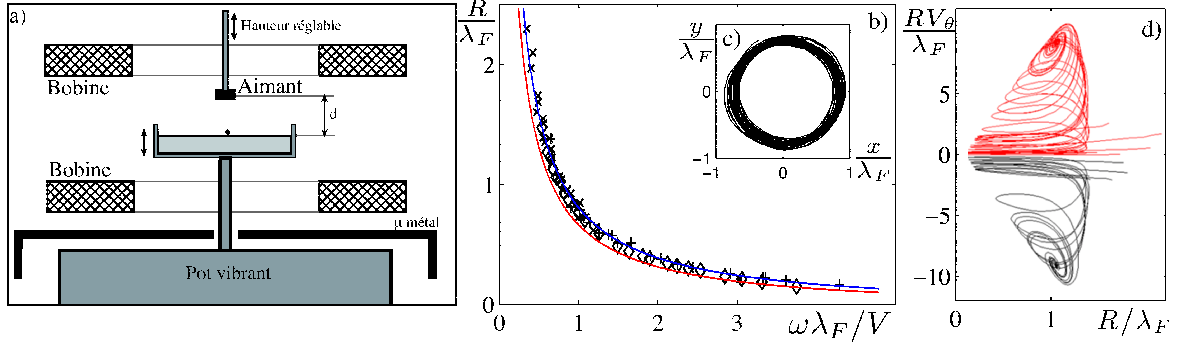
**Abstract.** A self-propelled entity formed by a bouncing droplet on a vibrated bath and its associated surface wave, the so-called "walker", was shown to have surprising wave-particle duality. Thanks to a new experimental set up, we now study its motion when it is submitted to a central force. When it is endowed with *path-memory* i.e. when the waves generated in the past are sustained, its trajectory is generally highly complex. However, periodic orbits, that can be circular or in the shape of lemniscates or trefoils, are obtained for specific tunings of the central force field. These ordered trajectories correspond to eigenstates for both the trajectory and the associated wave field. A comparison with the quantum eigenstates in a 2D potential well shows similar selection rules. Finally, the disordered trajectories are formed of a superposition of these pure eigenmodes through intermittent transitions between them.

## 1 Introduction

L'association d'une particule et d'une onde peut avoir, même à l'échelle classique, des comportements rappelant ceux des particules duales du monde quantique [1, 2]. Dans le système considéré, une goutte rebondissant sur un bain de liquide vibré génère à chaque impact une onde circulaire de Faraday. Le rebond de la particule sur cette surface perturbée par les ondes peut la mettre en mouvement, l'ensemble formant alors un *marcheur*. La persistance des ondes émises par les chocs précédents peut être contrôlée par l'amplitude de la vibration imposée, et forme la *mémoire de chemin*. Pour une mémoire faible, l'onde associée est quasi-circulaire, localisée autour de la goutte. Pour une mémoire plus élevée, les ondes générées par les chocs antérieurs subsistent et forment une figure d'interférence complexe qui va guider la particule.

L'ensemble des travaux antérieurs a permis d'établir d'une part les équations du mouvement pour la goutte et l'évolution du champ d'onde associé, et d'autre part de mettre en évidence une analogie peu commune avec la mécanique quantique. Cependant, il manquait jusqu'à maintenant une expérience pour explorer la *dynamique* d'un marcheur sous l'action d'une force extérieure.

Nous présentons ici un dispositif expérimental nouveau permettant de faire agir sur la goutte une force magnétique. Pour cela du ferrofluide est encapsulé dans la goutte, soumise à un champ magnétique extérieur inhomogène. Nous étudions ici un des cas simples possibles : le puits de potentiel harmonique à



**Figure 1.** a) Schéma du dispositif expérimental : la goutte contenant du ferrofluide est déposée sur un bain d'huile en oscillation verticale. Deux bobines placées en position de Helmholtz et un aimant permettent d'appliquer une force magnétique sur la goutte  $\mathbf{F} = -\kappa\mathbf{r}$ . La valeur de la constante de raideur peut être réglée en changeant la distance entre la goutte de l'aimant. b) Rayon adimensionné  $R/\lambda_F$  des trajectoires circulaires observées pour trois gouttes de vitesse  $V=6, 9$  et  $12$  mm/s et un paramètre de mémoire faible ( $M < 10$ ).  $R$  est exprimé en fonction de la fréquence adimensionnée du champ magnétique  $\omega\lambda_F/V = \Lambda^{-1}$ . La droite rouge correspond au cas usuel d'un mobile se déplaçant à la vitesse  $V$  dans un puit de potentiel harmonique, sans paramètre ajustable. La courbe bleue est un ajustement linéaire par une droite, de pente 10 pour cent supérieure à la théorie. c) Exemple de trajectoire circulaire observé. Coupe dans le plan  $(r, rV_\theta)$  de l'espace des phases : une condition initiale quelconque converge vers la trajectoire circulaire,  $r = R$  et  $rV_\theta = \pm RV_W$ .

deux dimensions. Les résultats obtenus, aussi bien expérimentaux que numériques, mettent en évidence un jeu d'états propres du marcheur, analogue à ceux de l'oscillateur harmonique quantique à deux dimensions.

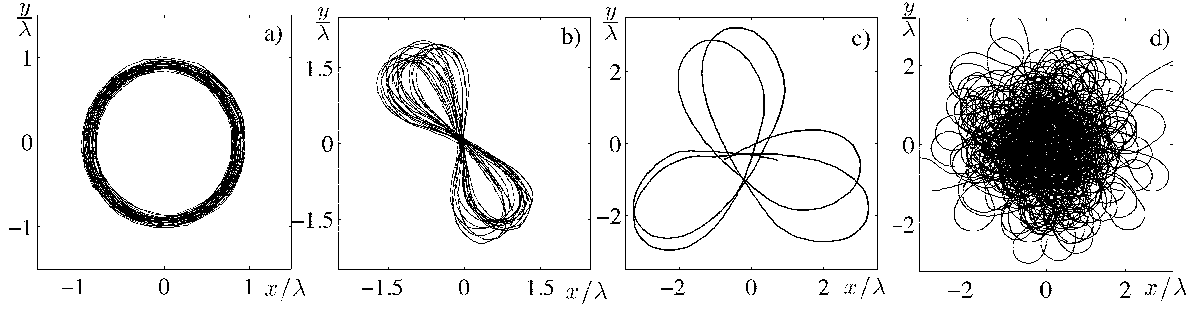
## 2 Dispositif expérimental

Le montage utilisé pour produire des marcheurs est analogue à celui des travaux précédents [2] : une cellule remplie d'huile silicone de viscosité 20 cp est mise en oscillation verticale avec une accélération  $\gamma = \gamma_m \sin(2\pi f_0 t)$  à une fréquence de forçage  $f_0 = 80$  Hz. L'amplitude  $\gamma_m$  peut aller de l'accélération de gravité  $g$  jusqu'au seuil de l'instabilité de Faraday observée à  $\gamma_m = 3,8g$  où des ondes stationnaires de période  $T_F$  (double de celle du forçage) se développent à la surface du bain. En dessous mais à proximité du seuil de l'instabilité, chaque rebond de la goutte crée une onde circulaire de Faraday évanescence, qui, par accumulation, peut la mettre en mouvement. La goutte devient alors un marcheur, se propageant en ligne droite à une vitesse typique de 10 mm/s.

Un élément essentiel de la dynamique de ces marcheurs est contenu dans la structure du champ d'onde qui l'entoure. Celui-ci dépend directement du temps d'amortissement  $\tau$  des ondes générées par le marcheur, dont la valeur est pilotée par l'écart relatif au seuil de Faraday. Le champ d'onde total résultant est alors issu de la sommation de ces ondes circulaires, le nombre de source à prendre en compte étant de l'ordre de  $M = \tau/T_F$ . Ce paramètre  $M$  nous donne ainsi une mesure de la *mémoire de chemin* du marcheur à l'origine de la dynamique couplée entre onde et particule dans notre système [3]. Pour étudier la dynamique de cet objet singulier, on se propose ici d'exercer une force extérieure sur le marcheur, qui permettra de venir sonder les états possibles du système. Nous avons pour cela choisi d'appliquer des champs magnétiques à une goutte d'huile contenant du ferrofluide. Celle-ci, plongée dans un champ magnétique extérieur  $\mathbf{B}$  inhomogène, subit une force  $\mathbf{F}$  donnée par :

$$\mathbf{F} = -\frac{\chi_0}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \quad (1)$$

Deux bobines placées en position de Helmholtz autour de la cellule permettent de générer un champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  homogène dans l'espace, l'intensité du champ étant directement proportionnelle au courant parcourant les bobines. Un gradient radial d'intensité du champ magnétique est ensuite généré



**Figure 2.** Trajectoires obtenues à haute mémoire ( $M > 40$ ), pour différentes valeurs de la constante de raideur  $\kappa$ . a) Orbite circulaire du niveau  $n=2$ ,  $R_2 = 0.9$ . b) Lemniscate de Bernoulli, correspondant également à  $\langle R \rangle = R_2$ . Le sens de rotation du marcheur changeant à chaque boucle, le moment angulaire associé est nul. c) Pour une valeur plus faible de la constante de raideur, on peut observer autour de  $\langle R \rangle = R_4 = 1.9$  trois types de trajectoires : circulaires, grande lemniscates, et en trifolium, représenté ici. d) À très haute mémoire ( $M > 100$ ), le cas général observé est une trajectoire complexe.

par un aimant circulaire placé à la verticale de la cellule. Les deux champs sont alignés et la goutte de ferrofluide subit une force attractive radiale capable de la piéger à la verticale de l'aimant. L'intensité du piégeage peut être réglée aisément, en changeant la distance entre l'aimant et le bain. Le champ magnétique total ressenti par la goutte est de l'ordre de 70 G et les gradients de champ de 1 G/cm. Au voisinage du centre, l'amplitude du champ magnétique de l'aimant est parabolique, la force exercée sur la goutte s'exprime donc simplement :

$$\mathbf{F} = -\kappa(d)\mathbf{r} \quad (2)$$

Où  $\kappa(d)$  représente la constante de raideur du puit de potentiel effectif qui peut être réglée en changeant la position verticale de l'aimant. Le volume  $\mathcal{V}$  de ferrofluide contenu dans la goutte n'étant pas connu avec précision, une méthode additionnelle de calibrage a été mise au point pour remonter à la valeur de la pulsation du champ magnétique  $\omega = \sqrt{\kappa/m}$  imposée (voir annexe de [4]).

### 3 Dynamique d'un marcheur en force centrale

#### 3.1 Faible mémoire

Pour un paramètre de mémoire faible (i. e.  $M < 10$ ), l'onde entourant le marcheur est circulaire. Dans ce régime, quelles que soient les conditions initiales, la goutte se retrouve piégée par la force centrale et orbite en cercle autour du centre, à vitesse constante  $V_0$  égale à sa vitesse libre. Ce phénomène est générique des systèmes dissipatifs-entretenus : l'échange permanent d'énergie avec l'extérieur, ici le bain, conduit à une réduction des volumes dans l'espace des phases. Dans un cas simple comme celui ci, où un mobile autopropulsé est soumis à une force centrale harmonique, toute condition initiale converge vers un des deux attracteurs, les orbites circulaires où la vitesse azimutale vaut  $V_\theta = \pm V_0$ . Le rayon du cercle est donné par  $R = V/\omega$ . La courbe présentant le rayon des cercles observés  $R/\lambda_F$  en fonction du paramètre de la force de rappel  $\omega\lambda_F/V$  est présentée en figure 1b). Ce régime de marcheur autopropulsé à faible mémoire peut être modélisé par un oscillateur de Rayleigh à deux dimensions, où la force de friction dépend de la vitesse.

#### 3.2 Grande mémoire

Pour un paramètre de mémoire plus élevé, la longueur du chemin de sources créant l'onde sous-jacente devient supérieur à la longueur d'onde de Faraday, des motifs d'interférence apparaissent. Le marcheur peut alors repasser dans des régions où des ondes de Faraday persistent encore et subit une force additionnelle, dite de *mémoire* qui va modifier sa dynamique. Une des premières conséquences est

l'apparition d'orbites non circulaires, comme des lemniscates de Bernoulli ou des trifolia, qui brisent la symétrie centrale. Même pour les orbites circulaires, la relation  $R = V/\omega$  établie pour un marcheur à faible *mémoire* n'est plus valable : au fur et à mesure que la mémoire est augmentée, les rayons des cercles observés prennent des valeurs discrètes  $\{R_n\}$ , égales à :

$$R_1 = 0.4 \pm 0.1\lambda_F, \quad R_2 = 0.9 \pm 0.1\lambda_F, \quad R_3 = 1.4 \pm 0.2\lambda_F, \quad R_4 = 1.9 \pm 0.2\lambda_F \quad (3)$$

Dans la limite d'un temps de mémoire grand devant la période de rotation du marcheur, les seules orbites circulaires autorisées ont ainsi un rayon  $R$  discret, avec  $R \in \{R_n\}$ .

Qu'en est il des orbites non circulaires ? Pour des orbites où  $R$  varie en fonction du temps, il nous faut définir un rayon moyen à partir de la densité de probabilité  $\rho(r)$  de trouver le marcheur à une distance  $r$  du centre. On définit  $\langle R \rangle$  comme suit :

$$\langle R \rangle = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \rho(r) r^2 dt} \quad (4)$$

Cette définition correspond bien à l'extension spatiale moyenne d'une particule classique d'énergie  $E_W$  dans un puits harmonique :  $\langle R \rangle = \sqrt{E_W/\kappa}$ . De manière analogue, on peut définir un moment angulaire moyen  $L_z$  :

$$L_z = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{V}}{\lambda_F \langle V \rangle} dt. \quad (5)$$

où  $L_z$  a été adimensionné par la longueur d'onde  $\lambda_F$  de Faraday et la vitesse moyenne  $V$  du marcheur. Ces deux observables permettent de classifier les trajectoires expérimentales obtenues. Par exemple, un cercle correspond au cas où  $\langle R \rangle = R_n/\lambda_F$  et  $L_z = nR_n/\lambda_F$ , une lemniscate à  $L_z = 0$ , le sens de rotation changeant de signe à chaque demi-période, etc.

Outre les trajectoires simples observées, il apparaît à haute mémoire ( $M > 50$ ) des gammes de valeurs de  $\Lambda$  pour lesquelles le chemin suivi par le marcheur ressemble à un long spaghetti formant de multiples boucles. Une analyse temporelle d'une telle trajectoire met en évidence la succession de trajectoires simples, telles des cercles ou des lemniscates avec transition rapide entre modes, de manière erratique, mettant en évidence un exemple de multistabilité. En décomposant ces trajectoires sur les différents modes propres observés précédemment (cercle, lemniscate, trifolium), on observe que les parties de trajectoires ainsi obtenues sont analogues aux modes purs observés.

L'ensemble des données expérimentales peut alors être représentés en fonction de  $\Lambda$ , soit en représentation  $R$ , soit en représentation  $L_z$ . Les graphes associés sont à paraître dans [4].

On remarque qu'elles se regroupent autour de valeurs particulières : un marcheur plongé dans un puits de potentiel harmonique exhibe une double quantification, en extension spatiale des trajectoires ( $R$ ), et en moment angulaire ( $L_z$ ), que ce soit pour des trajectoires simples ou des états intermittents entre modes voisins. Le paramètre de champ magnétique peut également être éliminé en représentant directement le niveau  $n$  du rayon moyen en fonction du niveau  $m$  de moment angulaire  $L_z$ . Cette représentation met en évidence un jeu discret de modes que l'on peut décrire par un couple d'entiers naturels  $(n, m)$  tel que  $n$  correspond au niveau du rayon moyen  $R_n$  mesuré, et  $m$  tel que  $L_z = R_m/\lambda_F$ . La règle de sélection empirique obtenue s'écrit :

$$n \in \mathbb{N}, \quad m \in [-n, -n + 2, \dots, n]. \quad (6)$$

## 4 Discussion

L'apparition de modes propres pour un marcheur confiné par une force extérieure rappelle le cas d'un électron dans un puits de potentiel en mécanique quantique. Bien que l'énergie et la longueur d'onde soit fixées dans ce système, l'ensemble des trajectoires peut être rationalisé en considérant ce couple d'entiers  $(n, m)$ , qui définit l'extension spatiale et le moment angulaire. Ce couple  $(n, m)$  est analogue au niveau d'énergie et au moment angulaire dans le cas quantique, et suit la même règle de sélection avec  $n$  entier et  $m \in [-n, -n + 2, \dots, n]$ .

Dans le cas d'un marcheur, système purement classique, ce comportement provient de la mémoire de chemin. Le champ d'onde associé à la goutte peut être exprimé comme une superposition d'ondes circulaires stationnaires, centrées aux précédents points d'impact. On en déduit la hauteur  $h$  de la surface au moment de l'impact, qui s'écrit sous la forme :

$$h(\mathbf{r}, t_p) = A_0 \sum_{k=-\text{inf}}^p J_0(2\pi k_F \|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_k\|) e^{-\frac{(t-t_k)}{\tau}} \quad (7)$$

où  $J_0$  correspond à la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0, solution de l'équation de Helmholtz pour une source ponctuelle. L'exponentielle correspond à l'amortissement temporel de ces ondes. L'émergence d'une quantification des orbites provient des propriétés d'un tel champ d'onde. Pour un paramètre de mémoire élevé, le marcheur effectue un grand nombre de tours sous l'aimant avant que les ondes s'atténuent. On peut alors considérer que la densité de sources actives laissées par le marcheur est invariante par rotation. Par construction, le champ total résultant est axisymétrique, et s'exprime comme une fonction de Bessel  $J_0$  centrée en 0 (cf. théorème de Graf), seule une faible composante de  $J_1$  tournant avec la goutte assure la propulsion. L'amplitude  $A$  d'une telle onde dépend du chemin  $\{r_k\}$  suivi par le marcheur, soit :

$$h(\mathbf{r}) = A(\{r_k\}) J_0(2\pi k_F r). \quad (8)$$

L'impulsion transmise à l'onde centrée en 0 après chaque impact en  $r_k$  est proportionnelle à l'amplitude  $J_0(2\pi k_F r_k)$  au point d'impact. Et finalement, la hauteur du bain ressentie par le marcheur s'écrit  $h = J_0(2\pi k_F r)^2$ . Ce résultat peut également être dérivé analytiquement à partir de l'équation (7), pour une trajectoire circulaire à une distance  $R = r$  du centre :

$$\frac{\partial h}{\partial r} = -A_0 M J_0(2\pi k_F r) J_1(2\pi k_F r) \quad (9)$$

où  $A_0$  correspond à l'amplitude de l'onde créée pour un impact. On remarque par ailleurs que l'amplitude des ondes, et donc l'amplitude du potentiel créé par la goutte elle-même, est proportionnel au paramètre de mémoire  $M$ . Plus la *mémoire* du système est élevée et plus le marcheur sera confiné au voisinage des zéros de la fonctions de Bessel, correspondant aux  $\{R_n\}$  obtenus expérimentalement.

## 5 Conclusion

L'application d'une force centrale permet ainsi de sonder les états possibles d'un marcheur confiné dans un puits harmonique. Les dernières expériences menées mettent en évidence le couplage fort entre onde et particule dans ce système. En effet, le confinement de la goutte seule finit par engendrer un état lié où les propriétés statistiques de la trajectoire (rayon moyen et moment angulaire) sont quantifiées. En confinant la goutte, les sources du champ d'onde se retrouvent également localisées au voisinage du centre. Par rétroaction, la goutte est alors piégée dans les modes propres de cette onde, qu'elle a elle-même générée.

## Références

1. E. FORT, A. EDDI, J. MOUKHTAR, A. BOUDAOU & Y. COUDER, Path-memory induced quantization of classical orbits, *PNAS*, **107**, 17515 (2010).
2. E. FORT & Y. COUDER, Single-particle diffraction and interference at a macroscopic scale, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 154101 (2006).
3. A. EDDI, E. SULTAN, J. MOUKHTAR, E. FORT, M. ROSSI & Y. COUDER, Information stored in Faraday waves : the origin of a path memory, *J. Fluid Mech.*, **674**, 433 (2011).
4. S. PERRARD, M. LABOUSSE, E. FORT & Y. COUDER, Observable macroscopic eigenstates, *soumis à PNAS*.



# Des vagues en forme d'étoile

Alphonse Leroux<sup>1</sup>, Didier Clamond<sup>2</sup> & Jean Rajchenbach<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique de la Matière Condensée (CNRS-UMR 7336)

<sup>2</sup> Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné (CNRS-UMR MR 7351)

Université de Nice – Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2

email: Jean.Rajchenbach@unice.fr

**Résumé.** Grâce à l'excitation paramétrique d'ondes de surface, nous avons mis en évidence l'existence d'une vague ayant alternativement la forme d'une étoile et d'un polygone. La symétrie de l'étoile (c'est à dire le nombre de ses branches) est indépendante de la forme du récipient, et varie avec les paramètres de vibration imposés. Nous montrons qu'un couplage résonant à trois vagues est à l'origine de la formation de telles vagues, quoique la pertinence d'un tel mécanisme ait été jusqu'à présent contestée pour des vagues purement gravitaires.

**Abstract.** We report a new type of standing gravity waves of large amplitude, having alternatively the shape of a star and of a polygon. This wave is observed by means of a laboratory experiment by vibrating vertically a tank. The symmetry of the star (i.e. the number of branches) is independent of the container form and size, and can be changed according to the amplitude and frequency of the vibration. We show that a mechanism involving a nonlinear resonant couplings between three waves can explain this geometry, although this possibility was previously denied in the case of pure gravity waves.

## 1 Introduction

Les équations qui gouvernent la dynamique des vagues sont intrinsèquement non-linéaires. Ces non-linéarités proviennent d'une part du terme advectif de l'accélération eulérienne, et d'autre part de la condition aux limites cinématique à la surface libre. La conjonction des effets non-linéaires et des effets dispersifs est à l'origine de la formation des ondes solitaires et des vagues scélérates [1, 2]. Une autre conséquence remarquable de ces non-linéarités est qu'elles peuvent engendrer des brisures spontanées de symétrie [3]. Par exemple, il a été montré que les vagues en forme de « fer à cheval » résultent de l'interaction non-linéaire entre cinq vagues [4, 5]. Quoiqu'en conséquence de ces non-linéarité, on se serait attendu à l'existence d'un très grand nombre de variétés de vagues à la surface de l'eau, la mise en évidence de vagues d'un type nouveau reste un événement rare. Ici nous décrivons une vague qui présente alternativement l'aspect d'une étoile ou d'un polygone. Ce type de vague apparaît, sous certaines conditions, à la surface d'un liquide lorsque celui-ci est soumis à des vibrations verticales.

## 2 Description du montage et observations.

Le système que nous étudions est constitué par une couche de fluide d'environ 1 cm d'épaisseur, contenue dans des récipients de dimension et de forme (rectangulaire, circulaire...) variables. Le fluide est newtonien ; il s'agit d'une huile de silicone de viscosité  $10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s et de tension superficielle 0.02 N/m. Le récipient est soumis à des vibrations sinusoidales et verticales dans la gamme de fréquences  $\Omega/2\pi$  comprise entre 7 et 20 Hz. L'amplitude des vibrations peut atteindre plusieurs millimètres, et les déformations de la surface libre sont enregistrées à l'aide d'une caméra rapide (250 im/s).

Nous décrivons dans un premier temps les résultats obtenus lorsque le liquide est contenu dans un récipient de géométrie cylindrique (9 cm de diamètre, niveau de remplissage égal à 7 mm). La fréquence de vibration est ici de 8 Hz. Pour de très petites amplitudes de vibration, on observe des 'ondes de ménisque', qui se propagent depuis la ligne de contact vers le centre de la cellule. Ces ondes de ménisque oscillent à

la même fréquence que celle utilisée pour le forçage. Lorsqu'on augmente l'amplitude de vibration jusqu'à 1.55 mm, il apparaît alors deux ondes axisymétriques contrapropagatives, qui oscillent avec une fréquence moitié de celle du forçage, comme on s'y attend dans le cas d'ondes paramétriquement forcées [7,8] (voir Fig. 1, et film1 sur le site [6]). Lorsque l'onde centripète se focalise au centre de la cuve, elle donne naissance à un jet vertical. On remarque aussi que lorsque les deux ondes centripète et centrifuge se croisent, elles ne se superposent pas simplement : elles subissent un déphasage. Plus précisément, les crêtes restent en coincidence durant un temps de 0.05 s pour les paramètres expérimentaux indiqués ci-dessus. Ce phénomène de déphasage avait déjà été reconnu lors du croisement de deux ondes solitaires planes, et témoigne d'un fort couplage non-linéaire entre les deux ondes [9]. Si on augmente encore l'amplitude de vibration du récipient jusqu'à 1.85 mm, on remarque alors la formation de cinq « coins » dans la ligne de crête des deux ondes centripètes et centrifuges lorsqu'elles se croisent (voir Fig. 2 et film2 dans [6]). Ces « coins » sont la signature de la brisure de la symétrie rotationnelle. Enfin, pour une amplitude de vibration de 1.95 mm, on observe un changement total dans la géométrie des vagues de surface. Les déformations de la surface libre présentent alternativement un aspect d'étoile à cinq branches et de pentagone, séparé par un intervalle de temps égale à la période de l'excitation (cf. Figs. 3.a, 3.b et film4 [6]).

symétrie circulaire) Un fait remarquable est que ces motifs en étoile et en pentagone sont indépendants



Fig.1



Fig.2

**Figure 1.** vagues de symétrie circulaire observées dans un récipient cylindrique (diamètre 9 cm, hauteur de fluide 7 mm). Ces vagues sont créées par des oscillations sinusoidales et verticales du récipient. (amplitude de vibration = 1,70 mm) et oscillent à la fréquence moitié de celle du forçage (ici  $\Omega/2\pi = 8$  Hz). Les crêtes des ondes centripète et centrifuge subissent un déphasage lorsqu'elles se croisent (cf. film 1 [6]).

**Figure 2.** Après avoir augmenté l'amplitude du forçage jusqu'à 1.85 mm, on observe une déformation des crêtes (initialement de symétrie circulaire) avec l'apparition de 5 coins. Ceci est la marque d'une brisure de symétrie (hauteur de remplissage 7 mm,  $\Omega/2\pi = 8$  Hz). (voir film 2 [6]).

de la forme ou de la taille du récipient. On observe des vagues de géométrie identique dans des cuves cylindriques de rayon plus grand, ou dans des récipients rectangulaires (Figs. 4.a et 4.b). Il faut aussi noter qu'on observe des étoiles et des polygones présentant des symétries d'ordre différent (3, 4 et 6), en faisant varier les paramètres expérimentaux. Enfin, il nous faut préciser que ce système présente une très forte hystérésis, c'est à dire que des motifs différents peuvent être observés avec le même jeu de paramètres expérimentaux, pourvu que l'historique du forçage ait été différent. Par conséquent, il est impossible d'établir un diagramme de phase qui présenterait l'ordre de la symétrie observée en fonction des paramètres de vibration imposés.

A ce niveau, il faut souligner que ces vagues sont extrêmes : (i) l'amplitude de la vague peut être du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la nappe liquide ; (ii) dans les creux de la vague, l'épaisseur de la nappe peut être inférieure à 1 mm. Il s'agit donc de vagues très non-linéaires en eau peu profonde :

en effet, la rapport longueur d'onde/profondeur est de l'ordre de 5 ou 7. On peut aussi dire qu'il s'agit de vagues cnoïdales de très grandes amplitudes.

### 3 Interprétation.

L'interprétation que nous proposons ici est inspirée par celle que Mermin et Troian [10] et Pomeau et Newell [11] ont élaborée pour expliquer la formation des quasi-cristaux, ainsi que celle que Edwards et Fauve [12] ont utilisée pour expliquer la genèse de motifs quasi-cristallins dans les ondes capillaires. A ce point, il peut être utile de rappeler que dans nos expériences le nombre d'onde  $|\mathbf{k}|$  est très petit devant  $1/\ell_c$  ( $\ell_c$  étant la *longueur capillaire*). Il en résulte que les effets liés à la tension de surface sont négligeables par rapport aux effets liés à la gravité. Par conséquent, les vagues que nous observons ici sont de *pures* ondes de gravité. Notre explication repose sur le fait qu'une interaction résonante non-linéaire entre trois vagues est à l'origine de la brisure de symétrie. Les conditions de résonance à trois vagues s'écrivent  $\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 = 0$  et  $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_3 = \mathbf{0}$  ( $\omega_i$  et  $\mathbf{k}_i$  sont respectivement les pulsations et les vecteurs d'ondes) [13, 14]. Ces conditions de résonance à trois vagues peuvent être remplies par des vagues gravito-capillaires [15–18], mais jusqu'à présent il existait un consensus énonçant qu'une telle interaction résonante ne pouvait exister dans le cas de vagues purement gravitaires [13]. La raison avancée est que, pour de telles vagues, la relation de dispersion, s'écrit  $\omega \propto |\mathbf{k}|^\alpha$  avec  $\alpha \leq 1$  ( $\alpha = 1/2$  en eau profonde, et  $\alpha = 1$  en eau peu profonde). Il résulte de la concavité de la relation de dispersion que les deux conditions de résonance explicitées ci-dessus ne peuvent être satisfaites simultanément. En fait, nous allons montrer ci-dessous que cet argument n'est pas valable, et que ces conditions peuvent être satisfaites si l'on veut bien prendre en compte dans l'écriture de la relation de dispersion les modifications apportées par le forçage et la dissipation. Nous allons brièvement esquisser ci-dessous comment la relation de dispersion modifiée peut autoriser un processus de résonance à trois vagues, et comment celui-ci peut sélectionner une symétrie d'ordre  $m$ . On sait [7, 8, 19–21] que l'amplitude  $\zeta(\mathbf{k}, t)$  d'une onde de surface

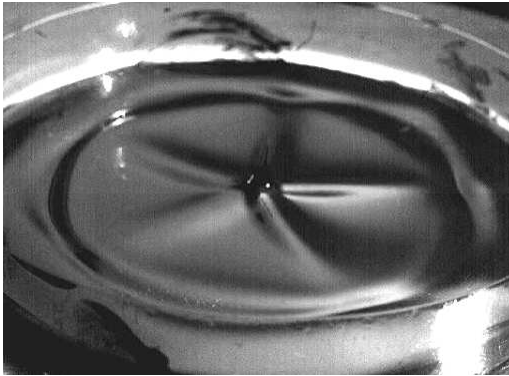


Fig.3.a

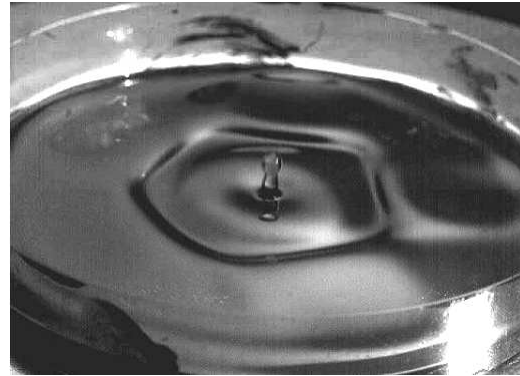


Fig.3.b

**Figure 3.** Pour une amplitude de 1.95 mm (hauteur de liquide 7 mm,  $\Omega/2\pi = 8$  Hz), apparaît une onde stationnaire d'un type nouveau, qui présente alternativement, l'aspect d'une étoile à 5 branches et d'un pentagone. L'intervalle de temps qui sépare ces deux formes est égal à la période du forçage (voir film3 [6])

paramétriquement forcée (ou *vague de Faraday* [22]) obéit en profondeur finie à une équation de Mathieu amortie de la forme :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + 2\sigma \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \omega_0^2 (1 - F \cos \Omega t) \zeta = 0, \quad (1)$$

dans laquelle on reconnaît le terme d'amortissement visqueux  $\sigma$ , la fréquence du forçage  $\Omega/2\pi$ , et où  $F$  correspond à l'amplitude de l'accélération imposée à la cellule divisée par la constante de gravité  $g$ , et où  $\omega_0 = \omega_0(|\mathbf{k}|)$  est la pulsation du mode linéaire de nombre d'onde  $|\mathbf{k}|$  en l'absence de forçage et de dissipation (rappelons que pour des ondes linéaires en profondeur finie  $h$  on a la relation de dispersion  $\omega_0^2 = gk \tanh(kh)$  avec  $k = |\mathbf{k}|$  [14]). Le terme d'atténuation visqueuse  $\sigma$  de l'équation (1) trouve ses origines à la fois dans la dissipation au coeur du fluide (proportionnelle à  $\nu k^2$  [23]) ainsi que dans le frottement avec le fond (proportionnel à  $(\nu k^2)^{\frac{1}{2}}$  [24]). Il faut ici noter que l'équation (1) est linéaire, et n'est valide que dans la limite de vagues d'amplitude infinitésimale en profondeur finie (mais *pas* dans la limite d'une eau très peu profonde). À dire vrai, dans le cas présent de vagues cnoïdales de grandes amplitudes, la validité de l'équation (1) est limitée. Cependant, même avec ses limitations, cette dernière équation a néanmoins l'avantage de permettre de préciser le mécanisme qui initie la formation de ces vagues douées d'une symétrie d'ordre  $m$ .

On sait que les systèmes obéissant à une équation de Mathieu amortie comme l'équation (1) présente une série de langues de résonance autour des fréquences  $n\Omega/4\pi$  (l'entier  $n$  est l'*ordre* de la résonance) [25, 26]. En utilisant le théorème de Floquet, on peut écrire les conditions pour lesquelles l'équation (1) admet des solutions périodiques et bornées [27]. Ces conditions définissent des relations de dispersion qui, dans le cas général, ne peuvent pas s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires. Au moyen d'études numériques, nous avons montré qu'il existe en général deux nombres d'onde correspondant à chacun des ordres de résonance  $n$ . Dans le cas limite des faibles forçage et dissipation, on peut dériver analytiquement les relations de dispersion suivantes :

$$\omega_0 \approx \frac{\Omega}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{F^2}{16} - \frac{4\sigma^2}{\Omega^2}} \right], \quad (2)$$

pour le mode subharmonique, et

$$\omega_0 \approx \Omega \left[ 1 + \frac{F^2}{12} \pm \sqrt{\frac{F^4}{64} - \frac{\sigma^2}{\Omega^2}} \right] \quad (3)$$

pour le mode fondamental. Comme il a été établi auparavant par d'autres méthodes [26], on retrouve à partir des équations (2) et (3) que l'amortissement introduit un seuil pour l'apparition de l'instabilité de Faraday. Dans la limite des faibles  $F$  et  $\sigma$ , le seuil pour la formation du mode subharmonique est donné par  $F_1 \approx 8\sigma/\Omega$ , et par  $F_2 \approx \sqrt{8\sigma/\Omega}$  pour le mode fondamental.

Comme le montrent les équations (2) et (3), on remarque qu'il existe *deux modes* de nombres d'onde *différents* qui oscillent à la *même* fréquence, ceci contrairement au cas des vagues gravitaires non-forcées et non-dissipatives. Suivant l'amplitude du forçage, on doit distinguer plusieurs cas.

(i) Lorsque  $F < F_1$ , l'équation de dispersion (2) n'admet pas de solution. Cela signifie que l'énergie injectée par le forçage est alors trop faible pour compenser la dissipation visqueuse qui serait induite par les mouvements d'une vague.

(ii) Lorsque  $F_1 < F < F_2$ , on observe uniquement des vagues subharmoniques (de pulsation  $\Omega/2$ ). Si un nombre infini de vagues subharmoniques de même nombre d'onde (disons  $k_1^-$ ) sont présentes, on observe alors une vague axisymétrique, parce que les conditions aux limites imposées par la cuve cylindrique ne privilégie aucune direction particulière.

(iii) Lorsque  $F_2 < F < F_3$  (où  $F_3$  correspond au seuil de la troisième langue de Mathieu), il se forme à la fois des vagues subharmoniques, et des vagues oscillant à la fréquence du forçage. Il y a alors deux nombres d'onde  $k_1^-$  et  $k_1^+$  ( $k_1^- \leq k_1^+$ ) correspondant à la fréquence subharmonique, et deux nombres d'onde  $k_2^-$  et  $k_2^+$  ( $k_2^- \leq k_2^+$ ) correspondant à la fréquence fondamentale. Toutes ces vagues interagissent non-linéairement. Pour expliquer la formation d'une déformation de la surface libre possédant une symétrie rotationnelle d'ordre  $m$ , le mécanisme le plus simple à envisager est un couplage résonant à trois ondes. Deux vagues subharmoniques de nombre d'onde différent  $\mathbf{k}_1^-$  et  $\mathbf{k}_1^+$  interagissent entre elles, et interagissent avec une vague  $\mathbf{k}_2^-$  qui oscille à la fréquence fondamentale ( $\omega_2 = \Omega$ ). La condition sur les pulsations  $\omega_1(\mathbf{k}_1^-) + \omega_1(\mathbf{k}_1^+) = \omega_2(\mathbf{k}_2^-)$  est alors automatiquement satisfaite. L'autre condition, qui porte sur les nombres

d'onde ( $\mathbf{k}_1^- + \mathbf{k}_1^+ = \mathbf{k}_2^-$ ), donne naturellement lieu à la sélection de l'angle ( $\mathbf{k}_1^-, \mathbf{k}_1^+$ ), et brise par conséquent l'invariance par rotation. Physiquement, la sélection de cet angle permet un échange continu d'énergie entre les trois modes.

Nous avons décrit ci-dessus le mécanisme résonant entre les trois ondes de nombre d'onde  $\mathbf{k}_1^-, \mathbf{k}_1^+$  et  $\mathbf{k}_2^-$ , mais bien entendu, nous aurions aussi pu considérer une résonance entre les vagues de nombre d'onde  $\mathbf{k}_1^-, \mathbf{k}_1^+$  et  $\mathbf{k}_2^+$ . Cette multiplicité de modes résonants possibles est sans doute une des causes de l'hystérésis observée. Une autre cause peut être le caractère sous-critique de l'instabilité de Faraday pour les fluides visqueux [28], ce qui introduit des effets de mémoire.

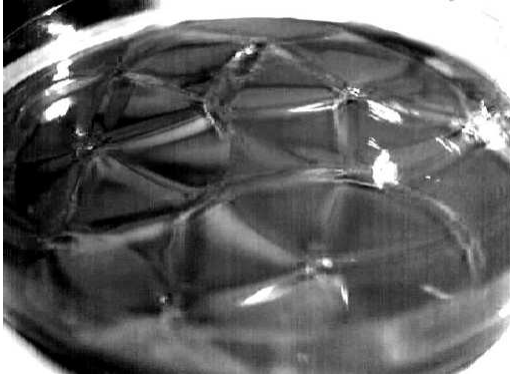


Fig.4.a



Fig.4.b

**Figure 4.** On observe des étoiles et des pentagones de même taille et symétrie dans des récipients de forme ou de taille différentes, à condition d'avoir un niveau de remplissage, des paramètres de vibration et un historique de forçage identiques.

Fig. 4.a. Pavage de vagues en forme d'étoiles à 5 branches observé dans un récipient cylindrique (diamètre = 17 cm).

Fig.4.b. Pavage d'étoiles et de pentagones observé dans un récipient carré (17 cm x 17 cm). On remarque ici des pentagones et des étoiles qui sont adjacents, et qui oscillent en opposition de phase. C'est un exemple des solutions possibles lors d'une instabilité subharmonique.

Les étoiles à  $m$  branches et les polygones à  $m$  côtés correspondent à la sélection d'un angle  $\theta = 2\pi/m$ , avec  $m$  entier. Clairement, les critères de résonance exprimés ci-dessus ne conduisent pas en général à la sélection d'un nombre  $m$  entier. Quand  $m$  n'est pas entier, le motif de surface reste instationnaire, jusqu'à ce qu'un mode de surface, non parfaitement résonant mais correspondant à  $m$  entier, soit accroché. Une fois que ce mode ( $m$  entier) est accroché, on le voit survivre lors d'une variation modérée des paramètres du forçage. Cela peut être une troisième cause à l'hystérésis observée.

Si le modèle esquissé ci-dessus a l'intérêt de montrer qu'un mécanisme de résonance à trois vagues peut être à l'origine de la formation d'une vague gravitaire présentant une symétrie d'ordre  $m$ , il s'avère néanmoins insuffisant pour prédire l'ordre de la symétrie observée en fonction des paramètres de contrôle. La raison est que les éqs. (2) et (3) ont été dérivées dans le cadre d'une approximation d'amplitude infinitésimale, alors qu'il s'agit de vagues cnoïdales de grandes amplitudes. Pour de telles vagues, l'amplitude intervient dans la relation de dispersion. De plus, considérer des vagues parfaitement sinusoïdales comme des modes propres reste vraiment une approximation très imparfaite. Mais il n'existe pas à ce jour de méthodes mathématiques permettant de décrire les propriétés des vagues de très grandes amplitudes en eau peu profonde.

**Remerciements.** Nous remercions A. Mangin (Société ACRI, Sophia-Antipolis, France) pour de chaleureuses discussions. Cette recherche a été partiellement financée par le CNRS et la région PACA.

## Références

1. D. J. KORTEWEG & G. DE VRIES *Philosophical Magazine*, **39**, 422 (1895).
2. A. CHABCHOUB, A.P. HOFFMANN, & H. AKHMEDIEV, *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 204502 (2011).
3. M. C. CROSS & P. C. HOHENBERG, *Rev. Mod. Phys.*, **65**, 851 (1993).
4. M. Y. SU, *J. Fluid Mech.*, **124**, 73 (1982).
5. D. FRUCTUS, C. KHARIF, M. FRANCIUS, Ø. KRISTIANSEN, D. CLAMOND & J. GRUE, *J. Fluid Mech.*, **537**, 155 (2005).
6. Films visibles sur [http://www.unice.fr/rajchenbach/star-shaped\\_waves.htm](http://www.unice.fr/rajchenbach/star-shaped_waves.htm)
7. T. B. BENJAMIN & F. URSELL, *Proc. R. Soc. London A*, **225**, 505 (1954).
8. J. MILES & D. HENDERSON, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **22**, 143 (1990).
9. M. ABLOWITZ & H. SEGUR, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM Publications, Philadelphia (1981) et M. ABLOWITZ & D. BALDWIN, *Phys. Rev. E*, **86**, 036305 (2012).
10. N. D. MERMIN & S. M. TROIAN, *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 1524 (1985).
11. Y. POMEAU & A. C. NEWELL, *J. Phys. A*, **26**, L429 (1993).
12. W. S. EDWARDS & S. FAUVE, *J. Fluid Mech.*, **278**, 123 (1994).
13. O. M. PHILLIPS, *J. Fluid Mech.*, **9**, 193 (1960).
14. J. Lighthill, *Waves in Fluids*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1978).
15. S. FAUVE, in *Dynamics of Nonlinear and Disordered Systems*, G. Martinez-Meckler and T. H. Seligman, Eds., World Scientific, Singapore (1995).
16. H. W. MÜLLER, *Phys. Rev. E*, **49**, 1273 (1994).
17. S. T. MILNER, *J. Fluid Mech.*, **225**, 81 (1991).
18. W. ZHANG & J. VIÑALS, *J. Fluid Mech.*, **336**, 301 (1997).
19. S. CILIBERTO & J. P. GOLLUB, *J. Fluid Mech.*, **158**, 381 (1985).
20. F. SIMONELLI & J. P. GOLLUB, *J. Fluid Mech.*, **199**, 4714 (1989).
21. A. KUDROLI & J. P. GOLLUB, *Physica D*, **97**, 133 (1996).
22. M. FARADAY, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **52**, 319 (1831).
23. L. D. LANDAU & E. M. LIFSCHITZ, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, U.K. (1959).
24. U. NAM HONG, *Bull. Russian Acad. Sci., Physics/Supplement, Physics of Vibration*, **57**, 131 (1993).
25. M. ABRAMOWITZ & I. A. SEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover (1970).
26. L. D. LANDAU & E. M. LIFSCHITZ, *Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, U.K. (1960).
27. K. KUMAR & L. TUCKERMAN, *J. Fluid Mech.*, **279**, 49 (1994).
28. J. RAJCHENBACH, A. LEROUX & D. CLAMOND, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 024502 (2011).

# Gabarit d'un attracteur borné par une frontière toroïdale de genre 5

Martin Rosalie & Christophe Letellier

CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, Av de l'Université, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray  
Cedex, France  
martin.rosalie@coria.fr

**Résumé.** La topologie des attracteurs chaotiques produits par des systèmes tridimensionnels peut être synthétisée à l'aide de gabarits. Si l'obtention de ceux-ci est courante pour des attracteurs bornés par des frontières toroïdales de genre 1, elle est déjà nettement plus délicate pour des attracteurs bornés par des frontières toroïdales de genre 3 comme l'attracteur de Lorenz. Nous proposons ici une brève présentation des développements d'une théorie des gabarits conduisant à une généralisation de la construction des gabarits d'attracteurs bornés par des frontières toroïdales de genre  $g > 2$ . Le cas explicite d'un attracteur « multispirale » borné par une frontière toroïdale de genre 5 est traité pour en illustrer le principe.

**Abstract.** The topology of chaotic attractors produced by tridimensional systems can be synthesized by a template, also named a branched manifold. If getting such a template is quite common for attractors bounded by genus-1 tori, it is far more difficult to extract a template for attractors bounded by a genus-3 bounding torus as exemplified by the Lorenz system. We here propose a brief presentation of some developments of a “template theory” leading to generalize the construction of template for attractors bounded by genus- $g$  bounding tori. The explicit case of a multispiral attractor bounded by a genus-5 torus is treated to evidence its principle.

## 1 Introduction

La caractérisation topologique des attracteurs chaotiques solutions de systèmes non linéaires déterministes est une technique puissante pour en comprendre l'architecture et les mécanismes dynamiques sous-jacents [1]. Les mécanismes de base ont déjà été identifiés et la topologie de nombreux attracteurs a déjà été caractérisée [1–3]. Les attracteurs chaotiques se classent selon le genre des frontières toroïdales qui les bornent [4]; les plus simples étant bornés par un tore de genre 1 comme le système de Rössler [5]. Le système de Lorenz présente déjà quelques difficultés puisque borné par un tore de genre 3 [6]. La caractérisation des attracteurs bornés par un tore de genre supérieur à 3 requiert l'introduction de nouveaux concepts que nous décrirons brièvement en traitant un attracteur multispirale borné par une frontière toroïdale de genre 5.

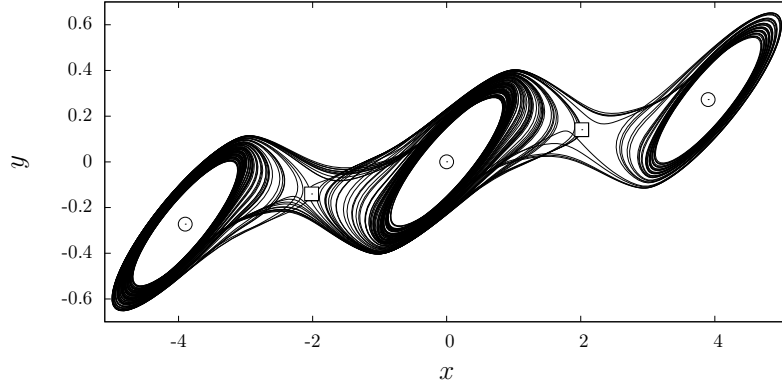
## 2 Attracteur multispirale

Les attracteurs multispiraux ont été introduits par Aziz-Alaoui [7]. Ce sont des attracteurs bornés par des frontières toroïdales de genre élevé ( $g \geq 3$ ). Parmi eux, nous avons choisi un attracteur borné par une frontière toroïdale de genre 5 et solution du système

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha [y - x - f_3(x)] \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta x - \gamma y \end{cases} \quad (1)$$

où

$$f_3(x) = \begin{cases} m_0 x + \operatorname{sgn}(x) \xi_0 & \text{si } |x| \leq s_0 \\ m_1 x + \operatorname{sgn}(x) (m_0 - m_1) s_0 & \text{si } s_0 \leq |x| \leq s_1 \\ m_2 x + \operatorname{sgn}(x) [(m_1 - m_2) s_1 + (m_0 - m_1) s_0] & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2)$$



**Figure 1.** Attracteur multispirale solution du système (1) dans le plan  $x$ - $y$ . Le flot circule selon le sens horaire dans chacune des trois spirales. Les points singuliers sont également représentés par des  $\odot$  pour les foyers et par des  $\square$  pour les cols. Valeurs des paramètres  $\alpha = 14,6$ ,  $\beta = 12$ ,  $\gamma = 0,9$ ,  $\xi_0 = 0$ ,  $s_0 = 1$ ,  $s_1 = 3$ ,  $m_0 = -5/7$ ,  $m_1 = -8/7$  et  $m_2 = -0,7$ .

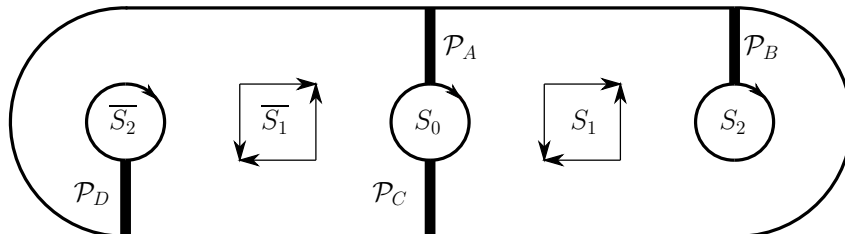
Ces équations différentielles sont du type de celles décrivant le circuit de Chua [8] dont la fonction linéaire par morceaux est modifiée de manière à engendrer de multiples spirales sur l'attracteur (Fig. 1).

Les équations du système (1) sont invariantes sous une symétrie centrale, c'est-à-dire que le système vérifie la relation  $\Gamma \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\Gamma \cdot \mathbf{x})$  où

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

La symétrie centrale est d'ordre 2 puisque  $\Gamma^2 = \mathbb{I}$  où  $\mathbb{I}$  désigne l'identité. Nous désignerons par  $\bar{\zeta}$  une solution symétrique d'une solution  $\zeta$  par la symétrie  $\Gamma$ . De ce fait, il existe deux types de solutions : des solutions symétriques (ou invariantes) telles que  $\bar{\zeta}_s = \Gamma(\zeta_s) = \zeta_s$  et des solutions asymétriques telles que  $\bar{\zeta}_a = \Gamma(\zeta_a) \neq \zeta_a$ . Par exemple, le point singulier de type col-foyer  $S_0$  à l'origine de l'espace des phases  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$  est invariant puisque  $\Gamma(S_0) = S_0$ . Les deux col-foyers  $S_2$  et  $\bar{S}_2$  autour desquels se développent les spirales respectivement de droite et de gauche sont tels que  $\bar{S}_2 = \Gamma(S_2)$ . Il en est de même pour les deux cols  $S_1$  et  $\bar{S}_1$ , respectivement entre  $S_0$  et  $S_2$ , et entre  $S_0$  et  $\bar{S}_2$ .

L'attracteur multispirale représenté Fig. 1 est borné par une frontière toroïdale de genre 5 structurée autour des cinq points singuliers  $S_i$ , chaque point singulier étant au centre de l'un des cinq « trous » de la frontière toroïdale (Fig. 2). Les cinq points singuliers étant alignés, la configuration est dite  $A_3$ ,  $A$  pour alignés et 3 pour le nombre de points singuliers de types « foyer ». L'orientation du flot selon la forme canonique représentée Fig. 2 est en accord avec celle de la représentation choisie Fig. 1 pour l'attracteur multispirale.



**Figure 2.** Forme canonique  $A_3$  avec la représentation des quatre composantes  $\mathcal{P}_A$ ,  $\mathcal{P}_B$ ,  $\mathcal{P}_C$  et  $\mathcal{P}_D$  de la section de Poincaré.



### 3 Section de Poincaré et application de premier retour

Conformément à la théorie des frontières toroïdales, toute frontière toroïdale de genre  $g$  ( $g > 2$ ) conduit à une section de Poincaré à  $(g - 1)$  composantes, soit dans le cas de la forme canonique  $A_3$ , une section de Poincaré telle que

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B \cup \mathcal{P}_C \cup \mathcal{P}_D. \tag{4}$$

Le flot visite les composantes selon la matrice de transition

$$T_{\mathcal{P}} = \begin{matrix} \mathcal{P}_A \\ \mathcal{P}_B \\ \mathcal{P}_C \\ \mathcal{P}_D \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

où un élément  $T_{\mathcal{P},ij} = 1$  signifie que le flot effectue une connection entre la composante  $\mathcal{P}_i$  et la composante  $\mathcal{P}_j$  sans passer par la section de Poincaré [4]. De ce fait, il peut être utile de distinguer les domaines  $\mathcal{G}_{|i}$  correspondant à ce qui émerge de la composante  $\mathcal{P}_i$ , des domaines  $\mathcal{G}_{|i}$  constitués de ce qui converge vers la composante  $\mathcal{P}_i$ .

À partir de la section de Poincaré, une application de premier retour présente le grand avantage de fournir une partition génératrice de l'attracteur, c'est-à-dire de décomposer l'attracteur en des domaines topologiquement inéquivalents; il s'agit d'une collection de branches. À chacune de ces branches est associée un symbole : un entier. L'ensemble de ces symboles est ensuite utilisé pour coder la trajectoire se développant sur un attracteur, un symbole étant attribué à chaque intersection avec la section de Poincaré en fonction de la branche visitée. Afin de bien distinguer les contributions de chaque composante  $\mathcal{P}_i$  de la section de Poincaré à l'application de premier retour, une variable  $\rho_n$  est construite comme suit :

1. l'intervalle visité de chaque composante  $\mathcal{P}_i$  est normalisé sur l'intervalle unité, 0 correspond alors à la plus petite distance au point singulier foyer servant de référence à la composante; l'ensemble des intersections est tel que  $\tilde{\rho}_n \in [0; 1]$ .
2. chaque intervalle est ensuite translaté selon la relation

$$\rho_n = \begin{cases} \tilde{\rho}_n + 0 & \text{si } \phi_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{P}_A \\ \tilde{\rho}_n + 1 & \text{si } \phi_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{P}_B \\ \tilde{\rho}_n + 2 & \text{si } \phi_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{P}_C \\ \tilde{\rho}_n + 3 & \text{si } \phi_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{P}_D \end{cases} \tag{6}$$

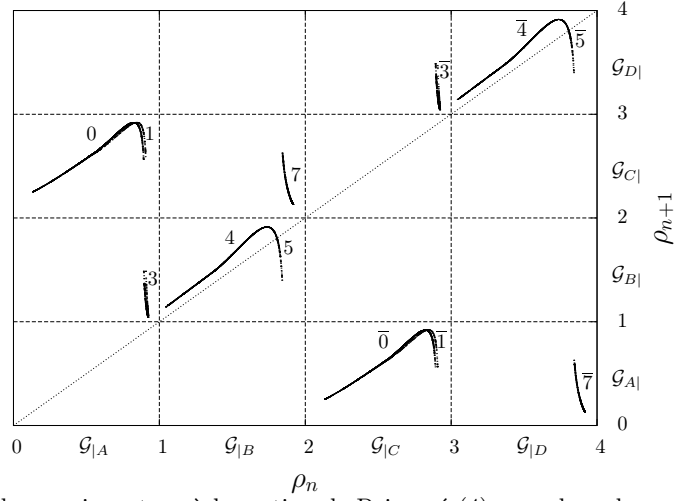
où  $\mathbf{x}_n = \phi_t(\mathbf{x}_0)$  désigne la  $n^{\text{e}}$  intersection de la trajectoire avec la section de Poincaré survenant au temps  $t$  à partir d'un jeu de conditions initiales  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3(x, y, z)$ .

Une telle construction a été implicitement utilisée par Gilmore et Letellier [2]. L'application de premier retour à la section de Poincaré construite sur  $\rho_n$  (Fig. 3) permet alors d'attribuer un entier à chaque branche, en numérotant de la gauche vers la droite, en associant un entier pair (impair) à chaque branche croissante (décroissante). Puisque nous avons  $\mathcal{P}_C = \Gamma(\mathcal{P}_A)$  et  $\mathcal{P}_D = \Gamma(\mathcal{P}_B)$ , nous numérotons les branches correspondant à ces composantes par des entiers « symétriques », c'est-à-dire que, par exemple, les trois symboles  $\{0, 1, 3\}$  de la composante  $\mathcal{P}_A$  deviennent  $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}\}$  dans la composante  $\mathcal{P}_C = \Gamma(\mathcal{P}_A)$ .

Dans le cas de l'attracteur multispirale, nous avons un total de douze branches monotones sur l'application de premier retour (Fig. 3); le gabarit est donc constitué de douze branches interconnectant les quatre composantes de la section de Poincaré. Si nous considérons les domaines  $\mathcal{G}_{|i}$ , les branches se répartissent comme

- $\mathcal{G}_{|A}$  : 0, 1 et 3;
- $\mathcal{G}_{|B}$  : 4, 5 et 7;
- $\mathcal{G}_{|C}$  :  $\bar{0}$ ,  $\bar{1}$  et  $\bar{3}$ ;
- $\mathcal{G}_{|D}$  :  $\bar{4}$ ,  $\bar{5}$  et  $\bar{7}$ ,

ce qui s'obtient à partir d'une lecture « verticale » de l'application de premier retour. Si nous considérons les domaines  $\mathcal{G}_{|i}$ , nous avons



**Figure 3.** Application de premier retour à la section de Poincaré (4), avec le codage symbolique des différentes branches.

- $\mathcal{G}_A$  :  $\bar{0}$ ,  $\bar{1}$  et  $\bar{7}$  ;
- $\mathcal{G}_B$  : 4, 5 et 3 ;
- $\mathcal{G}_C$  : 0, 1 et 7 ;
- $\mathcal{G}_D$  :  $\bar{4}$ ,  $\bar{5}$  et  $\bar{3}$ ,

ce qui s’obtient à l’aide d’une lecture « horizontale » de l’application de premier retour. Par la suite nous nous focaliserons sur les domaines  $\mathcal{G}_i$  dont les mixeurs  $\mathcal{M}_i$  donneront l’organisation relative.

### 4 Gabarit et matrice d’enlacement

Un gabarit est une surface branchée permettant de reproduire l’organisation relative des orbites périodiques instables autour desquelles se structurent les trajectoires chaotiques. De ce point de vue, les orbites périodiques sont vues comme constituant le « squelette » des attracteurs. Lorsqu’un attracteur du type de Rössler [5] est borné par une frontière toroïdale de genre 1, la section de Poincaré possède une unique composante et il n’est pas nécessaire de distinguer différents mixeurs. De ce fait, le gabarit se décrit par une unique matrice d’enlacement  $M$  où les  $M_{ii}$  correspondent au nombre de demi-tours que présentent la  $i^e$  branche et les  $M_{ij}$  correspondent aux permutations entre la  $i^e$  branche et la  $j^e$  branche [9]. Nous adoptons pour construire cette matrice, la convention standard d’insertion [10].

Lorsque la frontière toroïdale de l’attracteur est de genre  $g > 2$ , la section de Poincaré présente  $(g - 1)$  composantes et les domaines  $\mathcal{G}_i$  indique les branches arrivant en ces composantes. Le gabarit est décomposé en autant de mixeurs  $\mathcal{M}_i$  que de composantes : chacun est alors décrit par une matrice d’enlacement des branches du domaine associé. Dans le cas de l’attracteur multispirale, chaque mixeur  $\mathcal{M}_i$  est constitué de trois branches : les matrices d’enlacement seront donc de dimension  $3 \times 3$ . Puisque le système (1) est pourvu d’une symétrie centrale, il suffit de déterminer deux des matrices,  $M_A$  et  $M_B$  par exemple, les deux autres sont alors obtenues en calculant le symétrique de ces matrices, puisque  $\mathcal{M}_C = \Gamma(\mathcal{M}_A) = \bar{\mathcal{M}}_A$  et  $\mathcal{M}_D = \Gamma(\mathcal{M}_B) = \bar{\mathcal{M}}_B$ . La matrice d’enlacement symétrique  $\bar{M}$  d’une matrice d’enlacement  $M$  est donnée par

$$\bar{M} = -M - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Chacun des éléments  $M_{ij}$  est déterminé comme suit. Les éléments  $M_{ii}$  sont calculés en utilisant deux segments différents de trajectoire visitant la  $i^e$  branche : le nombre de croisements orientés est alors égal à l'élément  $M_{ii}$ . Les éléments  $M_{ij}$  sont calculés de manière similaire en utilisant deux segments de trajectoires, l'un visitant la  $i^e$  branche et l'autre la  $j^e$  branche. Les quatre matrices d'enlacement sont alors

$$\begin{aligned}
 M_A &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{7} \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, & M_B &= \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \\
 M_C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{et } M_D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Le gabarit correspondant à ces quatre matrices est représenté Fig. 4.

## 5 Orbites périodiques et nombre d'enlacement

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'attracteur se structure autour d'un squelette d'orbites périodiques qui peuvent être utilisées pour calculer des invariants topologiques tels que les nombres d'enlacement. Cet invariant s'obtient à partir de la projection régulière (pas plus de deux segments peuvent se croiser en un même point) d'un couple d'orbites périodiques et en prenant la demi-somme des intersections orientées [9,10]. Dans le cas présenté Fig. 5, le nombre d'enlacement

$$\begin{aligned}
 lk(\bar{7} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{1} \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 7 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{3} \ \bar{4} \ \bar{4} \ \bar{5}, \\
 \bar{7} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{1} \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 4 \ 4 \ 7 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{3} \ \bar{4} \ \bar{4} \ \bar{4}) = -6
 \end{aligned}$$

est obtenu.

Un gabarit correct de l'attracteur doit permettre de retrouver ce nombre d'enlacement. Selon la procédure développée par Le Sceller *et al.* [11], il est possible de calculer les croisements orientés et les nombres de ramifications pour chacun des mixeurs du gabarit, soit dans le cas présenté,

$$\begin{aligned}
 lk(\bar{7} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{1} \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 7 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{3} \ \bar{4} \ \bar{4} \ \bar{5}, \\
 \bar{7} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{1} \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 4 \ 4 \ 7 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{3} \ \bar{4} \ \bar{4} \ \bar{4}) \\
 = \frac{1}{2} (M + N_{\text{ram}}^A + N_{\text{ram}}^B + N_{\text{ram}}^C + N_{\text{ram}}^D) \\
 = \frac{1}{2} (-41 + 11 + 3 + 9 + 6) = -6.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Le nombre d'enlacement calculé à partir des orbites périodiques instables extraites est donc égal à celui estimé à l'aide du gabarit. Après avoir effectué une telle vérification pour un grand nombre de couples d'orbites périodiques, nous pouvons affirmer que le gabarit représenté Fig. 4 est validé.

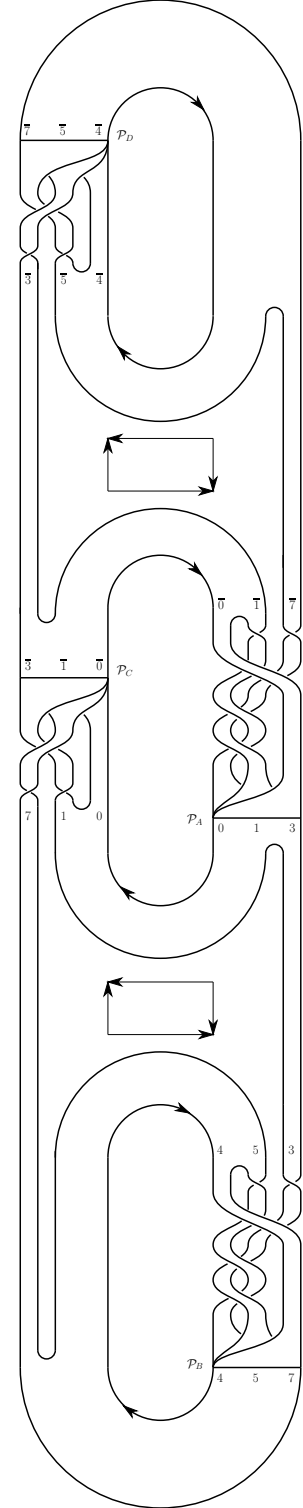
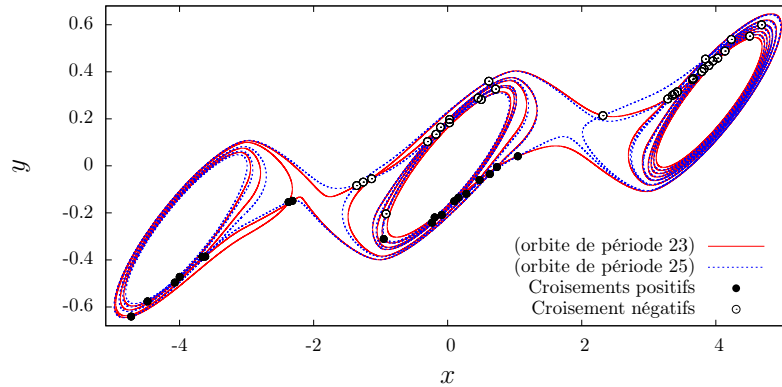


Figure 4. Gabarit de l'attracteur multispirale solution du système (1).



**Figure 5.** Deux orbites périodiques instables extraites de l'attracteur multispirale et leurs croisements orientés. Le nombre d'enlacement entre ces deux orbites est calculé numériquement : nous obtenons  $lk(\overline{7} 0 \overline{0} 0 \overline{1} 3 4 4 4 4 4 4 7 \overline{0} 0 \overline{0} 0 \overline{0} 0 \overline{3} \overline{4} \overline{4} \overline{5}, \overline{7} 0 \overline{0} 0 \overline{0} 0 \overline{1} 3 4 4 4 4 4 5 4 4 7 \overline{0} 0 \overline{0} 0 \overline{3} \overline{4} \overline{4} \overline{4}) = -6$ .

## 6 Conclusion

Nous avons proposé une procédure permettant de décomposer le gabarit d'un attracteur chaotique borné par une frontière toroïdale de genre  $g$  ( $g > 2$ ) en  $(g - 1)$  mixeurs, chacun caractérisé par une matrice d'enlacement. Ces matrices d'enlacement sont déterminées une par une en utilisant des segments d'orbites appropriés. Les propriétés de symétrie peuvent être utilisées pour réduire le nombre de matrices à déterminer numériquement. Le gabarit dans son ensemble est ensuite validé à l'aide des nombres d'enlacement comme cela est habituellement fait. Nous avons illustré notre procédure dans le cas d'un attracteur multispirale à douze branches.

**Remerciements :** Les auteurs remercient Robert Gilmore pour ses conseils avisés.

## Références

1. R. GILMORE & M. LEFRANC, *The Topology of chaos*, Wiley (2002).
2. R. GILMORE & C. LETELLIER, *Symmetry of chaos*, Oxford University Press (2007).
3. C. LETELLIER, E. ROULIN & O. E. RÖSSLER, Inequivalent topologies of chaos in simple equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **28**, 337–360 (2006).
4. T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Topological aspects of the structure of chaotic attractors in  $\mathbb{R}^3$ , *Phys. Rev. E*, **69**, 056206 (2004).
5. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Phys. Lett. A*, **57**, 397–398 (1976).
6. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & G. GOUESBET, Characterization of the Lorenz system taking into account the equivariance of the vector field, *Phys. Rev. E* **49**, 3492–3495 (1994).
7. A. AZIZ-ALAOUI, Differential equations with multispiral attractors, *Int. J. Bif. Chaos* **9**, 1009–1039 (1999).
8. L. O. CHUA & G. N. LIN, Canonical realization of Chua's circuit family, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **37**, 885–902 (1990).
9. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5**, 271–282 (1995).
10. N. B. TUFILLARO, T. ABBOTT & J. REILLY, *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley (1992).
11. L. LE SCHELLER, C. LETELLIER & G. GOUESBET, Algebraic evaluation of linking numbers of unstable periodic orbits in chaotic attractors, *Phys. Rev. E*, **49**, 4693–4695 (1994).

# Inéquivalence d'ensemble d'états stationnaires turbulents

Brice Saint-Michel<sup>1</sup>, Bérengère Dubrulle<sup>1</sup>, Guillaume Mancel<sup>1</sup>, Vincent Padilla<sup>1</sup>, Cécile Wiertel<sup>1</sup> & François Daviaud<sup>1</sup>

CEA Saclay, Orme des Merisiers, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex  
 brice.saint-michel@cea.fr

**Résumé.** Nous présentons dans cet article les résultats concernant l'influence du forçage sur des états stationnaires turbulents d'un écoulement tourbillonnaire de *von Kármán*. Nous avons découvert que changer le forçage permettait de stabiliser (ou déstabiliser) certains états quasi stationnaires du système. De même, il est possible d'observer une dynamique rappelant les systèmes de basse dimensionnalité sous certaines conditions. Cette sensibilité à la nature du forçage pourrait être un analogue de l'inéquivalence d'ensemble observée en thermodynamique dans des systèmes possédant des interactions à longue portée. Nous caractérisons la pertinence d'une telle analogie en utilisant les grandeurs globales et les champs de vitesse issus de la PIV mises en place sur notre expérience.

**Abstract.** We report in this article the influence of the forcing on the turbulent steady states found to exist in the von Kármán swirling flow. We find that the forcing nature influences the nature of the stability of quasi-steady states of the system and reveal dynamics similar to low-dimensional systems. This sensitivity might be linked to ensemble inequivalence, seen in long-range interacting systems in thermodynamics. We try to characterise the relevance of this analogy using mechanical measurements and PIV velocity fields.

## 1 Introduction

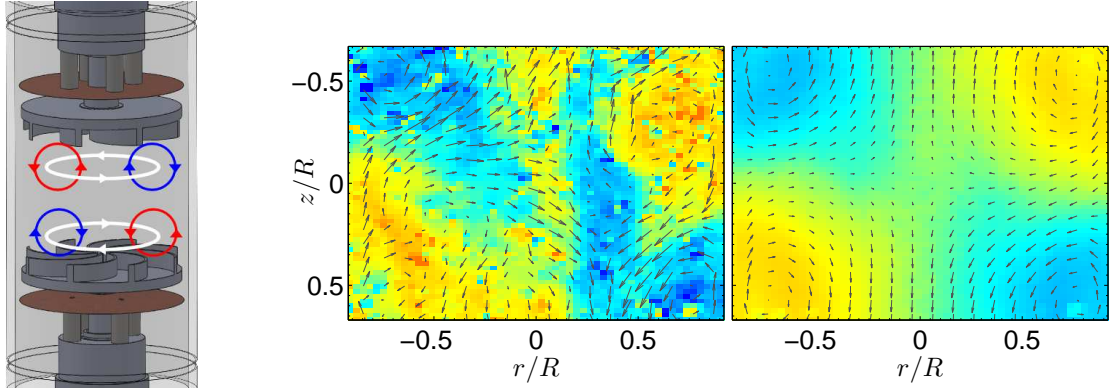
Les systèmes thermodynamiques possédant des interactions à longue portée possèdent une propriété étonnante d'*inéquivalence d'ensemble* : parfois, les solutions stables dans l'ensemble micro-canonique, où l'énergie  $E$  du système est fixée, ne le sont pas dans l'ensemble canonique, où cette fois-ci la température  $T$  du système est fixée. Cela est généralement dû à la forme de l'entropie dans l'ensemble micro-canonique [1]. Ces résultats, valables à l'équilibre, ont été récemment étendus au cas hors-équilibre [2] qui fait apparaître certaines caractéristiques bien particulières, comme l'existence de *susceptibilités négatives* dans l'ensemble micro-canonique lorsque les deux ensembles ne sont pas équivalents.

Les écoulements turbulents sont généralement considérés comme possédant de telles interactions à longue portée [3, 4] et sont par essence hors-équilibre : un écoulement turbulent *stationnaire* nécessite en effet d'injecter de l'énergie au système, qui sera ensuite dissipée par la viscosité du fluide. Pourtant, les principaux résultats du domaine [5, 6] indiquent une universalité de la turbulence. Par conséquent, les mécanismes d'injection d'énergie ne sont pas censés avoir d'influence sur les propriétés de tels écoulements, ce qui a été en partie confirmé par une étude comparative locale des deux modes d'injection pour une expérience à pales droites [7]. Nous allons voir que cette affirmation n'est pas tout à fait exacte, tout du moins pour les grandes échelles d'un écoulement turbulent entraîné par des *pales courbes*.

## 2 Présentation du montage expérimental

### 2.1 Géométrie

Nous disposons au laboratoire d'un écoulement de von Kármán turbulent, identique à celui de Cortet *et. al.* [8]. Il se compose d'un cylindre de rayon  $R = 100$  mm rempli de fluide, mis en mouvement par deux turbines de rayon  $R_t = 0.925 R$  munies de pales courbes de hauteur  $0.2R$ , qui se font face et qui tournent en contra-rotation (voir figure 1). La distance entre les turbines, en bord de pale, vaut  $1.4R$ . Les turbines possédant des pales courbes, nous tenons à signaler que les deux sens de rotation ne sont pas équivalents. Le sens choisi dans cet article attaque le fluide avec le côté *concave* des pales.



**Figure 1.** À gauche, montage expérimental utilisé, avec le cylindre rempli de fluide et ses deux turbines. En couleurs, topologie globale de l'écoulement : chaque turbine entraîne le fluide à sa proximité en rotation, et chaque turbine pompe le fluide aux  $R$  proches de 0 pour le réinjecter aux grands  $R$  dans le cœur de l'écoulement. Au centre, écoulement instantané fourni par la PIV stéréoscopique installée sur l'expérience, pour une expérience fréquence de rotation des turbines identique. Les flèches représentent la vitesse dans le plan lumineux, et les fausses couleurs la vitesse normale à ce plan. Le champ de vitesses possède des valeurs élevées, est très désordonné et ne présente aucune symétrie particulière. À droite, champ de vitesses moyen masqué derrière l'écoulement instantané, où les symétries (voir 2.3) sont restaurées.

## 2.2 Entraînement

Chacune des turbines est entraînée par un moteur synchrone d'une puissance de 1.8 kW. Ces derniers disposent de deux modes de fonctionnement : le premier consiste à imposer les *vitesses* notées  $f_1$  et  $f_2$  des turbines, et le second consiste à imposer les *couples*  $C_1$  et  $C_2$  transmis aux arbres mécaniques, qui seront transmis aux turbines moyennant des frottements liés aux étanchéités dynamiques mises en place. Ces grandeurs sont mesurées à la fois par les variateurs des moteurs et par des couplemètres qui nous donnent une estimation plus précise de la valeur des couples exercés sur les turbines. Les quantités  $f$  et  $C$  sont des grandeurs conjuguées : d'une part, dans nos expériences, nous nous attacherons soit à regarder les fluctuations de  $f$  quand  $C$  est imposé, ou celles de  $C$  quand  $f$  est imposée. D'autre part, nous pouvons voir que le produit de ces deux grandeurs définit directement la puissance injectée dans notre expérience :

$$\mathcal{P} = C \times (2\pi f) \quad (1)$$

Cela pourrait alors être un analogue des grandeurs conjuguées énergie  $E$  et température  $T$  à l'équilibre thermodynamique.

## 2.3 Symétries

Notre expérience possède deux symétries principales. La première est l'axisymétrie. Celle-ci n'est rigoureusement respectée que dans le cas où les disques sont lisses. Nous disposons de turbines munies de pales. Toutefois, nous considérerons dans la suite de cet article que celles-ci, une fois en rotation, ne brisent plus l'invariance par rotation. Une deuxième symétrie intervient si nous supposons les vitesses  $f_1$  et  $f_2$  identiques : en effet, retourner l'expérience (comme un sablier) laisse dans ce cas l'expérience invariante. Nous nommerons cette symétrie supplémentaire  $\mathcal{R}_\pi$  symétrie. Elle a pour effet de changer  $f_1$  en  $f_2$  et  $C_1$  en  $C_2$  dans le cas où ces derniers seraient distincts. Il est alors commode de redéfinir de nouvelles grandeurs se transformant astucieusement sous cette symétrie :

$$\theta = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}; \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}. \quad (3)$$

Nous notons que  $\mathcal{R}_\pi(\theta) = -\theta$  et  $\mathcal{R}_\pi(\gamma) = -\gamma$ . Ce sont principalement ces « distances » à la symétrie que nous examinerons dans la suite : les expériences de commande en vitesse nous permettent d'imposer  $\theta$ , tandis que les expériences de commande en couple fixeront la valeur de  $\gamma$ .

## 2.4 Mesure du champ de vitesse

Notre expérience nous permet aussi de vérifier le respect de nos symétries à l'intérieur même du fluide : en effet, nous disposons d'une imagerie par vélocimétrie de particules stéréoscopique (S-PIV). En effectuant des photographies de particules diffusantes illuminées dans l'écoulement à des instants très rapprochés, il est possible d'identifier le déplacement des particules et de remonter au champ des vitesses dans l'écoulement. De cette manière, nous pouvons obtenir un champ de vitesses échantillonné à 15 Hz avec une résolution de 2 mm environ. Les principes généraux de la turbulence nous indiquent tous les champs de vitesses instantanés observés sont alors *a priori* indépendants. Un de ces principes, déduit d'approximations liées aux systèmes dynamiques, veut que les symétries des montages expérimentaux, brisées par les écoulements instantanés turbulents soient *statistiquement* restaurées si nous effectuons une moyenne d'« ensemble » sur les réalisations possibles des écoulements turbulents [6]. Nous avons effectué de tels tests en commande en vitesse à  $f_1 = f_2$  sur la figure 1 (à droite), où le principe semble effectivement respecté. Aux plus grandes échelles,  $C_1$  et  $C_2$  semblent fluctuer de manière stationnaire autour de valeurs moyennes  $C_{1,m}$  et  $C_{2,m}$ . Nous disposons donc d'une deuxième méthode pour caractériser un tel état, nommé ( $s$ ) dans la suite de cet article.

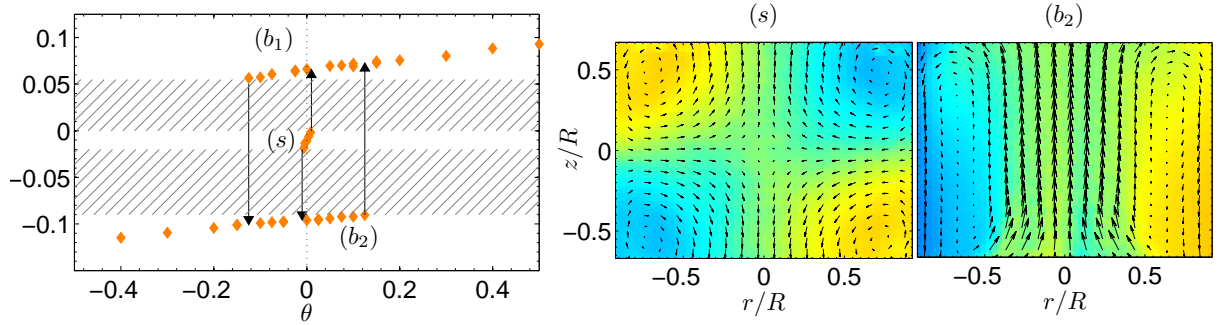
## 3 Comparaison des deux types de commande

### 3.1 Commande en vitesse : un cycle d'hystérésis

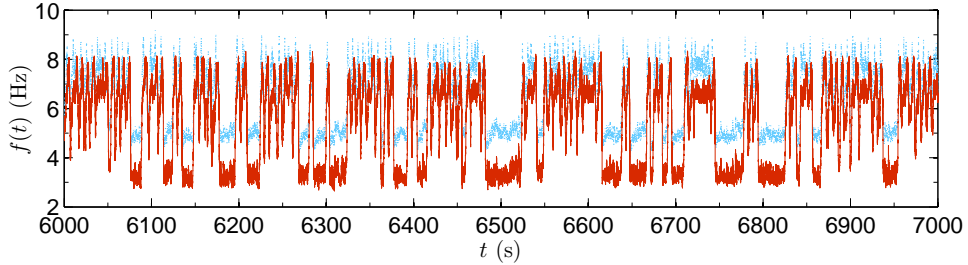
Nous avons indiqué dans la section précédente la restauration au sens statistique des symétrie du montage. En commande en vitesse, cela est vrai à une condition : le système, depuis son état au repos, ne doit jamais quitter la condition  $\theta = 0$ . Cela implique de démarrer les deux turbines en même temps. Si nous démarrons les deux turbines à des instants distincts, nous observons un champ de vitesses très différent : ( $b$ ), stationnaire, antisymétrique selon  $\mathcal{R}_\pi$  (il existe donc  $(b_1) = -(b_2)$ ), axisymétrique, qui est visible sur la figure 2. Ce sont des états dits *bifurqués*. Ils viennent briser sur toutes nos mesures la  $\mathcal{R}_\pi$  symétrie. Si nous effectuons un balayage en  $\theta$ , nous observons que les états ( $b_1$ ) et ( $b_2$ ) forment en fait des *branches* continues ( $b_1$ ) et ( $b_2$ ), *fortement* hystérétiques, pour lesquelles  $\gamma \neq 0$ . L'état ( $s$ ) génère quant à lui une petite branche ( $s$ ), quasiment centrée sur  $\gamma = 0$ , qui est marginalement stable : il n'est plus possible de récupérer cet état une fois quitté. Cette situation est résumée à gauche de la figure 2. Nous pouvons remarquer que cette figure respecte globalement la  $\mathcal{R}_\pi$  symétrie : la légère dissymétrie provient d'une difficulté d'effectuer des calibrations réellement symétriques. L'important hystérésis observé implique quant à lui une *zone interdite*, soit une plage de valeurs de  $\gamma$  qui ne sont jamais accessibles en commande en vitesse.

### 3.2 Commande en couple

En commande en couple, nous pouvons imposer n'importe quelle valeur de  $\gamma$ . Nous avons dans un premier temps vérifié que les états atteints en commande en vitesse étaient aussi observés en commande en couple, pour les mêmes valeurs de  $(\theta, \gamma)$ . Nous nous sommes placés ensuite aux  $\gamma$  correspondant aux valeurs de la zone interdite. Nous observons alors, de manière surprenante, que le système perd sa stationnarité. En effet, en nous éloignant progressivement de la branche ( $s$ ), les vitesses des turbines  $f_1$  et  $f_2$  présentent d'abord rarement, puis de plus en plus régulièrement, des fluctuations très importantes qui durent environ une seconde, appelées *excursions*, où les vitesses se croisent : la turbine la plus forcée ralentit brusquement et la turbine la moins forcée accélère. Si nous continuons d'augmenter  $\gamma$ , ces fluctuations grandissent, puis saturent. Le système est alors multi-stable et semble transiter de manière aléatoire entre plusieurs états préférentiels (voir figure 3). Pour des valeurs plus grandes encore de  $\gamma$ , il semblerait que



**Figure 2.** À gauche : cycle d'hystérésis de la commande en vitesse. ( $\diamond$ ) : états stationnaires moyens observés pour les différentes valeurs de  $\theta$ , organisés selon les trois branches ( $b_1$ ), ( $b_2$ ) et ( $s$ ). Les flèches représentent les bifurcations autorisées entre ces états, fortement sous-critiques dans le cas ( $b_1$ )  $\leftrightarrow$  ( $b_2$ ). Les hachures représentent la plage de valeurs de  $\gamma$  inaccessibles. À droite, rappel de l'état ( $s$ ) et état bifurqué ( $b_2$ ) à  $\theta = 0$  : la taille des flèches de l'état ( $b_2$ ) a été divisée par 2 pour une meilleure lisibilité.

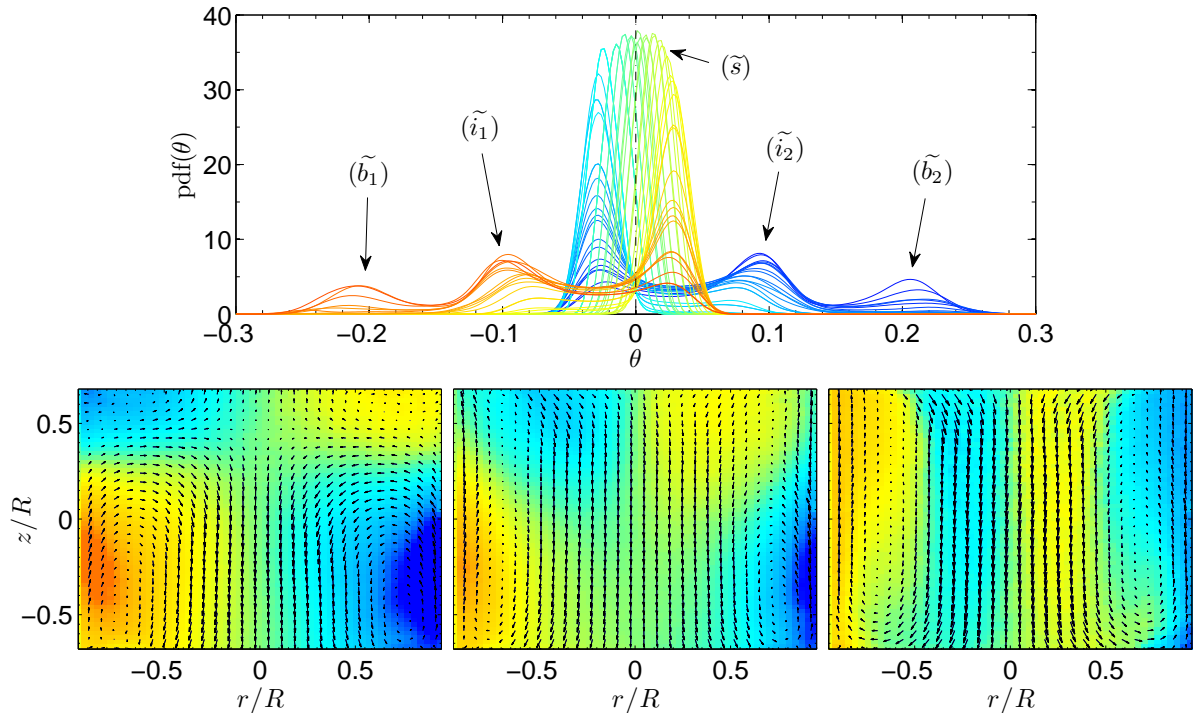


**Figure 3.** Signaux de vitesse des turbines haut (—) et bas (···) pour une expérience à l'intérieur du cycle d'hystérésis, proche de la branche ( $b_2$ ). Les vitesses ne sont clairement pas stationnaires et semblent venir se bloquer sur plusieurs valeurs préférentielles pour diverses échelles de temps, toutes plus grandes que les temps caractéristiques de l'expérience.

l'état lent de la figure 2 devienne prépondérant, et le système n'explore plus que rarement les états les plus rapides. Ces événements rares disparaissent lorsque nous rejoignons la branche stationnaire ( $b_1$ ) ou ( $b_2$ ). Il est alors possible d'examiner la distribution de  $\theta(t)$  afin de regarder le nombre d'états préférentiellement atteints. La figure 4 consigne les formes de cette distribution pour diverses valeurs de  $\gamma$ . Pour des valeurs de  $\gamma$  proches de 0 (en vert), nous n'observons globalement qu'un seul pic, nommé ( $\tilde{s}$ ), proche de  $\theta = 0$ , qui se déplace lentement vers la droite à mesure que  $\gamma$  augmente. En se déplaçant, ce pic semble également perdre de l'importance au profit de deux nouveaux pics, qui apparaissent aux  $\theta \leq 0$ . Le premier de ces pics à prendre de l'importance est appelé ( $\tilde{i}_1$ ) et se situe aux alentours de  $\theta = -0.1$ . Le second, nommé ( $\tilde{b}_1$ ), ne prendra quant à lui de l'importance que pour les plus fortes valeurs de  $\gamma$ , au détriment de ( $\tilde{s}$ ) et ( $\tilde{i}_1$ ). Pour de plus grandes valeurs de  $\gamma$  (non montrées), ce pic ( $\tilde{b}_1$ ) devient l'unique pic de la distribution de  $\theta$  et la position de ce dernier vient rejoindre les valeurs de la branche stationnaire ( $b_1$ ). Bien entendu, ce scénario se produit exactement de la même manière (à la  $\mathcal{R}_\pi$  symétrie près) si nous diminuons  $\gamma$  au lieu de l'augmenter, et nous rejoindrons progressivement la branche ( $b_2$ ).

Nous pouvons nous demander si les états ( $\tilde{i}_1$ ) et ( $\tilde{i}_2$ ) sont effectivement bien des états quasi stationnaires qui ne résultent pas uniquement d'un nombre important de passages entre les états ( $\tilde{s}$ ) et ( $\tilde{b}$ ). Nous pouvons vérifier cela sur la figure 2 : en effet, on y observe plusieurs occurrences d'un état où les deux vitesses sont élevées et semblent stationnaires sur une durée pouvant dépasser 10 s, correspondant à ( $\tilde{i}_1$ ), qui est donc bien quasi-stationnaire. Il est d'ailleurs possible de le caractériser, ainsi que les états ( $\tilde{s}$ ) et ( $\tilde{b}_1$ ) en utilisant des moyennes conditionnelles (voir figure 4) pour s'assurer que ces états sont bien distincts.





**Figure 4.** En haut, Distribution de  $\theta(t)$  pour des expériences de commande en couple s'échelonnant entre  $\gamma = -0.08$  et  $\gamma = 0.045$ . La couleur des lignes représente la valeur de  $\gamma$ . En bas, Moyennes conditionnelles de champs de PIV pour une expérience de commande en couple à  $\gamma \approx -0.09$ . À gauche, état  $(\tilde{s})$ . Au centre, état  $(\tilde{i}_1)$ . À droite, état  $(\tilde{b}_1)$ .

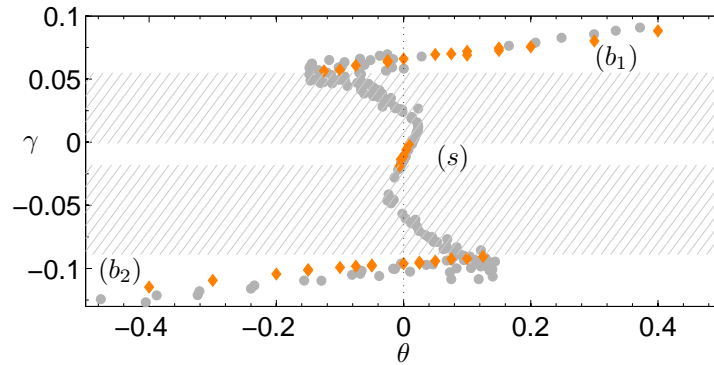
#### 4 Discussion : inéquivalence d'ensemble ?

Les résultats de Ninno et Fanelli [2], principalement numériques, indiquent que les résultats de l'ensemble micro-canonique et canonique différeront *uniquement* dans les zones de susceptibilité négative. Dans ce cas, il existera plus d'états stationnaires dans l'ensemble micro-canonique, où il est possible d'atteindre toutes les solutions stables issues de l'ensemble canonique.

Il est possible de reporter tous nos résultats de commande en couple sur le cycle d'hystérésis de la figure 5, afin de bien voir le comportement global du système dans la zone interdite, qui disparaît en commande en couple. Sur la quasi-totalité de celle-ci, le  $\theta$  moyen varie dans le sens contraire de  $\gamma$ , soit, des *susceptibilités négatives*. Il est alors possible que la commande en couple soit un analogue de l'étude d'un système dans l'ensemble micro-canonique, tandis que la commande en vitesse le soit dans l'ensemble canonique. Cela nous semble d'autant plus intuitif que  $f$  et  $C$  semblent posséder une forme de conjugaison, qui n'est pas sans rappeler la conjugaison de l'entropie  $S$  et celle de la température  $T$  dans les expressions d'énergie libre.

#### 5 Conclusion

Nous avons rapporté plusieurs résultats dans cet article. Le premier résultat vient poser la question de l'universalité de la turbulence : en effet, nous avons vu ici que les mécanismes d'injection d'énergie ont un effet important sur la dynamique aux grandes échelles d'un écoulement turbulent, qui peut se traduire par un fort hystérésis ou une instationnarité. Nous avons de plus effectué une analogie avec les systèmes possédant des interactions à longue portée, dont l'effet du changement d'ensemble thermodynamique,



**Figure 5.** Cycle d'hystérésis de la figure 2 et points associés en commande en couple. (●), moyenne de  $\theta$  pour chaque expérience de commande en couple. Il est possible de voir une large gamme de susceptibilités négatives, correspondant aux situations de pics multiples de la distribution de  $\theta$  de la figure 4.

en particulier l'apparition de susceptibilités négatives, n'est pas sans rappeler l'effet du changement de forçage dans notre écoulement.

## Références

1. J. BARRÉ *et al.*, Out-of-equilibrium statistical ensemble inequivalence, *Europhy. Lett.*, **87**, 030601 (2001).
2. G. DE NINNO *et al.*, Inequivalence of ensembles in a system with long-range interactions, *Phys. Rev. Lett.*, **8**, 20002 (2012).
3. P. A. DAVIDSON, Long-range interactions in turbulence and the energy decay problem, *Phil. Trans. Roy. Soc. A : Math., Phys. Eng. Sc.*, **369**, 796–810 (2010).
4. J. MILLER *et al.*, Statistical mechanics of Euler equations in two dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 2137–2140 (1990).
5. A. KOLMOGOROV, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds' numbers, *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, **30**, 301–305 (1941).
6. U. FRISCH, *Turbulence : the legacy of AN Kolmogorov*, Cambridge University Press (1995).
7. J.-H. TITON *et al.*, The statistics of power injected in a closed turbulent flow : Constant torque forcing versus constant velocity forcing, *Phys. Fluids*, **15**, 625–640 (2003).
8. P.-P. CORTET *et al.*, Susceptibility divergence, phase transition and multistability of a highly turbulent closed flow, *J. Stat. Mech. : Theory Exp.*, **2011**, P07012 (2011).
9. O. CADOT, *Étude des structures de basse pression dans la turbulence développée*, Université Paris 7 (1995).
10. S. T. BRAMWELL *et al.*, Universality of rare fluctuations in turbulence and critical phenomena, *Nature*, **396**, 552–554 (1998).
11. F. RAVELET *et al.*, Multistability and Memory Effect in a Highly Turbulent Flow : Experimental Evidence for a Global Bifurcation, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 164501 (2004).
12. B. SAINT-MICHEL *et al.*, Forcing-dependent stability of steady turbulent states, *en préparation*.

# Effet d'un gradient de température radial sur le régime turbulent dans un système de Couette-Taylor

Clément Savaro, Arnaud Prigent & Innocent Mutabazi

LOMC, UMR 6294, CNRS-Université du Havre  
clement.savaro@etu.univ-lehavre.fr

**Résumé.** Cette étude porte sur la transition vers la turbulence dans un système de Couette-Taylor soumis à un gradient radial de température. Le système de Couette-Taylor étudié a un grand rapport d'aspect  $\Gamma = 111$  et un rapport des rayons  $\eta = 0.8$ . Une fois la géométrie fixée, l'écoulement est contrôlé par trois paramètres : le nombre de Prandtl  $Pr$ , le nombre de Taylor  $Ta$ , et le nombre de Grashof  $Gr$ . Le nombre de Prandtl dépend des propriétés du fluide utilisé. Le nombre de Taylor est relié à la rotation du cylindre intérieur. Le nombre de Grashof est relié au gradient de température. L'écoulement du fluide est visualisé à l'aide de Kalliroscope. Les nombres d'onde et fréquences caractéristiques des écoulements observés sont mesurés par analyse spectrale de diagrammes spatiotemporels construits à partir de films de coupes axiales de l'écoulement.

La transition du régime laminaire vers le régime turbulent avec l'augmentation du taux de rotation en présence d'un fort gradient de température a été explorée et comparée avec le cas isotherme. La présence du gradient de température abaisse le seuil d'apparition des régimes chaotiques et modifie la taille des rouleaux. Un régime d'intermittence spatiotemporelle a été observé.

**Abstract.** This study deals with the transition to turbulence in a Couette-Taylor system submitted to a radial temperature gradient. Our experimental Couette-Taylor system has a high aspect ratio  $\Gamma = 111$  and the radius ratio  $\eta = 0.8$ . Once the geometry is fixed the system is characterized by three control parameters : the Prandtl number  $Pr$  related to the properties of the fluid, the Taylor number  $Ta$  related to the rotation of the inner cylinder and the Grashof number  $Gr$  related to the temperature gradient. We visualize the flow with Kalliroscope. The wave numbers and frequencies of the observed flow are measured by spectral analysis of spatiotemporal diagrams.

The transition from the laminar regime to the turbulent regime when increasing the rotation rate with high temperature gradient has been explored and compared to the isothermal case. We noted that the threshold of the appearance of chaotic flow is lowered by the temperature gradient and the size of the pattern are changed. We observed a state with spatiotemporal intermittency.

## 1 Introduction

La turbulence est un phénomène naturel étudié de longue date mais qui reste une énigme. Elle apparaît dans de nombreuses situations dans l'industrie ou les transports et la comprendre est donc un enjeu important. Le système de Couette-Taylor est un modèle relativement simple dans lequel apparaît une transition vers la turbulence progressive et de ce fait est largement étudié dans le but de mieux comprendre la turbulence. À cette fin toutes les approches sont utilisées : théorique [1], numérique [2] ou expérimentale [3]. La turbulence a aussi été longuement étudiée en convection notamment dans la convection de Rayleigh-Bénard [4]. Nous nous intéressons ici à un nouveau cas où la turbulence est générée dans un système de Couette-Taylor soumis à un gradient radial de température. Dans ce système les régimes non turbulents ont largement été étudiés [5, 6]. Le gradient de température est à l'origine d'une cellule de convection qui modifie fortement l'écoulement, abaissant le seuil de déstabilisation et changeant la structure de l'écoulement résultant des instabilités. Les rouleaux de Taylor axisymétriques et stationnaires sont remplacés par des hélices propagatives. Cependant pour des taux de rotation suffisamment élevés, la variation de température et l'écoulement axial qu'elle induit sont confinés près des parois. Les rouleaux sont à nouveaux axisymétriques [7]. Après avoir décrit le dispositif expérimental et le protocole suivi pour les expériences, nous présentons des observations des effets du gradient de température sur la transition vers la turbulence obtenues à partir de visualisations avec du kalliroscope.

## 2 Système et protocole expérimental

Le système expérimental est constitué de trois cylindres coaxiaux verticaux. Le premier en aluminium anodisé noir de rayon extérieur  $a = 2$  cm constitue l'intérieur du système de Couette-Taylor. Il peut être mis en rotation à grande vitesse par un servomoteur et est creux. De l'eau circulant à l'intérieur de ce cylindre le maintient à une température choisie. Le second cylindre en verre de rayon intérieur  $b = 2,5$  cm est fixe et constitue l'extérieur du système de Couette-Taylor. L'entrefer entre les deux cylindres mesure ainsi  $d = 5$  mm. Des anneaux en téflons solidaires au second cylindre définissent les extrémités supérieures et inférieures du système pour une hauteur de  $H = 55,4$  cm. Le dernier cylindre est en verre de rayon  $c = 5$  cm et permet de maintenir l'extérieur du Couette-Taylor à une autre température choisie grâce à une seconde circulation d'eau. On définit deux grandeurs géométriques caractéristiques du système : le rapport d'aspect  $\Gamma = d/H = 110,8$  et le rapport des rayons  $\eta = a/b = 0,8$ . On utilise aussi trois paramètres de contrôles physiques, le nombre de Grashof  $Gr$  caractérisant le gradient de température, le nombre de Taylor  $Ta$  caractérisant la rotation du cylindre intérieur et le nombre de Prandtl  $Pr$  lié à la nature du fluide. Le fluide utilisé étant de l'eau ce dernier paramètre se maintient entre 4 et 7 dans la gamme de températures utilisées. Le fluide dans l'entrefer estensemencé de Kalliroscope qui permet de révéler les structures de l'écoulement [8]. Une nappe laser éclaire une coupe  $r - z$  de l'entrefer que l'on filme avec une camera CCD. Une ligne verticale du film superposée chronologiquement donne un diagramme spatiotemporel dont l'analyse spectrale permet d'obtenir les fréquences et nombres d'onde des structures de l'écoulement.

Dans un premier temps un fort gradient de température radial est imposé ( $Gr = 8500$ ). On laisse ensuite au système le temps d'atteindre un équilibre, environ une heure. Puis le cylindre intérieur est mis en rotation, le taux de rotation étant augmenté par paliers avec 15 minutes d'attente avant de faire des mesures à chaque palier. À des fins de comparaison des mesures préliminaires ont aussi été réalisées en l'absence de gradient de température.

## 3 Effet du gradient de température sur la transition vers la turbulence

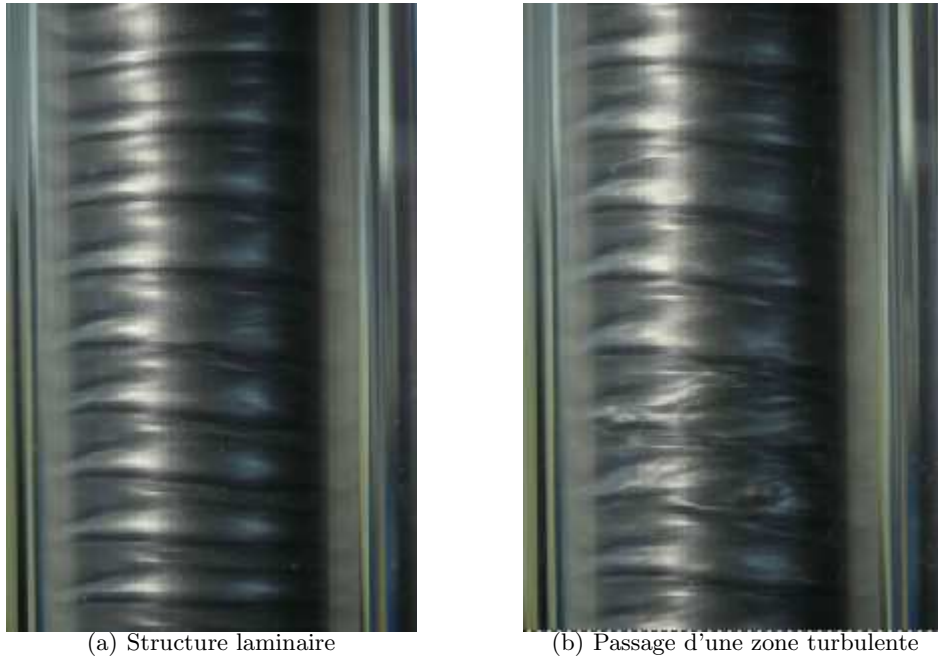
Sans gradient de température, la transition vers la turbulence se déroule de la manière suivante :

1. À  $Ta = 48$ , les rouleaux de Taylor axisymétriques et stationnaires apparaissent.
2. À  $Ta = 55$ , les rouleaux de Taylor se déstabilisent et ondulent, une dépendance azimutale apparaît.
3. À  $Ta = 500$ , une nouvelle fréquence apparaît, les rouleaux sont modulés.
4. À  $Ta = 720$ , les rouleaux deviennent turbulents mais gardent leur structure.

On retrouve la transition habituelle sans gradient de température [3].

Avec un gradient de température, la transition vers la turbulence se déroule ainsi :

1. À  $Ta = 17$ , apparitions de motifs en hélices [7]
2. À partir de  $Ta = 250$  il ne reste plus d'hélice dans le système, mais des rouleaux modulés qui se referment sur eux même comme des tores. Cette transition correspond à une valeur critique du nombre de Richardson  $Ri = Gr/Re^2 = 0.034$  en dessous de laquelle l'écoulement de la cellule de convection est confiné près des parois [7].
3. À partir de  $Ta = 350$ , on observe un régime d'intermittence spatiotemporelle caractérisé par la présence de zones chaotiques et de zones de rouleaux laminaires. Les zones chaotiques apparaissent et disparaissent partout dans le système sans ordre apparent en préservant la structure en rouleaux ondulés de l'écoulement (Fig.1).
4. À partir de  $Ta = 600$ , des rouleaux turbulents sont présents dans tout le système.
5. À partir de  $Ta = 1400$ , l'ondulation des rouleaux disparaît, on a alors un régime de rouleaux axisymétriques turbulents.



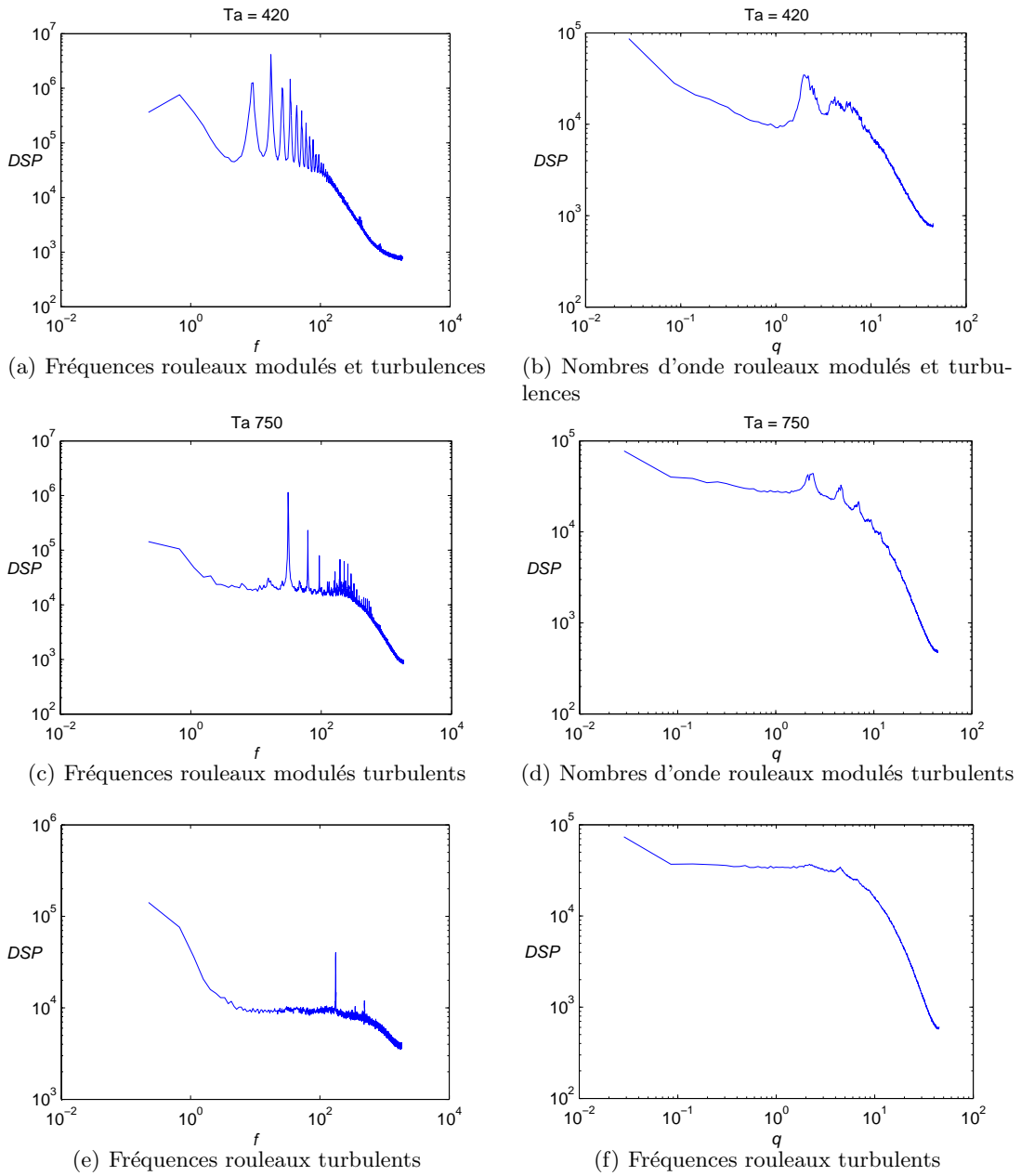
**Figure 1.** Photos du motif pour  $Ta = 400$  et  $Gr = 8500$ .

La figure 2 présente des spectres de la fréquence et du nombre d'onde pour plusieurs valeurs du nombre de Taylor en la présence d'un gradient de température. Les nombres d'onde sont adimensionnés avec  $2\pi d$  et les fréquences avec  $d^2/\nu$ . Pour des rouleaux toroïdaux, le pic principal en fréquence correspond à la fréquence de l'ondulation des rouleaux. Le pic principal en nombre d'onde est le nombre d'onde axial des rouleaux. Le nombre de pics en fréquence diminue avec le nombre de Taylor, le motif contient de moins en moins de fréquences. Autrement dit, le motif principal se simplifie au fur et à mesure que le taux de rotation est augmenté. Cependant, cette simplification à grande échelle s'accompagne par une augmentation de la présence de zones chaotiques. Cette évolution peut être caractérisée quantitativement par une mesure du bruit de fond [9]. Si  $s(f)$  est le spectre en puissance normalisé le bruit de fond  $B$  est donné par :

$$B = \int_0^{f_{\max}} \log_{10} s(f) df. \quad (1)$$

La figure 3 montre l'évolution de ce bruit de fond avec le nombre de Taylor. Le bruit de fond augmente au fur et à mesure que le chaos s'installe.

En plus de changer le déroulement de la transition vers la turbulence, le gradient de température a aussi un effet important sur les caractéristiques spatiotemporelles des rouleaux. La figure 4 montre les positions des pics principaux en nombres d'onde et fréquences en fonction du nombre de Taylor avec et sans gradient de température. Les cas où deux fréquences existent pour un même nombre de Taylor et un même nombre de Grashoff s'expliquent par un changement du nombre d'onde azimutal. En présence du gradient de température les fréquences sont plus basses et augmentent plus lentement en fonction du nombre de Taylor. La disparition de l'ondulation des rouleaux lorsque le gradient de température est présent à  $Ta = 1400$  se traduit par la mise en avant d'une autre fréquence. Les mesures de nombre d'onde montrent que les rouleaux sont plus larges lorsque le gradient de température est présent.



**Figure 2.** Spectres temporels du motifs pour différents régimes avec  $Gr = 8500$ .

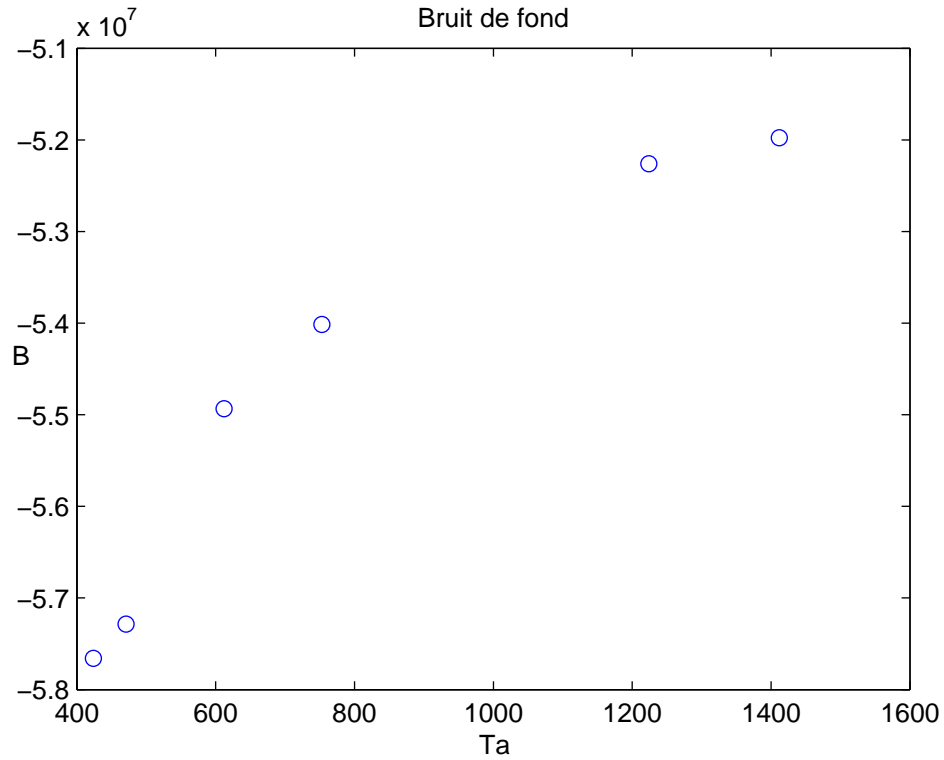


Figure 3. Évolution du bruit de fond avec le nombre de Taylor.

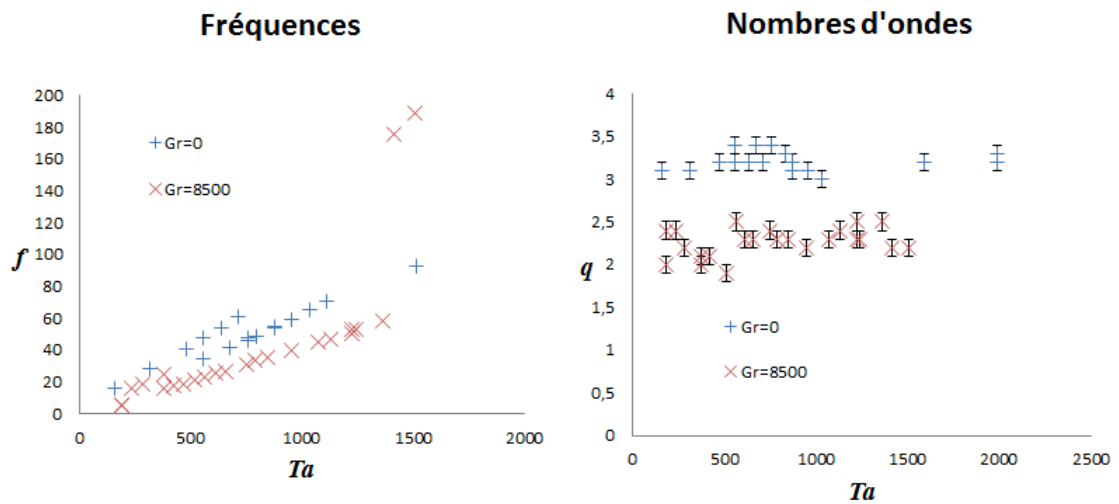


Figure 4. Nombres d'onde adimensionnés avec  $2\pi d$  et fréquences adimensionnées avec  $d^2/\nu$  en fonction du nombre de Taylor avec et sans gradient de température.

## 4 Conclusion

Nous avons étudié les effets d'un fort gradient de température sur la transition vers la turbulence dans un système de Couette-Taylor. Le gradient de température abaisse le seuil d'apparitions de chaos dans l'écoulement et change le déroulement de la transition vers la turbulence. La turbulence apparaît moins brusquement et on observe un régime d'intermittence spatiotemporel. Dans ce régime des zones chaotiques apparaissent et disparaissent de façon irrégulière dans tout le système. Nous avons aussi mesuré l'augmentation du bruit de fond qui caractérise cette transition vers le régime turbulent. De plus les caractéristiques spatiotemporelles des motifs sont changées par le gradient de température, les rouleaux observés en sa présence sont plus larges que dans le cas isotherme et leur ondulation présente des fréquences différentes.

## Références

1. B. ECKHARDT, S. GROSSMANN & D. LOHSE, Torque scaling in turbulent Taylor-Couette flow between independently rotating cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, **581**, 221–250 (2007).
2. S. DONG, Direct numerical simulation of turbulent Taylor-Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **587**, 373–393 (2007).
3. C. DAVID ANDERECK, S. S. LIU & H. L. SWINNEY, Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, **164**, 155–183 (1986).
4. G. AHLERS, S. GROSSMANN & D. LOHSE, Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection, *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 503–537 (2009).
5. H. A. SNYDER & S. K. F. KARLSSON, Experiments on the stability of Couette motion with a radial thermal gradient, *Physics of Fluids*, **7**, 1696–1706 (1964).
6. V. LEPILLER, A. PRIGENT & I. MUTABAZI, Influence d'un gradient de température sur la stabilité des rouleaux de Taylor, *9<sup>e</sup> Rencontre du Non-Linéaire*, 173–178 (2006)
7. R. GUILLERM, Étude expérimentale des instabilités thermo-hydrodynamiques dans un système de Couette-Taylor, *Thèse*.
8. G. GAUTHIER, P. GONDRET & M. RABAUD, Motions of anisotropic particles : Application to visualization of three-dimensional flows, *Physics of Fluids*, **10**, 2147–2154 (1998).
9. P. BOT, O. CADOT & I. MUTABAZI, Secondary instability mode of a roll pattern and transition to spatiotemporal chaos in the Taylor-Dean system, *Phys. Rev. E*, **58**, 3089–3097 (1998).



# Dynamique intermittente du plancton : analyse de la dynamique multi-échelle en utilisant la décomposition modale empirique

François G. Schmitt<sup>1</sup>, Orlane Anneville<sup>2</sup> & Sami Souissi<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CNRS, Laboratoire d’Oceanologie et de Geosciences, UMR 8187, F-62930 Wimereux

<sup>2</sup> INRA, UMR CARTELE, F-74203 Thonon les Bains

francois.schmitt@univ-lille1.fr; www.fg-schmitt.fr

**Résumé.** Les écosystèmes sont des systèmes complexes et leur variabilité dans le temps et dans l’espace, est caractérisée par de fortes fluctuations à toutes les échelles. Ceci est vérifié en particulier pour l’abondance de populations, où l’on peut rencontrer typiquement des fluctuations très importantes. Des méthodes d’analyse adéquates doivent être trouvées pour analyser et caractériser ces fluctuations. Dans cet article méthodologique, appliqué à des données d’abondance, nous considérons deux aspects. En premier lieu nous considérons la densité de probabilité de l’abondance. Nous considérons aussi la dynamique à de multiples échelles de cette série extrêmement variable, et la caractérisons dans le cadre de la décomposition modale empirique (EMD), pour mettre en évidence certaines échelles spécifiques. La décomposition modale empirique est une nouvelle technique d’analyse de séries temporelles, particulièrement mise en avant pour les séries non-linéaires et non stationnaires. Cette approche peut être appliquée à des séries même relativement courtes, ayant un échantillonnage irrégulier. L’approche EMD est appliquée ici au logarithme des données d’abondance puis exponentiée.

Les analyses sont appliquées à une série d’abondance du phytoplancton provenant du lac Léman. Nous montrons qu’en utilisant quelques modes, les données complexes, explosives, peuvent être progressivement reconstruites. Chaque mode a une échelle caractéristique, et cette approche peut également être utilisée pour identifier ou enlever une tendance, ou pour lisser des données. Il s’agit ici de la première application de la méthode EMD à des séries temporelles en biodiversité et en écologie aquatique.

**Abstract.** Ecosystems are complex systems and ecosystem variability are characterized, in time and space, by large fluctuations at all scales. This is especially true of abundance studies, where one typically finds huge fluctuations. New methods are needed to analyze and characterize these fluctuations. Here this methodological paper applied to a biodiversity situation, considers two aspects. First, we consider extreme abundance probabilities. We also consider the multiscale dynamics of such highly variable series and characterize it using empirical mode decomposition (EMD) to find specific scales of variation. Empirical mode decomposition is a new time series analysis, especially useful for nonlinear and non stationary data. It can be applied even to short time series, with irregular sampling. The EMD approach is applied here on the logarithm of the time series and then exponentiated.

The analyses are performed on a phytoplankton abundance time series from Lake Geneva. We show that, using a few modes, the complex and bursty abundance series is reconstructed. Each mode has a characteristic scale, and this approach can also be used for detrending, or for smoothing applications. This is the first application of the EMD method to biodiversity and aquatic ecology abundance time series.

## 1 Introduction

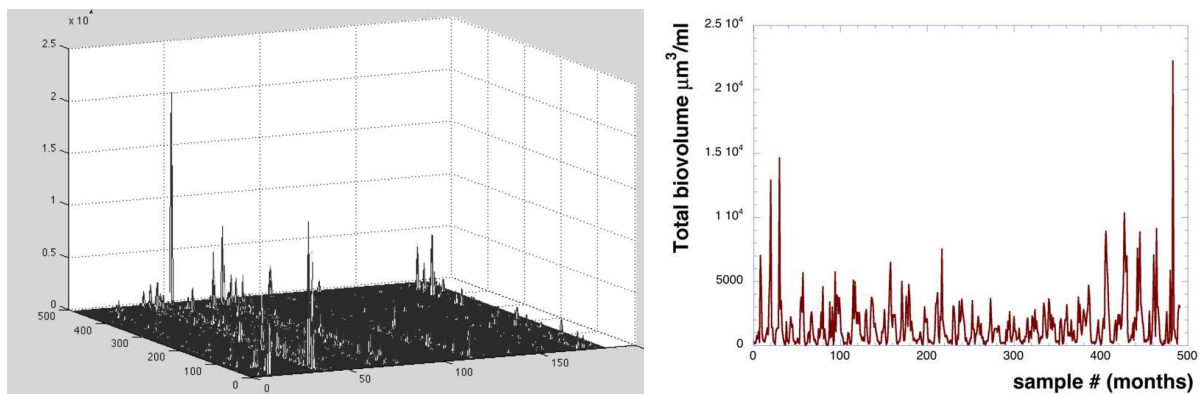
Les écosystèmes, avec leurs forçages multiples, à de nombreuses échelles, et des interactions entre espèces et entre individus, sont des exemple-types de systèmes complexes avec de fortes non-linéarités, dans l’espace et dans le temps. Dans ce domaine, la forte variabilité constatée est souvent considérée comme étant une conséquence de forçages physiques ou anthropiques sur la biosphère. D’autres études ont plutôt insisté sur le fait que les écosystèmes, en tant que systèmes complexes, pouvaient s’auto-organiser et générer, de façon intrinsèque (sans forcément faire appel à un forçage extérieur mais celui-ci étant possible), des fortes fluctuations spatio-temporelles au niveau d’une espèce ou au niveau de la biodiversité des communautés [1, 2]. De nombreuses études s’intéressent à décrire et expliquer cette forte variabilité dans la dynamique de population et l’abondance des espèces [3, 4] en considérant en

particulier la dynamique des extrêmes [5–7]. Ici, nous considérons une série temporelle d’abondance du phytoplancton, recueillie en point fixe au lac Léman, et nous en considérons une modélisation à l’aide de la méthode de décomposition modale empirique, appliquée au logarithme de l’abondance.

## 2 Présentation des données et leur densité de probabilité

Le Léman est un grand et profond lac péri-alpin (surface 580 km<sup>2</sup>, volume 89 km<sup>3</sup>, profondeur maximale 309 m, profondeur moyenne 152 m) situé à une altitude de 372 m à la frontière entre la France et la Suisse. Un suivi écologique du lac a été mis en place depuis le milieu des années 1970. Ceci inclut des paramètres physiques, chimiques et biologiques, mesurées chaque mois de 1974 à 1980, puis tous les 15 jours pendant le printemps, l’été et l’automne. L’échantillonnage a été réalisé dans une station située dans le bassin principal, en un point de profondeur maximale. Des échantillons d’eau sont prélevés sur les 10 premiers mètres à l’aide d’une bouteille intégratrice, et servent ensuite à l’identification et au dénombrement en laboratoire des différentes espèces phytoplanctoniques (plancton végétal) pour en estimer l’abondance. L’identification du phytoplancton et le comptage des cellules sont effectués dans une chambre de sédimentation utilisant un microscope inversé [8] selon une méthode standardisée [9]. Le comptage des cellules a été ensuite transformé en des données de biovolume (en  $\mu\text{m}^3/\text{mL}$ ), à l’aide d’une estimation géométrique pour chaque espèce.

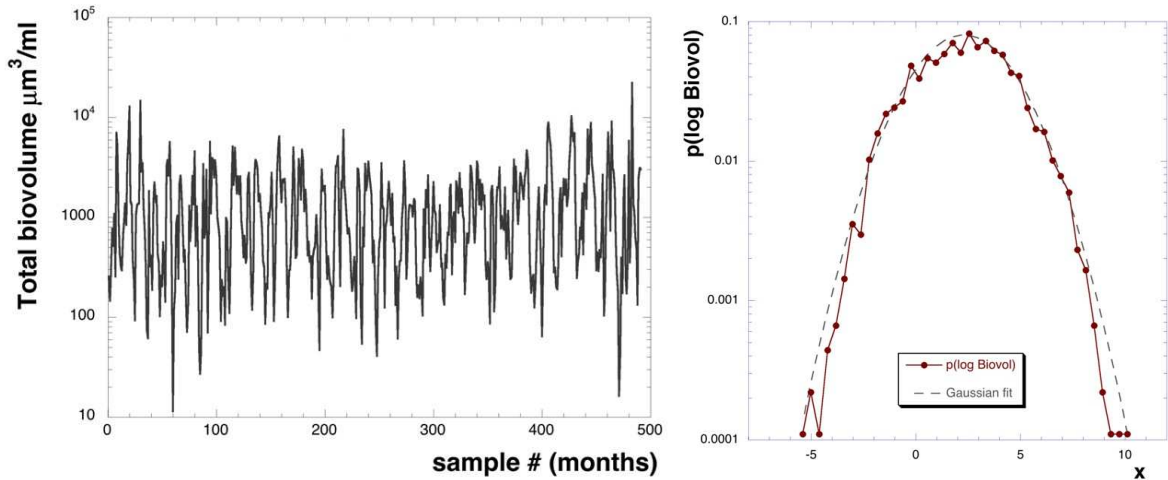
Nous avons analysé ici un sous-ensemble (1974–2000) de la base de données disponible, en nous focalisant sur une période d’échantillonnage régulier, avec une méthode identique et un point fixe. Nous avons une base de données comportant 491 différents échantillons mensuels, avec 184 différentes espèces de phytoplancton recensées. La figure 1a représente une vue en perspective de l’ensemble de la base de données : en abscisse les espèces et en ordonnées le temps. On visualise ainsi la très forte variabilité de l’abondance des espèces, et la complexité de la caractérisation et de la compréhension de cette dynamique. De plus, il existe typiquement pour ce type de base de données un grand nombre de zéros : ici, 90%.



**Figure 1.** (a) : À gauche, une vue en perspective de l’ensemble de la base de données : en abscisse les espèces et en ordonnées le temps (biovolume en  $\mu\text{m}^3/\text{mL}$ ). (b) : À droite, le biovolume total, c’est-à-dire la projection de la matrice de la figure 1a sur l’axe des  $y$ .

Comme dans la suite nous considérons le logarithme des données, pour éviter d’avoir des valeurs nulles, et pour simplifier l’analyse, nous considérons le biovolume total, c’est-à-dire la projection de la matrice de la figure 1a sur l’axe des  $y$ . Ceci est représenté en figure 1b. Dans la suite, c’est cette dernière série temporelle qui est analysée. Le logarithme des données est représenté en figure 2a ; on constate que l’allure des données est plus stationnaire. Leur densité de probabilité est représentée en figure 2b, avec un ajustement lognormal. Comme souvent proposé en écologie, l’abondance est ici approximativement lognormale, aussi bien pour les faibles valeurs que pour les extrêmes. Un test statistique est négatif,

montrant que les données sont pas strictement lognormales, mais leur écart à la lognormalité est ici visuellement assez faible. Ceci est en accord avec d'autres travaux en écologie [3, 6].



**Figure 2.** (a) : À gauche, le logarithme des données, montrant une allure plus stationnaire. (b) : À droite, la densité de probabilité des données avec un ajustement normal (donc une pdf lognormale pour les données d'origine).

### 3 Décomposition modale empirique

Norden Huang a proposé en 1998 une méthode intitulée décomposition modale empirique (EMD, pour *Empirical Mode Decomposition*), pour analyser des séries temporelles non-linéaires et non stationnaires [10]. Cette méthode permet de décomposer une série temporelle quelconque en une somme de plusieurs séries temporelles, appelées « modes » (IMF, pour *Intrinsic Mode Function*). Chaque mode possède une fréquence caractéristique. Pour un bruit blanc ou un bruit Gaussien fractionnaire, la répartition de ces fréquences caractéristiques est telle que la décomposition correspond à un banc de filtre dyadique [11, 12]. Cette nouvelle méthode d'analyse a rencontré un grand succès dans de nombreux domaines des sciences de la nature et de la société, avec plus de 2000 citations de l'article original. Elle peut être utilisée pour étudier par exemple l'intermittence invariante d'échelle en turbulence [13–15].

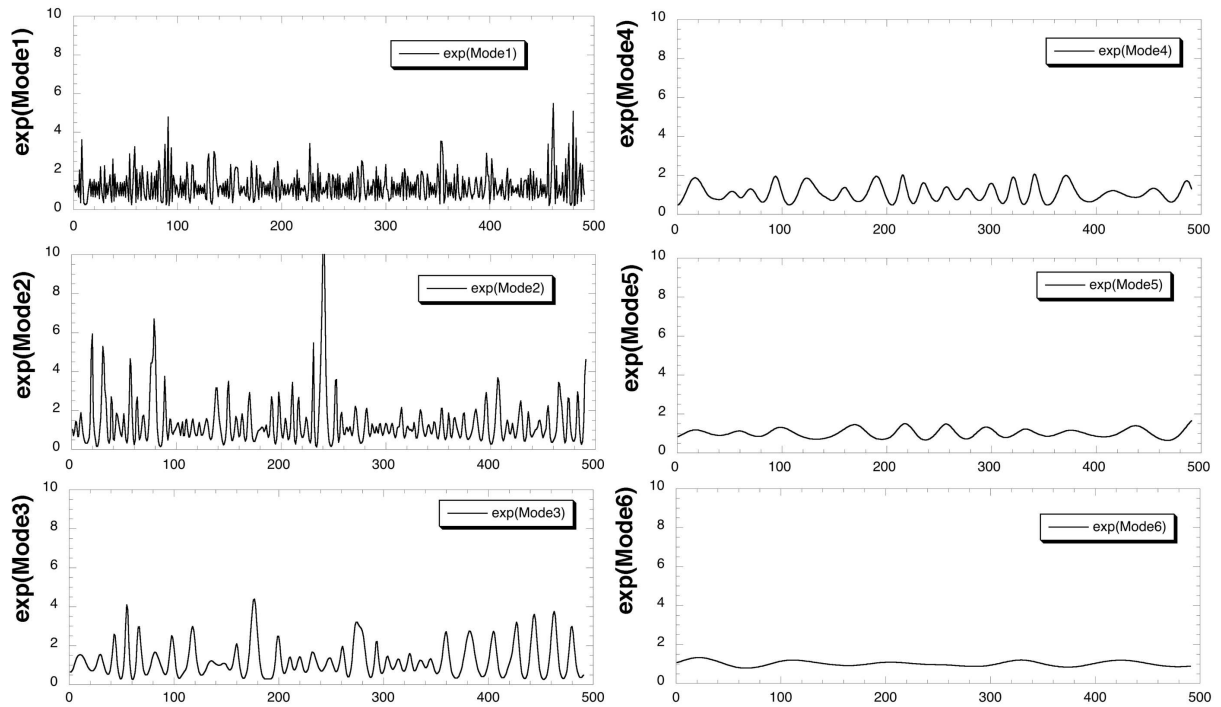
L'idée de la décomposition est de considérer un signal en tant que superposition de différentes oscillations monocomposantes, appelées fonctions modales intrinsèques. Pour cela chaque mode doit satisfaire à deux conditions : (i) la différence entre le nombre de minima locaux et le nombre de traversée du zéro doit être zéro ou un ; (ii) la moyenne glissante de la somme de l'enveloppe définie par les maxima locaux et l'enveloppe définie par les minima locaux est nulle. La décomposition est faite de façon itérative, en considérant à chaque étape le signal comme étant la somme d'une composante basse fréquence et d'une composante haute fréquence. A la fin de la décomposition, la méthode exprime une série temporelle  $x(t)$  comme la somme d'un nombre fini de modes  $C_i(t)$  et un résidu final  $r_n(t)$  [10] :

$$x(t) = \sum_{i=1}^N C_i(t) + r_n(t) \quad (1)$$

Le nombre de modes nécessaires pour une série temporelle de longueur  $N$  est de l'ordre de  $\log_2 N$ .

Pour une série temporelle strictement positive comme celle qui nous occupe ici, la méthode EMD ne semble pas fonctionner de façon réaliste puisque chaque mode oscille autour de 0 et aura donc des

valeurs négatives. Pour cette raison, nous avons ici plutôt appliqué la méthode EMD au log-abondance (figure 2a). Nous avons ainsi obtenu 7 modes, chacun ayant une échelle caractéristique de plus en plus grande, et un résidu. Dans notre cas, la série temporelle d'origine sera donc obtenue comme le produit de l'exponentielle des modes successifs. La figure 3 représente les six premiers modes obtenus à partir de l'analyse EMD de la série des log-abondances, ou plus précisément l'exponentielle des modes successifs. La série à modéliser est donc obtenue à partir du produit des séries temporelles représentées en Figure 3.



**Figure 3.** Représentation de 6 modes obtenus à partir de l'analyse EMD de la série des log-abondance. Ici on représente l'exponentielle des modes. La série résultante est donc modélisée par le produit des différentes séries représentées ici.

Cette approche permet de reconstruire la dynamique très fluctuante de la série d'abondance, à l'aide d'un processus stochastique lognormal comportant un nombre réduit de modes. La figure 4 représente la reconstruction du log-biovolume à l'aide du résidu et des  $P$  premiers modes ( $P = 2$  à 5 de haut en bas), comparée aux données expérimentales. On constate que les deux premiers modes ne capturent pas toute la dynamique, mais qu'en augmentant progressivement le nombre de modes, la superposition devient bien meilleure, et finalement les 4 premiers modes permettent déjà une très bonne superposition des données. Ceci fournit une modélisation empirique de la dynamique de l'abondance en écologie, permettant de représenter ces fortes et intermittentes fluctuations comme une cascade multiplicative, obtenue à partir de la multiplication d'un nombre assez limité de modes, vus comme autant d'instabilités. Une continuation possible de ces travaux pourra être de considérer différents niveaux trophiques (par exemple ajouter le zooplancton) et les conditions environnementales (température, teneur en nutriments...) et d'analyser leurs corrélations mode à mode.

Nous avons ici appliqué directement la méthode EMD au logarithme de nos données d'origine, permettant d'utiliser cette approche pour des données positives (mais non nulles), et ensuite reconstruisant la série d'origine de façon multiplicative. Il s'agit ici à notre connaissance de la première application de la méthode EMD en écologie et en biodiversité.

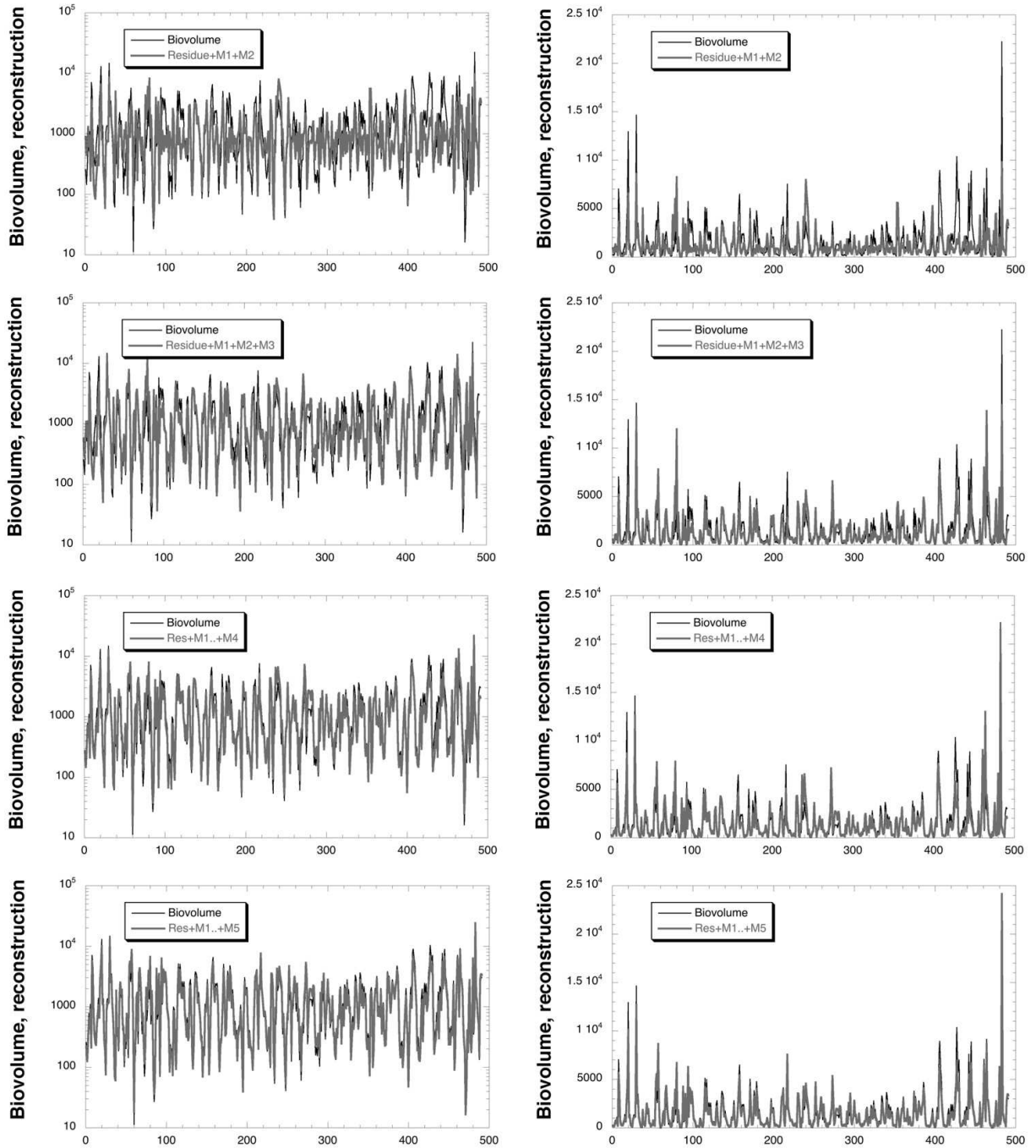


Figure 4. Colonnes de gauche : reconstruction du log-biovolume à l'aide du résidu et des  $P$  premiers modes ( $P = 2$  à 5 de haut en bas), comparée aux données expérimentales. Colonnes de droite : la même reconstruction pour le biovolume lui-même.

**Remerciements.** Les données sont issues de la base de données SOERE-INRA de Thonon-les-bains et ont été obtenues dans le cadre du suivi écologique du Léman dirigé et financé par la CIPEL (<http://www.cipel.org/>). Nous remercions toutes les personnes de l'UMR-CARRETEL ayant travaillé à la collecte et au dépouillage des échantillons. Le code EMD en Matlab utilisé ici a été écrit par Dr Gabriel Rilling et Pr. Patrick Flandrin du laboratoire de Physique, CNRS & Ens Lyon, et est disponible ici : <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>. Il a été adapté par Yongxiang Huang de l'Université de Shanghai. Cette étude fait partie du projet Bio-Asie FASCICLE (<http://fascicle.cnrs.fr/accueil.html>).

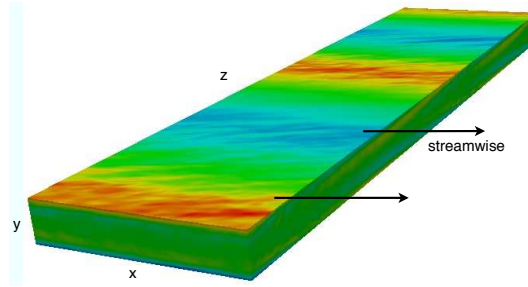
## Références

1. R. V. SOLE & J. BASCOMPTE, *Self-organization in complex ecosystems*, Princeton University Press, Princeton (2006).
2. D. STORCH, P. A. MARQUET & J. H. BROWN, *Scaling biodiversity*, Cambridge University Press, Cambridge (2007).
3. S. ENGEN & R. LANDE, Population dynamic models generating the lognormal species abundance distribution, *Mathematical biosciences*, **132**, 169–183 (1996).
4. B. J. MCGILL *et al.*, Species abundance distributions : moving beyond single prediction theories to integration within an ecological framework, *Ecology Letters*, **10**, 995–1015 (2007).
5. A. BLARER & M. DOEBELI, Resonance effects and outbreaks in ecological time series, *Ecology Letters*, **2**, 167–177 (1999).
6. J. HALLEY & P. INCHAUSTI, Lognormality in ecological time series, *OIKOS*, **99**, 518–530 (2002).
7. J. D. REYNOLDS AND R. P. FRECKLETON, Population dynamics : growing to extremes, *Science*, **309**, 567–568 (2005).
8. H. UTERMÖHL, Zur Vervollkommung der quantitative Phytoplankton Methodik, *Mitt. Internat. Ver. Theor. Angew. Limnol.*, **9**, 1–38 (1958).
9. EN 15204, *Water Quality - Guidance Standard on the Enumeration of Phytoplankton using Inverted Microscopy (Utermohl Technique)*, European Committee for Standardization, Brussels (2006).
10. N. E. HUANG *et al.*, The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis, *Proc. R. Soc. London*, **454**, 903–995 (1998).
11. P. FLANDRIN, G. RILLING & P. GONÇALVÈS, Empirical mode decomposition as a filter bank, *Signal Processing Letters, IEEE*, **11**, 112–114 (2004).
12. Z. WU & N. E. HUANG, A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method, *Proc. R. Soc. London*, **460**, 1597–1611 (2004).
13. Y. HUANG, F. G. SCHMITT, Z. LU, Z. & Y. LIU, An amplitude-frequency study of turbulent scaling intermittency using Hilbert spectral analysis, *Europhys. Lett.*, **84**, 40010 (2008).
14. F. G. SCHMITT, Y. HUANG, Z. LU, Y. LIU & N. FERNANDEZ, Analysis of turbulent fluctuations and their intermittency properties in the surf zone using empirical mode decomposition, *Journal of Marine Systems*, **77**, 473–481 (2009).
15. Y. HUANG, F. G. SCHMITT, Z. LU, Z. & Y. LIU, Arbitrary order Hilbert spectral analysis for time series possessing scaling statistics : a comparison study with detrended fluctuation analysis and wavelet leaders, *Phys. Rev. E*, **84**, 016208 (2011).

## Motifs turbulent-laminaire dans l'écoulement de Poiseuille plan

Laurette S. Tuckerman

PMMH-ESPCI-CNRS, 10 rue Vauquelin, 75005 Paris  
laurette@pmmh.espci.fr



**Figure 1.** Visualisation 3D de la vorticité longitudinale de l'écoulement moyen. Le domaine entier, de dimensions  $L_x \times L_y \times L_z = 10 \times 2 \times 40$  est montré. Les bandes sont parallèles à la direction  $x$ , tandis que les petites structures (« streaks ») sont alignées dans la direction longitudinale (« streamwise ») qui est orientée à un angle de  $24^\circ$  par rapport à la direction  $x$ .

La transition vers la turbulence est une des phénomènes les plus mystérieux dans la dynamique des fluides. Les régimes transitoires des écoulements cisailés présentent des motifs réguliers de bandes turbulentes et laminaires large et obliques. Ces motifs ont été étudiés dans les écoulements de Couette circulaires [1–3] et plan [3–5]. Des motifs de bandes turbulentes et laminaires existent aussi dans l'écoulement de Poiseuille plan [6]. Nous avons simulé ces motifs numériquement en intégrant les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles avec le code Prism [7]. Normalement, la configuration de Poiseuille plan est défini de sorte que les conditions aux limites, le flux longitudinal et le profil laminaire sont :

$$u_{\text{wall}} = \hat{\mathbf{e}}_{\text{strm}} \cdot \mathbf{u}(y = \pm 1) = 0 \quad u_{\text{mean}} \equiv \hat{\mathbf{e}}_{\text{strm}} \cdot \int_{-1}^1 \mathbf{u}(y) dy = 2/3 \quad u_{\text{laminar}}(y) = \hat{\mathbf{e}}_{\text{strm}} \cdot \mathbf{u} = 1 - y^2 \quad (1)$$

Afin de faciliter le suivi des motifs, nous utilisons un référentiel en translation par rapport au référentiel usuel. Les plaques se déplacent à une vitesse négative et le flux longitudinal est mis à zéro à chaque pas de temps en choisissant un gradient de pression approprié par une méthode de fonction de Green. Dans notre repère, les conditions aux limites, le flux longitudinal et le profil laminaire deviennent alors :

$$u_{\text{wall}} = -2/3 \quad u_{\text{mean}} = 0 \quad u_{\text{laminar}}(y) = -2/3 + (1 - y^2). \quad (2)$$

Dans les deux cas, le nombre de Reynolds peut être défini à partir de l'échelle de vitesse

$$\frac{3}{2}(u_{\text{mean}} - u_{\text{wall}}). \quad (3)$$

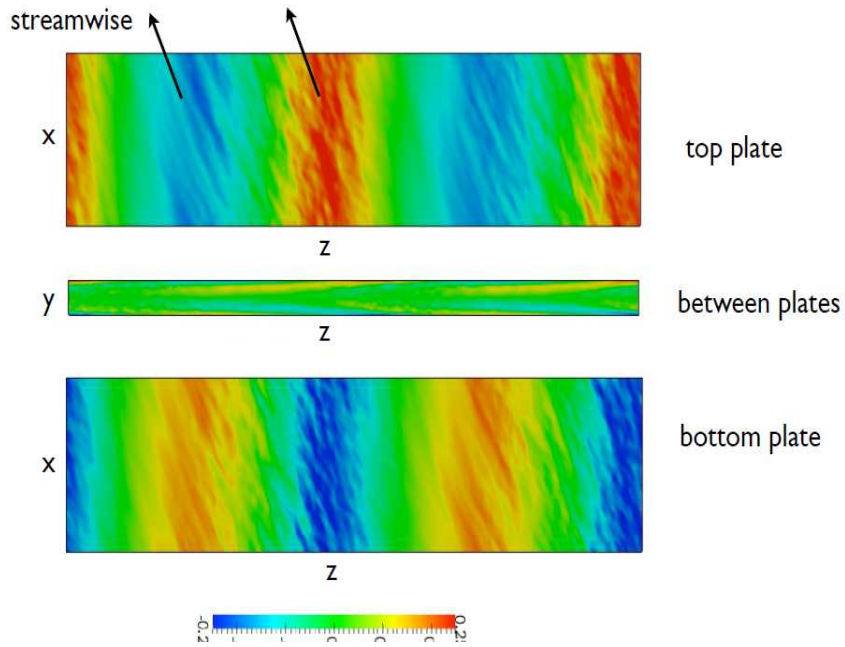
Nous utilisons un maillage de  $81 \times 41 \times 512 = 1.7 \times 10^6$  points pour représenter un domaine rectangulaire dont les dimensions sont  $10 \times 2 \times 40$  et qui est aligné dans la direction attendue des bandes, à un angle  $24^\circ$  de la direction de l'écoulement principal [4] :

$$\hat{\mathbf{e}}_{\text{strm}} = \cos 24^\circ \hat{\mathbf{e}}_x + \sin 24^\circ \hat{\mathbf{e}}_z \quad \hat{\mathbf{e}}_{\text{span}} = \sin 24^\circ \hat{\mathbf{e}}_x - \cos 24^\circ \hat{\mathbf{e}}_z \quad (4)$$

Démarrant nos simulations à  $Re = 2000$  avec une condition initiale de turbulence uniforme, nous diminuons progressivement  $Re$ . Un motif de bandes apparaît pour  $1550 \geq Re \geq 850$ . Des visualisations de l'écoulement moyen et instantané pour  $Re = 1400$  sont présentées dans les figures 1 et 2. La vorticité longitudinale est particulièrement utile comme marqueur puisque, contrairement aux composantes de la vitesse, elle n'est pas nulle aux parois, qui est le lieu de la turbulence la plus intense dans ce cas.

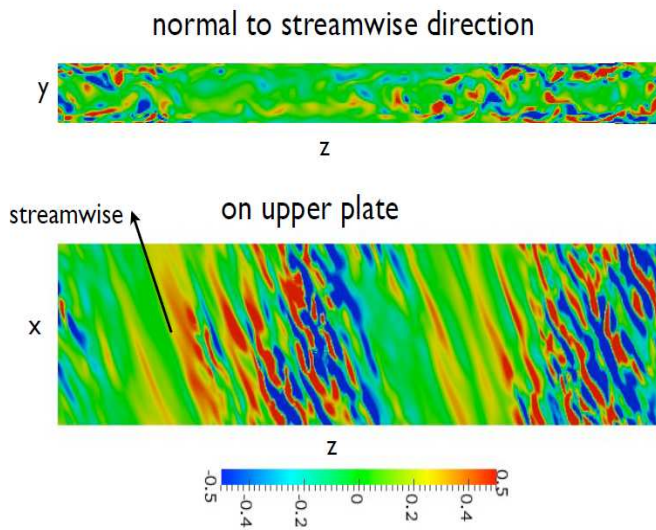
a)

### Time-averaged streamwise vorticity



b)

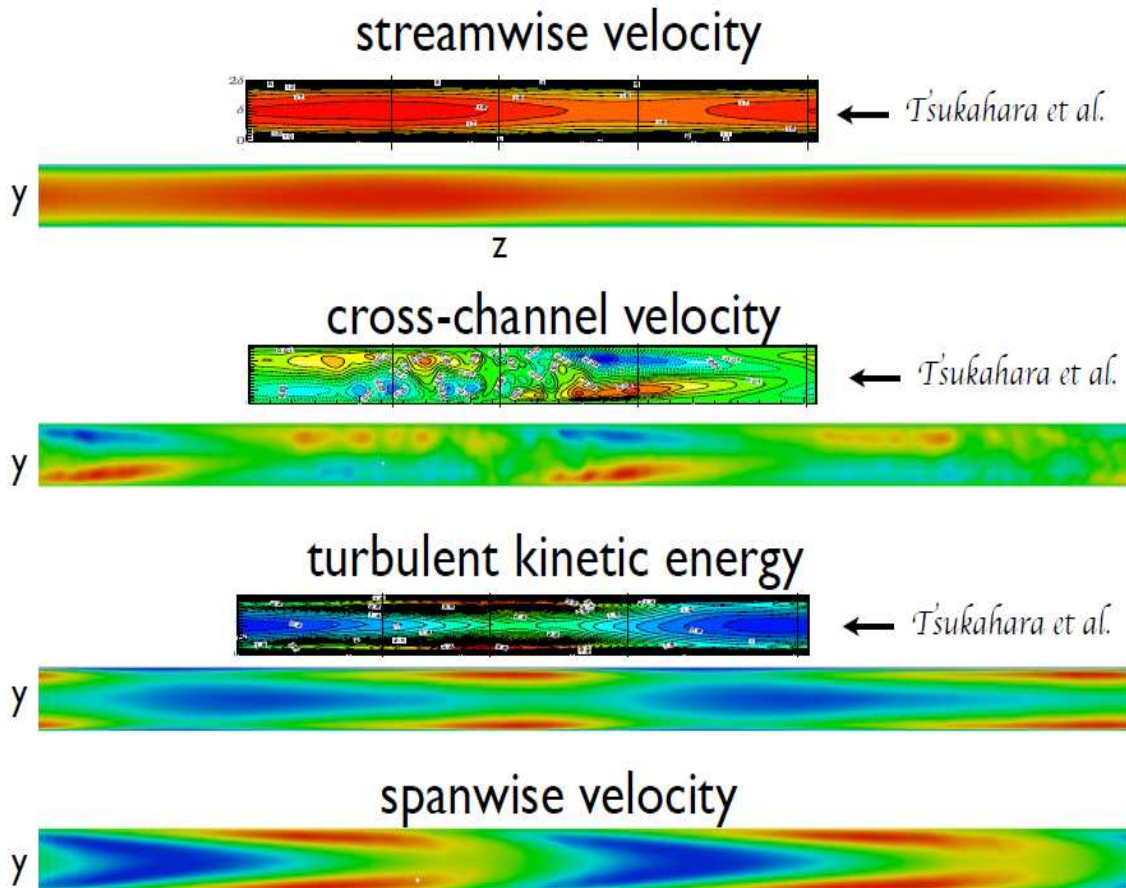
### Instantaneous streamwise vorticity



**Figure 2.** a) Moyenne temporelle de la vorticité longitudinale sur la plaque supérieure, la plaque inférieure, et dans un plan entre les deux plaques. b) vorticité longitudinale instantanée sur la plaque supérieure et sur un plan entre les deux plaques. Les tourbillons longitudinaux (« streamwise vortices ») et stries (« streaks ») sont évidents près des plaques.

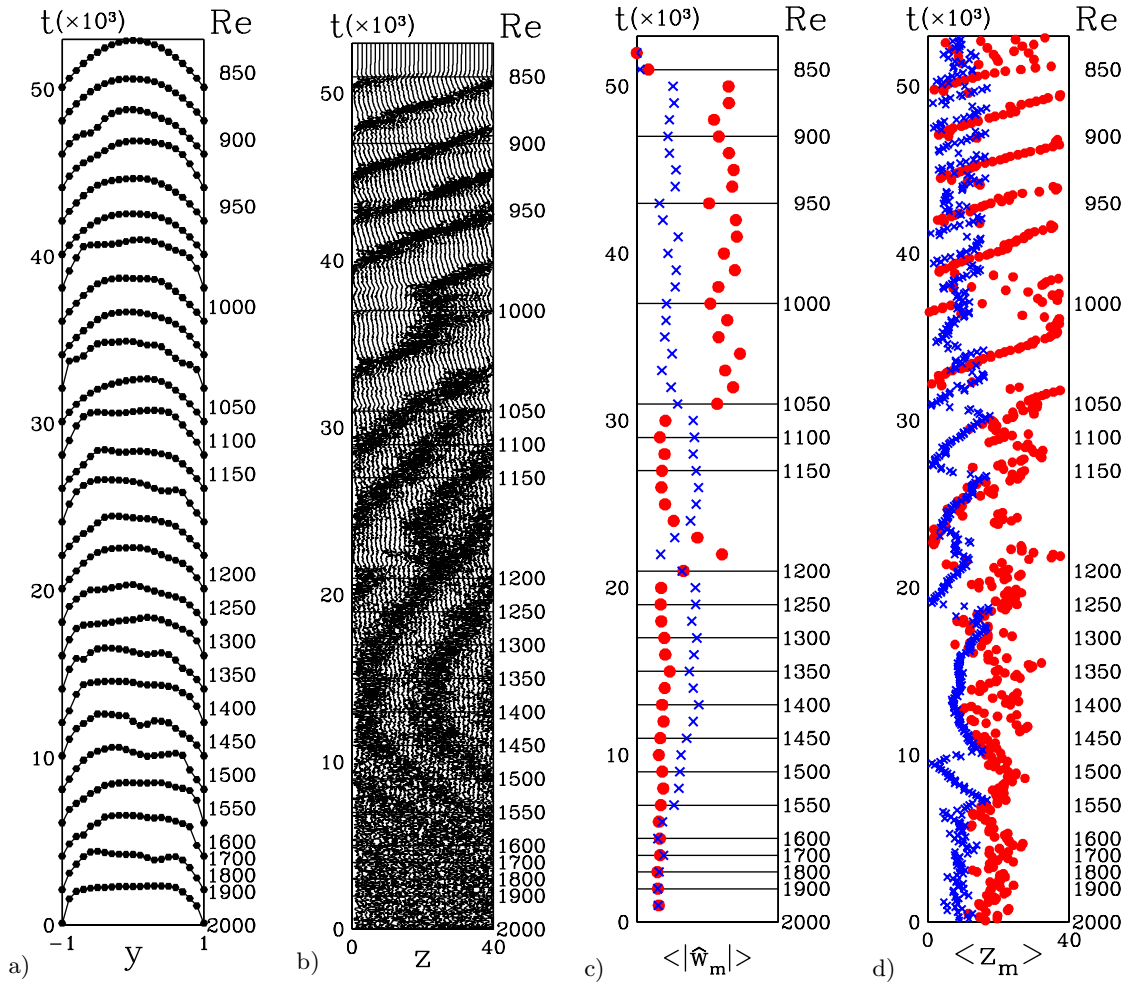


Mean flow:  $\int dx \int dt u(x,y,z,t) = U(y,z)$   
 integrate over time  $t$  and over direction  $x$  parallel to bands



**Figure 3.** Les écoulements moyens de nos simulations montrent un bon accord avec ceux présentés dans Tsukahara *et al.* [6]. Vitesse longitudinale : les ondulations correspondent aux profils plats (régions turbulentes) et paraboliques (régions laminaires) dans la figure 4a. Vitesse cross-channel : le changement de signe à mi-hauteur indique la présence de *deux* couches de cellules de circulation. Énergie cinétique turbulente : les régions rouges présentent une forte concentration près des parois. Vitesse transverse : l'aspect chevronné indique des changements de direction.

Nous avons comparé nos simulations avec celles de Tsukahara *et al.* [6]. La figure 3 montre l'écoulement, moyenné sur  $L_x$  et  $\Delta T = 2000$ , d'un motif à  $Re = 1400$ , avec des visualisations semblables de Tsukahara *et al.* [6]. Pour toutes les quantités, nous voyons un très bon accord qualitatif. Les ondulations dans la vitesse longitudinale correspondent aux profils plats et paraboliques présents, respectivement, dans les régions turbulentes et laminaires déjà vus dans la figure 4a. La vitesse cross-channel  $v$  présente un changement de signe à mi-hauteur, indiquant la présence de deux couches de cellules de circulation. L'énergie cinétique turbulente est concentrée très près des parois, ce qui nous conduira à augmenter la résolution par la suite. Finalement, la vitesse transverse montre un aspect chevronné.



**Figure 4.** Simulation de l'écoulement de Poiseuille plan dans un domaine  $L_x \times L_y \times L_z = 10 \times 2 \times 40$  dans lequel la direction  $z$  est aligné le long du vecteur d'onde du motif. Le nombre de Reynolds est diminué de 2000 à 850 en pas discrets, comme l'indique l'axe de droite.

a) Profils longitudinaux instantanés le long de la ligne  $x = z = 0$  à des intervalles de temps  $\Delta T = 2000$ .

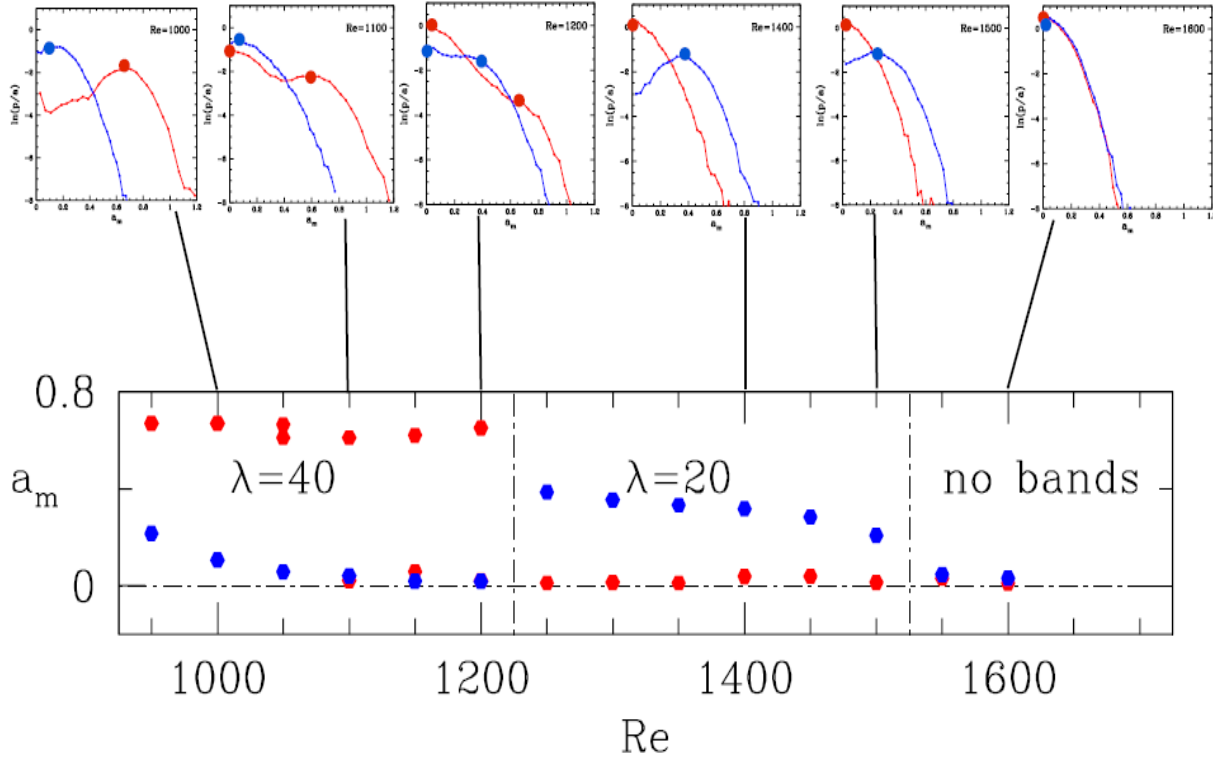
b) Vitesse transverse instantanée sur une ligne  $x = y = 0$  à des intervalles  $\Delta z = L_z/32$ .

c) Moyenne temporelle  $\langle |\hat{w}_m(t)| \rangle$  du module de la transformée de Fourier en  $z$  de la vitesse transverse.

d) Moyenne temporelle  $\langle z_m(t) \rangle$  de phase de la transformée de Fourier en  $z$  de la vitesse transverse.

Pour c,d), les croix bleues (disques rouges) représentent le nombre d'onde  $m = 2$  ( $m = 1$ ) avec longueur d'onde 40 (20).

Des mesures quantitatives sur ces écoulements sont montrées dans la figure 4, qui décrit une simulation dans laquelle le nombre de Reynolds est diminué progressivement à partir de  $Re = 2000$ . La figure 4a montre les profils de vitesse longitudinale qui caractérisent l'écoulement turbulent ou laminaire à des intervalles de  $\Delta T = 2000$  dans des unités advectives. La figure 4b montre des séries temporelles de la vitesse transverse (« spanwise ») le long d'une ligne entre les deux plaques  $x = y = 0$ , espacé à des intervalles de  $\Delta z = L_z/32$ . Un motif existe sur la plage  $1550 \geq Re \geq 850$ . Le motif se propage plus lentement que le flux moyen pour  $Re > 1400$ , c'est-à-dire il se déplace vers la gauche dans le repère dans lequel le flux est nul défini par (2), et plus rapidement pour  $Re < 1400$ . Pour  $Re \geq 1100$ , deux bandes sont présentes, donnant une longueur d'onde de 20, tandis qu'une seule bande est présente pour  $Re \leq 1050$ . Les figures 4c,d montrent que ces tendances peuvent être mesurées quantitativement en prenant des



**Figure 5.** Distributions de probabilité des modules des composantes de Fourier  $m = 1$  et  $m = 2$  en fonction du nombre de Reynolds montrant des changements de régime à  $Re \approx 1525$  (turbulence uniforme  $\leftrightarrow$  motif avec  $\lambda = 20$ ) et  $Re \approx 1225$  (motif avec  $\lambda = 20 \leftrightarrow$  motif avec  $\lambda = 40$ ).

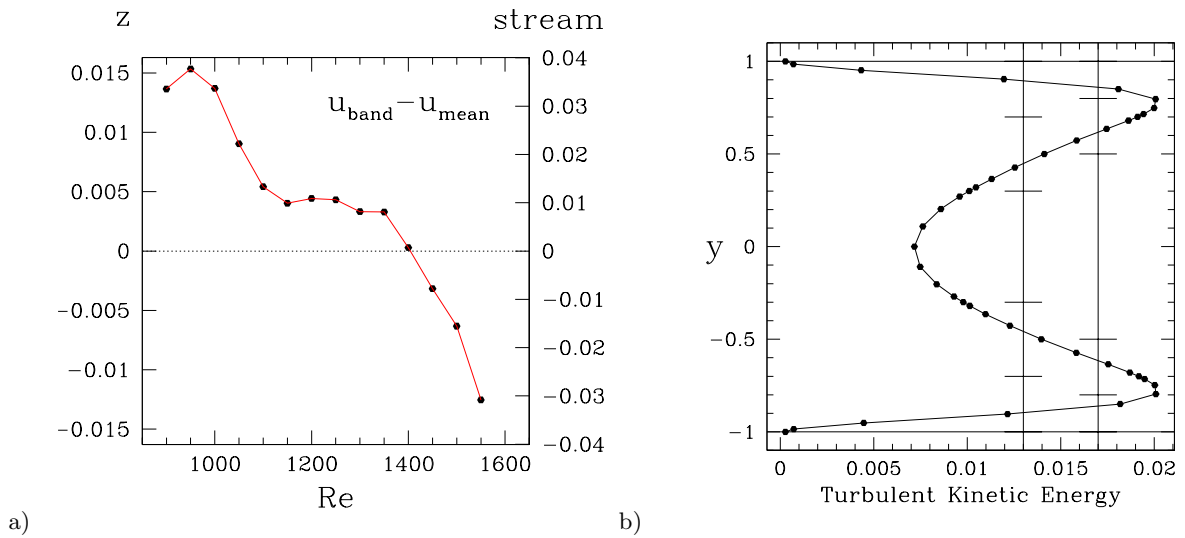
moyennes temporelles du module  $|\hat{w}_m(t)|$  et de la phase  $z_m(t)$  de la transformée de Fourier en  $z$  :

$$w(z, t) = \sum_m \hat{w}_m(t) e^{imz2\pi/L_z} = \sum_m |\hat{w}_m(t)| e^{im(z - z_m(t))2\pi/L_z} \quad (5)$$

ainsi que leurs moyennes temporelles :

$$\langle |\hat{w}_m(t)| \rangle \equiv \frac{1}{1000} \int_{t'=0}^{1000} dt' |\hat{w}_m(t+t')| \quad \langle z_m(t) \rangle \equiv \frac{1}{100} \int_{t'=0}^{100} dt' z_m(t+t'). \quad (6)$$

La figure 5 montre les fonctions de distribution de probabilité (PDFs) des modules des composantes de Fourier  $m = 1$  et  $m = 2$ . Celles-ci correspondent aux quantités montrées dans la figure 4c, mais sans moyenner dans le temps. Pour la turbulence *uniforme*, c'est-à-dire sans motif, le maximum de cette fonction (la valeur la plus probable) est zero. Pour un écoulement avec motif de nombre d'onde  $m$ , la valeur la plus probable de la courbe correspondant à  $m$  est non-nulle. Les PDFs permettent de définir des limites de régimes entre turbulence uniforme ( $Re \approx 1550$ ), motif avec  $m = 2$ ,  $\lambda = 20$  ( $1250 \lesssim Re \lesssim 1500$ ), motif avec  $m = 1$ ,  $\lambda = 40$  ( $900 \lesssim Re \lesssim 1200$ ).



**Figure 6.** a) Vitesse de propagation du motif par rapport à la vitesse moyenne. L'échelle de droite montre la projection de la vitesse de propagation dans la direction longitudinale; elle est relié à l'échelle de gauche par le facteur trigonométrique  $\sin 24^\circ$ . b) Profil de l'énergie cinétique turbulente, montrant sa concentration sur  $0.5 \leq |y| \leq 0.9$ , centrée sur  $y \approx \pm 0.8$ .

La figure 6a montre la vitesse de propagation du motif en fonction de  $Re$ . Vu les définitions (2) et (3), la quantité montrée est

$$\frac{u_{\text{band}} - u_{\text{mean}}}{\frac{3}{2}(u_{\text{mean}} - u_{\text{wall}})}. \quad (7)$$

Le fait que cette vitesse soit si faible traduit le fait que les bandes se déplacent essentiellement à la vitesse du flux moyen. Pour  $Re > 1400$ , elles se propagent vers la gauche et pour  $Re < 1400$  vers la droite. Pour cette raison, les visualisations que nous avons présentées sont prises à  $Re = 1400$ . La figure 6b montre l'énergie turbulente moyennée sur  $x, z, t$ . Comme déjà montré dans la figure 3, l'énergie turbulente est concentrée près des parois.

## Références

1. D. COLES, *J. Fluid Mech.*, **21**, 385 (1965); C. DAVID ANDERECK, S. LIU & H. L. SWINNEY, *J. Fluid Mech.*, **164**, 155 (1986).
2. A. MESEGUER, F. MELLIBOVSKY, M. AVILA & F. MARQUES, *Phys. Rev. E*, **80**, 046315 (2009); S. DONG, *Phys. Rev. E*, **80**, 067301 (2009).
3. A. PRIGENT, G. GRÉGOIRE, H. CHATÉ, O. DAUCHOT & W. VAN SAARLOOS, *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 014501 (2002); A. PRIGENT, G. GRÉGOIRE, H. CHATÉ & O. DAUCHOT, *Physica D*, **174**, 100 (2003).
4. D. BARKLEY D. & L. S. TUCKERMAN, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 014502 (2005); D. BARKLEY & L. S. TUCKERMAN, *J. Fluid Mech.*, **576**, 109 (2007); L. S. TUCKERMAN & D. BARKLEY, *Phys. Fluids*, **23**, 041301 (2011).
5. J. ROLLAND & P. MANNEVILLE, *J. Stat. Phys.*, **142**, 577 (2009); Y. DUGUET, P. SCHLATTER & D. S. HENNINGSON, *J. Fluid Mech.*, **650**, 119 (2010); Y. DUGUET & P. SCHLATTER, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 034502 (2010).
6. T. TSUKAHARA, Y. SEKI, H. KAWAMURA, D. TOCHIO, in *Proc. 4th Int. Symp. on Turbulence and Shear Flow Phen.*, 935–940 (2005); T. TSUKAHARA, K. IWAMOTO, H. KAWAMURA & T. TAKEDA, in *Turbulence, Heat and Mass Transfer 5*, Eds. K. Hanjalic, S. Jakirlic (2006).
7. R. D. HENDERSON, G. E. KARNIADAKIS, *J. Comput. Phys.*, **122**, 191 (1995).

# Dynamique et topologie des vortex magnétiques

Alberto Verga

Université d'Aix-Marseille, IM2NP. Faculté de sciences, Marseille.  
alberto.verga@univ-amu.fr

**Résumé.** Les nanostructures ferromagnétiques supportent des textures à la topologie non triviale, comme des vortex ou skyrmions. Soumises à un courant polarisé en spin l'aimantation évolue par effet du spin-transfert torque. On étudie les mécanismes de dissipation à l'origine des changements de topologie observés, et on propose une généralisation de l'équation de Landau-Lifshitz, pour tenir compte de la source de topologie.

**Abstract.** The magnetization texture in ferromagnetic nanostructures often possesses a nontrivial topology, as in the case of vortices or Skyrmions. Under the action of a spin-polarized current, this texture evolves through the effect of the spin-transfer torque. We investigate the dissipation mechanisms responsible of the topological changes and generalize the Landau-Lifshitz equation in order to take into account the topology source.

## 1 Introduction

Le champ d'aimantation dans les métaux ferromagnétiques ou chiraux (possédant un fort couplage spin-orbite), peut prendre des configurations ayant une topologie non triviale, comme des vortex et skyrmions. Ces textures évoluent sous l'action d'un courant polarisé en spin, par l'effet de spin-transfert torque, et au-dessus d'un seuil, changent de topologie : le cœur du vortex est renversé, le skyrmion s'annihile, des nouveaux vortex sont générés [1]. Du point de vue microscopique, le système se compose d'un réseau de spins fixes couplés aux spins itinérants par l'interaction d'échange. Dans la limite continue, l'approximation quasi-adiabatique permet d'éliminer les électrons, et d'obtenir une équation de Landau-Lifshitz complétée par un terme de spin-transfert torque. Or, cette équation conserve la topologie de l'aimantation. Dans ce travail, on met en évidence les mécanismes de changement de topologie, à partir d'un modèle semi-classique pour les spins fixes et quantique pour les spins itinérants. La dynamique des électrons est gouvernée par l'équation de Heisenberg,

$$i\hbar\dot{c}_i(t) = H_e(t, S_i)c_i(t), \quad (1)$$

où  $c_i$  est l'opérateur d'annihilation d'un électron au site  $i$  d'un réseau carré, et où l'hamiltonien  $H_e$  contient, en plus de l'énergie cinétique, les potentiels d'impuretés et les champs appliqués, le couplage  $J_s$  avec les spins fixes  $S_i$ . Le champ d'aimantation  $S_i(t)$  évolue avec la loi (Landau-Lifshitz)

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}S_i = S_i \times (f_i + J_s s_i), \quad (2)$$

avec  $f_i$  le champ magnétique effectif (créé par les couplages d'échange, spin-orbite, anisotropie, etc.) et  $s_i = \frac{\hbar}{2}\langle c_i^\dagger \boldsymbol{\sigma} c_i \rangle$  le spin des électrons ( $\boldsymbol{\sigma}$  est le vecteur des matrices de Pauli). À la différence de l'approche micromagnétique, des effets fortement non-adiabatiques (localement les spins fixes peuvent suivre les spins électroniques) constituent une source de topologie. En effet, les spins itinérants génèrent un champ magnétique interne,

$$b = \mathbf{n} \cdot \partial_x \mathbf{n} \times \partial_y \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = s/s. \quad (3)$$

par l'intermédiaire d'un champ de jauge  $\mathbf{a}$  lié au changement d'axe de quantification en chaque point  $\mathbf{x} = (x, y) : b = \hat{z} \cdot (\nabla \times \mathbf{a})$ .

Le résultat principal de ce travail est que le torque non-adiabatique  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$ , dans la limite continue, contient un terme source de topologie dont la forme est,

$$\boldsymbol{\tau} = \beta_s \mathbf{s} \times (\mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{s}), \quad (4)$$

où  $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$  est le spinor des électrons, et  $\mathbf{v}_s$  la vitesse des spins itinérants;  $\beta_s$  est une constante sans dimensions caractéristique de la dissipation. Ce terme apparaît naturellement dans la limite non-adiabatique, dans laquelle l'écart du spin fixe par rapport à sa valeur moyenne est donné par la valeur du spin des électrons  $\delta \mathbf{S} \sim \mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ . L'intégration numérique directe des équations couplées spins fixes-électrons montre la riche phénoménologie du changement de topologie.

## 2 Equation de Landau-Lifshitz modifiée par une source de topologie

Dans la limite continue, l'équation de mouvement des électrons (1) devient,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = H_e(t, \mathbf{S}) \psi(\mathbf{x}, t), \quad (5)$$

avec l'hamiltonien

$$H_e = \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla + eEt\hat{\mathbf{x}})^2 - J_s \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\sigma} + V(\mathbf{x}), \quad (6)$$

où  $E$  est le champ électrique uniforme appliqué ( $m$  masse effective de l'électron,  $e > 0$  la charge élémentaire). Le potentiel  $V$  tient compte des impuretés et autres effets aléatoires pouvant contribuer à la relaxation de spin. Il convient d'introduire le système d'unité avec la masse  $m$ , la longueur  $l_0 = \hbar/\sqrt{mJ_s}$  et le temps  $t_0 = \hbar/J_s$ , dans lequel  $m = \hbar = J_s = e = 1$ . Des valeurs typiques sont  $t_0 \sim 10^{-14}$  s et  $l_0 \sim 0.3 \cdot 10^{-9}$  m.

Dans la même limite continue, l'équation pour l'évolution de la texture magnétique (2), s'écrit,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S} = \mathbf{S} \times (\mathbf{f} - \alpha \mathbf{S} \times \mathbf{f} + \mathbf{s}), \quad \mathbf{f} = J \nabla^2 \mathbf{S} - K S_z \hat{\mathbf{z}} + D \nabla \times \mathbf{S}, \quad (7)$$

avec  $J$  la constante d'échange,  $K$  l'anisotropie et  $D$  la constante de Dzialoshinskii-Moriya (couplage spin-orbite); on a aussi introduit explicitement le coefficient  $\alpha$  d'amortissement de la précession. Il faut noter que dans (7) le terme de spin torque contient la valeur moyenne du spin microscopique  $\mathbf{s} = \langle \hat{\mathbf{s}} \rangle$  sur les états quantiques, qui tient compte d'un ensemble d'électrons (moyenne définie par  $\langle \dots \rangle = \text{Tr}[\rho \dots]$ , avec  $\rho$  la matrice densité, qui se réduit à la distribution de Dirac pour un système à l'équilibre thermodynamique). On dérive une équation pour la densité de spin microscopique  $\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2} \psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi$ , directement de (5),

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{s}} + Et\hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{s}} + \nabla \cdot \Im(\frac{1}{2} \psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \otimes \nabla \psi) = \hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{S} - \Gamma, \quad (8)$$

où  $\Gamma$  est le terme de dissipation dû à la diffusion avec les impuretés qui peuvent en général changer le spin par collision. La moyenne sur l'état quantique de (8) peut donc s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{s} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{s} = -\nabla \cdot \mathcal{J}_p + \mathbf{s} \times \mathbf{S} - \langle \Gamma \rangle, \quad \mathbf{v}_s = \Im \langle \psi^\dagger (\nabla - iEt\hat{\mathbf{x}}) \psi \rangle, \quad (9)$$

où on a séparé du tenseur courant de spin  $\mathcal{J} = \frac{1}{2} \Im \langle \psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \otimes \nabla \psi \rangle$  le terme d'advection et le terme de courant « pur » de spin,  $\mathcal{J} = \mathbf{v}_s \otimes \mathbf{s} + \mathcal{J}_p$ . Une propriété importante de l'équation de Landau-Lifshitz du micromagnétisme  $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \times \mathbf{f}$ , est qu'elle conserve, en plus de la norme de  $\mathbf{S}$ , la charge topologique  $Q = \text{const}$ , pour  $\mathbf{f}$  un champ continu et dérivable arbitraire. La charge topologique (un entier pour les textures magnétiques dans le plan) est définie par,

$$Q = \int \frac{d\mathbf{x}}{4\pi} q(\mathbf{x}, t), \quad Q_+ = \int \frac{d\mathbf{x}}{4\pi} |q(\mathbf{x}, t)|, \quad q = \mathbf{S} \cdot \partial_x \mathbf{S} \times \partial_y \mathbf{S}, \quad |\mathbf{S}| = 1 \quad (10)$$

avec  $q$  la densité de charge; on introduit aussi  $Q_+$ , qui est une mesure de nombre de vortex dans le système. Or, l'équation (7) est stochastique, puisqu'elle dépend de la réalisation du potentiel aléatoire  $V$ . On se propose de dégager de (5) et (7) une source effective de topologie, tout en gardant le caractère continu et déterministe de l'évolution de la texture magnétique  $\mathbf{S}$  moyennée sur le bruit.

L'objectif est d'éliminer des équations (5) et (7) le potentiel aléatoire en séparant la contribution moyenne de la fluctuante dans le spinor  $\psi \rightarrow \psi + \delta\psi$ ; de même on a  $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s} + \delta\mathbf{s}$  et  $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S} + \delta\mathbf{S}$ , où maintenant on note  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{s}$  les valeurs moyennes indépendantes du bruit. L'équation différence entre le spin fixe total (7) et sa fluctuation (termes  $\mathcal{O}(\delta)$ ), donne une équation pour les valeurs moyennées sur le potentiel aléatoire plus un terme de fluctuation,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S} = \mathbf{S} \times (\mathbf{f} - \alpha\mathbf{S} \times \mathbf{f} + \mathbf{s}) + \delta\mathbf{S} \times \delta\mathbf{s}, \quad (11)$$

qui est apparemment d'ordre supérieur  $\mathcal{O}(\delta\delta)$ , mais qui contient en fait une contribution « lente », combinaison de deux contributions « rapides ». Parmi les multiples termes  $\mathcal{O}(\delta)$  de l'équation pour  $\delta\mathbf{S}$  on ne retient que le bilan  $\delta\mathbf{S} \sim \delta\mathbf{S} \times \mathbf{s}$ , seul susceptible de changer la charge topologique totale, en combinaison avec  $\delta\mathbf{s}$ . Plus précisément, on ne garde que des termes pouvant donner une contribution parallèle à  $\mathbf{S}$ , car les contributions strictement perpendiculaires conservent la topologie. Or la solution « lente » de cette équation est simplement

$$\delta\mathbf{S} \sim \pm\mathbf{s},$$

qui annule le spin-transfert torque à cet ordre. Il faut insister sur le fait que  $\delta\mathbf{S} \sim \mathbf{s}$  recouvre un effet fortement non adiabatique, la fluctuation du spin fixe suit le spin de l'électron plutôt que le contraire où le spin itinérant s'alignerait sur le spin fixe (limite adiabatique  $\delta\mathbf{S} = 0$ ).

Pour compléter le calcul il nous reste à déterminer  $\delta\mathbf{s}$ , ce qui nécessite de résoudre à l'ordre  $\mathcal{O}(\delta)$  l'équation (9); comme dans le cas de  $\mathbf{S}$  on cherche les termes qui peuvent contribuer au changement de topologie, directement liés à la dissipation. À l'ordre  $\mathcal{O}(\delta)$ , on peut écrire que la dissipation  $\langle \Gamma \rangle \sim \delta\mathbf{s}/\tau_c$ , avec  $\tau_c$  le temps de collision de retournement du spin itinérant, est balancée par la dérivée convective de  $\mathbf{s}$  et le spin torque. Comme le torque  $\delta\mathbf{S} \times \mathbf{s}$  s'annule, on doit avoir (encore négligeant la dérivée temporelle)

$$\delta\mathbf{s} \sim -\tau_c \mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{s}$$

plus des termes perpendiculaires à  $\mathbf{S}$ . Combinant les deux expressions de  $\delta\mathbf{S}$  et  $\delta\mathbf{s}$  dans (11), on aboutit à l'équation modifiée de Landau-Lifshitz,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S} = \mathbf{S} \times (\mathbf{f} - \alpha\mathbf{S} \times \mathbf{f} + \mathbf{s}) + \beta_s \mathbf{s} \times (\mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{s}), \quad \mathbf{s} = \frac{1}{2}\langle \psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi \rangle \quad (12)$$

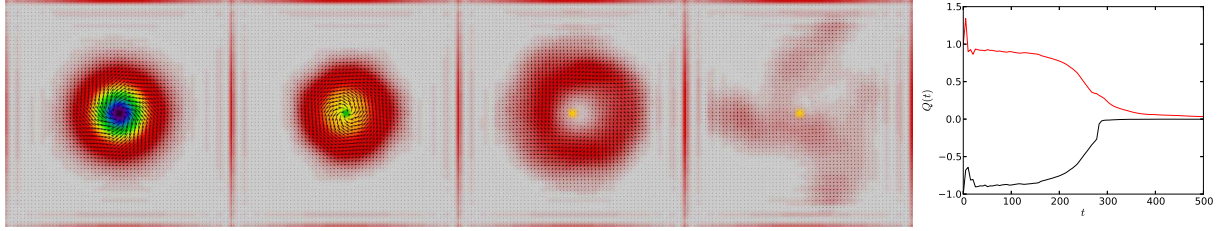
dans laquelle on a le coefficient sans dimensions  $\beta_s = \tau_c J_s / \hbar$  qui caractérise le processus de dissipation à l'origine de la source de topologie. En outre, le spin itinérant en (12) est calculé à l'aide de la fonction d'onde moyenne, qui satisfait l'équation de Schrödinger,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2}\nabla^2\psi(\mathbf{x}, t) - \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}\psi(\mathbf{x}, t). \quad (13)$$

La présence du terme de spin-transfert torque  $\mathbf{S} \times \mathbf{s}$  et de la source permettent de tenir compte des effets adiabatiques et faiblement non-adiabatiques de couplage entre les spins itinérants et fixes. Par exemple, si  $\mathbf{s} \sim \mathbf{S}$  le terme en  $\beta_s$  se réduit au terme habituel de spin-transfert torque [2] (qui conserve la norme des spins fixes).

La source dans (12) brise la conservation de la charge topologique et de la norme de  $\mathbf{S}$ , ce qui permet d'anticiper que la phénoménologie du changement de la charge topologique sera modifiée par rapport aux changements associés à la discrétisation des modèles micromagnétiques [3]. Le signe  $\beta_s > 0$  correspond à un amortissement de la partie de  $\mathbf{S}$  parallèle à  $\mathbf{s}$ , puisque  $\mathbf{s} \times (\mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{s}) \sim -\mathbf{S}_\parallel$ , comme on peut le voir de (9). Avec le signe contraire, en principe possible, il tend à rallonger la norme de  $\mathbf{S}$ , et au même temps, à inhiber la formation de structures localisées de topologie non triviale (défauts topologiques).





**Figure 1.** Annihilation d'un skyrmion par un courant polarisé en spin. Aimantation aux  $t = 0, 260, 350, 500 t_0$ , panneaux à gauche ; évolution de la charge topologique (en noir) et du nombre de vortex (en rouge), à droite. Les flèches correspondent aux composantes  $(S_x, S_y)$ , et la couleur à  $S_z$  ( $S_z = -1$  noir,  $S_z = 1$  blanc). La taille de la boîte est de  $64 \times 64 l_0^2$ . La deuxième image correspond au moment où s'effectue le changement de topologie ; la troisième image montre l'expansion d'une forte onde de spin, générée par l'annihilation des structures de charges topologiques opposées.

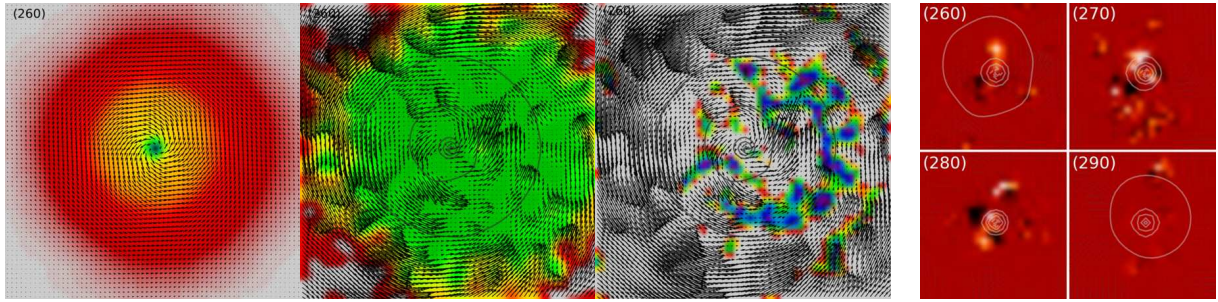
### 3 Phénoménologie du changement de topologie

On a effectué des simulations numériques de l'évolution des textures de spin bi-dimensionnelles soumises à un courant polarisé en spin, par intégration numérique des équations couplées de Schrödinger (13) et Landau-Lifshitz (12) avec le terme de dissipation qui permet de rendre compte des changements de topologie dans la limite continue. Le code numérique utilise un algorithme pseudo-spectral pour les dérivées spatiales, une méthode de Runge-Kutta pour le pas de temps de spins fixes et une méthode utilisant des opérateurs unitaires (qui conservent la norme) pour l'évolution de la fonction d'onde. Le système considéré est un carré, avec des conditions de bord périodiques, de côté  $L = 64 l_0$ . La discrétisation spatiale se fait sur une grille de  $128^2$  ou  $256^2$  (avec de résultats sensiblement identiques). La condition initiale est d'abord relaxée pour s'assurer que la distribution des spins fixes est une solution stationnaire de l'équation de Landau-Lifshitz en absence de courant ; on applique ensuite le champ électrique pour suivre la dynamique des spins couplés.

Dans la figure 1 on montre une séquence de l'évolution d'un skyrmion de Belavin et Polyakov, conjointement à la charge topologique. Cette condition initiale possède une charge topologique  $Q = -1$ . On remarque que la charge topologique, bien que proche de  $-1$  sur un temps long, progressivement diminue (en valeur absolue) pour brusquement s'annuler autour de  $t = 260 t_0$ . Ceci confirme l'action du terme de dissipation, source de topologie, qui rend la transition plus douce et progressive que dans le cas où les échelles dominantes sont celles du réseau microscopique. La distribution des spins fixes évolue en réponse au courant de spins itinérants, par un mouvement de précession qui ne modifie pas la topologie. Progressivement le cœur du skyrmion se déforme et diminue de taille, comme on peut le constater en comparant les deux premières images de la figure 1, avec la condition initiale et le champ juste avant le changement de topologie ( $t \approx 260 t_0$ ). Après le changement de topologie, une forte onde de spin se propage, laissant derrière elle le résidu du noyau du skyrmion qui a subi une transformation irréversible, avec une diminution de la longueur de spins fixes (les deux dernières images).

Les détails de la disparition du cœur du skyrmion autour de  $t = 260 t_0$  sont montrés dans les panneaux de la figure 2. Les spins fixes (premier panel à gauche) passent de la valeur  $S_z = 1$  (blanc) dans la périphérie, à  $S_z = -1$  au centre (noir). Les spins itinérants (deuxième panel) ont une distribution spatiale (et temporelle) plus complexe, avec une tendance à se polariser selon les  $z$  positifs (ceci est assuré numériquement par un faible champ magnétique n'agissant que sur les électrons). Les spins itinérants et fixes ne sont pas alignés sur une large région du centre du skyrmion, ce qui se traduit par un important spin-transfert torque (troisième panel). On peut aussi mentionner que le cœur du skyrmion agit comme une barrière de potentiel pour les spins itinérants : la densité d'électrons dans cette région a donc tendance à diminuer. C'est justement quand le courant de spin pénètre le cœur des vortex magnétiques, que l'interaction entre les spins fixes et mobiles peut conduire vers des modifications de la topologie. Il est aussi important de remarquer la différence d'échelles caractéristiques de variation de la texture magnétique,





**Figure 2.** Détail du changement de topologie : aimantation, spin et spin torque (de gauche à droite). Les lignes de contour correspondent à  $S_z = \text{const}$ , la couleur, de noir-bleu à rouge-blanc, est proportionnel à la composante  $z$  du vecteur représenté. (Région centrale  $32 \times 32 l_0^2$ .) Le panel de droite montre le champ magnétique interne  $b$  au moment de la transition ( $t \approx 260 t_0$ ). Ce champ est presque nul partout, sauf dans des régions localisées autour du cœur du skyrmion, où les structures de topologie non triviale se multiplient (noir  $b = -0.5$ , blanc  $b = 1$ ).

supportée par les spins fixes, et des spins itinérants. À la différence de spins fixes dont la norme est pratiquement conservée, la norme des spins quantiques  $\mathbf{s}$  est arbitraire (elle dépend de la densité de probabilité des électrons); en outre, leurs échelles d'évolution temporelle et spatiales sont bien plus rapides que celles des spins fixes, dont les variations sont essentiellement celles dominées par les interactions d'échange.

Le dernier panel, à droite, permet de donner une explication qualitative au changement de topologie. On y représente le champ interne  $b$  de l'équation (3), crée par un champ de jauge  $\mathbf{a}$  dont l'origine réside dans le changement d'axe de quantification en chaque point (et chaque instant) dû à la présence de la texture magnétique, qui apparaît dans l'hamiltonien (6) comme un champ extérieur instationnaire et inhomogène. En effet, à l'aide d'une rotation  $U(\mathbf{x}, t)$  on ramène l'axe local de quantification vers l'axe  $z$ , ce qui se traduit par l'apparition d'un champ vecteur  $\mathbf{a} = -iU^\dagger \nabla U$ . Au prix de l'introduction du champ de jauge, on sépare complètement les spins plus et moins dans l'équation de Schrödinger, permettant donc de définir des états propres de spin. Le champ interne  $b$  résulte du choix de l'axe du spin itinérant comme axe de quantification. Ce choix, contraire à celui usuel de l'axe selon  $\mathbf{S}$ , sert à visualiser le champ  $b$  associé aux spins des électrons, lequel étant en fait une densité de charge topologique (comparer à (10)), va intervenir dans la dynamique du changement de topologie des spins fixes. On voit effectivement dans la figure 2 (panel de droite) que le champ  $b$ , durant le changement de topologie du skyrmion, se distribue autour du noyau sur des multiples concentrations auxquelles on peut associer une charge de  $-1/2$  (noir) à 1 (blanc). Rappelons que la charge du skyrmion est de  $-1$ . Le changement de topologie que fait passer le système de sa charge initiale  $-1$  vers un état de topologie triviale, de charge nulle  $Q = 0$ , nécessite par conséquent la nucléation d'une charge  $Q = 1$ . Or, ce qu'on observe c'est précisément l'apparition de telles structures de charge topologique  $Q = 1$ , non pas dans le champ de spins fixes mais dans celui du courant de spins mobiles. Le mécanisme de changement de topologie requiert en définitive l'asservissement des spins fixes du cœur des vortex, aux spins itinérants : c'est par leur intermédiaire que les structures de charge topologique opposée indispensables au changement de topologie sont formées. L'annihilation d'objets de charge topologique opposées permet ce passage. Il s'agit d'un processus proche d'une singularité (en absence de dissipation), qui déclenche l'émission des fortes ondes de spin (dont le début et le front de propagation sont visibles dans la deuxième et la troisième image de la figure 1, respectivement).

## 4 Conclusion

L'hypothèse d'une contribution au spin-transfert torque provenant d'une réponse des spins fixes  $\delta \mathbf{S} \sim \mathbf{s}$  dans la direction des spins itinérants conduit à une modification de l'équation de Landau-Lifshitz du micromagnétisme qui rend compte de la brisure de la conservation de la charge topologique. La présence

du terme source de spin-transfert torque d'origine dissipative, modifie qualitativement l'évolution de la texture de spin étendant en particulier la région au cœur du vortex où les processus de génération et interaction de défauts topologiques se produisent. Cependant, le mécanisme de changement de topologie reste essentiellement le même qu'en absence de dissipation, il est gouverné par l'asservissement à l'échelle du noyau du vortex, des spins fixes à la dynamique des spins mobiles. La différence étant que l'échelle de coupure n'est pas celle du réseau microscopique, mais elle est déterminée par le mécanisme dissipation qui agit notamment sur la norme des spins fixes (contribution parallèle à  $\mathbf{S}$ ).

Une augmentation de la résolution spatiale ne modifie pas le scénario de changement de topologie. Cependant elle permet de confirmer l'étalement de la charge topologique générée par les spins itinérants sur plusieurs cellules de calcul. La différence la plus importante vient du décalage dans le temps du point de changement de topologie, changement qui se produit par paliers, jusqu'à l'effondrement soudain du cœur accompagné de la brusque émission d'ondes de spin. Ce point, qui a trait à la dynamique de la singularité magnétique, mérite une étude supplémentaire.

Dans quelle mesure pourrait-on remplacer le terme source, dépendant de la dynamique rapide des électrons, par un terme de dissipation phénoménologique dépendant exclusivement de  $\mathbf{S}$ , reste à rechercher. L'avantage d'une telle approche serait d'éliminer les échelles fortement variables au bénéfice de la dynamique lente de la texture magnétique.

## Références

1. R. G. ELIAS & A. VERGA, Topological changes of two-dimensional magnetic textures, [arXiv:1301.0924](#) [cond-mat.mes-hall] (2013).
2. S. ZHANG & Z. LI, Roles of nonequilibrium conduction electrons on the magnetization dynamics of ferromagnets, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 127204 (2004).
3. A. THIAVILLE, J. M. GARCÍA, R. DITTRICH, J. MILTAT & T. SCHREFL, Micromagnetic study of Bloch-point-mediated vortex core reversal, *Phys. Rev. B*, **67**, 094410 (2003).

# Éclatement de bulles ou de films minces : vers la limite acoustique

Valérie Vidal<sup>1</sup>, Brayan Álvarez<sup>2</sup>, Claudia Sánchez<sup>2</sup> & Francisco Melo<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique, Université de Lyon, Ecole normale supérieure de Lyon - CNRS  
46 Allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France

<sup>2</sup> Laboratorio de Física No Lineal, Universidad de Santiago de Chile  
Av. Ecuador 3493, Estación Central, Santiago, Chile

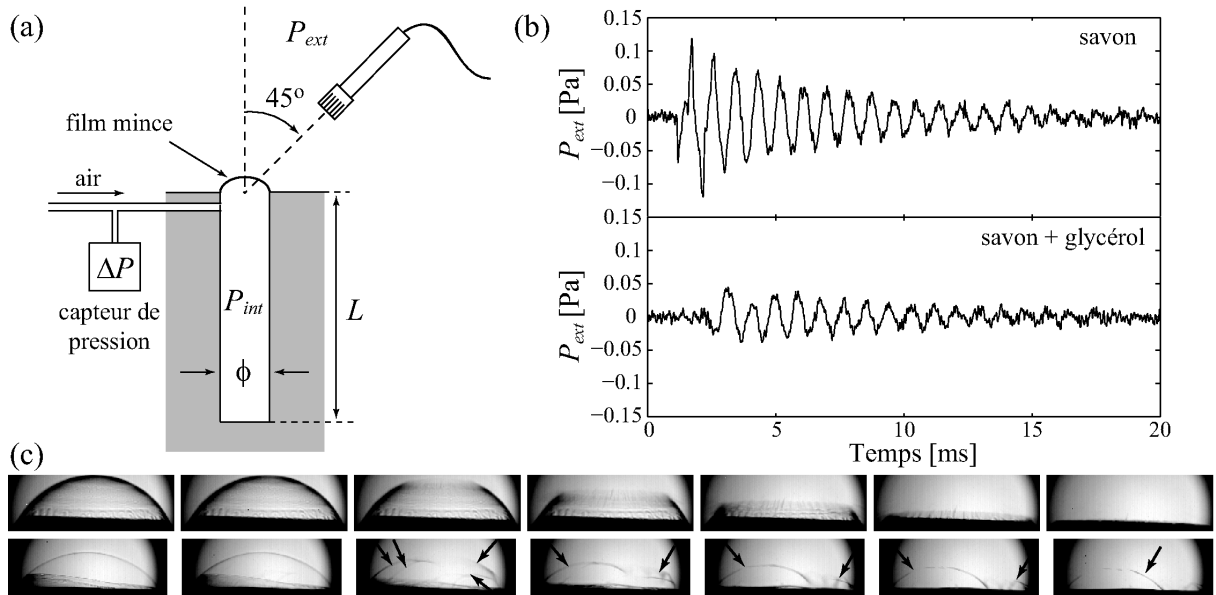
valerie.vidal@ens-lyon.fr

**Résumé.** L'analyse des signaux acoustiques générés par l'éclatement de bulles est une méthode non-intrusive qui permet d'accéder à des informations sur le système sans le perturber. Connaître précisément les informations que l'on peut extraire, ainsi que leur lien avec la source, est utile non seulement pour la connaissance des mécanismes fondamentaux impliqués dans ce processus, mais aussi pour des applications pratiques dans le cadre de phénomènes naturels – en particulier, la dynamique explosive de bulles de gaz géantes sur les volcans. Nous avons réalisé l'étude expérimentale des signaux acoustiques générés par l'ouverture d'une cavité cylindrique en surpression (bulle 'modèle'), initialement fermée par un film liquide mince ou une membrane élastique. Nous explorons la limite acoustique : pour des temps de rupture grands devant le temps de propagation de l'onde dans la cavité, aucun son n'est généré ; pour des surpressions initiales de l'ordre ou au-delà de la pression atmosphérique, une forte augmentation de l'amplitude de l'onde rayonnée est observée.

**Abstract.** Analyzing the acoustic signal generated by bubble bursting is a non-intrusive method which makes possible to access to information about the system, without perturbing it. The precise knowledge of the information that can be extracted, together with their link with the source parameters, is useful not only to increase the fundamental knowledge of the mechanisms involved in this process, but also for practical applications – in particular, natural phenomena such as the explosive dynamics of giant gas bubbles on volcanoes. We present the experimental study of acoustic signals generated by the opening of an overpressurized cylindrical cavity ("model bubble") initially closed by a thin liquid film or an elastic membrane. We explore the acoustic limit: for rupture times longer than the wave propagation time in the cavity, no sound is generated; for initial overpressures of the order or above the atmospheric pressure, a significant increase of the radiated pressure is observed.

## 1 Introduction

Dans différents phénomènes physiques, l'éclatement de bulles génère un signal acoustique dont les caractéristiques permettent d'accéder à certaines propriétés du système. L'activité de certains volcans se traduit ainsi par la remontée et l'éclatement de bulles dans le conduit volcanique : le gaz dissous dans le magma en profondeur engendre la nucléation et la coalescence de bulles lors de sa remontée [1]. Ce processus conduit parfois à l'observation de bulles de gaz géantes (« *slugs* ») de forme très allongée, qui occupent tout le diamètre du conduit [2–5]. Afin de comprendre quelles informations on peut extraire des signaux acoustiques enregistrés, nous avons modélisé en laboratoire l'éclatement de ces bulles par une cavité cylindrique en surpression, fermée par un film liquide ou une membrane dont l'éclatement génère, sous certaines conditions, une onde acoustique. Cette configuration permet de contrôler l'ensemble des paramètres du système : géométrie de la « bulle modèle » (diamètre, longueur), surpression à l'intérieur de la bulle avant l'éclatement, etc. Des résultats précédents nous ont permis de montrer que la fréquence de l'onde acoustique émise est directement reliée à la longueur  $L$  de la cavité par la relation  $\lambda = 4(L + \delta L)$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde du mode fondamental et  $\delta L$  une correction de longueur due au processus de radiation de l'onde à l'extérieur du tube [6]. Si la fréquence est fixée par la résonance de l'onde dans le tube, l'amplitude du signal acoustique enregistré, quant à elle, n'est pas prédictible. Nous avons montré



**Figure 1.** (a) Dispositif expérimental. (b) Signaux acoustiques enregistrés pour l'éclatement de deux films minces de composition différente : film de savon (haut) et savon + glycérol (bas) [ $\Delta P \simeq 20$  Pa pour les deux signaux]. (c) Dynamique d'éclatement du film mince [8000 img/s,  $\phi = 10$  mm]. *Haut* : Pour les films de savon, un trou s'ouvre à vitesse constante. *Bas* : les films visqueux (savon + glycérol) s'ouvrent en étirant des filaments (flèches noires).

qu'elle dépend du temps de rupture du film, qui peut varier d'une expérience à l'autre, tous les autres paramètres étant fixés par ailleurs. L'impossibilité de relier, dans cette expérience simple, l'amplitude de l'onde acoustique à la surpression dans la bulle avant l'éclatement montre la difficulté, sur le terrain, de décrire correctement la partition d'énergie entre les signaux sismiques et acoustiques [7]. De plus, sur les volcans, les surpressions peuvent atteindre des valeurs proches ou au-delà de la pression atmosphérique [4]. On sort alors du cadre de l'acoustique linéaire, et d'autres phénomènes entrent en jeu.

Nous présentons des résultats préliminaires de deux séries d'expériences visant à explorer la limite acoustique. Dans une première série d'expériences, la cavité cylindrique est fermée par un film liquide mince. À l'aide d'une caméra rapide, et en utilisant des films de différentes viscosités, nous regardons sous quelles conditions l'éclatement du film est capable de générer (ou pas) une onde acoustique. Dans une deuxième série d'expériences, le tube est fermé par une membrane élastique. Cette configuration permet d'imposer des surpressions initiales au-delà de la pression atmosphérique. Nous analysons l'effet sur les signaux acoustiques enregistrés, en regardant en particulier la dynamique de rupture de la membrane.

## 2 Influence de la dynamique de rupture

Le dispositif expérimental est présenté sur la figure 1a (voir réfs. [6] et [7] pour plus de détails) : une cavité cylindrique, de longueur  $L$  et de diamètre  $\phi$ , est creusée dans un bloc de plexiglas. L'extrémité ouverte de cette cavité est fermée par un film liquide mince (solution de savon ou savon+glycérol pour augmenter la viscosité du film). De l'air est injecté dans la cavité à l'aide d'une seringue, jusqu'à atteindre une surpression donnée  $\Delta P$ . Le film, dont le rayon de courbure  $R_c$  est alors fixé par la loi de Laplace,  $\Delta P = 4\gamma/R_c$ , où  $\gamma$  est la tension de surface (typiquement,  $\gamma \simeq 30$  mN/m), s'amincit alors par drainage sous l'effet de la gravité [8] et, après un temps allant de quelques secondes à quelques dizaines de secondes, éclate. Le signal acoustique généré à l'extérieur de la cavité,  $P_{ext}$ , est enregistré par un microphone (Bruel & Kjaer 4193 avec préamplificateur 2669-L + amplificateur conditionneur Nexus), et la dynamique d'éclatement du film est suivie par une caméra rapide PHOTRON Fastcam 1024 (max. 10000 img./s), placée sur le côté de l'expérience.

La dynamique d'ouverture d'un film de savon est entièrement contrôlée par l'inertie : sa vitesse d'ouverture est constante, et s'écrit  $v = \sqrt{2\gamma/\rho e}$  où  $\rho$  est la masse volumique du fluide et  $e$  l'épaisseur du film au moment de l'éclatement [9, 10]. Pour une solution de savon donnée, le temps de rupture du film dépend donc directement de son épaisseur  $e$ , elle-même contrôlée par le drainage complet (film noir de Newton) ou incomplet du film. Afin d'explorer les variations du signal acoustique due à des dynamiques d'ouverture différentes, nous avons choisi de travailler avec des solutions plus visqueuses (savon + glycérol). Il a été montré que dans le cas de films visqueux, la dynamique d'ouverture est exponentielle et le rayon du trou est donné par :  $R(t) = R_0 \exp(t/\tau)$ , avec  $\tau = \eta e/\gamma$  où  $\eta$  est la viscosité dynamique du fluide [11–13]. Les figures 1b et c présentent des résultats préliminaires lorsqu'on enregistre le signal acoustique généré par l'éclatement de tels films. On observe que  $P_{\text{ext}}$  est systématiquement plus faible que pour les films de savon (figure 1b).

Des travaux précédents sur l'éclatement de films de savon ont montré que l'amplitude du signal extérieur  $P_{\text{ext}}$  dépendait non seulement de la surpression initiale à l'intérieur de la cavité,  $\Delta P$ , mais aussi d'un paramètre non contrôlé dans les expériences : le temps de rupture du film [6, 7]. À  $\Delta P$  fixé, tous les autres paramètres de l'expérience étant fixés par ailleurs (géométrie de la cavité, physico-chimie du film mince), l'amplitude du signal de pression à l'intérieur ( $P_{\text{int}}$ ) ou à l'extérieur  $P_{\text{ext}}$  de la cavité peut ne pas être reproductible. Nous avons montré que la quantité d'énergie transférée aux modes acoustiques dépend du rapport entre deux temps caractéristiques du système : le temps de rupture du film  $\tau_r$ , et le temps caractéristique de propagation de l'onde dans la cavité,  $\tau_{\text{prop}} = 2L/c$ , où  $c \simeq 346$  m/s est la vitesse du son dans l'air à température ambiante. Les résultats sur l'éclatement de films visqueux sont en accord avec les précédents : lorsque la viscosité augmente,  $\tau_r$  augmente et pour  $\tau_r \geq \tau_{\text{prop}}$ , l'amplitude du signal acoustique décroît drastiquement. Lorsque les films deviennent trop visqueux, la dynamique d'ouverture n'est plus la croissance d'une ouverture circulaire (figure 1c, haut pour le savon), mais le film d'ouvre en étirant des filaments visqueux (figure 1c, bas, flèches noires).

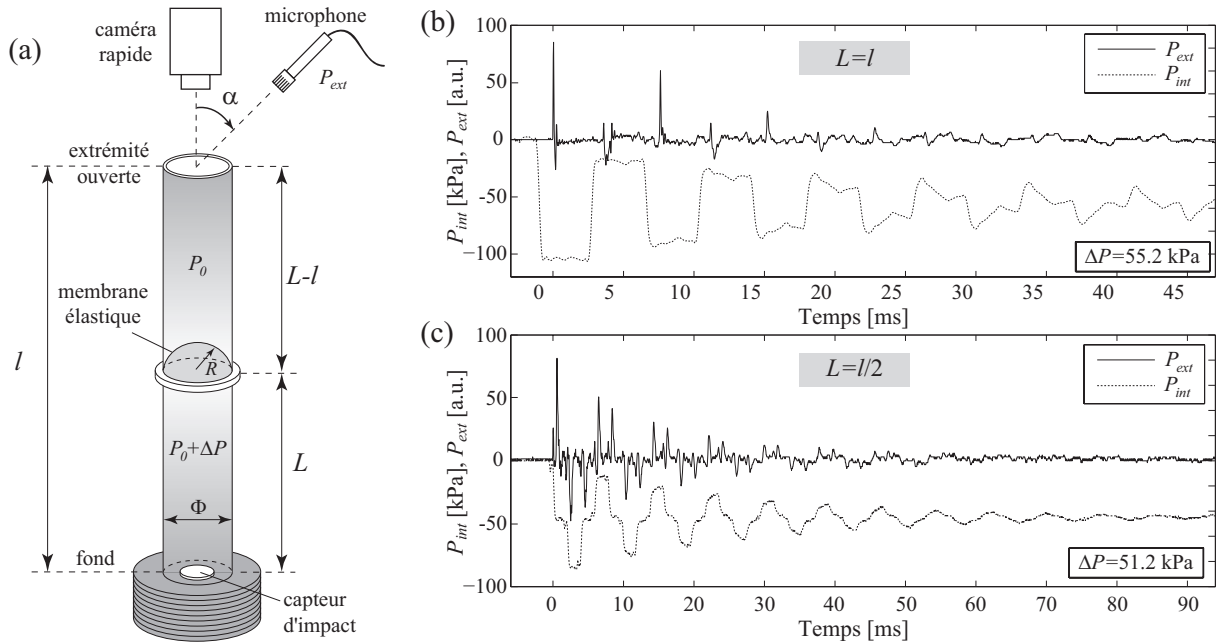
Afin de mieux contrôler la dynamique d'ouverture du film, mais aussi pour aller vers des surpressions initiales  $\Delta P$  plus importantes, nous avons réalisé une deuxième série d'expériences, présentée dans la section suivante, en remplaçant le film liquide par une membrane élastique.

### 3 Influence de la surpression initiale : vers des régimes non-linéaires

#### 3.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est présenté sur la figure 2a. Une membrane élastique (en latex) ferme l'extrémité d'une cavité cylindrique creusée dans du plexiglas. La cavité a une longueur  $L = 0.32$  m et un diamètre intérieur  $\phi = 25.4$  mm. On injecte de l'air dans le tube, jusqu'à atteindre une surpression  $\Delta P$ . Une caméra vidéo (Thorlabs DCC1545M - High Resolution USB2.0 CMOS Camera, 1280x1024, monochrome), placée sur le côté, permet de visualiser le gonflement de la membrane et de calculer son rayon de courbure. Une aiguille asservie par un moteur descend à vitesse fixée et vient piquer le centre de la membrane, qui éclate. On enregistre d'une part, le signal acoustique à l'extérieur du tube, par un microphone (ATM33a, Audio-Technica + préamplificateur Eurorack UB802 ou PCB 1/4" microphone 377A10 + préamplificateur 426B03) placé à une distance  $d = 1$  m de l'ouverture du tube, avec un angle  $\alpha = 45^\circ$  par rapport à la verticale ; d'autre part, la pression au fond de la cavité, avec un capteur d'impact (Force sensor PCB Piezotronics PCB 200B02 + amplificateur x100 PCB 482A16). L'acquisition des deux signaux se fait par l'intermédiaire de deux oscilloscopes Tektronix TDS2012B (base de temps à 10 ms). On peut suivre l'ouverture de la membrane élastique, et ainsi estimer son temps de rupture, à l'aide d'une caméra rapide Phantom v9.1 (acquisition entre 10000 et 15000 images/sec).

Les figures 2b et c présentent des exemples du signal acoustique et du signal de pression enregistrés, pour différentes positions de la membrane dans le tube. Noter la différence dans la forme du signal de pression au fond suivant la position initiale de la membrane. On observe sur le signal de pression au fond du tube ( $P_{\text{int}}$ ) les aller-retour de l'onde dans la cavité. Les modes résonnants qui se développent sont ensuite transmis à l'extérieur par radiation.



**Figure 2.** (a) Dispositif expérimental. On impose une surpression  $\Delta P$  à l'intérieur d'une cavité cylindrique fermée par une membrane (épaisseur  $e$ ) placée à distance  $L$  du fond. Lors de l'éclatement de la membrane, on enregistre le signal acoustique à l'extérieur,  $P_{ext}$ , ainsi que les variations du signal de pression au fond du tube,  $P_{int}$  [ $e = 0.5$  mm,  $l = 0.32$  m,  $\phi = 25.4$  mm]. (b,c)  $P_{ext}$  (traits pleins) et  $P_{int}$  (pointillés) pour une membrane initialement à  $L = l$  [(b), microphone ext. Audiotechnica,  $\Delta P = 55.2$  kPa] ou  $L = l/2$  [(c), microphone ext. PCB,  $\Delta P = 51.2$  kPa].

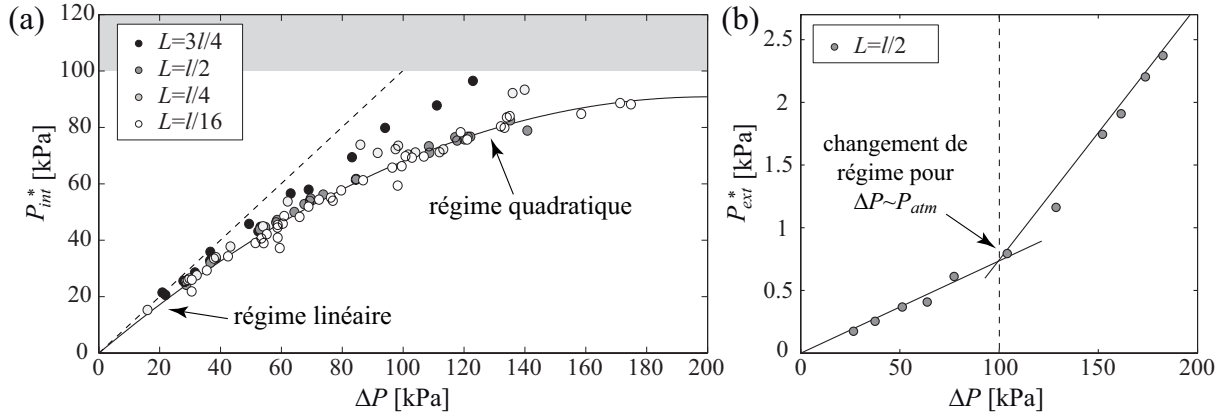
### 3.2 Amplitude du signal acoustique

Lors de la rupture de la membrane, le front de pression qui se propage dans la cavité va d'une part, se réfléchir au fond et d'autre part, se propager à l'extérieur par radiation. Dans le régime d'acoustique linéaire ( $\Delta P \ll P_{atm}$ ), la valeur de  $P_{int}$  au fond de la cavité passe de  $+\Delta P$  à  $-\Delta P$ . Pour  $\Delta P > P_{atm}$  ( $\approx 100$  kPa), le front incident ne peut plus se réfléchir en une onde d'amplitude identique et on s'attend à observer des effets non-linéaires, en particulier sur le premier pic de pression.

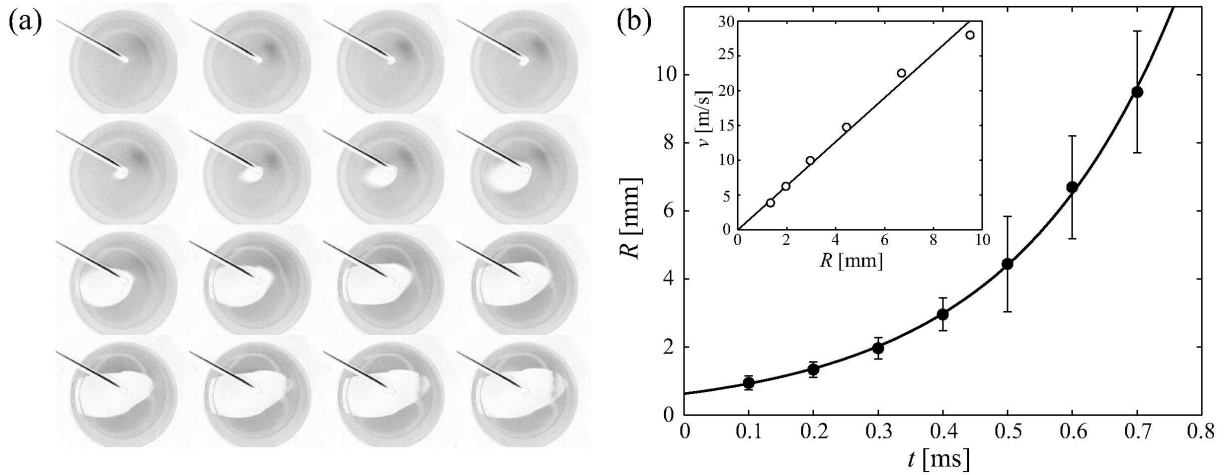
L'amplitude du signal de pression au fond de la cavité (demie-valeur  $P_{int}^*$  du saut de pression initial) est mesurée pour différentes positions de la membrane dans le tube (figure 3a). Les données se rassemblent sur une courbe maîtresse pour laquelle on observe deux régimes : le régime linéaire attendu ( $P_{int}^* = \Delta P$ ) pour  $\Delta P \leq 40$  kPa, et un régime quadratique au-delà. Cette forme parabolique a récemment été rapportée, de manière empirique, dans le cas de tubes à ondes de choc [14]. La figure 3b représente l'amplitude du signal acoustique qui se propage par radiation à l'extérieur de la cavité,  $P_{ext}^* = \sqrt{2}\text{RMS}(P_{ext})$  où la RMS est calculée sur le premier pic de pression. C'est sur ce pic que, tout comme pour  $P_{int}^*$ , on s'attend en effet à observer un régime différent lorsque  $\Delta P$  devient de l'ordre de  $P_{atm}$ . Les données, représentées pour  $L = l/2$ , montrent un changement de régime : pour  $\Delta P \geq P_{atm}$ , on observe une forte augmentation de l'amplitude  $P_{ext}^*$  de l'onde rayonnée. On peut attribuer cette augmentation à l'impossibilité pour l'onde intérieure de se réfléchir à l'extrémité ouverte avec une amplitude supérieure à 1 atm.

### 3.3 Dynamique de rupture de la membrane

La figure 4a présente une séquence d'images associée à l'ouverture de la membrane élastique. On montre qu'aux temps courts, l'ouverture suit une loi exponentielle :  $R = R_0 \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$  avec  $R_0 = 0.63$  mm et  $\tau = 0.26$  ms (figure 4b). Cette loi empirique est similaire à la dynamique d'ouverture d'un trou



**Figure 3.** (a) Demie-valeur  $P_{int}^*$  du saut de pression dans la cavité en fonction de la surpression initiale  $\Delta P$ , pour différentes positions de la membrane. La région en grisée correspond à une zone interdite (cf. texte). La ligne en pointillée indique le régime linéaire, pour lequel  $P_{int}^* = \Delta P$ . En gris, fit quadratique des données pour  $L = l/16$ . (b) Amplitude du signal acoustique mesuré à l'extérieur [ $P_{ext}^* = \sqrt{2}\text{RMS}(P_{ext})$  où la RMS est calculée sur le premier pic de pression]. On distingue un changement de régime lorsque  $\Delta P$  devient supérieur à la pression atmosphérique. [Les données pour (a) et (b) sont pour un temps de rupture de la membrane constant.]



**Figure 4.** (a) Images de rupture de la membrane élastique, vue de dessus [résolution  $384 \times 320$ , 10000 img/s, diamètre du tube  $\phi = 25.4$  mm, épaisseur de la membrane  $e = 0.5$  mm]. On aperçoit sur les images le bras mécanique qui tient l'aiguille venant percer la membrane au centre. Les couleurs sont inversées pour la lisibilité de l'image [tension initiale de la membrane  $\sigma \simeq 10^6$  Pa]. (b) Rayon de l'ouverture  $R$  en fonction du temps pour la séquence d'images présentée en (a) [en noir, fit exponentiel, voir texte]. *Insert* : Vitesse d'ouverture  $v$  en fonction de la taille du trou.  $v$  dépend linéairement de  $R$  aux temps courts.

dans un film viscoélastique (voir section 2) [11–13]. Le tracé de la vitesse en fonction de la taille du trou montre une dépendance linéaire, confirmant cette loi (figure 4b, insert). Noter que dans ce cas,  $\tau_r \simeq \tau \ll \tau_{prop} = 2L/c = 1.8$  ms. On est bien dans un régime où la quasi-totalité de l'énergie se convertit en énergie acoustique (voir figures 2a et b).

Pour une tension initiale de la membrane  $\sigma$  constante, et pour une membrane d'épaisseur  $e$  donnée, on montre que la dynamique d'ouverture de la membrane est invariante, et permet donc de contrôler plus précisément qu'avec un film liquide le temps de rupture, et donc les conditions pour lesquelles on va générer efficacement (ou pas) une onde acoustique.

## 4 Conclusion

Lorsqu'une cavité en surpression s'ouvre par éclatement d'un film liquide ou d'une membrane élastique, on génère une onde acoustique qui va se propager par radiation à l'extérieur à condition que l'ouverture soit suffisamment rapide pour exciter les modes résonnants à l'intérieur de la cavité. L'amplitude du signal associé est alors directement relié non seulement à la surpression initiale dans la cavité, mais aussi à la dynamique d'ouverture. Cette condition rend impossible toute prédiction de l'amplitude acoustique lors de l'éclatement de films liquides, dont on ne peut contrôler a priori le temps de rupture (cf. section 2).

L'utilisation d'une membrane élastique comme substitut de films liquides permet de contrôler les caractéristiques de la membrane (épaisseur, tension initiale). Pour de faibles surpressions initiales, on peut alors prédire exactement l'amplitude du signal acoustique généré. Lorsque  $\Delta P$  devient de l'ordre de ou supérieur à la pression atmosphérique, un nouveau régime apparaît, où la majeure partie de l'excès de pression initialement dans la cavité semble être évacué lors de la première réflexion du front sur l'extrémité ouverte du tube. Cette observation doit avoir des conséquences importantes sur les volcans, où les surpressions dans les bulles de gaz géantes avant éclatement ont été estimées de l'ordre de plusieurs fois la pression atmosphérique. Une étude plus approfondie est nécessaire pour interpréter l'amplitude de l'onde de pression que l'on mesure alors.

## Références

1. H. M. GONNERMANN & M. MANGA, The fluid mechanics inside a volcano, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **39**, 321–356 (2007).
2. C. JAUPART & S. VERGNOLLE, Laboratory models of Hawaiian and Strombolian eruptions, *Nature*, **331**, 58–60 (1988).
3. S. VERGNOLLE & G. BRANDEIS, Origin of the sound generated by Strombolian explosions, *Geophys. Res. Lett.*, **21**, 1959–1962 (1994).
4. S. VERGNOLLE & G. BRANDEIS, Strombolian explosions, 1. A large bubble breaking at the surface of a lava column as a source of sound, *J. Geophys. Res.*, **101**, 20433–20447 (1996).
5. M. RIPEPE, S. CILIBERTO & M. DELLA SCHIAVA, Time constraints for modeling source dynamics of volcanic explosions at Stromboli, *J. Geophys. Res.*, **106**, 8713–8727 (2001).
6. V. VIDAL, J.-C. GÉMINARD, T. DIVOUX & F. MELO, Acoustic signal associated with the bursting of a soap film which initially closes an overpressurized cavity. Experiment and theory, *Eur. Phys. J. B*, **54**, 321–339 (2006).
7. V. VIDAL, M. RIPEPE, T. DIVOUX, D. LEGRAND, J.-C. GÉMINARD & F. MELO, Dynamics of soap film bursting and its implications to volcano acoustics, *Geophys. Res. Lett.*, **37**, L07302 (2010).
8. K. J. MYSELS, K. SHINODA & S. P. FRANKEL, *Soap films, studies of their thinning and a bibliography*, Pergamon, New York (1959).
9. F. E. C. CULICK, Comments on a ruptured soap film, *J. Appl. Phys.*, **31**, 1128–1129 (1960).
10. S. FRANKEL & K. J. MYSELS, The bursting of soap films. II. Theoretical considerations, *J. Phys. Chem.*, **73**, 3028–3038 (1969).
11. G. DEBRÉGEAS, P. MARTIN & F. BROCHARD-WYART, Viscous bursting of suspended films, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3886–3889 (1995).
12. G. DEBRÉGEAS, P.-G. DE GENNES & F. BROCHARD-WYART, The life and death of “bare” viscous bubbles, *Science*, **279**, 1704–1707 (1998).
13. N. SAVVA & J. W. M. BUSH, Viscous sheet retraction, *J. Fluid Mech.*, **626**, 211–240 (2009).
14. N. N. KLEINSCHMIT, A shock tube technique for blast wave simulation and studies of flow structure interactions in shock tube blast experiments, *Master thesis, University of Nebraska* (2011).



# Impact des cellules endothéliales sur la dynamique de croissance tumorale

Louise Viger<sup>1</sup>, Fabrice Denis<sup>2</sup>, Martin Rosalie<sup>1</sup> & Christophe Letellier<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CORIA UMR 6614, 675, Avenue de l'Université, BP 12, F-76801 Saint Étienne du Rouvray Cedex, France

<sup>2</sup> Centre Jean Bernard, 9 Rue Beauverger, 72000 Le Mans

vigerl@coria.fr

**Résumé.** Afin de mieux comprendre la dynamique de croissances tumorales, nous réalisons une analyse dynamique d'un système à trois populations cellulaires (cellules hôtes, immunitaires et tumorales) en compétition sur un même site. De manière à prendre en compte le rôle de la néo-angiogenèse, nous complétons ce modèle par une quatrième population faite de cellules endothéliales. L'analyse dynamique de ce nouveau système est réalisée de manière à statuer sur l'importance de cette population dans la dynamique des croissances tumorales.

**Abstract.** In order to better understand the dynamics of tumor growth, a dynamical analysis of a system with three competitive species (host, immune and tumor cells) is performed. A fourth population of cells is then added to take into account endothelial cells and to investigate their role in the dynamics of tumor growth.

## 1 Introduction

Comprendre la dynamique tumorale est essentiel pour la mise au point de traitements spécifiques à un type de cancer donné et, de surcroît, à un individu donné. De ce point de vue, la modélisation de croissance tumorale, de l'angiogenèse [1] ou de la réponse au traitement [2] se présente comme particulièrement adaptée à la compréhension des observations cliniques. Notre objectif est de disposer, pour l'instant, d'un modèle générique pour la croissance tumorale prenant en compte non seulement la tumeur mais également les interactions avec son environnement. Nous montrons qu'un modèle décrivant les interactions des cellules hôtes, immunitaires et tumorales en compétition sur un site tumoral [3] permet de reproduire certains des comportements observés par les oncologues [4]. Néanmoins, il apparaît nécessaire de tenir compte de l'angiogénèse pour le développement sur plusieurs sites des tumeurs. Pour cela, nous ajoutons au modèle une quatrième population de cellules, les cellules endothéliales. Nous étudions ensuite la dynamique des quatre populations interagissant sur un site tumoral. L'impact des cellules endothéliales sur la dynamique du système est alors déterminé.

## 2 Modèle à trois populations

Soucieux de prendre en compte les interactions entre la tumeur et son environnement, nous nous focalisons sur le modèle impliquant trois populations cellulaires en compétition proposé par De Pillis et Radunskaya [3]. Ce modèle relativement simple présente l'avantage de prendre en compte les cellules hôtes. De ce fait, plusieurs aspects essentiels de la dynamique de croissance tumorale telle qu'elle est observée dans la pratique clinique sont ainsi retrouvés [4]. Après normalisation, le système à trois populations s'écrit [3]

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho_1 x(1-x) - \alpha_{13} xz \\ \dot{y} = \frac{\rho_2 yz}{1+z} - \alpha_{23} yz - \delta_2 y \\ \dot{z} = z(1-z) - \alpha_{31} zx - \alpha_{32} yz \end{cases} \quad (1)$$

où  $x$  représente la population de cellules hôtes,  $y$  la population de cellules immunitaires effectrices et  $z$  la population de cellules tumorales. Le système (1) est étudié pour les valeurs des paramètres suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = 0,518 \text{ taux de croissance des cellules hôtes;} \\ \alpha_{13} = 1,5 \text{ taux de mortalité des cellules hôtes par les cellules tumorales;} \\ \rho_2 = 4,5 \text{ taux de croissance des cellules immunitaires effectrices;} \\ \alpha_{23} = 0,2 \text{ taux d'inhibition des cellules immunitaires effectrices par les cellules tumorales;} \\ \delta_2 = 0,5 \text{ taux de mortalité naturelle des cellules immunitaires effectrices;} \\ \alpha_{32} = 2,5 \text{ taux de mortalité des cellules tumorales par les cellules immunitaires effectrices;} \\ \alpha_{31} = 1,0 \text{ taux de mortalité des cellules tumorales par les cellules hôtes.} \end{array} \right.$$

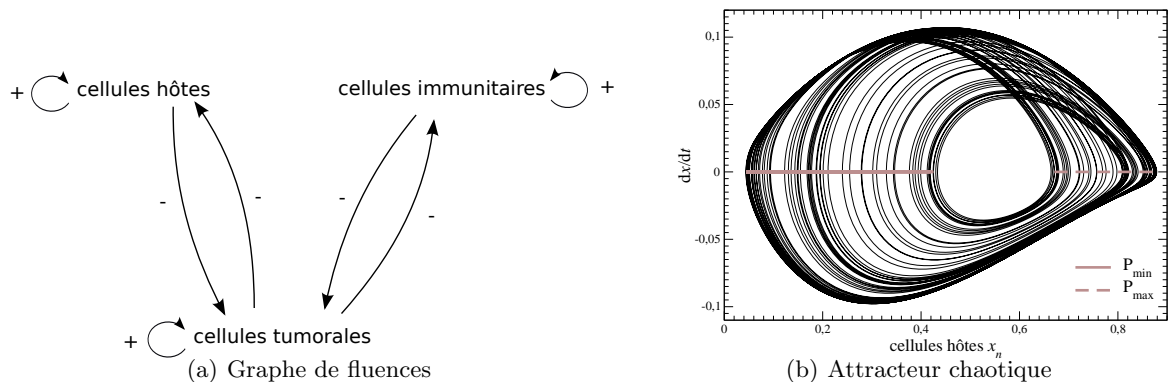
Notre analyse débute par l'étude des bifurcations lorsqu'un paramètre est varié. Plutôt que de réaliser un diagramme de bifurcations « classique », il importe, lorsque des populations sont étudiées, de suivre la variabilité sur les minima et les maxima des différentes populations. Pour cela, les sections de Poincaré sont calculées à partir d'un plongement différentiel  $\mathbb{R}^3(s, \dot{s}, \ddot{s})$  de la population choisie. Les maxima sont alors étudiés dans la section

$$\mathcal{P}_{\min} = \{(s, \dot{s}) \in \mathbb{R}^2 \mid \dot{s}_n = 0, \ddot{s}_n > 0\} \quad (2)$$

et les minima dans la section

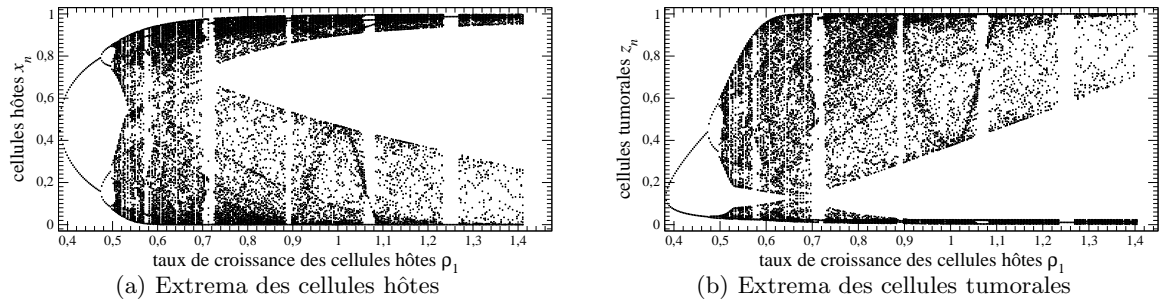
$$\mathcal{P}_{\max} = \{(s, \dot{s}) \in \mathbb{R}^2 \mid \dot{s}_n = 0, \ddot{s}_n < 0\}. \quad (3)$$

Ceci est illustré Fig. 1 dans le cas des cellules hôtes.

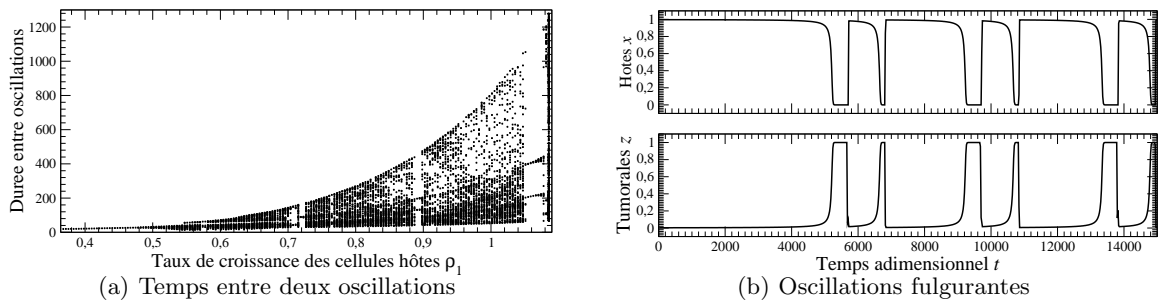


**Figure 1.** (a) Graphe de fluence du modèle de De Pillis et Radunskaya. (b) Attracteur chaotique solution du modèle (1) projeté dans le plan  $x - \dot{x}$  pour les paramètres donnés précédemment. Les sections de Poincaré permettant l'étude des minima ( $\mathcal{P}_{\max}$ ) et des maxima ( $\mathcal{P}_{\min}$ ) sont représentées.

Les diagrammes (Fig. 2) ainsi obtenus révèlent que la population de cellules hôtes tend à se « tasser » autour de la capacité biotique du site lorsque son taux de croissance  $\rho_1$  augmente : si de grandes fluctuations apparaissent, elles deviennent plutôt rares (Fig. 3a) et les oscillations sont extrêmement violentes. En contrepartie, la population de cellules tumorales se « tasse » au voisinage de l'extinction. Le site reste donc la plupart du temps « sain » mais peut être confronté à des croissances tumorales très raides, se rapprochant de l'évolution des cancers fulgurants (Fig. 3b). De ce fait le taux de croissance des cellules hôtes est un paramètre qui pourrait être utilisé pour doper la population de cellules hôtes : mais les cancers alors fulgurants sont violents et peuvent être délétères pour le patient. Ce comportement est un exemple de phénomènes que reproduit ce modèle et qui sont cliniquement observés [4].



**Figure 2.** Diagrammes de bifurcations du modèle de cancer (1) en fonction du taux de croissance des cellules hôtes  $\rho_1$ .



**Figure 3.** Comportements des populations de cellules hôtes et tumorales lorsque le taux de croissance  $\rho_1$  est varié.

### 3 Modèle à quatre populations

Au delà d'une certaine taille, de nombreuses tumeurs contraintes à l'hypoxie, déclenchent le processus de néo-angiogenèse<sup>1</sup>. Cette étape leur permet de proliférer, croître plus rapidement et par la même de se préparer à l'invasion tissulaire et métastatique. Ce stade est appelé bascule angiogénique. De ce fait, le développement spatial des tumeurs ne peut se faire sans avoir recours aux cellules intervenant dans la néo-angiogenèse : les cellules endothéliales. Aussi, nous ajoutons au modèle de De Pillis et Radunskaya [3] une population de cellules endothéliales comme suit.

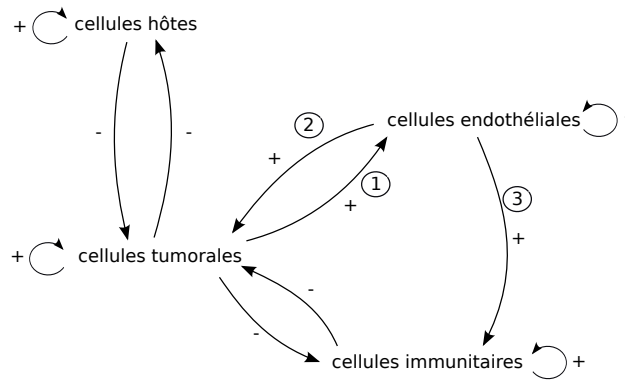
Le graphe de fluence du modèle à quatre populations de cellules que nous proposons présente trois types d'interactions en relation avec les cellules endothéliales (Fig. 4) :

1. **les interactions cellules tumorales-cellules endothéliales.** Jusqu'à 1 à 2 mm de diamètre, la tumeur a ses besoins en oxygène et nutriments satisfaits par les vaisseaux sanguins se situant dans un rayon de 50 à 100 micromètres correspondant à la zone de diffusion de l'oxygène. Cependant, au delà de cette taille, les besoins sont plus importants et ne peuvent plus être pris en charge par ces seuls vaisseaux. La tumeur doit donc obtenir l'oxygène et les nutriments de vaisseaux plus éloignés mais se situant au-delà de la limite de diffusion de l'oxygène. Les cellules tumorales alors contraintes à l'hypoxie, secrètent des protéines HIF<sup>2</sup> qui stimulent à leur tour la transcription du gène VEGF<sup>3</sup>. La protéine VEGF nouvellement secrétée se fixe sur les récepteurs transmembranaires des cellules endothéliales formant les vaisseaux. Cette liaison induit un signal intracellulaire qui stimule la prolifération des cellules endothéliales. Ces cellules se multiplient et migrent vers les cellules tumorales.

---

1. mise en place de nouveaux vaisseaux sanguins à partir de vaisseaux pré-existants.  
 2. Hypoxia Growth Factor  
 3. Vascular Endothelial Growth Factor

2. **les interactions cellules endothéliales-cellules tumorales.** Une fois la croissance et la migration des cellules endothéliales enclenchées, des cellules endothéliales structurant les vaisseaux sanguins arrivent à proximité des cellules tumorales et, de ce fait, permettent à celles-ci d'accélérer leur prolifération.
3. **les interactions cellules endothéliales-cellules immunitaires effectrices.** Une fois le processus de cancérogenèse enclenché, les cellules effectrices du système immunitaire deviennent les actrices principales de la lutte de l'organisme contre les cellules tumorales. Pour parvenir à la tumeur, elles empruntent la circulation sanguine. Ainsi, un développement de la vascularisation dans le voisinage de la tumeur a pour conséquence une augmentation des accès à la tumeur et donc une meilleure réponse du système immunitaire face au cancer. Les cellules endothéliales n'agissent pas directement sur les cellules immunitaires effectrices mais peuvent, en se développant, favoriser la reconnaissance par les cellules immunitaires effectrices des cellules tumorales, c'est-à-dire favoriser la réponse du système immunitaire.



**Figure 4.** Graphe de fluxes de notre modèle à quatre populations constitués par les cellules hôtes, tumorales, immunitaires et les cellules endothéliales.

Sachant que nous voulons modéliser la néo-angiogenèse tumorale, nous privilégions les interactions entre les cellules endothéliales et tumorales au détriment des interactions entre les cellules endothéliales et hôtes qui sont donc considérées comme négligeable dans ce contexte. Nous arrivons à la même conclusion pour les interactions cellules immunitaires effectrices-cellules endothéliales. En effet, biologiquement les premières n'auraient peu ou pas d'effets sur le développement des secondes. Une chose importante à noter est l'absence de boucle positive sur la population de cellules endothéliales elle-même. En effet, la prolifération de ces cellules est dépendante des cellules tumorales et est essentiellement due aux interactions cellules tumorales-cellules endothéliales. Nous avons fait le choix de modéliser la prolifération de ces cellules par l'intermédiaire des interactions entre les cellules tumorales et les cellules endothéliales, tout en prenant en compte la mortalité naturelle, très faible, de ces cellules par une boucle négative.

À partir du graphe de flux, nous pouvons construire un système à quatre équations modélisant la croissance et la néo-angiogenèse tumorale, soit

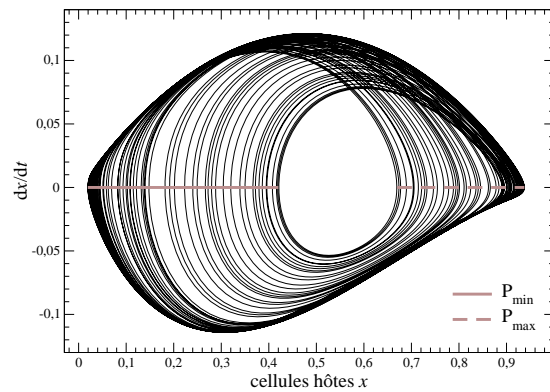
$$\begin{cases} \dot{x} = \rho_1 x(1-x) - \alpha_{13} xz \\ \dot{y} = \frac{\rho_2 yz}{1+z} - \alpha_{23} yz - \delta_2 y + \alpha_{24} yw \\ \dot{z} = z(1-z) - \alpha_{31} zx - \alpha_{32} yz + \frac{\alpha_{34} zw}{1+w} \\ \dot{w} = \frac{\rho_4 wz}{1+z} - \frac{w}{\delta_4} \end{cases} \quad (4)$$

où  $x$  représente la population de cellules hôtes,  $y$  la population de cellules immunitaires effectrices,  $z$  la population de cellules tumorales et  $w$  la population de cellules endothéliales. Le terme  $\alpha_{24}yw$ , correspondant au mutualisme entre les cellules endothéliales et immunitaires effectrices, est ajouté à l'équation se référant aux cellules immunitaires effectrices  $\dot{y}$ . Les interactions cellules tumorales-cellules endothéliales et cellules endothéliales-cellules tumorales peuvent être représentées par le modèle plante-pollinisateur [6, p. 143]. Ce qui nous conduit à incorporer le terme  $\frac{\alpha_{34}zw}{1+w}$  dans l'équation des cellules tumorales  $\dot{z}$  et le terme  $\frac{\rho_4 wz}{1+z}$  dans l'équation des cellules endothéliales  $\dot{w}$ . Ces termes représentent une fonction réponse de type II, dite de Holling. Cette fonction contrairement à la fonction réponse de type I, dite de Lotka-Volterra, présente un effet de saturation et se rapproche plus des comportements observés dans la réalité. Pour compléter ce modèle plante-pollinisateur, le terme  $\frac{w}{\delta_4}$  est ajouté dans l'équation  $\dot{w}$ . Avec ce système à quatre équations (4), nous avons modélisé les principales interactions entre les quatre populations de cellules.

Nous réalisons une étude dynamique de ce système, pour les valeurs des paramètres du modèle à trois équations, auxquels nous ajoutons les paramètres suivants.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{24} = 0,30 \text{ impact des cellules endothéliales sur la disponibilité des cellules immunitaires effectrices;} \\ \alpha_{34} = 0,75 \text{ taux de prolifération des cellules tumorales lié à la néo-angiogenèse;} \\ \delta_4 = 11,0 \text{ taux de mortalité naturelle des cellules endothéliales;} \\ \rho_4 = 0,86 \text{ taux de croissance des cellules endothéliales.} \end{array} \right.$$

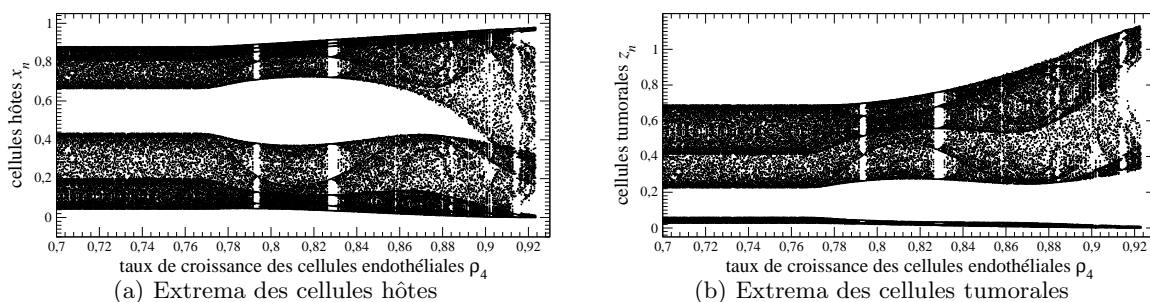
Avec ces paramètres, le modèle à quatre populations produit un attracteur chaotique (Fig. 5) apparemment peu différent de celui obtenu avec le modèle à trois populations (Fig. 1). Comme pour le modèle de De Pillis et Radunskaya [3], nous étudions le comportement des cellules hôtes et tumorales lorsqu'un paramètre est varié.



**Figure 5.** Attracteur chaotique solution du modèle (4), projeté dans le plan  $x - \dot{x}$  pour les paramètres donnés précédemment.

Nous choisissons de varier le taux de croissance des cellules endothéliales  $\rho_4$  et obtenons les diagrammes représentés Figs. 6. L'intervalle des fluctuations des deux populations reste constant jusqu'à  $\tilde{\rho}_4 = \rho_4 \approx 0,77$  : aucune bifurcation n'est identifiable pour des valeurs plus petites. À partir de la valeur  $\tilde{\rho}_4$ , l'intervalle de fluctuations des cellules tumorales sur les maxima augmente (Fig. 6b) : ce comportement est particulièrement important car le seuil  $\tilde{\rho}_4$  pourrait correspondre au seuil de bascule angiogénique de notre modèle. Nous observons chez les cellules hôtes (Fig. 6a), une diminution des intervalles de fluctuations à partir de cette valeur, et ce, jusqu'à  $\rho_4 = 0,81$ . Puis les intervalles augmentent jusqu'à  $\rho_4 = 0,9$ , où ils deviennent adjoints. Ainsi, à partir d'une certaine population de cellules endothéliales, la prolifération des cellules tumorales, qui était jusqu'alors limitée, s'intensifie. Ceci conduit la population de cellules tumorales à proliférer au-delà de la capacité biotique initiale du site, sans entraîner de retro-contrôle

négatif de la prolifération. En regard de cela, la population de cellules hôtes, dont la prolifération est indépendante des cellules endothéliales (dans le cadre de la néo-angiogenèse tumorale), se développe plus lentement et est limitée à la capacité biotique du site. La compétition entre les différentes populations étant plus sévères, les fluctuations de la population de cellules hôtes sont alors plus importantes. Nous avons ici deux comportements importants en adéquation avec ce qui était attendu du point de vue biologique.



**Figure 6.** Diagrammes de bifurcations du modèle de cancer à quatre équations en fonction du taux de croissance des cellules endothéliales  $\rho_4$ .

## 4 Conclusion

L'étude du système à trois populations proposé par De Pillis et Radunskaya nous a permis de comprendre les interactions entre les différentes populations et nous a conduit à une modélisation plus complète de la croissance tumorale. En effet, nous avons pris en considération la néo-angiogenèse tumorale qui constitue une étape clé dans la croissance spatiale des tumeurs. Ce nouveau modèle met en lumière des comportements observés en clinique et simule une étape majeure de la croissance tumorale : la bascule angiogénique. Une analyse plus complète de la dynamique permettra une confrontation de ces résultats avec les observations cliniques.

## Remerciements

La thèse de Louise Viger est financée par la société HYPÉRION en partenariat avec les entreprises TAKEDA et CHUGAI, et les laboratoires ROCHE : elle fait l'objet d'une convention CIFRE.

## Références

1. A. R. A. ANDERSON & M. A. J. CHAPLAIN, Continuous and discrete mathematical models of tumor-induced angiogenesis, *Bulletin of Mathematical Biology*, **60**, 857–899 (1998).
2. L. G. DE PILLIS, W. GU & A. E. RADUNSKAYA, Mixed immunotherapy and chemotherapy of tumor : modeling, applications and biological interpretations, *Journal of Theoretical Biology*, **238**, 841–862 (2006).
3. L. G. DE PILLIS & A. RADUNSKAYA, The dynamics of an optimally controlled tumor model : a case study, *Mathematical and Computer Modelling*, **37**, 1221–1244 (2003).
4. C. LETELLIER, F. DENIS & L. A. AGUIRRE, What can be learned from a chaotic cancer model? *Journal of Theoretical Biology*, **322**, 7–16 (2013).
5. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5**, 271–282 (1995).
6. P. AUGER, C. LETT & J.-C. POGGIALE, *Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris (2010).







# Index

- Àlvarez Brayan, 167  
Anneville Orlanne, 149  
Argentina Médéric, 79  
Aumaître Sébastien, 104
- Barbot Jean-Pierre, 73  
Baylon-Fuentes Antonio, 98  
Bec Jérémie, 1  
Bertin Nicolas, 7  
Bilbao Stefan, 25  
Bitane Rehab, 1  
Bordes Guilhem, 13  
Bouret Yann, 79  
Bourgoin Mickaël, 86, 104  
Brasselet Étienne, 7  
Budroni Marcello, 19
- Cadot Olivier, 25, 55  
Chembo Yanne, 98  
Chotia Amdosen, 31  
Chraïbi Hamza, 7  
Clamond Didier, 125  
Cortet Pierre-Philippe, 13  
Couder Yves, 120
- Dauxois Thierry, 13  
Daviaud François, 104, 137  
De Paz Aurélie, 31  
De Wit Anne, 19  
Delorme Maxime, 37  
Delville Jean-Pierre, 7  
Denis Fabrice, 173  
Divoux Thibaut, 92  
Dubrulle Bérengère, 104, 137  
Ducceschi Michele, 25
- Falcon Éric, 61  
Fardin Marc-Antoine, 92  
Fauve Stéphane, 43, 104  
Fiabane Lionel, 86  
Fort Emmanuel, 120
- Gissinge Christophe, 104  
Gorceix Olivier, 31  
Grenard Vincent, 92  
Grosfils Patrick, 19
- Guéniat Florimond, 37
- Héroult Johann, 43, 104  
Hoepffner Jérôme, 67, 110  
Homann Holger, 1  
Hubert Maxime, 49  
Humbert Thomas, 55
- Issenmann Bruno, 61
- J. John Soundar Jerome, 67  
Jacquot Maxime, 98  
Josserand Christophe, 55
- Labousse Matthieu, 120  
Laburthe-Tolra Bruno, 31  
Larger Laurent, 98  
Laval Laurent, 73  
Lemaigre Lorena, 19  
Leroux Alphonse, 125  
Letellier Christophe, 73, 131, 173  
Llorens Coraline, 79  
Lusseyran François, 37
- Machicoane Nathanaël, 86  
Mancel Guillaume, 137  
Manneville Sébastien, 92  
Maréchal Étienne, 31  
Martinenghi Romain, 98  
Marty Sylvain, 67  
Matas Jean-Philippe, 67  
Melo Francisco, 167  
Michel Guillaume, 43  
Miralles Sophie, 104  
Miskin Marc, 120  
Moisy Frédéric, 13  
Mukhopadhyay Shomeek, 116  
Mutabazi Innocent, 143
- Odier Philippe, 104
- Padilla Vincent, 137  
Paré Gounséti, 110  
Pasquiou Benjamin, 31  
Pastur Luc, 37  
Pedri Paolo, 31  
Peixinho Jorge, 116

Perge Christophe, 92  
Perrard Stéphane, 120  
Pétréris François, 43, 104  
Pinton Jean-François, 86, 104  
Plihon Nicolas, 104  
Prigent Arnaud, 143

Rajchenbach Jean, 125  
Riolfo Luis, 19  
Rosalie Martin, 131, 173

Saint-Michel Brice, 137  
Sánchez Claudia, 167  
Savaro Clément, 143  
Schmitt François G., 149  
Sharma Arijit, 31  
Souissi Sami, 149

Taberlet Nicolas, 92  
Touzé Cyril, 25, 55  
Tuckerman Laurette, 155

Vandewalle Nicolas, 49  
Verga Alberto, 161  
Verhille Gautier, 104  
Vernac Laurent, 31  
Vidal Valérie, 167  
Viger Louise, 173  
Volk Romain, 86

Wiertel Cécile, 137  
Wunenburger Régis, 7

Zaleski Stéphane, 67  
Zimmermann Robert, 86



16<sup>e</sup> Rencontre du Non-Linéaire  
Université Paris Diderot  
Paris 2013

ISBN 978-2-9538596-2-1  
EAN 9782953859621

Non-Linéaire Publications (NL Pub.)  
Site universitaire du Madrillet — BP 12  
78801 St-Étienne du Rouvray Cedex

*Version en ligne, révisée le 28 novembre 2013*





**16<sup>e</sup> Rencontre du Non-Linéaire  
Université Paris Diderot  
Paris 2013**

ISBN 978-2-9538596-2-1  
EAN 9782953859621

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/>