Convergence géométrique à deux échelles dans le formalisme covariant. Applications à l'équation de Vlasov homogénéisée.

Aurore BACK

Centre de physique théorique,CNRS, CEA-cadarache, Marseille,
aurore.back@cpt.univ-mrs.fr

Emmanuel FRÉNOD
Université de Bretagne-Sud,Vannes, Emmanuel.Frenod@univ-ubs.fr

RNL 2012, IHP, Paris, 16 Mars 2012

La convergence à deux échelles

Le principe est le suivant : on fixe la période ϵ *et on a* u^ϵ *qui est solution de*

$$L^\epsilon u^\epsilon = f,$$

sur l'ouvert W *de* $\mathbb{R}^n$ *avec* L^ϵ *est un opérateur différentiel présentant des oscillations de période* ϵ *et* f *un terme source indépendant de* ϵ.

Définition

$(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ *dans* $L^r(W)$ *avec* $r \in]1, +\infty]$ *converge à deux échelles vers une fonction* U *dans l'espace* $L^r(W, L^r_{per}(Y))$ *si pour toute fonction* $\psi \in C^2_c(W, C^2_{per}(Y))$, *on a*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_W u^\epsilon(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon})d\mathbf{x} = \int_Y \int_W U(\mathbf{x}, \mathbf{y})\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y}.$$

U *est appelée la limite à deux échelles de* u^ϵ *dans* $L^r(W, L^r_{per}(Y))$.
u^ϵ *converge fortement vers* U *si* $\lim_{\epsilon\to 0} \|u^\epsilon - U(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^r(W)} = 0$.

La convergence géométrique à deux échelles

On peut réécrire les définitions et les théorèmes en utilisant des variétés différentielles M, Y et des formes différentielles.

Définition

Soit $({}^k\omega^\epsilon)_{\epsilon>0}$ une suite de k-formes différentielles dans $L^r(M, \bigwedge^k)$, on dit qu'elle converge vers la limite à deux échelles ${}^k\omega^0 \in L^r(M, \bigwedge^k L^r(Y))$ si pour n'importe quelle k-forme différentielle ${}^k\psi \in C_c^2(M, \bigwedge^k \Omega^0(Y))$, on a

$$\int_M {}^k\omega_x^\epsilon \wedge \star\, {}^k\psi_{(x, x^{1/\epsilon})} \longrightarrow \int_Y \int_M {}^k\omega^0_{(x,y)} \wedge \star\, {}^k\psi_{(x,y)},$$

L'élément $\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}$ peut être réécrit en utilisant le flot géodésique sur la variété Y.

Cette convergence existe Si sur Y le flot géodésique est ergodique.

$\longrightarrow$ Y compacte sans bord et est soit une variété de volume fini à courbure négative soit riemannienne symétrique.