

# Topologie du chaos toroïdal produit par un double pendule actif

Martin Rosalie<sup>1</sup>, Davidson Firmo<sup>2</sup>, Leonardo Tôrres<sup>2</sup> & Christophe Letellier<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, Av de l'Université, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray Cedex, France

<sup>2</sup> Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Av. Antônio Carlos 6627, Pampulha, Belo Horizonte, MG, Brazil

[martin.rosalie@coria.fr](mailto:martin.rosalie@coria.fr)

**Résumé.** Un pendule double actif dont la dissipation d'énergie par frottements est compensée par une boucle de rétroaction basée sur la vitesse angulaire est étudié. Un plongement différentiel à partir de l'angle  $\theta_1$  que fait le premier bras avec la verticale et de ses dérivées successives révèle un attracteur à structure toroïdale. Un diagramme de bifurcations sur le système image — pendant du système sans symétrie — permet d'identifier un attracteur lacunaire faisant suite à une cascade de doublements de période. La topologie de cet attracteur est établie sous la forme d'un gabarit.

**Abstract.** An active double pendulum whose energy dissipation by friction is balanced by feedback loop based on the angular velocity is investigated. A differential embedding from the angle between the first arm and the vertical axis, and its successive derivatives reveals an attractor with toroidal structure. A bifurcation diagram computed with the image system — version of the original system without any symmetry — allows to identify a banded attractor located after a period-doubling cascade. The topology of this attractor is established in terms of a template.

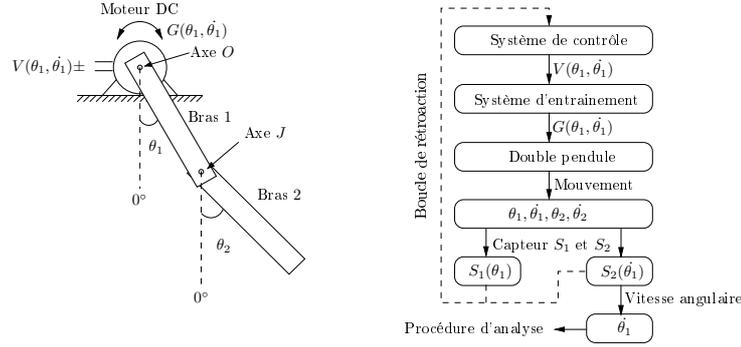
## 1 Introduction

Un pendule actif est un système utilisé depuis longtemps dans les horloges où la dissipation de l'énergie par frottements est compensée par un mécanisme complexe [1]. Un pendule double est composé de deux bras, le second étant accroché à l'extrémité du premier. De tels pendules sont connus pour présenter des comportements chaotiques, au moins de manière métastable lorsqu'il s'agit de réalisation expérimentale où les frottements ne sont pas compensés par un apport d'énergie [2]. Des comportements chaotiques, au sens strict du terme, sont observés sur un modèle numérique où les frottements peuvent être complètement annulés [3]. Précisons que dans ce cas, le pendule est conservatif. Les doubles pendules sont donc propices à l'étude des comportements chaotiques. Toutefois comme nous le verrons, la structure de l'attracteur n'est pas triviale, notamment parce que l'espace des phases est de dimension au moins égale à quatre.

L'étude présentée ici porte sur un pendule double actif dont la dissipation d'énergie par frottements est compensée grâce à un mécanisme de contrôle de la vitesse angulaire du premier bras. Ce pendule a été réalisé à l'Universidade Federal de Minas Gerais (Belo Horizonte, Brésil) [4]. L'un de leurs objectifs était de construire un pendule double actif de coût modéré, à l'inverse de ce qui se fait actuellement pour des pendules triples [5]. Notre objectif est ici de réaliser une caractérisation topologique de l'attracteur produit par ce pendule double. Notre intérêt pour cet attracteur est au moins triple : il est issu d'un système dont l'espace des phases est de dimension cinq, le système possède une symétrie centrale et l'attracteur repose sur une structure toroïdale. Ces trois propriétés constituent différents obstacles dont il va falloir s'affranchir pour parvenir à une caractérisation topologique.

## 2 Modélisation du pendule double actif

Le pendule double ici étudié est un pendule double actif dont la dissipation d'énergie par frottements est compensée par un mécanisme constitué d'un moteur commandé par une boucle de rétroaction basée



**Figure 1.** Schéma du montage et principe du contrôle de la dissipation d'énergie, d'après [4].

sur l'angle  $\theta_1$  et la vitesse angulaire  $\dot{\theta}_1$  [4]. Il s'agit donc d'un système dissipatif produisant des oscillations entretenues. Une schématisation du montage et du processus de contrôle est représentée Fig. 1.

Les variables nécessaires à la description complète des états du pendule sont l'angle  $\theta_1$  que fait le premier bras avec la verticale, l'angle  $\theta_2$  que fait le second bras avec la verticale, les deux vitesses angulaires  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$ , et le courant  $I_a$  d'alimentation du moteur monté sur l'axe  $O$  du premier bras (Fig. 1). Les équations régissant les mouvements du double pendule sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta}_1 = [15m_2l_1 \sin(\theta_1)gl_2 + 12m_1gl_1 \sin(\theta_1)l_2 + 24b_1\dot{\theta}_1l_2 - 24K_tI_al_2 - 36l_1b_2(-\dot{\beta}) \cos(\beta) \\ \quad + 9m_2l_2l_1^2\dot{\theta}_1^2 \sin(2\beta) + 24b_3l_2\text{sgn}(\dot{\theta}_1) - 36l_1b_4 \cos(\beta)\text{sgn}(-\dot{\beta}) + 9m_2l_1gl_2 \sin(\theta_1 - 2\theta_2) \\ \quad + 12m_2l_1l_2^2\dot{\theta}_2^2 \sin(\beta)] / (-l_2[8M_m + l_1^2(8m_1 + 15m_2 - 9m_2 \cos(2\beta))]) \\ \ddot{\theta}_2 = [-12m_2l_1l_2M_m\dot{\theta}_1^2 \sin(\beta) - 72b_2m_2l_1^2\dot{\beta} - 24b_2m_1l_1^2\dot{\beta} - 18m_2^2l_1^2gl_2 \sin(2\theta_1 - \theta_2) \\ \quad - 9m_2l_2gm_1l_1^2 \sin(2\theta_1 - \theta_2) + 36m_2l_1K_tl_2I_a \cos(\beta) - 12m_2l_2l_1^3m_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\beta) \\ \quad - 36m_2^2l_2l_1^3\dot{\theta}_1^2 \sin(\beta) - 9m_2^2l_2^2l_1^2\dot{\theta}_2^2 \sin(2\beta) - 36m_2l_1b_1l_2\dot{\theta}_1 \cos(\beta) - 24b_2M_m\dot{\beta} \\ \quad + 18m_2^2l_2gl_1^2 \sin(\theta_2) + 3m_2l_2gl_1^2m_1 \sin(\theta_2) + 12m_2l_2gM_m \sin(\theta_2) \\ \quad + 24b_4m_1l_1^2\text{sgn}(-\dot{\beta}) + 24b_4M_m\text{sgn}(-\dot{\beta}) + 72b_4m_2l_1^2\text{sgn}(-\dot{\beta}) - 36m_2l_1b_3l_2 \cos(\beta)\text{sgn}(\dot{\theta}_1) \\ \quad ] / (-m_2l_2^2[8M_m + l_1^2(8m_1 + 15m_2 - 9m_2 \cos(2\beta))]) \\ \dot{I}_a = \frac{V_a\text{sgn}(\dot{\theta}_1)h(\theta_1) - K_s\dot{\theta}_1 - R_aI_a}{L_a} \end{array} \right. \quad (1)$$

où

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \gamma \\ 1 & \text{sinon} \end{cases},$$

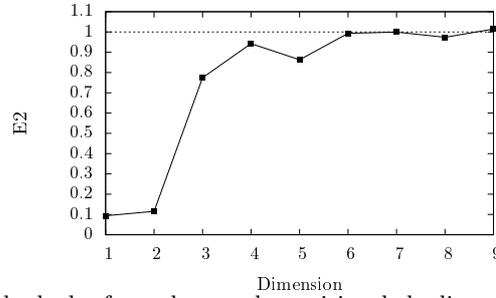
$\beta = \theta_1 - \theta_2$ ,  $\dot{\beta} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$ , et où  $\text{sgn}(x)$  renvoie  $\pm 1$  selon le signe de  $x$ . Ces trois équations différentielles, dont deux du second ordre et une du premier ordre, conduisent à un système de dimension cinq impliquant des fonctions continues par morceaux ( $\text{sgn}(x)$  et  $h(x)$ ). Ces équations ne comportent que des termes impairs des variables  $\theta_1$ ,  $\dot{\theta}_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\dot{\theta}_2$  et  $I_a$  : le système (1) est donc équivariant sous une symétrie centrale, c'est-à-dire que le portrait de phase est globalement invariant sous l'opérateur

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

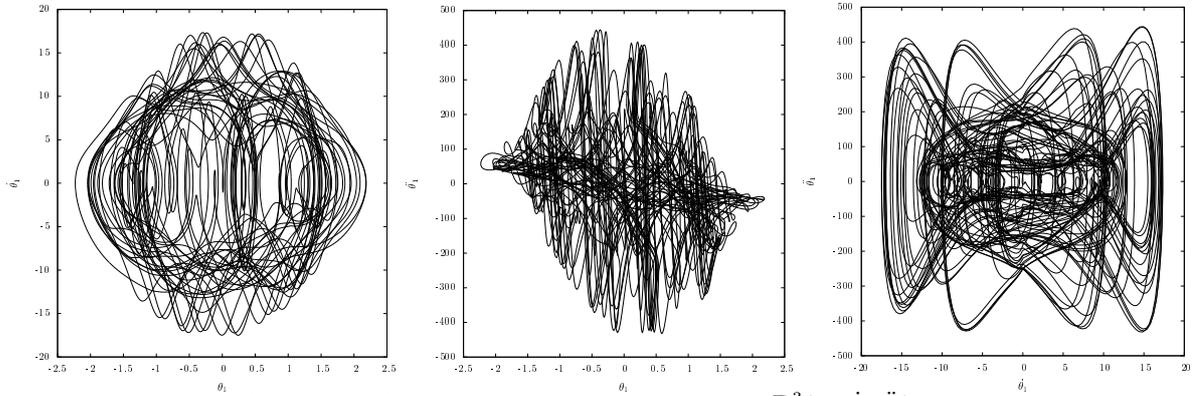
La présence de cette symétrie d'ordre 2 ( $I^2 = I$ , où  $I$  est l'identité) peut avoir de profondes conséquences sur l'analyse topologique [6].

### 3 Analyse topologique

Puisque la boucle de rétroaction a pour objectif de maintenir constante l'énergie du système, il est théoriquement possible d'écrire une intégrale du mouvement et ainsi de réduire la dimension du système d'une unité, ramenant à quatre la dimension « effective » du système. Afin de vérifier si un espace de dimension 5 peut être utilisé, la dimension de plongement est calculée par la méthode des plus proches faux voisins [7]. La quantité  $E_2$  (Fig. 2), qui représente grossièrement la fraction de vrais voisins, révèle que celle-ci atteint près de 80% dans un espace de dimension 3 induit par les coordonnées décalées  $(\theta_1(t), \theta_1(t + \tau), \theta_1(t + 2\tau))$ , elle fluctue ensuite au dessus de 80%, pour finir par saturer autour de 100% pour des dimensions supérieures à 5. Nous tentons une analyse dans le sous-espace  $\mathbb{R}^3(\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1)$  induit par les dérivées successives de  $\theta_1$  (Fig. 3). Cet espace préserve la symétrie centrale puisque les dérivées successives d'une variable possèdent également les propriétés de symétrie de la variable en question.



**Figure 2.** Estimation par la méthode des faux plus proches voisins de la dimension de plongement de l'attracteur chaotique solution du pendule double.



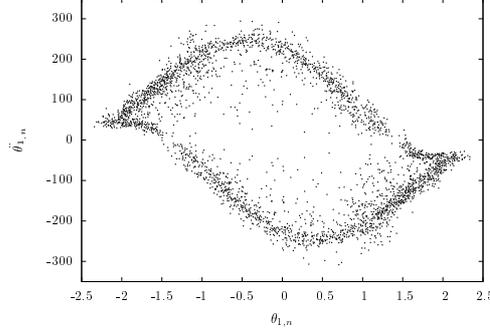
**Figure 3.** Représentation d'un régime chaotique dans le sous-espace  $\mathbb{R}^3(\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1)$ , avec les paramètres  $l_1 = 0.273$  m,  $l_2 = 0.216$  m,  $m_1 = 0.297$  kg,  $m_2 = 0.235$  kg,  $g = 9.81$  m.s $^{-2}$ ,  $M_m = 22.10^{-6}$  kg.m $^2$ ,  $b_1 = 0.00015$  Nm.rad $^{-1}$ ,  $b_2 = 0.00015$  Nm.rad $^{-1}$ ,  $b_3 = 0.00015$  Nm.rad $^{-1}$ ,  $b_4 = 0.00015$  Nm.rad $^{-1}$ ,  $R_a = 13.74\Omega$ ,  $L_a = 0.0311$  mH,  $K_t = 0.45$  N.m.A $^{-1}$ ,  $K_s = 0.45$  V.rad $^{-1}$ .s $^{-1}$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{3}$  rad,  $V_a = 6.3$  V.

L'attracteur chaotique étudié présente une structure toroïdale comme le révèle la section de Poincaré (Fig. 4) définie par

$$\mathcal{P} \equiv \left\{ (\theta_{1,n}, \dot{\theta}_{1,n}) \in \mathbb{R}^2 \mid \dot{\theta}_{1,n} = 0 \right\}. \quad (2)$$

Cette section révèle également la symétrie centrale du système. La section de Poincaré relativement « épaisse » en raison de la dispersion des points autour d'une structure quasi-annulaire traduit le caractère

peu dissipatif du pendule (les frottements ne sont pas très importants); cela va constituer une difficulté supplémentaire lors de la caractérisation topologique.



**Figure 4.** Section de Poincaré de l'attracteur chaotique solution du pendule double actif (Fig. 3). Même valeurs des paramètres que pour la Fig. 3.

### 3.1 Topologie du système image

Afin d'éviter la difficulté liée à la symétrie centrale, nous construisons un système image (dépourvu de symétrie) à l'aide d'un changement de coordonnées construit sur des termes quadratiques (donc invariant sous l'action de la symétrie) et appliqué sur le sous-espace  $\mathbb{R}^3(\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1)$  [6]. Ceci est réalisé après une renormalisation  $\tilde{\theta}_1 \rightarrow \theta_1/2.5, \dot{\tilde{\theta}}_1 \rightarrow \dot{\theta}_1/20$  et  $\ddot{\tilde{\theta}}_1 \rightarrow \ddot{\theta}_1/500$ . Nous utilisons ensuite le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \tilde{\theta}_1^2 + \dot{\tilde{\theta}}_1^2 + \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \tilde{\theta}_1 \ddot{\tilde{\theta}}_1 \\ y = \dot{\tilde{\theta}}_1^2 + \ddot{\tilde{\theta}}_1^2 + \dot{\tilde{\theta}}_1 \ddot{\tilde{\theta}}_1 + \dot{\tilde{\theta}}_1 \tilde{\theta}_1 \\ z = \tilde{\theta}_1^2 + \tilde{\theta}_1 \ddot{\tilde{\theta}}_1 + \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \dot{\tilde{\theta}}_1 \ddot{\tilde{\theta}}_1, \end{array} \right. \text{ suivi de la rotation} \left\{ \begin{array}{l} X = x \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - z) \\ Z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z), \end{array} \right. \quad (3)$$

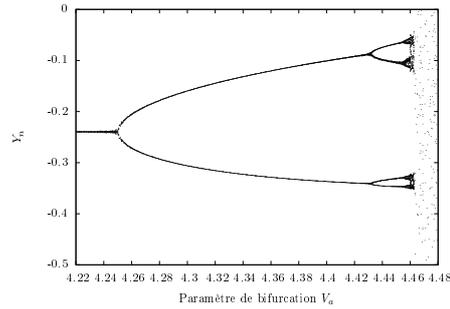
afin de disposer de projections planes évitant une trop grande superposition des structures de l'attracteur. Pour nous affranchir d'une dernière difficulté liée au fait que l'attracteur se développe sur la totalité d'une surface toroïdale — ce qui constitue un obstacle majeur à l'obtention aisée d'un gabarit — nous cherchons dans le diagramme de bifurcations en fonction du paramètre  $V_a$ , une zone où l'attracteur est lacunaire. Le diagramme est réalisé dans la section de Poincaré définie par

$$\mathcal{P} \equiv \left\{ (Y_n, Z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid X_n = 0, \dot{X}_n > 0, Y_n < 0 \right\}. \quad (4)$$

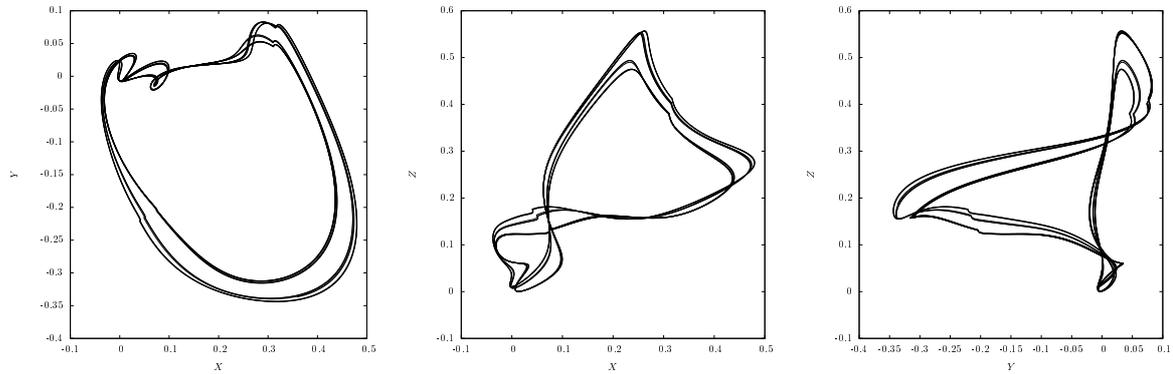
Une cascade de doublements de période est observée sur l'intervalle  $V_a \in [4, 25; 4, 47]$ . Nous choisissons de nous placer juste après le point d'accumulation de cette cascade et surtout avant la crise de frontière ( $V_a \simeq 4.4605$ ) conduisant à une structure toroïdale à nouveau complètement visitée (Fig. 5).

L'attracteur ainsi sélectionné ( $V_a = 4.4602$ ) est représenté Fig. 6. Les discontinuités qui peuvent être observées sont présentes dans l'attracteur symétrique mais amplifiées par le changement de variables (3) appliqué à l'espace  $\mathbb{R}^3(\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1)$ . Une application de premier retour (Fig. 7) révèle une structure suggérant une application unimodale lisse, signature de la cascade de doublements de période. Toutefois, nous retrouvons une structure légèrement feuilletée et diffuse, signature du caractère légèrement dissipatif du système. Une autre caractéristique, un peu plus ennuyeuse du point de vue de la topologie de l'attracteur est révélée, la présence d'une seconde branche décroissante sur la partie droite de l'application de premier retour (Fig. 7) à la section de Poincaré

$$\mathcal{P}_i \equiv \left\{ (X_n, Y_n) \in \mathbb{R}^2 \mid Z_n = 0.2, \dot{Z}_n < 0 \right\}, \quad (5)$$



**Figure 5.** Diagramme de bifurcations du double pendule actif en fonction du paramètre  $V_a$ , les autres paramètres étant ceux de la Fig. 3.



**Figure 6.** Image de l'attracteur chaotique lacunaire de l'attracteur solution du pendule double actif (1) apparaissant peu après la cascade de doublements de période. ( $V_a = 4.4602$ , les autres paramètres étant ceux de la Fig. 3.)

phénomène déjà observé dans d'autres systèmes [8]. L'attracteur se développe donc sur une variété complexe dont nous allons étudier une approximation en ne considérant qu'un gabarit à deux branches.

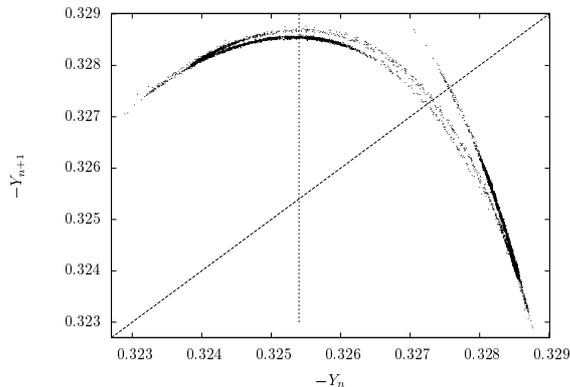
À partir de l'application de premier retour, une partition repose sur la coordonnée du maximum ; la trajectoire chaotique peut-être alors codée selon la dynamique symbolique définie par

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } -Y_n < 0,3254 \\ 1 & \text{si } -Y_n > 0,3254. \end{cases} \quad (6)$$

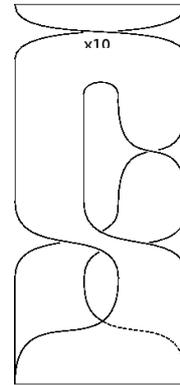
Le symbole « 0 » correspond à une branche de torsion paire (nombre pair de demi-tours) et le domaine « 1 » à une branche de torsion impaire. Cela correspond donc à un fer-à-cheval de Smale. Il reste à déterminer la torsion globale appliquée à ce fer-à-cheval. Ceci est réalisé par la détermination des nombres d'enlacement [9]. Le caractère peu développé de l'application de premier retour ne nous permet pas de disposer de nombreuses orbites périodiques (branche croissante peu développée, Fig. 7). Nous avons trouvé pour nombre d'enlacement  $lk(1, 10) = -11$ ,  $lk(1, 1011) = -22$ , et  $lk(10, 1011) = -43$ , ce qui est correctement décrit par la matrice d'enlacement

$$M_{i,j} = \begin{bmatrix} -10 & -11 \\ -11 & -11 \end{bmatrix} = -10 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

soit un fer-à-cheval associé à une torsion globale de  $-10\pi$ . Les éléments diagonaux  $M_{i,i}$  correspondent à la torsion locale de la  $i^{\text{ème}}$  branche et les éléments  $M_{i,j}$  aux permutations entre la  $i^{\text{ème}}$  et la  $j^{\text{ème}}$  branches. Cette matrice d'enlacement correspond au gabarit représenté Fig. 8.



**Figure 7.** Application de premier retour à la section de Poincaré  $\mathcal{P}_i$  sur l'une des bandes de l'attracteur chaotique représenté Fig. 6.



**Figure 8.** Gabarit schématisant la topologie de l'attracteur lacunaire solution du pendule double actif (1).

## 4 Conclusion

À partir des équations d'un pendule double actif, nous avons pu numériquement reproduire le comportement observé sur le système physique. Après avoir montré que la dimension de plongement pouvait être égale à 3, nous avons choisi d'étudier le système à l'aide du plongement différentiel de la variable  $\theta_1$ . La symétrie centrale a été enlevée à l'aide d'un changement de variables, puis, en utilisant un diagramme de bifurcations, nous avons choisi un attracteur chaotique lacunaire à l'issue d'une cascade de doublements de période. L'application de premier retour résultante révèle une structure qui est, en première approximation, unimodale et lisse. Un gabarit schématisant la structure de l'attracteur image est alors proposé. Cette caractérisation topologique de l'attracteur lacunaire constitue une première caractérisation topologique d'un attracteur chaotique toroïdal. Cette étude constitue une étape préliminaire qu'il fallait réaliser avant d'entamer une caractérisation de l'attracteur se développant sur l'ensemble du tore.

## Références

1. C. HUYGENS, *Horologium oscillatorium sive de motu pendularium*, (1673)
2. T. SHRINBOT, C. GREBOGI, J. WISDOM & J. A. YORKE, Chaos in a double pendulum, *American Journal of Physics*, **60**, 491-499 (1992)
3. T. STACHOWIAK & T. OKADA, A numerical analysis of chaos in the double pendulum, *Chaos, Solitons & Fractals*, **29**(2), 417-422 (2006)
4. D.L. FIRMO, L.A.B. TÔRRES & E.G. NEPOMUCENO, Simulation and dynamical characterization of an active mechanical chaotic double pendulum, *Proceedings of the 9th Congress of Mechanical Engineering COBEM* (2007)
5. J. AWREJCIEWICZ, B. SUPEL, C.-H. LAMARQUE, G. KUDRA, G. WASILEWSKI & P. OLEJNIK, Numerical and experimental study of regular and chaotic motion of triple physical pendulum, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **18**, 10, 2883-2815 (2008)
6. R. GILMORE & C. LETELLIER, *Symmetry of chaos*, Oxford University Press (2007)
7. L. CAO, Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series, *Physica D*, **110**, 1, 43-50 (1997)
8. M. ROSALIE & C. LETELLIER, Vers une topologie du chaos toroïdal, *Comptes-Rendus des Rencontres du Non Linéaire*, **14**, 151-156 (2011)
9. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5**, 1, 272-281 (1995)