

# Effets de quantification d'une association onde-particule soumise à une force centrale

S. Perrard<sup>1</sup>, M. Labousse<sup>1,2</sup>, M. Miskin<sup>1,3</sup>, E. Fort<sup>2</sup> & Y. Couder<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Matière et Systèmes Complexes, Université Paris Diderot, CNRS - UMR 7057, Bâtiment Condorcet, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75013 Paris, France

<sup>2</sup> Institut Langevin, ESPCI ParisTech and Université Paris Diderot, CNRS UMR 7587, 10 rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France

<sup>3</sup> James Franck Institute, University of Chicago, 929 East 57th Street, Chicago, IL 60637

stephane.perrard@univ-paris-diderot.fr

**Résumé.** Un marcheur, entité autopropulsée formée d'une goutte rebondissant sur un bain vibré et d'un champ d'onde sous-jacent a montré des similitudes surprenantes avec la dualité onde-particule du monde quantique. Grâce à un nouveau dispositif expérimental, nous pouvons maintenant étudier sa dynamique quand celui-ci est soumis à une force centrale. Quand les ondes générées par le marcheur sont peu amorties, i. e. lorsque la *mémoire de chemin* domine la dynamique, les trajectoires sont généralement complexes. Cependant, des orbites périodiques, circulaires ou non (lemniscates, trifolium) sont obtenues dans certaines plages de force appliquées. Ces trajectoires ordonnées correspondent à des états propres pour la trajectoire du marcheur, comme pour l'onde associée. Une comparaison avec les états propres quantiques de l'oscillateur harmonique 2D met en évidence la même règle de sélection des états. Enfin, les trajectoires désordonnées observées sont formées d'une superposition de ces modes purs, avec des transitions erratiques entre états voisins.

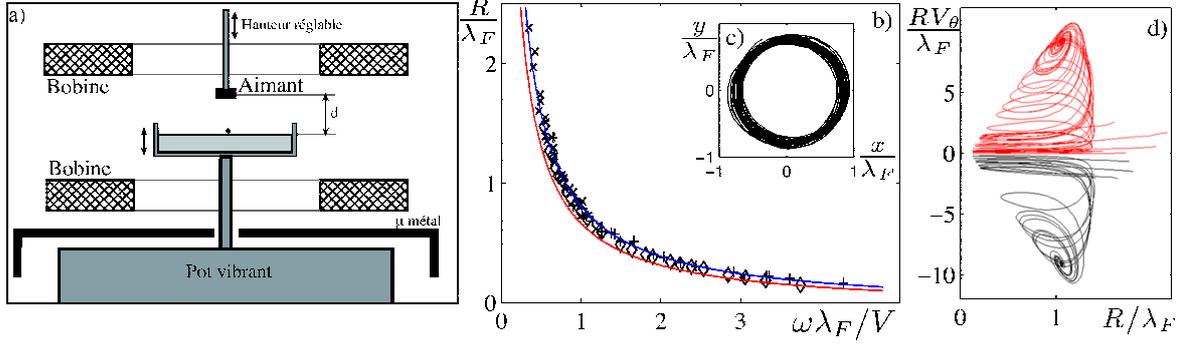
**Abstract.** A self-propelled entity formed by a bouncing droplet on a vibrated bath and its associated surface wave, the so-called "walker", was shown to have surprising wave-particle duality. Thanks to a new experimental set up, we now study its motion when it is submitted to a central force. When it is endowed with *path-memory* i.e. when the waves generated in the past are sustained, its trajectory is generally highly complex. However, periodic orbits, that can be circular or in the shape of lemniscates or trefoils, are obtained for specific tunings of the central force field. These ordered trajectories correspond to eigenstates for both the trajectory and the associated wave field. A comparison with the quantum eigenstates in a 2D potential well shows similar selection rules. Finally, the disordered trajectories are formed of a superposition of these pure eigenmodes through intermittent transitions between them.

## 1 Introduction

L'association d'une particule et d'une onde peut avoir, même à l'échelle classique, des comportements rappelant ceux des particules duales du monde quantique [1, 2]. Dans le système considéré, une goutte rebondissant sur un bain de liquide vibré génère à chaque impact une onde circulaire de Faraday. Le rebond de la particule sur cette surface perturbée par les ondes peut la mettre en mouvement, l'ensemble formant alors un *marcheur*. La persistance des ondes émises par les chocs précédents peut être contrôlée par l'amplitude de la vibration imposée, et forme la *mémoire de chemin*. Pour une mémoire faible, l'onde associée est quasi-circulaire, localisée autour de la goutte. Pour une mémoire plus élevée, les ondes générées par les chocs antérieurs subsistent et forment une figure d'interférence complexe qui va guider la particule.

L'ensemble des travaux antérieurs a permis d'établir d'une part les équations du mouvement pour la goutte et l'évolution du champ d'onde associé, et d'autre part de mettre en évidence une analogie peu commune avec la mécanique quantique. Cependant, il manquait jusqu'à maintenant une expérience pour explorer la *dynamique* d'un marcheur sous l'action d'une force extérieure.

Nous présentons ici un dispositif expérimental nouveau permettant de faire agir sur la goutte une force magnétique. Pour cela du ferrofluide est encapsulé dans la goutte, soumise à un champ magnétique extérieur inhomogène. Nous étudions ici un des cas simples possibles : le puits de potentiel harmonique à



**Figure 1.** a) Schéma du dispositif expérimental : la goutte contenant du ferrofluide est déposée sur un bain d'huile en oscillation verticale. Deux bobines placées en position de Helmholtz et un aimant permettent d'appliquer une force magnétique sur la goutte  $\mathbf{F} = -\kappa\mathbf{r}$ . La valeur de la constante de raideur peut être réglée en changeant la distance entre la goutte et l'aimant. b) Rayon adimensionné  $R/\lambda_F$  des trajectoires circulaires observées pour trois gouttes de vitesse  $V=6, 9$  et  $12$  mm/s et un paramètre de mémoire faible ( $M < 10$ ).  $R$  est exprimé en fonction de la fréquence adimensionnée du champ magnétique  $\omega\lambda_F/V = \Lambda^{-1}$ . La droite rouge correspond au cas usuel d'un mobile se déplaçant à la vitesse  $V$  dans un puit de potentiel harmonique, sans paramètre ajustable. La courbe bleue est un ajustement linéaire par une droite, de pente 10 pour cent supérieure à la théorie. c) Exemple de trajectoire circulaire observé. Coupe dans le plan  $(r, rV_\theta)$  de l'espace des phases : une condition initiale quelconque converge vers la trajectoire circulaire,  $r = R$  et  $rV_\theta = \pm RV_W$ .

deux dimensions. Les résultats obtenus, aussi bien expérimentaux que numériques, mettent en évidence un jeu d'états propres du marcheur, analogue à ceux de l'oscillateur harmonique quantique à deux dimensions.

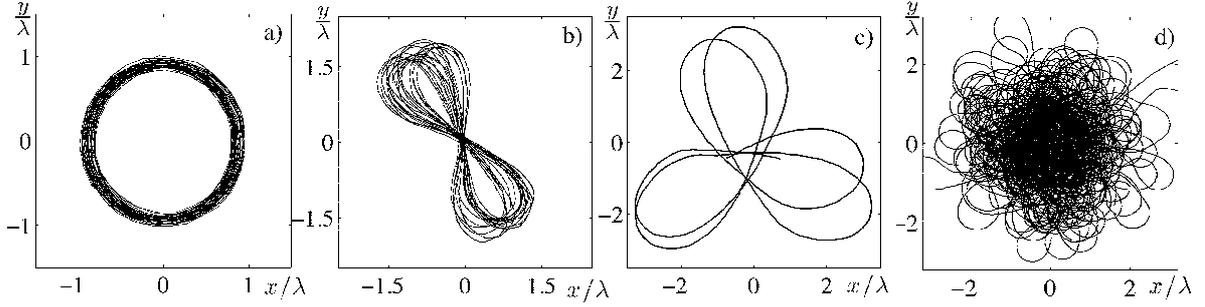
## 2 Dispositif expérimental

Le montage utilisé pour produire des marcheurs est analogue à celui des travaux précédents [2] : une cellule remplie d'huile silicone de viscosité 20 cp est mise en oscillation verticale avec une accélération  $\gamma = \gamma_m \sin(2\pi f_0 t)$  à une fréquence de forçage  $f_0 = 80$  Hz. L'amplitude  $\gamma_m$  peut aller de l'accélération de gravité  $g$  jusqu'au seuil de l'instabilité de Faraday observée à  $\gamma_m = 3,8g$  où des ondes stationnaires de période  $T_F$  (double de celle du forçage) se développent à la surface du bain. En dessous mais à proximité du seuil de l'instabilité, chaque rebond de la goutte crée une onde circulaire de Faraday évanescence, qui, par accumulation, peut la mettre en mouvement. La goutte devient alors un marcheur, se propageant en ligne droite à une vitesse typique de 10 mm/s.

Un élément essentiel de la dynamique de ces marcheurs est contenu dans la structure du champ d'onde qui l'entoure. Celui-ci dépend directement du temps d'amortissement  $\tau$  des ondes générées par le marcheur, dont la valeur est pilotée par l'écart relatif au seuil de Faraday. Le champ d'onde total résultant est alors issu de la sommation de ces ondes circulaires, le nombre de source à prendre en compte étant de l'ordre de  $M = \tau/T_F$ . Ce paramètre  $M$  nous donne ainsi une mesure de la *mémoire de chemin* du marcheur à l'origine de la dynamique couplée entre onde et particule dans notre système [3]. Pour étudier la dynamique de cet objet singulier, on se propose ici d'exercer une force extérieure sur le marcheur, qui permettra de venir sonder les états possibles du système. Nous avons pour cela choisi d'appliquer des champs magnétiques à une goutte d'huile contenant du ferrofluide. Celle-ci, plongée dans un champ magnétique extérieur  $\mathbf{B}$  inhomogène, subit une force  $\mathbf{F}$  donnée par :

$$\mathbf{F} = -\frac{\chi_0}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \quad (1)$$

Deux bobines placées en position de Helmholtz autour de la cellule permettent de générer un champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  homogène dans l'espace, l'intensité du champ étant directement proportionnelle au courant parcourant les bobines. Un gradient radial d'intensité du champ magnétique est ensuite généré



**Figure 2.** Trajectoires obtenues à haute mémoire ( $M > 40$ ), pour différentes valeurs de la constante de raideur  $\kappa$ . a) Orbite circulaire du niveau  $n=2$ ,  $R_2 = 0.9$ . b) Lemniscate de Bernoulli, correspondant également à  $\langle R \rangle = R_2$ . Le sens de rotation du marcheur changeant à chaque boucle, le moment angulaire associé est nul. c) Pour une valeur plus faible de la constante de raideur, on peut observer autour de  $\langle R \rangle = R_4 = 1.9$  trois types de trajectoires : circulaires, grande lemniscates, et en trifolium, représenté ici. d) À très haute mémoire ( $M > 100$ ), le cas général observé est une trajectoire complexe.

par un aimant circulaire placé à la verticale de la cellule. Les deux champs sont alignés et la goutte de ferrofluide subit une force attractive radiale capable de la piéger à la verticale de l'aimant. L'intensité du piégeage peut être réglée aisément, en changeant la distance entre l'aimant et le bain. Le champ magnétique total ressenti par la goutte est de l'ordre de 70 G et les gradients de champ de 1 G/cm. Au voisinage du centre, l'amplitude du champ magnétique de l'aimant est parabolique, la force exercée sur la goutte s'exprime donc simplement :

$$\mathbf{F} = -\kappa(d)\mathbf{r} \quad (2)$$

Où  $\kappa(d)$  représente la constante de raideur du puit de potentiel effectif qui peut être réglée en changeant la position verticale de l'aimant. Le volume  $\mathcal{V}$  de ferrofluide contenu dans la goutte n'étant pas connu avec précision, une méthode additionnelle de calibrage a été mise au point pour remonter à la valeur de la pulsation du champ magnétique  $\omega = \sqrt{\kappa/m}$  imposée (voir annexe de [4]).

### 3 Dynamique d'un marcheur en force centrale

#### 3.1 Faible mémoire

Pour un paramètre de mémoire faible (i. e.  $M < 10$ ), l'onde entourant le marcheur est circulaire. Dans ce régime, quelles que soient les conditions initiales, la goutte se retrouve piégée par la force centrale et orbite en cercle autour du centre, à vitesse constante  $V_0$  égale à sa vitesse libre. Ce phénomène est générique des systèmes dissipatifs-entretenus : l'échange permanent d'énergie avec l'extérieur, ici le bain, conduit à une réduction des volumes dans l'espace des phases. Dans un cas simple comme celui ci, où un mobile autopropulsé est soumis à une force centrale harmonique, toute condition initiale converge vers un des deux attracteurs, les orbites circulaires où la vitesse azimutale vaut  $V_\theta = \pm V_0$ . Le rayon du cercle est donné par  $R = V/\omega$ . La courbe présentant le rayon des cercles observés  $R/\lambda_F$  en fonction du paramètre de la force de rappel  $\omega\lambda_F/V$  est présentée en figure 1b). Ce régime de marcheur autopropulsé à faible mémoire peut être modélisé par un oscillateur de Rayleigh à deux dimensions, où la force de friction dépend de la vitesse.

#### 3.2 Grande mémoire

Pour un paramètre de mémoire plus élevé, la longueur du chemin de sources créant l'onde sous-jacente devient supérieur à la longueur d'onde de Faraday, des motifs d'interférence apparaissent. Le marcheur peut alors repasser dans des régions où des ondes de Faraday persistent encore et subit une force additionnelle, dite de *mémoire* qui va modifier sa dynamique. Une des premières conséquences est

l'apparition d'orbites non circulaires, comme des lemniscates de Bernoulli ou des trifolia, qui brisent la symétrie centrale. Même pour les orbites circulaires, la relation  $R = V/\omega$  établie pour un marcheur à faible *mémoire* n'est plus valable : au fur et à mesure que la mémoire est augmentée, les rayons des cercles observés prennent des valeurs discrètes  $\{R_n\}$ , égales à :

$$R_1 = 0.4 \pm 0.1\lambda_F, \quad R_2 = 0.9 \pm 0.1\lambda_F, \quad R_3 = 1.4 \pm 0.2\lambda_F, \quad R_4 = 1.9 \pm 0.2\lambda_F \quad (3)$$

Dans la limite d'un temps de mémoire grand devant la période de rotation du marcheur, les seules orbites circulaires autorisées ont ainsi un rayon  $R$  discret, avec  $R \in \{R_n\}$ .

Qu'en est il des orbites non circulaires ? Pour des orbites où  $R$  varie en fonction du temps, il nous faut définir un rayon moyen à partir de la densité de probabilité  $\rho(r)$  de trouver le marcheur à une distance  $r$  du centre. On définit  $\langle R \rangle$  comme suit :

$$\langle R \rangle = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \rho(r) r^2 dt} \quad (4)$$

Cette définition correspond bien à l'extension spatiale moyenne d'une particule classique d'énergie  $E_W$  dans un puits harmonique :  $\langle R \rangle = \sqrt{E_W/\kappa}$ . De manière analogue, on peut définir un moment angulaire moyen  $L_z$  :

$$L_z = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{V}}{\lambda_F \langle V \rangle} dt. \quad (5)$$

où  $L_z$  a été adimensionné par la longueur d'onde  $\lambda_F$  de Faraday et la vitesse moyenne  $V$  du marcheur. Ces deux observables permettent de classifier les trajectoires expérimentales obtenues. Par exemple, un cercle correspond au cas où  $\langle R \rangle = R_n/\lambda_F$  et  $L_z = nR_n/\lambda_F$ , une lemniscate à  $L_z = 0$ , le sens de rotation changeant de signe à chaque demi-période, etc.

Outre les trajectoires simples observées, il apparaît à haute mémoire ( $M > 50$ ) des gammes de valeurs de  $\Lambda$  pour lesquelles le chemin suivi par le marcheur ressemble à un long spaghetti formant de multiples boucles. Une analyse temporelle d'une telle trajectoire met en évidence la succession de trajectoires simples, telles des cercles ou des lemniscates avec transition rapide entre modes, de manière erratique, mettant en évidence un exemple de multistabilité. En décomposant ces trajectoires sur les différents modes propres observés précédemment (cercle, lemniscate, trifolium), on observe que les parties de trajectoires ainsi obtenues sont analogues aux modes purs observés.

L'ensemble des données expérimentales peut alors être représentés en fonction de  $\Lambda$ , soit en représentation  $R$ , soit en représentation  $L_z$ . Les graphes associés sont à paraître dans [4].

On remarque qu'elles se regroupent autour de valeurs particulières : un marcheur plongé dans un puits de potentiel harmonique exhibe une double quantification, en extension spatiale des trajectoires ( $R$ ), et en moment angulaire ( $L_z$ ), que ce soit pour des trajectoires simples ou des états intermittents entre modes voisins. Le paramètre de champ magnétique peut également être éliminé en représentant directement le niveau  $n$  du rayon moyen en fonction du niveau  $m$  de moment angulaire  $L_z$ . Cette représentation met en évidence un jeu discret de modes que l'on peut décrire par un couple d'entiers naturels  $(n, m)$  tel que  $n$  correspond au niveau du rayon moyen  $R_n$  mesuré, et  $m$  tel que  $L_z = R_m/\lambda_F$ . La règle de sélection empirique obtenue s'écrit :

$$n \in \mathbb{N}, \quad m \in [-n, -n + 2, \dots, n]. \quad (6)$$

## 4 Discussion

L'apparition de modes propres pour un marcheur confiné par une force extérieure rappelle le cas d'un électron dans un puits de potentiel en mécanique quantique. Bien que l'énergie et la longueur d'onde soit fixées dans ce système, l'ensemble des trajectoires peut être rationalisé en considérant ce couple d'entiers  $(n, m)$ , qui définit l'extension spatiale et le moment angulaire. Ce couple  $(n, m)$  est analogue au niveau d'énergie et au moment angulaire dans le cas quantique, et suit la même règle de sélection avec  $n$  entier et  $m \in [-n, -n + 2, \dots, n]$ .

Dans le cas d'un marcheur, système purement classique, ce comportement provient de la mémoire de chemin. Le champ d'onde associé à la goutte peut être exprimé comme une superposition d'ondes circulaires stationnaires, centrées aux précédents points d'impact. On en déduit la hauteur  $h$  de la surface au moment de l'impact, qui s'écrit sous la forme :

$$h(\mathbf{r}, t_p) = A_0 \sum_{k=-\text{inf}}^p J_0(2\pi k_F \|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_k\|) e^{-\frac{(t-t_k)}{\tau}} \quad (7)$$

où  $J_0$  correspond à la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0, solution de l'équation de Helmholtz pour une source ponctuelle. L'exponentielle correspond à l'amortissement temporel de ces ondes. L'émergence d'une quantification des orbites provient des propriétés d'un tel champ d'onde. Pour un paramètre de mémoire élevé, le marcheur effectue un grand nombre de tours sous l'aimant avant que les ondes s'atténuent. On peut alors considérer que la densité de sources actives laissées par le marcheur est invariante par rotation. Par construction, le champ total résultant est axisymétrique, et s'exprime comme une fonction de Bessel  $J_0$  centrée en 0 (cf. théorème de Graf), seule une faible composante de  $J_1$  tournant avec la goutte assure la propulsion. L'amplitude  $A$  d'une telle onde dépend du chemin  $\{r_k\}$  suivi par le marcheur, soit :

$$h(\mathbf{r}) = A(\{r_k\}) J_0(2\pi k_F r). \quad (8)$$

L'impulsion transmise à l'onde centrée en 0 après chaque impact en  $r_k$  est proportionnelle à l'amplitude  $J_0(2\pi k_F r_k)$  au point d'impact. Et finalement, la hauteur du bain ressentie par le marcheur s'écrit  $h = J_0(2\pi k_F r)^2$ . Ce résultat peut également être dérivé analytiquement à partir de l'équation (7), pour une trajectoire circulaire à une distance  $R = r$  du centre :

$$\frac{\partial h}{\partial r} = -A_0 M J_0(2\pi k_F r) J_1(2\pi k_F r) \quad (9)$$

où  $A_0$  correspond à l'amplitude de l'onde créée pour un impact. On remarque par ailleurs que l'amplitude des ondes, et donc l'amplitude du potentiel créé par la goutte elle-même, est proportionnel au paramètre de mémoire  $M$ . Plus la *mémoire* du système est élevée et plus le marcheur sera confiné au voisinage des zéros de la fonctions de Bessel, correspondant aux  $\{R_n\}$  obtenus expérimentalement.

## 5 Conclusion

L'application d'une force centrale permet ainsi de sonder les états possibles d'un marcheur confiné dans un puits harmonique. Les dernières expériences menées mettent en évidence le couplage fort entre onde et particule dans ce système. En effet, le confinement de la goutte seule finit par engendrer un état lié où les propriétés statistiques de la trajectoire (rayon moyen et moment angulaire) sont quantifiées. En confinant la goutte, les sources du champ d'onde se retrouvent également localisées au voisinage du centre. Par rétroaction, la goutte est alors piégée dans les modes propres de cette onde, qu'elle a elle-même générée.

## Références

1. E. FORT, A. EDDI, J. MOUKHTAR, A. BOUDAOU & Y. COUDER, Path-memory induced quantization of classical orbits, *PNAS*, **107**, 17515 (2010).
2. E. FORT & Y. COUDER, Single-particle diffraction and interference at a macroscopic scale, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 154101 (2006).
3. A. EDDI, E. SULTAN, J. MOUKHTAR, E. FORT, M. ROSSI & Y. COUDER, Information stored in Faraday waves : the origin of a path memory, *J. Fluid Mech.*, **674**, 433 (2011).
4. S. PERRARD, M. LABOUSSE, E. FORT & Y. COUDER, Observable macroscopic eigenstates, *soumis à PNAS*.