

# Observation expérimentale d'une instabilité de Rayleigh-Plateau dans un jet granulaire en chute libre dans l'air

Gaël Prado, Yacine Amarouchene, & Hamid Kellay

Univ. Bordeaux, LOMA, UMR 5798, F-33400 Talence, France  
 CNRS, LOMA, UMR 5798, F-33400 Talence, France  
 g.prado@loma.u-bordeaux1.fr

**Résumé.** Un jet granulaire en chute libre dans l'air s'écoulant d'un réservoir soumis à une excitation verticale développe une instabilité comme le ferait un liquide en écoulement. Nous montrons que cette instabilité est similaire à l'instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau mettant en jeu une tension de surface granulaire effective. L'étude de cette instabilité nous permet d'obtenir des valeurs de cette tension de surface effective (quelques  $mN.m^{-1}$ ) en accord avec de précédentes mesures réalisées à plus petite échelle. Nous montrons également que cette instabilité disparaît en l'absence d'air, semblant indiquer que la tension de surface effective est issue d'un fort couplage entre le jet granulaire et l'air environnant.

**Abstract.** A granular jet falling out of a funnel-shaped container, subjected to small vertical vibrations develops an instability further downstream as may happen for ordinary liquids. Our results show that this instability is reminiscent of the Rayleigh-Plateau capillary instability leading to the breakup of the jet at large scales. The first stages of this instability are captured in detail allowing a determination of the dispersion relation. Surface tensions measured in this unstable regime (of the order of  $mN.m^{-1}$ ) are in agreement with previous measurements at much smaller scales. This instability and the breakup of the jet can be inhibited when the effect of the surrounding medium is reduced by enclosing the jet in an evacuated chamber, showing that the effective surface tension measured is a result of a strong interaction with the surrounding air.

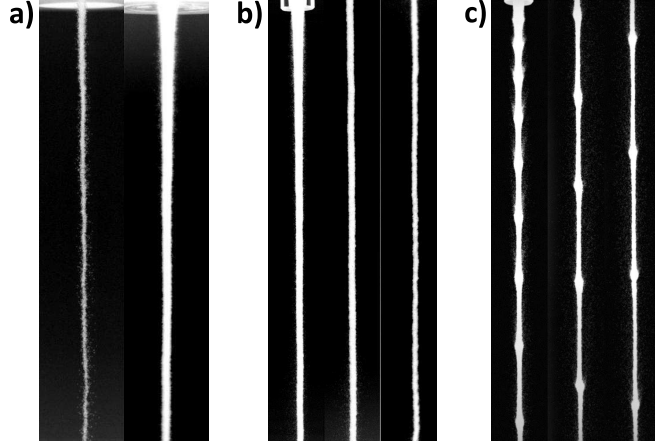
## 1 Introduction : Tension de surface granulaire

Il a déjà été observé que des jets granulaires en chute libre dans l'air se comportaient - en apparence - de manière similaire à un liquide [1,2]. De tels jets commencent à chuter de manière uniforme puis peuvent se briser en agrégats tout comme un liquide forme des gouttes sous l'effet de la tension de surface. Cette observation est intrigante étant donné que les forces existantes entre les grains sont bien plus faibles que les autres forces mécaniques en jeu. La formation de ces agrégats granulaires a été observée dans des jets granulaires dans l'air [3], dans un liquide [4] ou dans le vide [5]. Une étude récente [5] a pu montrer que des faibles forces de cohésion entre les grains (forces de van der Waals, ponts capillaires) suffisaient à provoquer l'apparition des agrégats et que la longueur d'onde associée à ces agrégats étaient incompatible (inférieure) à celle caractéristique de l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Il paraît donc difficile de concilier l'existence de ces agrégats avec une instabilité de nature capillaire. Malgré cela, le concept d'une tension de surface granulaire a déjà été introduit dans [6], et estimée par l'analyse des fluctuations interfaciales de petites longueurs d'onde dans des jets granulaires [7]. L'explication proposée suppose une interaction entre le jet et l'air. Nous présentons ici les résultats d'expériences visant à mettre en évidence l'existence d'une tension de surface granulaire agissant à grande échelle par l'excitation de modes instables de grande longueur d'onde de manière similaire à l'instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau.

## 2 Jets granulaires soumis à une excitation verticale : expériences et résultats

Les expériences réalisées dans le but de l'observation de cette instabilité sont les suivantes : un matériau granulaire sec et non cohésif s'écoule dans l'air, le réservoir (entonnoir) étant soumis à une oscillation

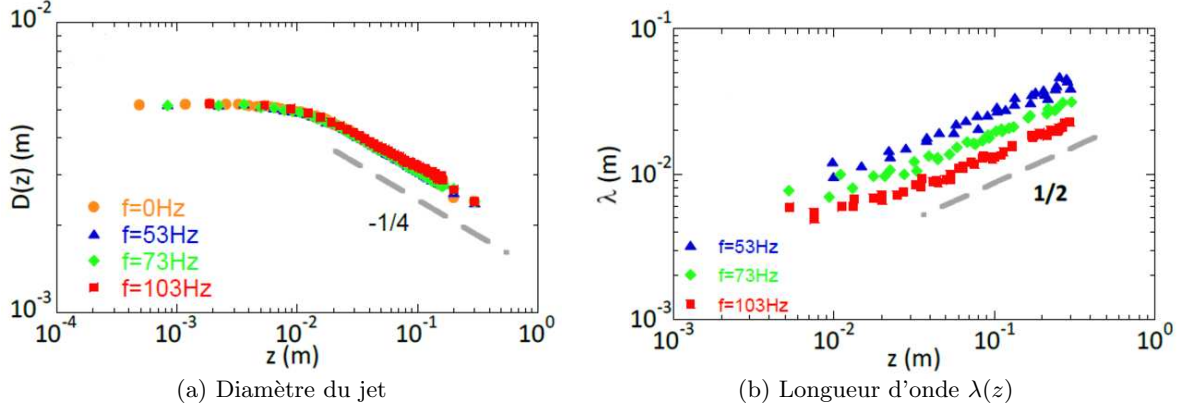
verticale sinusoïdale d'excursion  $A \sin(2\pi ft)$ . Les écoulements sont réalisés en faisant varier les paramètres  $A$  et  $f$ . Les particules utilisées sont des micro-billes de verre de diamètre  $d = 106 - 212 \mu\text{m}$  et de densité  $\rho = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le diamètre de sortie  $D$  de l'entonnoir et le diamètre  $d$  des billes sont choisis afin de rester dans un régime d'écoulement fluide sans cohésion apparente (dans les expériences présentées ici,  $d > 100 \mu\text{m}$ ,  $\frac{D}{d} \approx 30$ ). Les jets en écoulement sont filmés à l'aide d'une caméra rapide (Phantom v640) permettant une acquisition à haute cadence (4000 images par seconde) et à haute résolution (de l'ordre de  $20 \mu\text{m.pixel}^{-1}$ ).



**Figure 1.** (a) A gauche, billes de  $d = 159 \mu\text{m}$  en sortie d'un entonnoir de diamètre de sortie  $D = 2 \text{ mm}$ . A droite, mêmes billes en sortie d'un entonnoir de diamètre de sortie  $D = 5 \text{ mm}$ . (b) Micro-billes de diamètre  $d = 159 \mu\text{m}$  en sortie d'un entonnoir de diamètre de sortie  $D = 5 \text{ mm}$ , de  $0 \text{ cm}$  à  $20 \text{ cm}$ ,  $20 \text{ cm}$  à  $40 \text{ cm}$  et  $40 \text{ cm}$  à  $60 \text{ cm}$  après la sortie. (c) Mêmes diamètres qu'en (b), excitation verticale à une fréquence  $f = 53 \text{ Hz}$  et amplitude  $A = 50 \mu\text{m}$ .

La figure 1a illustre le choix du rapport d'aspect  $\frac{D}{d} > 15$  choisi. A gauche, des billes de diamètre  $d = 106 - 212 \mu\text{m}$  (celles utilisées par la suite) s'écoulent d'un entonnoir de diamètre de sortie  $D = 2 \text{ mm}$ , produisant un jet dispersé. A droite, les mêmes billes s'écoulent d'un entonnoir de diamètre  $D = 5 \text{ mm}$ , produisant un comportement collectif à comparer à l'écoulement discret précédent. Nous avons déterminé que la transition entre le comportement dispersé et le comportement fluide se situait vers  $\frac{D}{d} = 15$ , d'où le choix dans les diamètres des billes et de l'entonnoir (pour un rapport  $\frac{D}{d} \approx 30$ ). La figure 1b présente un jet de grains s'écoulant de l'entonnoir précédent de la sortie de l'entonnoir jusqu'à une distance  $z = 60 \text{ cm}$  sous la sortie du réservoir. On observe le comportement fluide conservé sur une longue distance avec un amincissement du jet au cours de la propagation. Sur la figure 1c, le même jet est maintenant soumis à une excitation verticale d'amplitude  $A = 50 \mu\text{m}$  et de fréquence  $f = 53 \text{ Hz}$ . On observe la conservation de l'amincissement global du jet auquel se superpose une modulation de son diamètre avec une longueur d'onde marquée et croissante au cours de la propagation. La question à laquelle nous nous intéressons ici concerne la croissance de cette modulation à grande échelle, et la rupture du jet à longue distance. Quelle est la croissance du mode imposé au jet, et conduit-elle à la rupture du jet? Le diamètre du jet est extrait des images réalisées selon la méthode décrite dans [7] et conduit à un diamètre du jet variant selon la relation  $\langle D(z) \rangle = D_0 \left(1 + \frac{2gz}{v_0^2}\right)^{-1/4}$ , avec  $v_0$  la vitesse initiale en sortie de l'entonnoir (de l'ordre de  $0.3 - 0.5 \text{ m.s}^{-1}$ ). Rappelons que cette relation suppose un comportement incompressible pour le jet granulaire. En appliquant une excitation au jet, on note que le profil moyen suit toujours la loi précédente tant que les valeurs d'amplitude imposées restent faibles (Fig. 2a) On se place pour cela dans un régime où les fluctuations du diamètre du jet induites par l'excitation verticale sont de l'ordre de 5% du diamètre moyen. Il est possible d'estimer la valeur de la fraction volumique  $\Phi$  en sortie de l'entonnoir en mesurant la vitesse de sortie des billes ainsi que leur flux massique, pour une fraction volumique  $\Phi_0 \approx 0.5$  en sortie, et au cours de la propagation par conservation de la masse. L'évolution de la longueur d'onde visible Fig.

1c provient de l'étirement du jet au cours de la propagation des billes sous l'effet de la gravité (les billes accélèrent comme  $v(z) = \sqrt{2gz + v_0^2}$ ) couplé à l'incompressibilité du jet. la croissance de la longueur d'onde est donc simplement  $\lambda(z) = \frac{v_0}{f} \sqrt{1 + \frac{2gz}{v_0^2}}$ . La figure 2b illustre l'évolution de la longueur d'onde excitée pour diverses fréquences.



**Figure 2.** (a) Diamètre du jet  $\langle D(z) \rangle$  pour un jet non excité et excité à trois fréquences différentes. (b) Longueur d'onde  $\lambda(z)$  pour un jet excité à trois fréquences différentes.

Afin d'étudier plus précisément la croissance des modes excités dans le jet, de nouvelles séries d'images sont réalisées en réduisant la taille de la fenêtre verticale étudiée (donc avec une meilleure résolution spatiale) afin de minimiser les évolutions de  $D(z)$  et  $\lambda(z)$ . Il est possible à partir des mesures réalisées sur ces champs de découpler la modulation imposée de l'amincissement du jet en considérant la perturbation relative sous la forme  $\tilde{D}(z) = \frac{D(z) - \langle D \rangle}{\langle D \rangle}$ . Afin d'étudier l'évolution temporelle de la perturbation au cours de l'écoulement, l'échelle spatiale peut être convertie en échelle temporelle par  $t = \frac{v(z) - v_0}{g}$  et on peut représenter  $\tilde{D}(t)$  (Fig. 3 pour différentes fréquences). Nous extrayons le taux de croissance  $\omega$  de la perturbation par un ajustement exponentiel de  $\langle \tilde{D}(t) \rangle$ . Une autre méthode employée dans une moindre mesure est de suivre directement l'amplitude de chaque pic de la modulation. On obtient ainsi des valeurs moyennes en accord avec les taux de croissance extraits de  $\langle \tilde{D}(t) \rangle$  avec une plus grande dispersion des valeurs (en raison de statistiques plus faibles). Les taux de croissance obtenus restent faibles — de l'ordre de quelques  $s^{-1}$ .

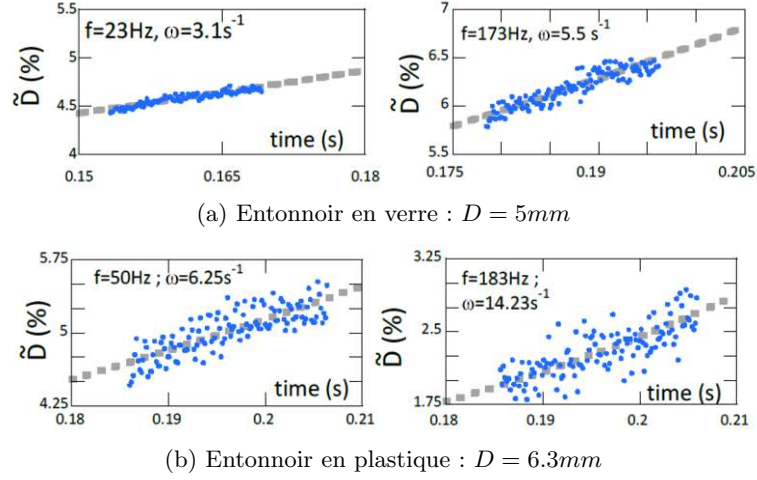
Une dernière quantité d'intérêt est le nombre d'onde réduit de la perturbation  $kr_0$ , avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  et  $r_0$  le rayon local du jet. On se place dans la limite  $kr_0 < 1$  (correspondant à  $\lambda > 2\pi r_0$ ).

### 3 Instabilité de Rayleigh-Plateau granulaire

Une fois les taux de croissance  $\omega$  obtenus pour les différentes fréquences analysées, nous pouvons tracer la courbe  $\omega(kr_0)$ . La figure 4a présente ces courbes obtenues avec plusieurs entonnoirs de différents diamètres (certains entonnoirs étant en plastique, il a été impossible d'exciter des hautes fréquences avec ceux-ci). On notera la ressemblance avec l'allure de la courbe de dispersion connue pour l'instabilité de Rayleigh-Plateau d'un liquide inviscide (forme de cloche présentant un maximum proche de  $kr_0 \approx 0.7$ ). La relation historique en ce cas est donnée par

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho r_0^3} \frac{I_1(kr_0)}{I_0(kr_0)} (1 - (kr_0)^2),$$

avec  $\gamma$  la tension de surface et  $I_n$  les fonction de Bessel modifiées d'ordre  $n$  [8].



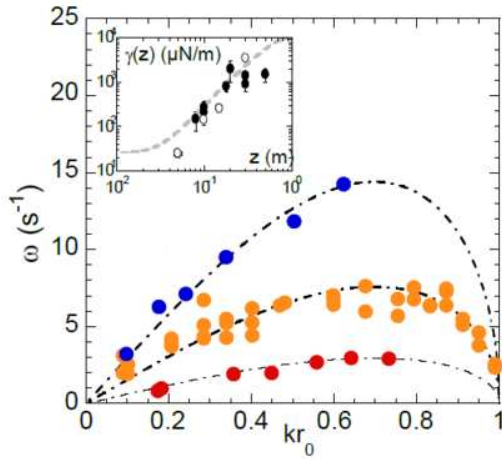
**Figure 3.** Diamètre du jet  $\langle \tilde{D}(t) \rangle$  pour différentes fréquences obtenus sur deux entonnoirs distincts. On remarquera la plus grande dispersion des points avec l’entonnoir en plastique, attribuée à de plus grandes déformations du réservoir au cours de l’excitation.

Dans nos expériences, le seul paramètre inconnu est la tension de surface  $\gamma$ , que nous obtenons donc par un ajustement de nos points expérimentaux. Malgré une certaine dispersion, l’accord avec l’expression historique est bon et donne des valeurs de tension de surface de l’ordre de quelques  $\text{mN.m}^{-1}$  pour les différents entonnoirs. Cette valeur est en accord avec les précédentes mesures effectuées à plus petite échelle dans le régime stable de l’instabilité [7] (rappelées dans l’encart, Fig. 4a). Nous nous intéressons également au comportement du jet excité à grande distance : l’amincissement du jet couplé à la croissance du mode instable induit dans le jet devrait provoquer la rupture du jet, toujours en analogie avec l’instabilité capillaire pour les liquides. Ce comportement est illustré Fig. 4c. Les tailles caractéristiques correspondent à la longueur d’onde de l’excitation initiale après croissance lors de la propagation. Il a été supposé précédemment [7] que la tension de surface effective du jet granulaire était issue d’une interaction entre le jet et l’air environnant. Une expérience simple réalisée afin de tester cette hypothèse est d’étudier les modes instables d’un jet placé dans une chambre à vide. La figure 4b présente une comparaison des taux de croissance obtenus pour deux fréquences différentes à pression ambiante et à une pression  $P \approx 0.1$  mbar. La figure 4c compare le jet excité dans l’air et dans le vide. On remarquera que l’excitation semble absente de l’image du bas ( $P \approx 0.1$  mbar), et que le jet ne s’est pas brisé. Nous supposons donc que la présence de l’air est cruciale pour le développement de l’instabilité de type Rayleigh-Plateau que nous observons dans les jets granulaires.

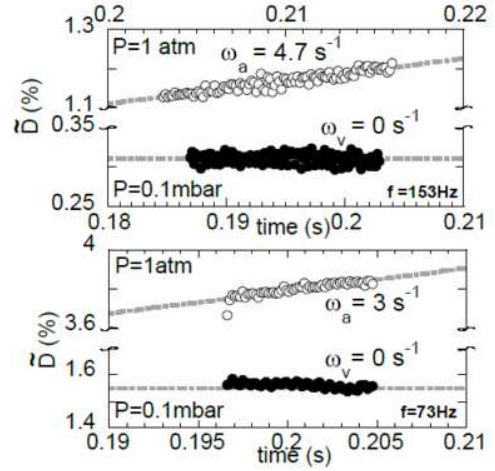
#### 4 Perspectives : interaction entre l’air et le jet granulaire

Nous avons établi qu’en l’absence d’air, les effets de la tension de surface effective granulaire étaient significativement réduits (en supposant que cette tension de surface effective est le moteur de l’instabilité observée dans le jet). Afin d’essayer de comprendre comment se traduit le couplage entre l’air et le jet en termes de forces agissant sur le jet, nous avons cherché à mesurer la vitesse de l’air entraîné par le jet.

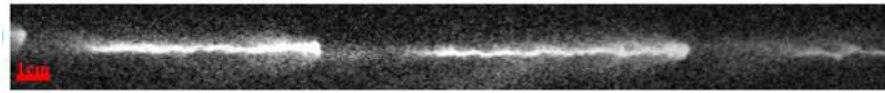
En s’intéressant au profil radial de vitesse des billes, on observe que les billes les plus proches de l’interface du jet chutent plus vite que celles plus éloignées, comme illustré Fig. 5a pour plusieurs distances après l’entonnoir. La vitesse de chute du jet étant donnée par  $v(z) = \sqrt{v_0^2 + 2gz}$ , on notera que les billes ”libres” les plus proches de l’interface ont une vitesse verticale légèrement inférieure à celle du jet, mais supérieure à celle attendue pour une bille isolée en chute libre dans l’air immobile. On s’attend donc à ce que l’air situé près du jet soit entraîné par celui-ci. Nous mesurons cette vitesse de l’air en utilisant des micro-sphères creuses en verre de diamètre  $d \approx 30 \mu\text{m}$  et de densité  $\rho_{K1} = 125 \text{kg.m}^{-3}$  (considérées comme



(a) Relation de dispersion  $\omega(kr_0)$  pour différents entonnoirs. Entonnoir en verre ( $D = 5$  mm, en orange), en plastique ( $D = 6.5$  mm, en bleu) et en plastique ( $D = 12.6$  mm, en rouge).



(b) Taux de croissance donnés pour deux fréquences différentes à pression ambiante et à  $P \approx 0.1$  mbar. Encart : tension de surface granulaire extraite des modes instables (noir) et des fluctuations de l'interface (blanc).



(c) Jet excité ( $f = 53\text{Hz}$ ,  $A = 50 \mu\text{m}$ ) à pression ambiante,  $100 < z < 120$  cm



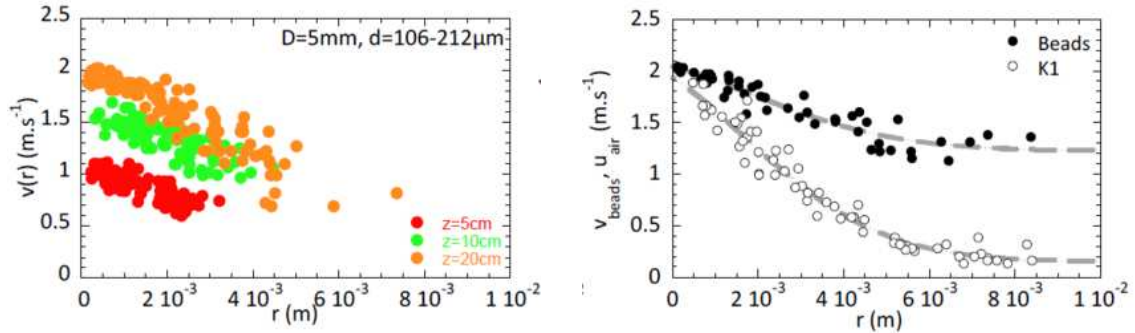
(d) Jet excité ( $f = 53\text{Hz}$ ,  $A = 100 \mu\text{m}$ ), pression  $P \approx 0.1$  mbar,  $100 < z < 110$  cm

**Figure 4.** Résultats expérimentaux obtenus sur un jet granulaire en chute libre dans l'air s'écoulant d'un réservoir soumis à une excitation verticale.

traceurs quasi-passifs pour l'écoulement d'air). Le profil obtenu pour l'air est présenté Fig. 5b avec celui des billes "libres" proches du jet granulaire. Nous pouvons notamment étudier le développement de la couche d'air entraînée par le jet au cours de sa chute i.e. la couche limite d'un cylindre poreux en accélération. Les travaux en cours et à venir concernent cet entraînement de l'air par le jet et les diverses forces résultant de cet entraînement (portance induite par cisaillement, turbophorèse, effet Magnus, coefficient de restitution effectif, etc).

## 5 Conclusion

Nous avons observé et étudié une instabilité dans un jet granulaire en chute libre dans l'air. Cette instabilité possède des similarités frappantes avec l'instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau pour un liquide inviscide. De l'analyse des taux de croissance des modes instables de cette instabilité, nous obtenons une tension de surface granulaire effective dont les valeurs (quelques  $\text{mN}\cdot\text{m}^{-1}$ ) sont en accord avec des mesures réalisées précédemment par d'autres méthodes. Cette tension de surface granulaire effective semble trouver son origine dans l'interaction entre le jet granulaire et l'air ambiant entraîné par le jet et se manifeste à différentes échelles. Des expériences montrent en effet que l'air situé près du jet est entraîné sur une certaine distance autour du jet. Nos résultats semblent donc indiquer un autre mécanisme



(a) Mesurée à grande distance sous le réservoir

(b) Mesurée par des traceurs quasi-passifs

**Figure 5.** Vitesse  $V(r)$  des billes  $d = 106 - 212 \mu\text{m}$  mesurée à différentes distances sous le réservoir (a) et vitesse des billes (points noirs) et vitesse de l'air ambiant (points blancs) mesurée par des traceurs quasi-passifs (b). Les ajustements gaussiens gris servent de guide, et ne représentent pas la forme du profil des particule ou du fluide.

conduisant à la rupture d'un jet granulaire en parallèle des effets cohésifs précédemment évoqués dans la littérature.

## Références

1. N. KHAMONTOVA, *Russian Journal of Physical Chemistry*, **22**, 281 (1890)
2. J. EGGERS & E. VILLERMEAUX, *Physics of Liquid jets, Reports on Progress in Physics*, **71**, 036601 (2008)
3. M. E. MÖBIUS, Clustering instability in a freely falling granular jet, *Physical Review E*, **74**, 051304 (2006)
4. M. NICOLAS, Experimental study of gravity-driven dense suspension jets, *Physics of Fluids*, **14**, 3570-3576 (2002)
5. J. R. ROYER, D. J. EVANS, L. OYARTE, Q. GUO, E. KAPIT, M. E. MÖBIUS, S. R. WAITUKAITIS & H. M. JAEGER, High-speed tracking of rupture and clustering in freely falling granular streams, *Nature*, **459**, 1110-1113 (2009)
6. J. DURAN, Rayleigh-Taylor instabilities in thin films of tapped powder, *Physical Review Letters*, **87**, 254301 (2001)
7. Y. AMAROUCHENE, J.-F. BOUDET & H. KELLAY, Capillarylike fluctuations at the interface of falling granular jets, *Physical Review Letters*, **100**, 218001 (2008)
8. S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover, New York (1961)
9. G. PRADO, Y. AMAROUCHENE & H. KELLAY, Experimental evidence of a Rayleigh-Plateau instability in free falling granular jets, *Physical Review Letters*, **106**, 198001 (2011)