

# Accrochage de fréquence sans accrochage de phase de deux modes laser couplés

Jérémy Thévenin<sup>1</sup>, Marco Romanelli<sup>1</sup>, Marc Brunel<sup>1</sup>, Marc Vallet<sup>1</sup>, et Thomas Erneux<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut de Physique de Rennes, UMR CNRS 6251, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France

<sup>2</sup> Université Libre de Bruxelles, Optique Non Linéaire Théorique, Campus Plaine, CP 231, 1050 Bruxelles, Belgique

marco.romanelli@univ-rennes1.fr

**Résumé.** Nous étudions expérimentalement et numériquement les propriétés de synchronisation de deux modes laser, couplés de façon cohérente par rétro-injection optique. L'intensité du couplage étant fixée, nous observons trois régimes de synchronisation, en fonction du désaccord de fréquence initial entre les modes. Lorsque le désaccord est suffisamment faible, la phase du battement entre les deux modes est fixe. A l'opposé, pour des désaccords très élevés, la phase relative dérive. Outre ces deux cas familiers, nous identifions une situation intermédiaire, dans laquelle la phase relative oscille tout en restant bornée. L'accrochage des fréquences est donc préservé, même en absence d'accrochage de phase.

**Abstract.** We study, experimentally and numerically, the synchronization properties of two laser modes. In order to stabilize the frequency difference, we introduce a coherent coupling by optical feedback. For a given coupling strength, we observe three synchronization regimes, depending on the detuning between the uncoupled modes. For a sufficiently weak detuning, the beat-note phase is fixed. Conversely, for strong detuning, the two modes oscillate almost independently. Besides these familiar behaviors, we identify an intermediate situation, where the relative phase fluctuates but remains bounded, and frequency locking is preserved, in spite of the absence of phase locking.

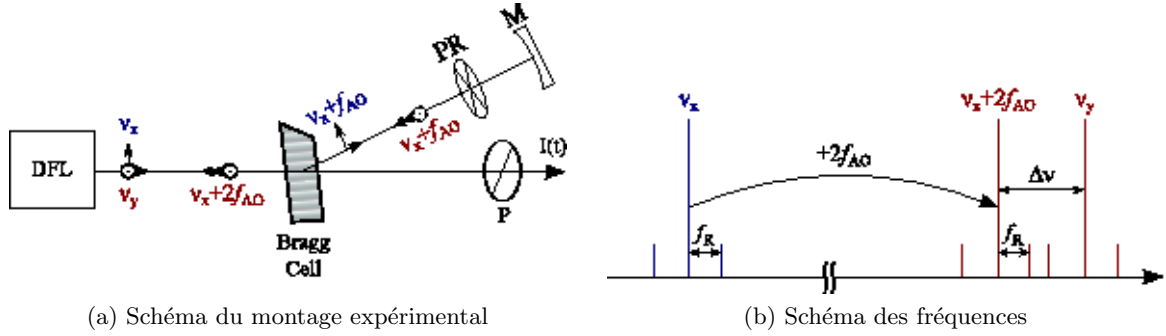
## 1 Introduction

La tendance des oscillateurs couplés à se verrouiller sur une fréquence commune est observée dans un grand nombre de systèmes, comme les oscillateurs biologiques, les réactions chimiques, les oscillateurs électriques, les lasers, etc [1]. Quand l'amplitude des oscillations est constante, l'évolution de la phase relative  $\Phi$  entre les oscillateurs obéit généralement à l'équation d'Adler :

$$\frac{\dot{\Phi}}{2\pi} = \Delta\nu - f_A \sin \Phi, \quad (1)$$

où  $\Delta\nu$  est le désaccord entre leur fréquences propres, et  $f_A$  l'intensité du couplage (ramenée à une fréquence).

L'éq. 1 montre que le comportement de deux oscillateurs couplés est déterminé par le rapport  $\Delta\nu/f_A$ . Si  $|\Delta\nu/f_A| \leq 1$ , l'éq. 1 admet une solution stationnaire stable, ce qui signifie que les phases des deux oscillateurs se verrouillent. Au contraire, si  $|\Delta\nu|$  est supérieur à  $f_A$ , les deux oscillateurs ne parviennent pas à se synchroniser, et leur phase relative croît indéfiniment. Ce comportement simple est bien vérifié, par exemple, par un laser de classe A injecté optiquement, dans les limites de couplage et désaccord faibles [2]. D'autre part, des analyses théoriques [3,4] ont montré que, pour des lasers de classe B couplés, l'amplitude des oscillations ne peut plus être évacuée du problème. Il en résulte une dynamique plus complexe, et, en particulier, un régime intermédiaire entre l'accrochage de phase et le décrochage pur et simple apparaît, pour certaines valeurs des paramètres. Dans ce régime, la phase relative n'est pas stationnaire, mais elle reste *bornée*. Cela implique que les oscillateurs ont la même fréquence moyenne; c'est pourquoi nous parlons d'accrochage de fréquence sans accrochage de phase. Ce régime de synchronisation n'est



**Figure 1.** (a) Schéma du montage expérimental. DFL : laser bifréquence émettant sur deux modes de polarisation, de fréquence  $\nu_x$  et  $\nu_y$  respectivement. Bragg cell : modulateur acousto-optique. PR : lame quart d'onde. M : miroir. P : polariseur à  $45^\circ$ . L'intensité  $I(t) = |E_x + E_y|^2$  est détectée sur une photodiode rapide. (b) Schéma des fréquences mises en jeu par l'expérience.

pas spécifique aux lasers, ayant été prédit également pour des oscillateur de van der Pol couplés [5]. Cependant, à notre connaissance, aucune observation expérimentale d'un tel comportement n'avait été décrite jusqu'à présent.

Nous avons réalisé une expérience permettant d'observer l'accrochage de fréquence sans accrochage de phase [7]. Nous avons mesuré la phase relative entre deux modes laser couplés par rétroaction optique et trouvé que, pour  $\Delta\nu > f_A$ , elle demeure bornée; la plage de synchronisation s'étend ainsi au-delà de  $f_A$ , même s'il s'agit d'une synchronisation « imparfaite ». Expérimentalement, nous nous sommes placés dans le cas  $f_A \lesssim f_R$ , où  $f_R$  est la fréquence des oscillations de relaxation, caractéristique des lasers de classe B [2]. Dans ce cas, les modes laser sont très sensibles aux perturbations externes, et par conséquent on observe la synchronisation pour des taux de couplage extrêmement faibles (la puissance réinjectée d'un mode vers l'autre vaut environ  $10^{-5}$  en valeur relative).

## 2 Montage expérimental

Nous utilisons un laser bifréquence Nd :YAG pompé par diode à 808 nm, et émettant à 1064 nm. Le laser oscille simultanément sur deux états propres  $E_x$  et  $E_y$ , de polarisation rectiligne suivant  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$ , et de fréquence  $\nu_x$  et  $\nu_y$ . Deux lames quart d'onde, placées à l'intérieur de la cavité laser, permettent d'ajuster finement le désaccord  $\Delta\nu_0 = \nu_y - \nu_x$  entre 0 et 1 GHz (moitié de l'intervalle spectral libre de la cavité). Le battement à la fréquence  $\Delta\nu_0$  est beaucoup plus stable que les fréquences individuelles  $\nu_x$  et  $\nu_y$ , grâce au fait que les fluctuations de longueur de la cavité sont identiques pour les deux modes propres [8]. Ce fait a une grande importance pour l'expérience, nous permettant de contrôler  $\Delta\nu_0$  à quelques kHz près. Dans toutes les expériences, nous réglons  $\Delta\nu_0 = 200$  MHz. Les deux modes sont couplés optiquement par une cavité de réinjection, qui contient un modulateur acousto-optique (Bragg cell), une lame quart d'onde et un miroir [9] (Fig. 1). Le modulateur acousto-optique décale les deux fréquences optiques d'une quantité  $f_{AO}$ ; ensuite, le double passage par la lame quart d'onde transforme la polarisation  $\hat{x}$  en  $\hat{y}$  et réciproquement. Enfin, le faisceau émis est réinjecté dans la cavité laser après un deuxième passage par le modulateur acousto-optique. Au bilan, deux champs sont renvoyés dans la cavité : un champ polarisé suivant  $\hat{x}$ , oscillant à la fréquence  $\nu_y + 2f_{AO}$ , et un champ polarisé suivant  $y$ , de fréquence  $\nu_x + 2f_{AO}$ . En choisissant  $f_{AO}$  autour de 100 MHz nous obtenons une réinjection quasi-résonante dans l'état propre  $E_y$ , comme l'illustre la Fig. 1 (b). Au contraire,  $E_x$  n'est pas affecté par la réinjection, car le décalage entre  $\nu_x$  et  $\nu_y + 2f_{AO}$  est trop important. Pour la même raison, les aller-retours multiples dans la cavité externe n'ont pas d'effet sur la dynamique. Nous obtenons un signal proportionnel au battement  $I = |E_x + E_y|^2$  en envoyant le faisceau émis sur une photodiode rapide, derrière un polariseur à  $45^\circ$ .

### 3 Modèle

Nous écrivons un système d'équations de type Lang-Kobayashi [10] pour les deux champs optiques couplés et les inversions de population associées  $n_{x,y}$  :

$$\frac{dE_x}{dt} = [-\Gamma_x + \kappa(n_x + \beta n_y)] \frac{E_x}{2} + 2i\pi\nu_x E_x, \quad (2)$$

$$\frac{dE_y}{dt} = [-\Gamma_y + \kappa(n_y + \beta n_x)] \frac{E_y}{2} + 2i\pi\nu_y E_y + \gamma_e E_x(t - \tau) e^{4if_{AO}t + i\Psi}, \quad (3)$$

$$\frac{dn_{x,y}}{dt} = \gamma_{||} P_{x,y} - \left[ \gamma_{||} + \zeta \left( |E_{x,y}|^2 + \beta |E_{y,x}|^2 \right) \right] n_{x,y}. \quad (4)$$

Les populations  $n_{x,y}$  sont alimentées par les termes de pompage  $P_{x,y}$  et relaxent avec un taux  $\gamma_{||}$  ; de plus, elles sont dépeuplées par l'émission stimulée, qui est prise en compte par les termes proportionnels aux intensités des champs. Les champs intracavité relaxent avec des taux  $\Gamma_{x,y}$  et sont alimentés par des termes d'émission stimulée ; l'équation pour  $E_y$  inclut aussi le terme de couplage cohérent dû à la réinjection du champ  $E_x$ . La constante de couplage  $\gamma_e$  englobe la réflectivité du miroir de la cavité externe, l'efficacité de diffraction du modulateur acousto-optique, le recouvrement spatial entre le mode de cavité et le faisceau réinjecté, et toutes les pertes optiques résiduelles ;  $\tau$  and  $\Psi$  sont respectivement le retard et le déphasage associés à l'aller-retour dans la cavité externe.  $\kappa$  et  $\zeta$  quantifient les couplages entre populations et champs. Le modèle prend également en compte la saturation croisée des populations via le coefficient  $\beta$ .

On peut simplifier les équations en considérant que les taux de pompage et les pertes sont identiques pour les deux modes, ce qui donne  $\Gamma_x = \Gamma_y = \gamma$  et  $P_x = P_y = P$ . On peut également poser le retard égal à zero. En effet, l'échelle de temps qui caractérise la dynamique du laser est fixée par la fréquence des oscillations de relaxation  $f_R$ . Dans nos conditions expérimentales  $\tau = 5.1$  ns, alors que  $1/f_R = 14$   $\mu$ s ; la réinjection peut donc être considérée comme instantanée. Nous introduisons les variables suivantes :

$$E_x = \bar{E}_x \sqrt{\frac{\gamma_{||}}{\zeta}} e^{2i\pi\nu_x t} e^{-i\psi}, \quad (5)$$

$$E_y = \bar{E}_y \sqrt{\frac{\gamma_{||}}{\zeta}} e^{2i\pi(\nu_x - 2f_{AO})t}, \quad (6)$$

$$n_{x,y} = \frac{\gamma}{\kappa} N_{x,y}, \quad (7)$$

$$\Delta\nu = \frac{\nu_y - \nu_x - 2f_{AO}}{\gamma}, \quad (8)$$

et écrivons les champs comme  $\bar{E}_{x,y} = \sqrt{I_{x,y}} e^{i\phi_{x,y}}$ .  $\phi_x$  étant constante, nous obtenons le système

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dI_x}{dt} = [N_x + \beta N_y - 1] I_x, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dI_y}{dt} = [N_y + \beta N_x - 1] I_y + 4\pi f_A \sqrt{I_x I_y} \cos \Phi, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt} = \Delta\nu - f_A \sqrt{\frac{I_x}{I_y}} \sin \Phi, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dN_{x,y}}{dt} = \epsilon [r - (1 + I_{x,y} + \beta I_{y,x}) N_{x,y}], \quad (12)$$

où nous avons introduit la *fréquence d'Adler*  $f_A = \frac{\gamma_e}{2\pi\gamma}$ , le taux de pompage normalisé  $r = \frac{kP}{\gamma}$ , le paramètre  $\epsilon = \frac{\gamma_{||}}{\gamma}$ , et  $\phi_y = \Phi$ . La formulation (9-12) est plus proche des expériences, car nous pouvons mesurer les intensités des champs ainsi que leur phase relative. Elle est aussi plus "lisible" ; en particulier, nous observons que la phase entre les champs est régie par une équation (éq. 11) de type Adler. La différence avec l'équation d'Adler standard est que le terme en  $\sin\Phi$  dépend du rapport entre les

amplitudes des champs. Dans la pratique, cependant, les équations (9-12) se prêtent mal à l'intégration numérique. D'une part, le terme en  $\sqrt{I_y}$  au dénominateur de l'éq. (11) est délicat à manier quand  $I_y$  devient petit ; d'autre part, les échelles de temps sont très différentes ( $\epsilon = 1.9 \cdot 10^{-5}$ ). En outre, la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  est singulière, c.à.d. qu'elle conduit à des solutions non physiques. Tous ces problèmes peuvent être éliminés en utilisant des variables normalisés, et l'échelle de temps adéquate [2]. Nous introduisons la variable sans dimensions  $s = \Omega_R t$ , où  $\Omega_R = \sqrt{\gamma_{||}\gamma} [r(1 + \beta) - 1]$  est la fréquence angulaire des oscillations de relaxation. Les équations (4-3) deviennent

$$\frac{de_x}{ds} = \frac{(m_x + \beta m_y) e_x}{1 + \beta} \quad (13)$$

$$\frac{de_y}{ds} = \frac{(m_y + \beta m_x) e_y}{1 + \beta} + i2\pi\Delta' e_y + \frac{\gamma_e}{\Omega_R} e_x \quad (14)$$

$$\frac{dm_{x,y}}{ds} = 1 - (|e_{x,y}|^2 + \beta|e_{y,x}|^2) - \epsilon' m_{x,y} [1 + (\eta - 1)(|e_{x,y}|^2 + \beta|e_{y,x}|^2)] \quad (15)$$

avec  $e_{x,y} = \bar{E}_{x,y}/\sqrt{r(1 + \beta) - 1}$ ,  $N_{x,y} = \frac{1}{1 + \beta} \left(1 + \frac{\Omega_R}{\gamma} m_{x,y}\right)$ ,  $\eta = r(1 + \beta)$ ,  $\epsilon' = \gamma_{||}/\Omega_R$ , et  $\Delta' = (\nu_y - \nu_x - 2f_{AO})/\Omega_R$ .

Les équations précédentes sont intégrées en utilisant une méthode Runge-Kutta d'ordre 4 à pas adaptatif. Les valeurs des paramètres utilisées dans les calculs numériques sont données Tab. 1. Tous ces paramètres ont été mesurés expérimentalement [8].

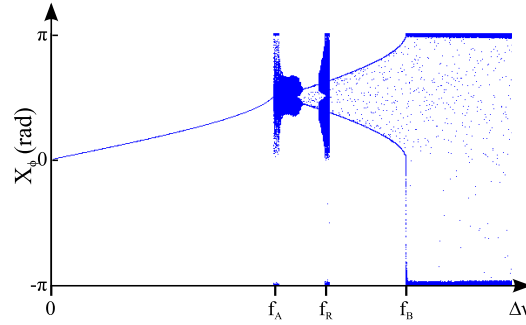
**Table 1.** Paramètres utilisés dans les simulations.

Paramètre	valeur	
Durée de vie de la population	$1/\gamma_{  }$	230 $\mu$ s
Durée de vie des photons	$1/\gamma$	4.32 ns
Fréquence angulaire des oscillations de relaxation	$\Omega_R$	$4.49 \cdot 10^5$ rad.s <sup>-1</sup>
Saturation croisée	$\beta$	0.6
Taux de pompage	$\eta$	1.2
Constante de couplage	$\gamma_e$	$3.59 \cdot 10^5$ rad.s <sup>-1</sup>

## 4 Résultats numériques et expérimentaux

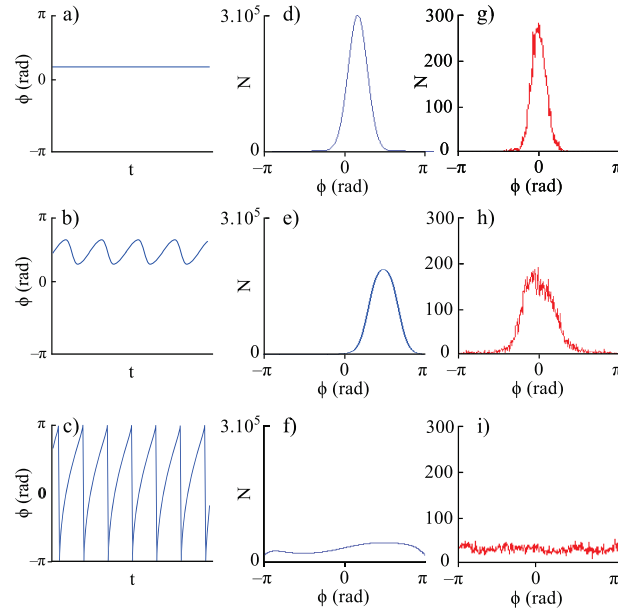
Nous construisons un diagramme de bifurcation en intégrant numériquement les équations d'évolution et en traçant les extrema locaux  $X_\Phi$  de la phase  $\Phi$  en fonction de  $\Delta\nu$  (Fig. 2). Lorsque  $\Delta\nu \in [0, f_A]$ ,  $\Phi$  est constante, ce qui signifie que la fréquence du mode propre  $E_y$  coïncide avec  $\nu_x + 2f_{AO}$ , ou, dit autrement, que le battement entre les modes est verrouillé sur la fréquence imposée par la source RF qui commande le modulateur acousto-optique. Au delà de  $f_A$  nous observons un comportement différent par rapport au cas standard : la phase reste bornée jusqu'à la valeur  $f_B$  de  $\Delta\nu$  (à l'exception de deux régions étroites autour de  $f_R$  et  $f_A$ ). Cela implique que la fréquence moyenne du battement coïncide avec la fréquence RF externe ; dans la région  $f_A < \Delta\nu < f_B$  on a donc accrochage de fréquence sans accrochage de phase. Les deux oscillateurs décrochent complètement seulement lorsque  $\Delta\nu > f_B$ . Notons que, la fonction  $\Phi(t)$  étant limitée par définition dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ , le décrochage de la phase se présente comme une série temporelle en dents de scie, avec des sauts brusques lorsque  $\Phi(t)$  atteint la valeur de  $\pi$ . Par conséquent, les valeurs  $-\pi$  et  $\pi$  sont des extrema locaux dans la série temporelle lorsque la phase dérive, et leur présence dans le diagramme de bifurcation indique que la phase n'est plus bornée.

Afin de comparer les prédictions du modèle à l'expérience, nous faisons battre les modes  $E_x$  et  $E_y$  sur une photodiode rapide derrière un polariseur à 45°. Lorsque  $E_y$  est verrouillé sur la fréquence réinjectée  $\nu_x + 200$  MHz, le signal de battement  $I(t)$  présente une oscillation à 200 MHz accrochée en phase à la deuxième harmonique du signal RF qui pilote le modulateur acousto-optique. Il est donc suffisant de



**Figure 2.** Diagramme de bifurcations numériques de la phase  $\Phi$  en fonction de  $\Delta\nu$ . Trois régimes différents apparaissent :  $\Delta\nu < f_A$ , accrochage de phase;  $f_A < \Delta\nu < f_B$ , accrochage de fréquence sans accrochage de phase;  $\Delta\nu > f_B$ , dérive de phase.

mesurer la phase du signal de battement par rapport à la deuxième harmonique du signal RF, pour obtenir la phase du champ  $E_y$  relative au champ injecté. En utilisant un oscilloscope numérique rapide (40 GS/s), nous pouvons obtenir des histogrammes de la phase  $\Phi$ . Une mesure de  $\Phi$  est obtenue comme la valeur moyenne de  $\Phi$  sur 100 périodes, c-à-d sur une durée de 500 ns; chaque histogramme contient 5000 mesures de la phase. Les données brutes sont présentées en Fig. 3 (g,h,i), ainsi que les histogrammes (d,e,f) obtenus à partir des séries temporelles calculées numériquement (a,b,c).



**Figure 3.** Série temporelles numériques de la variable  $\Phi$  pour (a)  $\Delta\nu = 0.3 f_A$  (phase accrochée), (b)  $\Delta\nu = 1.33 f_A$  (phase bornée), et (c)  $\Delta\nu = 3.2 f_A > f_B$  (phase décrochée). Histogrammes numériques des valeurs de  $\Phi$  dans les cas accroché(d), borné (e), et décroché (f). (g,h,i) Histogrammes expérimentaux correspondants.

Pour  $\Delta\nu = 0.3 f_A$  (Fig. 3g), dans la plage d'accrochage de phase, on obtient une distribution de phase relativement étroite, dont la largeur est cohérente avec une mesure indépendante de la dérive différentielle de fréquence des deux modes (0.4 kHz/s). Cette variation résiduelle est vraisemblablement due à des fluctuations de la pompe ainsi qu'à des dérives mécaniques. Evidemment, l'histogramme correspondant

à la série temporelle (a), obtenue numériquement, serait une distribution delta de Dirac ; afin de prendre en compte les bruits expérimentaux, nous l'avons convolué avec une distribution gaussienne de déviation standard appropriée ( $\sim \pi/12$ ). Les Figs 3e et 3h montrent les histogrammes calculés et mesurés pour  $\Delta\nu = 1.33 f_A$ , dans la région de phase bornée. L'histogramme expérimental est plus large que celui de la Fig. 3g, mais montre que la phase relative reste piégée en une région bornée de l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ , confirmant ainsi qu'il y a synchronisation même au delà de  $f_A$ . Il est à noter que, sans prendre en compte le bruit, la série temporelle de Fig. 3b produit un histogramme qui a deux maxima séparés. En convoluant cet histogramme avec la distribution gaussienne *déduite auparavant*, on obtient un bon accord avec les données expérimentaux. Enfin, pour  $\Delta\nu = 3.2 f_A$ , le décrochage de la phase relative produit un histogramme plat (Figs 3c, 3f et 3i).

## 5 Conclusions

En conclusion, nous avons montré expérimentalement qu'il existe une plage de synchronisation pour des désaccords supérieurs à  $f_A$ , la limite établie par l'approximation d'Adler. Lorsque le désaccord est compris entre  $f_A$  et  $f_B$ , l'accrochage de phase n'est plus possible, néanmoins les fréquences moyennes restent accrochées. Ces résultats sont retrouvés par un modèle théorique. A présent, nous sommes en train d'étendre cet étude aux lasers à semiconducteur [11], ainsi qu'au cas d'un couplage retardé [12]. Enfin, on peut aussi se demander si la dynamique ici étudiée joue un rôle dans les gyrolasers à état solide [13].

## Références

1. A. PIKOVSKY, M. ROSENBLUM & J. KURTHS, *Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, (2001)
2. T. ERNEUX & P. GLORIEUX, *Laser dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, (2010)
3. P. A. BRAZA & T. ERNEUX, Constant phase, phase drift, and phase entrainment in lasers with an injected signal, *Physical Review A*, **41**, 6470-6479 (1990)
4. M. K. S. YEUNG & S. H. STROGATZ, Nonlinear dynamics of a solid-state laser with injection, *Physical Review E*, **58**, 4421-4435 (1998)
5. R. E. KRONAUER, C. A. CZEISLER, S. F. PILATO, M. C. MOORE-EDE, & E. D. WEITZMAN, *American Journal of Physiology*, **242**, R3 (1982)
6. T. CHAKRABORTY & R. H. RAND, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **23**, 369 (1988)
7. J. THÉVENIN, M. ROMANELLI, M. VALLET, M. BRUNEL, & T. ERNEUX, Resonance assisted synchronization of coupled oscillators : frequency locking without phase locking, *Physical Review Letters*, **107**, 104101 (2011)
8. M. BRUNEL, O. EMILE, M. VALLET, F. BRETENAKER, A. LE FLOCH, L. FULBERT, J. MARTY, B. FERRAND, & E. MOLVA, Experimental and theoretical study of monomode vectorial lasers passively  $Q$  switched by a  $\text{Cr}^{4+}$  : yttrium aluminum garnet absorber, *Physical Review A*, **60**, 4052 (1999)
9. L. KERVEVAN, H. GILLES, S. GIRARD & M. LAROCHE, Beat-note jitter suppression in a dual-frequency laser using optical feedback, *Optics Letters*, **32**, 1099 (2007)
10. J. THÉVENIN, M. VALLET, M. BRUNEL, H. GILLES & S. GIRARD, Beat-note locking in dual-polarization lasers submitted to frequency-shifted optical feedback, *Journal of the Optical Society of America B*, **28**, (5), 1104 (2011)
11. S. WIECZOREK, B. KRAUSKOPF, T. B. SIMPSON & D. LENSTRA, The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers, *Physics Reports*, **416**, 1-128 (2005)
12. H.-J. WÜNSCHE, S. BAUER, J. KREISSL, O. USHAKOV, N. KORNEYEV, F. HENNEBERGER, E. WILLE, H. ERZGRÄBER, M. PEIL, W. ELSÄSSER & I. FISCHER, Synchronization of delay-coupled oscillators : A study of semiconductor lasers, *Physical Review Letters*, **94**, 163901 (2005)
13. S. SCHWARTZ, G. FEUGNET, P. BOUYER, E. LARIONTSEV, A. ASPECT & J.-P. POCHOLLE, Mode-coupling control in resonant devices : Application to solid-state ring lasers, *Physical Review Letters* **97**, 093902 (2006)