Les héritiers de Poincaré

Christian Mira

19 rue d'Occitanie, 31130 QUINT
c.mira@free.fr

1 Introduction

Dans le domaine scientifique, le terme « *dynamique* » se réfère à l'étude des processus évoluant dans le temps. L'équation, qui décrit l'évolution temporelle d'un tel processus, est généralement appelée « *système dynamique* ».

Dans le cas des processus continus, la théorie des systèmes dynamiques s'est essentiellement construite à partir des résultats de Poincaré (1878-1900), et de Liapunov (1893). Pour les processus à dynamique discrète donnant lieu à des modèles sous forme de *récurrence* (noms équivalents : *équation aux récurrences*, *itération*, *transformation ponctuelle*) les résultats sont ceux obtenus, à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle et au début du $20^{\text{ème}}$ siècle, par l'école française représentée en particulier par Grevy, Leau, Koenigs, Lemeray, Lattes, Hadamard, Julia, Fatou. Les résultats de Poincaré [1,2,3] sur les solutions périodiques des équations différentielles ordinaires sont à la base du développement spectaculaire des études sur les systèmes dynamiques non linéaires qui a suivi. Ils ont donné lieu à deux approches différentes des problèmes. La première correspond aux *méthodes qualitatives.* Pour définir la « stratégie » de ces méthodes, on doit noter que les solutions des équations non linéaires de systèmes dynamiques sont en général des fonctions transcendantes non classiques de l'analyse mathématique (moins d'une dizaine ont été étudiées et tabulées). Cette « stratégie » est du même type que celui utilisé pour la caractérisation d'une fonction de la variable complexe par ses singularités : zéros, pôles, et singularités essentielles. Ici, les fonctions complexes transcendantes sont définies par les singularités des *systèmes dynamiques continus* (resp. *systèmes dynamiques discrets*) telles que :

– Les états stationnaires qui sont des *points d'équilibre* (resp. *points fixes*), ou des *solutions périodiques* (resp. *cycles*), qui peuvent être stables ou instables.
– Les *trajectoires de phase* (resp. *courbes invariantes*) passant par les singularités de type *col* pour les systèmes autonomes bidimensionnels.
– Les *variétés stable et instable* pour les systèmes de dimension supérieure à deux.
– La frontière, ou *séparatrice*, du domaine d'influence (domaine d'attraction, ou *bassin*) d'un état stationnaire stable (resp. *attracteur*).
– Les singularités *homoclines*, ou *hétéroclines.*
– Des singularités plus complexes de type *fractal*, ou non fractal.

Les méthodes qualitatives considèrent la nature de ces singularités dans l'espace de phase, et leur évolution, soit lorsque les paramètres du système varient, soit en présence d'une modification continue de la structure du système (étude des *bifurcations* définies dans l'espace des paramètres, ou dans un espace fonctionnel).

La seconde approche correspond aux *méthodes analytiques* de la dynamique non linéaire. Ici, les fonctions transcendantes complexes mentionnées ci-dessus sont définies par des développements en série, convergents, ou tout au moins asymptotiquement convergents, ou vus « en moyenne ». La *méthode de petit paramètre de Poincaré*, les *méthodes asymptotiques* de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski sont analytiques. Il en est de même de la *méthode de la moyenne*, et de la *méthode de linéarisation harmonique.* Ces méthodes sont largement utilisées dans la théorie des oscillations non linéaires.

Ces deux approches constituent deux branches relativement indépendantes de la théorie des oscillations non linéaires. Elles ont les mêmes objectifs : la construction d'outils mathématiques destinés à résoudre des problèmes concrets, et le développement d'une théorie générale des systèmes dynamiques.

2 Méthodes qualitatives, méthodes analytiques, résultats de Poincaré

Dans le cadre des méthodes qualitatives, l'idée directrice de Poincaré était au départ de ramener l'étude des trajectoires du plan de phase, engendrées par une équation différentielle autonome du deuxième ordre, à l'étude d'une *transformation d'une droite en elle-même* (voir sa théorie des conséquents sur les *arcs* ≪ *sans contact* ≫), et à l'étude d'une *transformation d'un cercle en lui-même* pour les trajectoires sur le tore [1]. En bref, cette idée revenait à considérer un problème de dimension inférieure, donc plus simple. Elle lui permit ainsi de définir la notion de *cycle limite* (courbe fermée du plan de phase, image d'une solution périodique) associé à un point fixe de la transformation, dont la stabilité détermine celle de la solution périodique. L'intérêt de la méthode pour l'étude des propriétés qualitatives des solutions, et en particulier des problèmes de bifurcation, devait conduire tout naturellement ce grand mathématicien à la généraliser aux équations différentielles autonomes d'ordre trois, en réduisant le problème posé à l'étude d'*une transformation d'une surface en elle-même* [1,2]. Ces considérations ont conduit Poincaré à mettre en évidence une certaine analogie entre les points fixes d'une transformation ponctuelle bidimensionnelle, et les points d'équilibre de l'équation différentielle autonome de même dimension, en retrouvant localement, pour les courbes invariantes des transformations, les comportements de type *col*, *foyer*, *nœud* des trajectoires de phase engendrées par une équation différentielle autonome bidimensionnelle. Simultanément, il définissait analytiquement les courbes invariantes passant par un *col* (une variété stable, et une variété instable) par deux séries convergentes.

Cette idée est à l'origine de la vocation ≪ interdisciplinaire ≫ de l'outil transformation ponctuelle. Elle ouvrait, en effet, la voie à la résolution de nombreux problèmes liés à la détermination des solutions périodiques à propos desquelles Poincaré devait dire :

> ≪ ce qui nous rend ces solutions si précieuses, c'est qu'elles sont pour ainsi dire la seule brèche par où nous puissions pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable. ≫

Cette brèche allait encore s'ouvrir un peu plus avec le *problème restreint des trois corps*. Ce problème, lié à celui des systèmes dynamiques conservatifs autonomes à deux degrés de liberté (équation différentielle autonome d'ordre quatre), se ramène à une équation différentielle de dimension trois par l'intermédiaire d'une intégrale connue, introduite par Euler. Poincaré [1,2,3] franchit une nouvelle étape de diminution de la dimension du problème en le réduisant à celui d'une transformation d'une surface de section en elle-même. Le même raisonnement le conduisit, en outre, à associer à une équation différentielle hamiltonienne non autonome du deuxième ordre, avec hamiltonien fonction périodique du temps, une transformation du plan en lui-même, permettant l'étude des mouvements voisins d'un mouvement périodique. Le lien entre ces deux problèmes est une conséquence du fait que les équations de systèmes dynamiques, conservatifs, autonomes, à deux degrés de liberté, peuvent se réduire dans le voisinage d'une trajectoire fermée à une équation différentielle du deuxième ordre avec hamiltonien fonction périodique du temps. Les trois volumes de son célèbre ouvrage *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste* [2] sont en grande partie consacrés à ces questions, qui ont intérêt fondamental en Astronomie. Le même problème des trois corps devait, en outre, conduire Poincaré à établir, grâce à une étude plus fine des deux courbes invariantes passant par un point fixe *col* d'une transformation d'une surface en elle-même, les notions de points singuliers : *doublement asymptotiques*, *homoclines*, *hétéroclines*, et à annoncer l'extrême complexité de la figure obtenue sur la surface, qu'il décrivait comme un enchevêtrement inextricable de courbes. L'importance de ces notions, pour les recherches concernant les systèmes dynamiques, n'a fait que se confirmer depuis. Ces notions sont, en effet, directement liées à ce qu'on a appelé d'abord des comportements *stochastiques*, et à partir de 1975 *chaotiques*, rencontrés dans certains systèmes physiques. Les résultats dans ce domaine ont alors suivi une croissance exponentielle.

La contribution aux méthodes analytiques de la dynamique non linéaire a donné lieu à ce qui a été appelé par la suite la *méthode du petit paramètre de Poincaré*, basée la notion de *solution génératrice*, choisie à partir de l'approximation linéaire (le petit paramètre est alors égal à zéro). La solution d'une équation différentielle non linéaire (fonction transcendante exceptionnellement tabulée), est donnée par un développement en série convergent. Comme ceci apparaitra plus bas, cette approche a été considérablement développée et étendue par les écoles de dynamique non linéaire de l'ex-Union soviétique (Krylov, Bogoliubov, Mitropolski, Malkin, ...).

Il est moins connu que Poincaré a aussi consacré une partie de ses recherches aux problèmes des oscillations électriques. L'article [4] est consacré à ces questions, en particulier l'association de la notion de *cycle limite stable* aux oscillations libres d'un circuit électrique est due à Poincaré, et non à Andronov comme ceci est généralement admis. Cette question sera reprise ci-dessous (§ 5.2) à propos de la contribution d'Andronov à ce type de problème.

3 Les systèmes dynamiques à l'époque de Poincaré

La fin du 19$^{\text{ème}}$ siècle et le début du 20$^{\text{ème}}$ sont marqués par plusieurs résultats fondamentaux sur les systèmes dynamiques continus, ou discrets (équations aux récurrences, itération, transformations ponctuelles).

- Alexandre Ljapunov est le mathématicien qui a aussi fourni une importante contribution à cette époque. On lui doit les fondements de la *théorie de la stabilité des mouvements* avec un texte célèbre traduit en français au début du 20$^{\text{ème}}$ siècle [5], le seul cité dans la littérature occidentale. A partir de la considération de l'équation du « *mouvement perturbé* », il a introduit la notion fondamentale de *nombres caractéristiques*. La définition de deux classes de fonctions, dites *fonctions de Ljapunov de première espèce* (pour les équations différentielles autonomes) et *fonctions de Ljapunov de seconde espèce* (pour les équations différentielles non-autonomes), lui a permis de résoudre le problème de la stabilité dans les *cas critiques de stabilité*, ceux pour lesquels l'approximation linéaire ne permet pas une conclusion pour un état stationnaire (*mouvement non perturbé*). En 1954, un manuscrit inconnu, donnant de nouveaux résultats sur les cas critiques a été découvert. Immédiatement publié en russe, il a été ensuite traduit en anglais [6].
- Jacques Hadamard [7,8,9] s'est penché sur la caractérisation des courbes invariantes d'un point fixe col d'une transformation ponctuelle bidimensionnelle, lorsque l'hypothèse d'analycité des données, utilisée par Poincaré, n'est pas satisfaite.
- Tullio Levi-Civita [10] s'est intéressé aux conditions suffisantes d'instabilité des solutions périodiques des systèmes dynamiques conservatifs à deux degrés de liberté, lorsque le point fixe de la transformation ponctuelle bidimensionnelle associée comporte des multiplicateurs (valeurs propres) $e^{\pm j\varphi}$, $j^2 = -1$, φ étant commensurable avec 2π.
- Raffaelo Cigala [11] a examiné le même problème quand φ n'est pas commensurable avec 2π.
- Samuel Lattès [12,13] a développé des études sur les transformations ponctuelles multidimensionnelles dans le voisinage d'un point fixe (étude locale), ou d'un cycle (point périodique), en relation avec des recherches sur l'équation fonctionnelle multidimensionnelle de Schroeder. Cette analyse a été faite dans le cas où les données sont analytiques, ou non analytiques.
- Gaston Julia [14] et Pierre Fatou [15,16] (1918) sont à l'origine des premières études globales sur l'itération à une dimension avec une variable complexe, ce qui revient au cas particulier d'une transformation à variables réelles, bidimensionnelle qui satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann. Ils ont défini les propriétés d'auto similitude (appelé *fractales* à partir de 1975, date à laquelle ce problème a été de nouveau examiné) de la frontière du bassin d'un attracteur (frontière connue sous le nom d'*ensemble de Julia*).
- Luitzen Egbertus Jan Brouwer [17] s'est intéressé aux problèmes de l'existence de points fixes de transformations d'une surface en elle-même.
- Emile Cotton [18] a étendu la notion de nombre caractéristique de Ljapunov aux transformations ponctuelles.

4 G. D. Birkhoff et la théorie des systèmes dynamiques

Les recherches sur la théorie des systèmes dynamiques représentent une part importante de la contribution de Birkhoff aux sciences mathématiques [19,20]. Il est intéressant de noter que ces recherches ont été menées hors de ce que l'on peut appeler le domaine des ≪ généralisations non essentielles ≫ qui ont encombré depuis 1965 une grande partie des résultats de la ≪ *théorie abstraite* ≫ des systèmes dynamiques. En effet Birkhoff affirmait que [21]

> ≪ l'organisation systématique, ou l'exposition, d'une théorie mathématique est toujours d'importance secondaire par rapport à sa découverte, [...] quelques-unes des théories actuelles mathématiques n'étant que des élaborations relativement évidentes d'exemples concrets. ≫

C'est dans cet esprit qu'il a mené son travail, en étant le premier à exploiter le domaine ouvert par Poincaré. Bien que de formation universitaire américaine, il était intellectuellement un disciple du mathématicien français, sans doute le plus grand. Le mathématicien Marston Morse a pu ainsi dire ≪ *Poincaré a été le véritable Maître de Birkhoff* ≫. Ses premiers travaux sur les systèmes dynamiques, en prenant le relais au point où l'avait laissé Poincaré à sa mort (1912), illustrent parfaitement ce point. En effet, dans sa dernière publication, Poincaré montrait que l'existence de solutions périodiques du problème restreint des trois corps pouvait être déduite d'un théorème relatif à une transformation ponctuelle, dont il ne put donner une démonstration que dans des cas très particuliers [2]. Cette démonstration, qui avait résisté à Poincaré, fut fournie par son disciple, en janvier 1913, sous une forme simple mais rigoureuse [22].

La ≪ *brèche* ≫ ouverte par Poincaré allait être alors considérablement élargie par Birkhoff avec l'introduction des notions de *mouvement récurrent*, *transitivité*, son célèbre *théorème ergodique*, ses larges études sur les *points fixes hyperboliques* (c'est-à-dire cols) avec points *homoclines* et *hétéroclines*, sur les *points fixes elliptiques* (centres) stables et instables. Ont suivi : le concept de *signature* pour la description qualitative d'un système dynamique, ceux d'*ensembles récurrents*, de *mouvements centraux*, *transitifs*, *errants*, sa contribution au problème des trois corps. Sa théorie qualitative des systèmes dynamiques est limitée aux systèmes conservatifs à deux degrés de liberté ($m = 2$) en raison de l'existence douteuse d'un ≪ *surface régulière de section* ≫ pour les systèmes à plus de deux degrés de liberté, et en admettant comme très probable l'existence générale de ces surfaces pour $m = 2$. Cette théorie qualitative a atteint son point culminant avec le long article, en langue française, *Nouvelles recherches sur les Systèmes Dynamiques* reprend et étend ses résultats antérieurs. C'est dans ce document qu'il présente la notion de ≪ *signature* ≫, symbole bidimensionnel qui définit la topologie d'une structure homocline ou hétérocline. Un tel symbole est la représentation qualitative la plus élaborée d'un système dynamique. Cet article mentionne également les analogies formelles entre les deux variétés, stable, et instable, se recoupant, et asymptotiques à un *point elliptique* (problème du *centre instable*) et les courbes invariantes passant par les *points hyperboliques* (col).

Le premier des trois volumes *Collected Mathematical Papers* [22] reproduit un article de Marston Morse [21], qui analyse l'ensemble de l'œuvre mathématique de Birkhoff. Dans son livre "*Systèmes Dynamiques*" [20], Birkhoff écrivait : ≪ *le but final de la théorie des mouvements d'un système dynamique est la détermination qualitative de tous les types possibles de mouvements et de l'interrelation de ces mouvements le but final de la théorie des mouvements d'un système dynamique est la détermination qualitative de tous les types possibles de mouvements et de l'interrelation de ces mouvements* ≫. Aussi la définition et la classification des types possibles de mouvements dynamiques constituent une importante contribution de cet auteur, sujet repris ensuite par Aleksandr Andronov (§ 5.2) et Théodore Vogel (§ 6.2).

En France Arnaud Denjoy fut aussi un continuateur de l'œuvre de Poincaré en reprenant une question qu'il avait laissée en suspens. Il s'agit du problème des courbes définies par des équations différentielles à la surface du tore, pour lequel la *transformation d'un cercle en lui-même* est l'outil de base [24]. Denjoy a pu ensuite élargir le problème au cas des tores dans des espaces de dimension supérieure à trois (1958-1966) [25].

5 Elaboration de la « théorie des oscillations non linéaires ». Vers une « théorie générale des systèmes dynamiques »

5.1 Cadre général

Sous le nom de « *théorie des oscillations non linéaires* », l'étude de la dynamique non linéaire a connu une nouvelle phase de croissance à partir de 1925, avec le développement des études de modèles des circuits électriques, électroniques, des systèmes de commande automatique, et avec les résultats de Lord Rayleigh, Van der Pol. Cette période est essentiellement marquée par la contribution exceptionnelle des équipes dirigées par Mandelstham et Andronov à Gorki, de Krylov-Bogoliubov à Kiev. Il s'agit de deux écoles scientifiques à la base du développement spectaculaire des résultats obtenus dans l'ex-Union Soviétique, à propos desquelles les américains Joseph P. La Salle et Solomon Lefschetz écrivaient en 1961 [26] :

> « En URSS l'étude des équations différentielles a des racines profondes, et dans ce domaine l'Union soviétique occupe incontestablement la première place. On peut ajouter que les spécialistes soviétiques, loin de travailler dans le vide, sont en contact intime avec des mathématiciens et des ingénieurs au plus haut niveau. Cela a apporté de grands bénéfices à l'URSS et il est sûr de dire que ce pays ne renoncera pas à une telle supériorité. »

Une telle approche des problèmes de dynamique non linéaire est liée à ce qu'on peut appeler une « *théorie des systèmes dynamiques concrets* », en relation avec ce que disait Joseph Fourier [27]

> « L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue ; elle est encore un moyen assuré de former l'analyse elle-même et d'en découvrir les éléments qu'il importe le plus de connaître et de conserver. Ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels. »

Dans le domaine des systèmes dynamiques « *concrets* », les recherches ont été essentiellement menées sur deux axes différents à partir de 1925. Le premier est classique depuis le 19$^{\text{ème}}$ siècle. Il concerne l'élaboration de méthodes particulières adaptées à la solution des modèles rencontrés dans les sciences physiques, et dans les sciences de l'ingénieur. Le second n'est pas directement lié à l'étude d'un phénomène particulier d'un domaine scientifique donné. Son but est la recherche de comportements qualitativement semblables rencontrés dans les différentes branches de la dynamique, à partir d'un modèle commun, permettant la construction d'outils mathématiques adaptés à la forme de ce modèle. Le modèle est alors traité soit via l'approche des méthodes qualitatives, soit *via* l'approche des méthodes analytiques. Dans ce cadre les modèles considérés ne sont pas directement inspirés par des systèmes suggérés par une « existence physique », mais construits avec la plus petite dimension, et la structure la plus simple, qui permettent d'isoler dans la forme la plus pure un « *phénomène mathématique* »rencontré qualitativement dans le « monde réel », en éliminant les « *effets parasites* » d'une structure beaucoup plus complexe. La mise en évidence, par Myrberg (1963), du phénomène des cascades de bifurcations par doublement de la période, et leurs accumulations [28,29,30,31], dans la transformation ponctuelle très simple $x' = x^2 - c$ (x étant une variable réelle, et c un paramètre réel), est d'un tel type. Ce phénomène non linéaire, l'un des chemins vers la génération de phénomènes chaotiques, se rencontre dans les systèmes dynamiques de disciplines scientifiques fort diverses. Il en est également de même pour le fameux « *fer à cheval* »de Smale [32,33], lié aux propriétés fondamentales des structures homoclines.

5.2 L'école d'Andronov (ou école de Gorki). Sa naissance.

Cette école donne un exemple unique d'une organisation scientifique exceptionnellement productive. Cette organisation était liée à un projet de recherches à longue échéance, mises en œuvre simultanément dans le domaine des études théoriques, et celui de leurs applications aux sciences de l'ingénieur. Ceci s'est fait sur la base d'une collaboration étroite entre spécialistes des mathématiques pures et appliquées, pleinement conscients des problèmes posés par les applications, ingénieurs au plus haut niveau, et physiciens.

Le livre « *L'école de l'Académicien Andronov* » (en russe) [34] de E. C. Boïko, qui retrace cette épopée scientifique, avec sa bibliographie complète, constitue un document historique unique sur ce sujet.

Le problème de la construction des outils mathématiques, adaptés à l'étude des oscillations non linéaires a été tout d'abord formulé par Mandelstham à partir de 1920, dans le cadre de l'étude des systèmes dynamiques appartenant à la radio-ingénierie. En effet, avec Papaleski, Mandelstham a formulé les problèmes fondamentaux résolus ensuite par leurs disciples. De telles formulations ont constitué une étape décisive dans la compréhension des systèmes dynamiques « concrets ».

Au début dans cette école, l'approche la plus populaire des problèmes non linéaires était celle de la *méthode d'ajustement* (*fitting method*). Cette méthode est basée sur l'approximation d'une caractéristique non linéaire par une caractéristique voisine linéaire par morceaux. La solution d'un problème non linéaire est ainsi ramenée à celle d'un ensemble de problèmes linéaires correspondant aux différents segments linéaires, avec des conditions de continuité à la jonction des segments linéaires. Jusqu'en 1927, c'est à l'aide de cette méthode que cette école a traité la plupart des problèmes des sciences physiques, et des sciences de l'ingénieur.

En 1927, Andronov, l'étudiant le plus célèbre de Mandelstham, soutient sa thèse avec un sujet formulé par Mandelstham : "*Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations*". Cette thèse est une contribution de premier plan à l'évolution de la théorie des oscillations non linéaires, car elle ouvre une nouvelle voie d'applications de la théorie qualitative de Poincaré. Avec ce travail, jusqu'à une date récente (2010), Andronov était considéré comme le premier à avoir montré que les phénomènes des oscillations libres d'un oscillateur (il s'agissait de celui de Van der Pol) correspondent à des cycles limites de Poincaré. En fait Poincaré avait montré bien avant que l'équation du circuit de l'arc électrique chantant (semblable à celle de l'oscillateur de van der Pol) a pour régime stationnaire un cycle limite stable [4]. Ce résultat a été donné dans le cadre d'une série de conférences longtemps oubliées [35].

Andronov a amplifié ensuite ses recherches avec un but précis : l'élaboration d'une théorie des oscillations non linéaires, afin de disposer d'outils mathématiques, communs aux différentes disciplines scientifiques traitant de systèmes à comportement évoluant dans le temps. Pour l'élaboration de cette théorie, il a utilisé, les bases suivantes :

- La théorie de la stabilité de Lyapunov,
- La théorie qualitative de Poincaré,
- Les transformations ponctuelles (outil de base pour l'utilisation des surfaces de section de Poincaré),
- La classification de Birkhoff [20] de tous les types possibles de mouvements dynamiques, classification qu'il a améliorée.

5.3 Contribution aux méthodes qualitatives.

Sur la base des idées développées par Poincaré, Andronov a montré [36] qu'il est possible de diviser le plan de phase (systèmes autonomes bidimensionnels) en cellules, chacune contenant des trajectoires de phase dont le comportement qualitatif est identique. Chaque cellule, bornée par une frontière, est le domaine d'attraction (ou *bassin*) d'un état stationnaire stable (point d'équilibre, ou cycle limite). Pour un système « concret », le sens physique d'une telle cellule correspond à une dynamique, ou à un mode de fonctionnement donné. Cependant, ce résultat n'a pas d'extension directe pour les espaces de phase de dimension supérieure à 2, en raison de difficultés pour définir la frontière de ces cellules dans le cas général. Ceci était ignoré à l'époque.

L'étude globale du plan de phase d'une équation différentielle autonome bidimensionnelle autonome est due à Andronov, et ensuite à Leontovich, Gordon et Mayer qui l'ont complétée. En donnant en particulier la structure des trajectoires dans les *cas critiques au sens de Liapunov*, et le comportement sur l'*équateur de Poincaré* (comportement à l'infini), les résultats correspondants sont développés dans le livre [37], écrit après la mort d'Andronov.

L'une des contributions les plus spectaculaires de l'école d'Andronov porte sur la *théorie des bifurcations*, branche de la théorie qualitative des systèmes dynamiques. En 1937, Andronov a été le premier à étudier analytiquement la bifurcation du plan phase engendrant m cycles limites à partir d'un *foyer complexe* de multiplicité $k > 1$ (cas critique au sens de Ljapunov), $m \leq k$. Cette bifurcation avait été seulement décrite par Poincaré (*solution périodique de seconde espèce*), et avait été également étudiée par Hopf en 1942 pour $m = 1$. D'autres types de bifurcations ont été ensuite analysés par Andronov, Leontovich, Gordon, Mayer [38] : naissance de m cycles limites à partir d'une boucle constituée par les séparatrices d'un point d'équilibre col, ou à partir d'un cycle limite complexe de multiplicité $k > 1$; ou d'une boucle constituée par les séparatrices d'un point de type *col-nœud*, ou à partir d'une trajectoire fermée d'un cas conservatif. Tous ces résultats sont détaillés dans [38].

Dans le cadre de la théorie des bifurcations, Andronov et Pontrjagin ont introduit en 1937 le concept de ≪ *grossièreté* ≫(ou *stabilité structurelle*). L'importance de ce concept est essentielle tant pour les questions théoriques, que pour les applications. Brièvement un système dynamique est ≪ *grossier* ≫ (ou *structurellement stabl*e) si la structure topologique de sa dynamique ne change pas pour de petites variations des paramètres du système, ou de faibles modifications de structure des équations le décrivant. On peut noter que, pour avoir un ≪ sens physique ≫, un modèle de système dynamique doit respecter les conditions suivantes :

– Une solution doit exister,
– Cette solution doit être unique,
– La solution unique doit être continue par rapport aux données contenues dans les conditions initiales, ou dans les conditions aux limites,
– Le système dynamique doit être ≪ *grossier* ≫ (ou *structurellement stable*).

Les trois premières conditions ont été formulées par Hadamard en 1923. L'étude du problème de la ≪ *grossièreté* ≫(ou *stabilité structurelle*) peut être considérée comme complète pour les systèmes dynamiques autonomes bidimensionnels. Andronov et Pontrjagin ont formulé en 1937 les théorèmes correspondants dans le cas analytique. En 1952, De Baggis a donné la démonstration de ces théorèmes dans le cas plus général des fonctions continues et continument différentiables. L'espace des paramètres d'un système dynamique bidimensionnel est aussi divisé en cellules (régions), à l'intérieur de chacune d'elle il a le même comportement qualitatif, c'est-à-dire qu'il est ≪ *grossier* ≫ (ou *structurellement stable*). Les frontières des cellules correspondent à des *bifurcations*, où le système est ≪ *non grossier* ≫ (ou *structurellement instable*). Un exposé sur la notion de *degré d'instabilité structurelle*, introduite en 1939 par Andronov et Pontrjagin, est disponible dans la référence [38].

La connaissance des cellules du plan de phase, et de l'espace des paramètres, est de première importance pour l'analyse et la synthèse de systèmes dynamiques en physique, ou en sciences de l'ingénieur. Sur la frontière d'une telle cellule, le système dynamique est structurellement instable. Pour les systèmes autonomes bidimensionnels (champs de vecteurs bidimensionnels), les systèmes structurellement stables sont denses dans l'espace fonctionnel. Jusqu'en 1966, la conjecture de l'extension de ce résultat pour les systèmes de dimension supérieure à deux a été admise. Cependant Smale [33] a montré que cette conjecture est fausse en général. En effet avec une augmentation de la dimension du problème, une augmentation de la complexité de l'espace paramétrique (ou fonctionnel) apparait. Les limites des cellules définies dans l'espace de phase, ainsi que dans l'espace des paramètres, ont en général une structure complexe, qui peut être fractale pour les champs de vecteurs de dimension n, $n > 2$.

La notion de *frontière dangereuse de stabilité* et de *frontière non dangereuse* dans l'espace des paramètres, due à Bautin en 1949 est une amélioration du concept d'*instabilité structurelle.* Elle est particulièrement importante dans les sciences de l'ingénieur, dans le cadre de la conception de systèmes à grande fiabilité. En effet, par variation des paramètres du système, la traversée d'une *frontière dangereuse de stabilité* donne lieu à un changement discontinu, brutal du comportement qualitatif du système dynamique, avec possibilité d'irréversibilité, c'est-à-dire en parcourant le chemin inverse dans l'espace paramétrique, on aboutit à un état différent de celui que l'on avait au départ de la variation. Dans le cas de la traversée d'une *frontière non dangereuse de stabilité*, le changement de comportement qualitatif est progressif, continu, et réversible. Cette question est développée dans [39]. Sachant que durant la ≪ vie ≫ d'un système dynamique des sciences de l'ingénieur, ses paramètres sont soumis à des variations dues au vieillissement des composants, et à l'action diverses perturbations, sa synthèse, implique un choix de ses paramètres suffisamment éloignés d'une *frontière dangereuse de stabilité*, afin d'éviter des pannes, ou même des dommages pour le système.

La notion de stabilité structurelle a une extension pour les systèmes dynamiques décrits par les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,y) \\ \mu\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x,y)\,, \mu > 0,\ , \end{cases} \tag{1}$$

où x, y, sont des vecteurs ayant respectivement les dimensions s et m, μ étant un vecteur « petit paramètre » représentant l'influence d'éléments parasites du système, $f(x,y)$, $g(x,y)$ étant deux fonctions bornées et continues dans le domaine considéré Ω de l'espace de phase de dimension $n = s + m$. On suppose aussi que, si $f(x,y)$, $g(x,y)$ dépendent de μ, elles admettent des limites finies pour $\mu \to 0$.

Si $\mu = 0$, (1) se réduit à un système dynamique de dimension inférieure :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,y) \\ g(x,y) = 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

Les états possibles de (2) se situent maintenant dans un sous espace ω de Ω, ω étant défini par $g(x,y) = 0$. Le problème fondamental qui se pose est de savoir dans quelles conditions il est possible de ne pas tenir compte de certaines dérivées de (1), les termes $\mu dy/dt$ représentant les effets négligeables d'éléments parasites (capacités et inductances dans un système électrique, inerties et frottements dans un système mécanique). En d'autres termes, la question suivante se pose : quand la dynamique décrite par (1) est-elle suffisamment proche de celle décrite par (2), de sorte qu'elle peut être représentée par la solution de (2) définie pour une dimension inférieure ? Un tel problème, a eu une première solution mathématique « générale » avec Tikhonov [40], mais sa solution la plus élégante est due à Pontrjagin [41] en 1957, solution donnée aussi en France par Haag en 1943 (cf. plus bas le §.6.2).

Il est intéressant de noter que la formulation de cet important problème a son origine dans une discussion (1929) entre Andronov et Mandelstham, à propos du modèle du multivibrateur électronique à une seule constante de temps. En négligeant les éléments parasites tels que capacités et inductances parasites, le modèle est donc directement une équation différentielle autonome d'ordre un telle que (2), x étant un scalaire, dont la solution ne peut pas être une solution périodique. Or ce circuit électronique oscille avec une forme d'onde périodique et continue. Si l'on impose la condition que $y(t)$ est une fonction continue du temps, alors (2) n'admet aucune solution périodique. Dans la discussion de ce paradoxe entre Mandelstham-Andronov, l'alternative suivante a été formulée :

(a) soit le modèle utilisé (2) n'est pas approprié pour décrire le multivibrateur,

(b) soit son interprétation n'a pas de sens physique.

En 1930, Andronov a montré que les deux volets de l'alternative peuvent être utilisés pour résoudre le paradoxe, à condition de définir correctement l'espace des solutions admissibles (x,y). En fait, en précisant que (x,y) doit être continu et continument différentiable, on aboutit à la conclusion que, sur des bases physiques, le modèle (2) est inapproprié parce que le multivibrateur réel contient des capacités (entre conducteurs de liaison voisins) et inductances (celles des conducteurs) très petites. Cependant le modèle de dimension plus élevée tenant compte des éléments parasites n'est pas totalement satisfaisant, car l'existence et la stabilité de la solution périodique cherchée dépend non seulement de la présence de paramètres parasites difficiles à mesurer, mais aussi de leur grandeurs relatives.

Andronov a montré qu'il est possible de s'affranchir de la dépendance sur les éléments parasites sur la base du volet (b) de l'alternative, en généralisant l'espace U des solutions admissibles (x,y). En effet, si U est maintenant défini comme l'ensemble des fonctions continues par morceaux, et différentiables par morceaux, et si le système différentiel du premier ordre (2) est complété par des conditions appropriées de « *saut* » (*conditions Mandelstham*), permettant de joindre les divers morceaux de (x,y), alors (2) admet une solution périodique continue par morceaux. Pour le multivibrateur, les conditions de « *saut* » se réduisent à dire que la différence de potentiel aux bornes du condensateur est une fonction continue du temps. Physiquement, cela signifie que le courant électrique chargeant ce condensateur doit toujours être fini.

Les résultats de Mandelstham-Andronov-Tikhonov-Pontrjagin concernant la forme du modèle (1)-(2) sont particulièrement importants en relation avec deux problèmes : le premier est celui de la réduction de la dimension d'un modèle mathématique en fonction d'un critère de précision fixé à l'avance, le second concerne la théorie des oscillations de relaxation. Le livre de Michenko & Rozov [42], qui cite les résultats de Haag en 1943 (cf. plus bas le §.6.2), est entièrement consacré à ces questions.

Les résultats les plus importants de l'école d'Andronov, obtenus jusqu'en 1940, sont exposés dans l'ouvrage [36] (qui cite aussi les résultats de Haag) tout d'abord édité en russe (1937, et 1959), et ensuite traduit en anglais dans sa forme complète (1966). Avec une partie théorique de haut niveau, ce livre contient un grand nombre d'applications aux différentes sciences de l'ingénieur.

5.4 Développement des méthodes analytiques

Pour l'école de Gorki, les *méthodes analytiques* de la dynamique non linéaire ont aussi été un outil auxiliaire associé aux *méthodes qualitatives*, avec application à des problèmes spécifiques issus de la physique, et des sciences de l'ingénieur. Ainsi, dès 1932, Mandelstham et Papaleski ont utilisé la *méthode du petit paramètre de Poincaré* pour l'étude des *résonances non linéaires*, des *résonances sous-harmoniques*, et des *phénomènes de synchronisation* des oscillateurs.

En 1956, I. G. Malkin a publié un ouvrage [43] consacré à la *méthode de petit paramètre de Poincaré*, en ajoutant une méthode d'approximations successives dans le cas non analytique. Malkin a également publié une étude des *cas critiques au sens de Liapunov* par des méthodes analytiques [44].

Kiev a été le siège d'une école très active dans le domaine des méthodes analytiques d'étude des systèmes dynamiques non linéaires. Les résultats sont un développement de la méthode classique des perturbations, qui a été généralisée aux systèmes non conservatifs. En 1932, Krylov et Bogoliubov ont apporté un fondement rigoureux aux études de Van der Pol sur les oscillateurs. Ce travail a ensuite conduit Mitropolski [45,46] à élaborer la *méthode asymptotique.* Dans le cas où les développements en série des solutions ne convergent pas, cette méthode résout le problème en utilisant des développements en série seulement asymptotiquement convergents. Il en est de même pour la *méthode de la moyenne* [47], et les *méthodes d'accélération de la convergence* [48]. Ces méthodes analytiques constituent une importante amélioration de la méthode du petit paramètre de Poincaré. Par rapport à cette dernière elles présentent l'avantage d'une détermination exacte de chaque harmonique d'une solution périodique, car cette détermination ne dépend plus maintenant de l'évaluation des harmoniques supérieurs. Dans la méthode du petit paramètre de Poincaré, en particulier l'expression du premier harmonique est améliorée par les termes d'un développement où le petit paramètre intervient à des puissances croissantes.

La contribution de cette école aux méthodes analytiques est de première importance. Elle concerne : les systèmes avec un ou plusieurs degrés de liberté, la détermination des solutions périodiques, quasi et presque périodiques, la détermination des régimes transitoires, les propriétés des variétés intégrales, les résonances non linéaires, les résonances sous-harmoniques, le phénomène de synchronisation. Cette école s'est également orientée vers les systèmes dynamiques ayant des retards purs, dont les résultats ont servi de base aux recherches faites à Toulouse, décrites dans [49].

5.5 L'école de Gorki après la mort d'Andronov

Les études sur les équations différentielles autonomes menées par Andronov, sous l'angle des méthodes qualitatives, ont été poursuivies par Yu. I. Neïmark et ses collaborateurs, qui ont apporté une contribution importante à la *théorie des transformations ponctuelles* et à ses applications. La bibliographie de son livre [50], consacré à cette contribution, donne les références des résultats obtenus, dont ceux relatifs aux variétés invariantes. Les cas critiques (au sens de Ljapunov) des transformations ponctuelles, et les bifurcations par variation de paramètres lors de leur traversée, ont été aussi traités dans les cas les plus simples. En particulier, Neïmark a été le premier (1959) à décrire la bifurcation engendrant une courbe invariante fermée, à partir d'un *foyer complexe de multiplicité un.* Cette bifurcation a été longtemps indûment attribuée à Sacker sur la base d'une note interne (1964) de l'université de New York, donc non publiée dans un journal (elle a même parfois été attribuée à Hopf). Elle est maintenant le plus souvent appelée *bifurcation de Neïmark-Sacker*. Neïmark a appliqué ses résultats sur les transformations ponctuelles à de nombreux problèmes d'équations différentielles ordinaires, tels que : l'influence des paramètres sur les solutions périodiques, les solutions d'équations linéaires par morceaux, la méthode du petit paramètre Poincaré considérée du point de vue des transformations ponctuelles, certaines extensions aux équations différentielles avec second membre discontinu, la méthode de la moyenne, la méthode de la transformation auxiliaire. Il faut aussi noter la contribution de N. N. Leonov (1959-1962) sur la structure des bifurcations des transformations unidimensionnelles discontinues, linéaires par morceaux [51], ou non linéaires [52]. Dans certains cas cette structure de bifurcation est fractale de type ≪ *escalier du diable* ≫ (voir [53, pp. 418-423]). En dehors d'un groupe à Toulouse, ces résultats ont été ignorés jusqu'aux années 2008 avec, avant cette date, des résultats partiellement redécouverts dans de nombreuses publications.

Sur la base des résultats concernant les systèmes dynamiques autonomes bidimensionnels obtenus par Andronov et ses collaborateurs, et celle des conditions suffisantes de stabilité structurelle énoncées par Smale [32,33], les études des systèmes dynamiques de dimension supérieur à 2 ont connu un développement spectaculaire en particulier avec les contributions de premier plan de Gavrilov, Shilnikov, Afraïmovitch, Gonchenko, Arnold. Ces contributions sont résumées dans le paragraphe 4 de [54].

5.6 L'école japonaise (Hayashi)

Cette école, dont le chef de file est Hayashi (Kyoto), a développé de nombreuses études, notamment orientées vers les circuits électriques et électroniques. Ses résultats, obtenus jusqu'en 1964, sont présentés dans [55,56]. Les méthodes analytiques, ainsi que les méthodes qualitatives, ont été intensivement utilisées par cet auteur et ses deux disciples Ueda (Kyoto) [57] et Kawakami (Tokushima) [58]. Les comportements complexes des oscillateurs autonomes, et des oscillateurs à excitations périodiques (externe ou paramétrique) ont fait l'objet d'un grand nombre de publications de ces auteurs et de leurs étudiants.

Par rapport aux publications de cette époque, on peut dire que c'est cette école qui a poussé le plus loin les études des phénomènes de *résonance non linéaire*, de *synchronisation de type harmonique*, *sous-harmonique*, *sur-harmonique*, et *fractionnaire*, ceci dans l'espace de phase et dans l'espace des paramètres. Les problèmes de comportements chaotiques, associés aux structures homoclines et hétéroclines, études directement liées à des modèles de circuits électroniques et électriques, ont aussi fait l'objet de publications. En 1961, Ueda avait déjà observé un comportement chaotique lors de la simulation (sur calculatrice analogique) d'une équation différentielle non autonome (à excitation périodique externe) bidimensionnelle [57, pp. 186-191].

6 France : contributions diverses

Ces contributions se sont faites essentiellement sur la base des résultats de Poincaré, et des méthodes analytiques, généralement en ignorant l'ensemble des travaux des écoles de Gorki et Kiev, sauf pour un groupe à Toulouse (à partir de 1959) qui s'est appuyé sur leurs résultats pour développer ses recherches. Il est impossible de citer tous les trop nombreux auteurs. Un petit nombre est retenu.

6.1 Théorie de la stabilité, régimes périodiques, points singuliers, trajectoires (1911-1948)

On peut noter :
- Emile Cotton avec les solutions asymptotiques des équations différentielles [59], les nombres caractéristiques [18].
- Henri Dulac et les solutions au voisinage de valeurs singulières [60] ; sur les cycles limites [61,62].
- Alfred Liénard pour les oscillations entretenues [63].
- Philippe Le Corbeiller pour les oscillations entretenues et les oscillations de relaxations [64].
- Pierre Fatou [65].

– Notons aussi les extensions des résultats de Poincaré (points singuliers, trajectoires, méthode du petit paramètre) par G. Reeb (solution périodiques de systèmes à plusieurs degrés de liberté), Mme Dubois-Violette (trajectoires sur la sphère, et sur une surface de genre $p > 1$).

6.2 Travaux de Haag et Vogel. Régimes périodiques, oscillations de relaxation, systèmes héréditaires

Au siècle dernier deux chercheurs français, Haag et Vogel ont apporté une contribution de premier plan à l'étude des systèmes dynamiques non linéaires. Publiés en français ces travaux sont restés quasiment inconnus dans les publications en langue anglaise, ou française, après 1975 date du début du développement "explosif" des recherches en dynamique non linéaire. Pour cette raison cet article réserve un plus grand nombre de références à ces résultats, d'où un déséquilibre des citations par rapport aux autres auteurs..

Jules Haag (Besançon) a apporté une importante contribution, citée par les auteurs de l'école de Gorki. Il s'agit :

– Des *oscillations auto-entretenues* (ou *oscillations libres*) [66]. Cette note est citée dans le livre d'Andronov [36].
– Des solutions et de la stabilité de systèmes non linéaires [67].
– De la stabilité des points invariants d'une transformation [68].
– De l'extension des notions de cols, nœuds, foyer aux dimensions supérieures à 2 [69].
– Des *oscillations de relaxation* [70], résultats cités dans le livre d'Andronov [36].
– De la *synchronisation* des systèmes oscillants non linéaires [71].
– Des systèmes dynamiques à plusieurs degrés de liberté [72].

A Besançon, Jules Haag & Raymond Chaléat ont publié le livre *Problèmes de la théorie générales des oscillations, et de chronométrie* (Gauthier-Villars, 1960, Paris).

Théodore Vogel (Marseille) s'est intéressé aux problèmes des oscillations de relaxation dans le cadre plus général de ce qu'il nomme "*oscillations à déferlement*" (1951-1961). Ces résultats sont contemporains de ceux de Pontrjagin. A l'inverse de Haag, cette contribution n'est pas citée dans les publications de l'école de Gorki [36] et [42]. Il propose une théorie générale des dynamiques donnant lieu à ≪ *déferlement* ≫, associées à deux lois dynamiques différentes, avec passage brutal, soudain, d'une loi d'évolution à une autre, lors de la rencontre d'une variété donnée de l'espace de phase. Cet auteur propose une méthode géométrique qui permet l'étude qualitative de tels comportements, et des oscillations périodiques qu'elles peuvent engendrer. Le ≪ *déferlement* ≫est alors représenté par une discontinuité mathématique d'un certain ordre, complétée par une condition de continuité. La méthode a été appliquée au multivibrateur à deux constantes de temps, cas particulier de dynamique à ≪ *déferlement* ≫. Pour les oscillations de relaxation les résultats sont équivalents à ceux de l'école de Gorki, avec une démarche relativement différente, se voulant plus générale. A ce sujet on peut noter :

– La topologie des oscillations à déferlement [74] ;
– L'étude de certaines oscillations à déferlement [75] ;
– Examen de neuf *cas singuliers* de systèmes déferlants, [76].

Vogel avait aussi en vue l'extension de la théorie générale des systèmes dynamiques, avec la définition des différentes classes de systèmes évolutifs [73]. Dans ce cadre, les ≪ *systèmes héréditaires* ≫ (notion due à Volterra) ont constitué pour lui un sujet important d'études. Pour ces systèmes la loi d'évolution varie graduellement. Un tel système est régi par une équation intégro-différentielle où figurent, à côté de termes différentiels indiquant la tendance vers un certain état, des termes intégraux traduisant l'expérience accumulée par le système au cours de son mouvement antérieur. Vogel remplace, pour leur donner un sens physique, deux des quatre hypothèses de Volterra par celles de mémoire totale, et d'hérédité non linéaire. L'équation intégro-différentielle revient à considérer un système dynamique de plus grande dimension [77]. Cet auteur a été amené à associer ≪ *systèmes héréditaires* ≫ et ≪ *systèmes à déferlement* ≫. Quatre articles présentent cette démarche [78,79,80,81]. Les systèmes à retard sont vus comme un cas particulier de ces systèmes [82]. Vogel a dirigé le *Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille* de 1962 à 1973.

A Marseille, certains aspects de ces résultats ont été utilisés pour des études particulières, cf. par exemple Sidériades [83]. Cet auteur a aussi considéré, indépendamment des résultats antérieurs des écoles de Kiev, Gorki, et de l'école japonaise, le problème des oscillations forcées de l'équation de van der Pol [84].

6.3 Le groupe de Toulouse

Son activité s'est développée de 1958 à 1999. Elle a impliqué de nombreux chercheurs, dans le cadre de préparation de thèses, et publications postdoctorales, avec en vue des applications aux systèmes des sciences de l'ingénieur. Publiées au départ en français, les résultats de ce groupe sont restés longtemps peu connus, avant de faire l'objet d'un chapitre du livre *The chaos avant-garde* [85] qui donne une vue historique de l'évolution des recherches menées de 1958 à 1975. Ces recherches ont été lancées en 1958-1959 par Igor Gumowski. A cette époque, avec La Salle, Lefschetz et Minorsky aux USA, Gumowski était l'un des très rares scientifiques occidentaux ayant une connaissance approfondie des résultats du domaine de la dynamique non linéaire, obtenus dans l'ex-Union Soviétique. Les recherches du groupe se sont faites sur la base des travaux de Poincaré, de Ljapunov, des écoles de Kiev et de Gorki. En 1960-1961, à Toulouse des recherches sur les équations différentielles avec retard pur ont conduit Gumowski à une série de résultats originaux, dont ceux relatifs à un retard pur fonction de la variable dépendante avec application au modèle de l'amplificateur à transistor. Ces résultats, basés sur les méthodes analytiques, ont été publiés dans les *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences* (cf. [49] qui les récapitule). Plus tard, Gumowski a abordé le problème de la solution d'un système dynamique (variables réelles) décrit par

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t, \mu), \qquad t > t_0, x(t_0) = x_0 \tag{3}$$

où x est un vecteur, t, t_0, et μ (paramètre) des scalaires, f un vecteur fonction au moins continue pas rapport au temps t, analytique par rapport à x et à μ au moins pour des valeurs absolues de x, et μ inférieures à des valeurs données. Gumowski s'est penché sur le théorème d'analycité de Poincaré, en notant qu'il est souvent utilisé de façon erronée pour prouver la dépendance continue et continument différentiable du paramètre dans la détermination d'une solution périodique de (3), cette dépendance étant supposée résulter de l'analycité de f par rapport à x et à μ. En fait le théorème de Poincaré affirme que la solution de (3) peut être exprimée sous forme d'un développement en série en puissance de μ, dans un intervalle de temps borné par une fonction $\tau(t_0, x_0, \mu)$. Cette limitation liée aux propriétés de f, autre que la dépendance continue et continument différentiable, a une profonde influence sur la détermination des solutions périodiques, car en général le théorème ne peut être étendu pour $\tau \to \infty$, ou même pour $\tau > T$, T étant la période de la solution périodique considérée. Sur cette base, Gumowski améliore le recours aux méthodes analytiques par l'utilisation de substitutions paramétriques convenables, consistant en une réécriture des paramètres de (3). Un résumé de cette question est donné [54, § 5.4].

Dans le cadre des méthodes qualitatives, les résultats de Neïmark, sur les bifurcations des transformations ponctuelles par traversée de cas critiques, ont été généralisés de 1968 à 1974 (cf. [85,86], et leur bibliographie). En particulier, la traversée d'un cas critique avec multiplicateurs complexes (valeurs propres) $e^{\pm j\varphi}$, $j^2 = -1$, φ étant, ou n'étant pas commensurable, avec 2π, dans le cas général d'un foyer complexe de multiplicité supérieure à un, a été étudiée (1969-1971) en utilisant une forme normale, obtenue à partir d'une extension de la transformation Cigala [11] au cas non conservatif. La naissance de courbes fermées invariantes à partir d'un cas conservatif (sans, ou avec situation homocline) a été aussi considérée. Les transformations ponctuelles non inversibles ont été l'objet d'études poussées. Dans ce cadre, les travaux de Julia et Fatou sur les transformations à variable complexe, c'est-à-dire dans le cas particulier d'une transformation bidimensionnelle définie par des fonctions à variables réelles vérifiant les conditions de Cauchy-Riemann, ont été étendus au cas général des transformations ne vérifiant pas ces conditions. Ainsi la notion de point critique d'une transformation à variable complexe a été généralisée en ligne critique, puis en variété critique pour des dimensions supérieures. Les bifurcations de bassin ≪ *simplement connexe ↔ non connexe* ≫, ≪ *simplement connexe ↔ multiplement connexe* ≫ ont alors pu être identifiées. Les résultats de Myrberg (1959-1963), le premier à avoir défini les cascades de bifurcations par doublement de période dans une transformation unidimensionnelle quadratique (résultat généralement attribué à Feigenbaum, publié en 1978), ont conduit en 1975 à la mise en évidence de la structure fractale de bifurcation dite ≪ boîtes emboîtées ≫, qui pour une transformation bidimensionnelle se définit dans un plan paramétrique feuilleté. Un résumé de ces résultats et de leurs conséquences (avec références) est donné dans [85]. Ils sont détaillés dans les publications [86,54].

En septembre 1973, le groupe de Toulouse a organisé, dans cette ville, le colloque international *Transformations Ponctuelles et leurs Applications* [88], probablement le premier sur ce thème. Il s'est voulu un hommage à Poincaré (cf. l'exposé d'introduction qui fait en même temps un historique des résultats obtenus à cette époque [88, pp. 19-27]). Plusieurs communications sur les structures homoclines et hétéroclines présentaient des résultats nouveaux. Ensuite, sur ce modèle Targonski a poursuivi ce type de rencontre scientifique qui a lieu tous les deux ans, en lui donnant le nom de *European Conference on Iteration Theory* où le groupe de Toulouse figurait parmi les organisateurs.

7 Conclusion

La théorie des systèmes dynamiques non linéaires s'est essentiellement construite sur la base de la considération des phénomènes rencontrés dans le ≪ monde réel ≫. A ce sujet, on peut parler de ≪ théorie concrète ≫ des systèmes dynamiques, élaborée par des mathématiciens au contact de ce ≪ monde réel ≫, par opposition à une ≪ théorie abstraite ≫ qui s'est développée par la suite dans le champ des mathématiques pures, car considérée comme une activité plus ≪ noble ≫. La démarche de Poincaré [89], celles de Ljapunov, des écoles de Gorki et Kiev, celle de l'école japonaise, celles de Haag, de Vogel, du groupe de Toulouse en France, se situent dans le cadre d'une ≪ théorie concrète ≫, annoncée au 19$^{\text{ème}}$ siècle par Joseph Fourier (cf. § 5.1, *L'étude de la nature est la source la plus productive des découvertes mathématiques*). Il est également intéressant de noter que la majorité des scientifiques (y compris les mathématiciens) n'ont pas été amenés à leurs découvertes par un processus de déduction à partir de postulats généraux, ou de principes généraux, mais plutôt par un examen approfondi de cas particuliers bien choisis. Les généralisations sont venues plus tard, car il est beaucoup plus facile de généraliser un résultat établi que de découvrir une nouvelle ligne d'argumentation. Il y a une centaine d'années, le mathématicien Halphen est connu pour s'être souvent plaint des généralisations non essentielles qui encombrent les publications. Depuis Poincaré, le développement important de la théorie des systèmes dynamiques a essentiellement ses origines dans l'étude des ≪ effets naturels ≫ rencontrés dans ces systèmes, et le rejet des généralisations non-essentielles.

Poincaré avait ce contact avec le ≪ monde réel ≫, comme le montrent en particulier ses études sur l'arc électrique, la télégraphie sans fil, les ondes électromagnétiques, et autres problèmes de la physique, où il manifestait son intérêt pour la physique expérimentale. A ce sujet Paty écrit [90]

> ≪ Nous le voyons alors déployer sa manière originale d'aborder les problèmes de physique, où l'attention la plus précise aux résultats d'expérience s'accompagne du raisonnement physique guidé par une attention aux principes et orienté vers la recherche d'une formulation mathématique ≫.

Plusieurs auteurs voient dans son étude de 1905 ≪ *Sur la dynamique de l'électron* ≫ [91], en même temps qu'Einstein, la prise en compte du principe de relativité pour l'électromagnétisme, et une théorie relativiste (au sens restreint) de la gravitation [92,93]. Dans [94] et [95, chap. 8], on peut trouver une réflexion sur le problème de l'établissement du modèle mathématique d'un système physique. Les écoles de Gorki et Kiev ont aussi eu ce contact avec le ≪ monde réel ≫, ce qui a conduit J. P. La Salle et S. Lefschetz à leur attribuer la première place en dynamique non linéaire (§ 5.1) à partir de 1935. De même en France, Haag et Vogel ont eu ce contact. Pour Vogel, la théorie des systèmes héréditaires est née en donnant un sens physique à deux quatre hypothèses formulées par Volterra pour sa célèbre équation intégro-différentielle.

Remerciements. Christophe Letellier a relu ce texte, et a apporté des améliorations.

Références

1. H. Poincaré, Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **1**, 167-244, (1885)
2. H. Poincaré, *Les nouvelles méthodes de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Tomes 1, 2 & 3, (1892), (1893) & (1899)
3. H. Poincaré, *Oeuvres Complètes*, publiées par P. Appel (tome 1), G. Darboux (tome 2), J. Drach (tome 3), Gauthier-Villars, Paris
4. J.-M. Ginoux & L. Petitgirard, Poincaré's forgotten conferences on wireless telegraphy, *International Journal of Bifurcations & Chaos*, **20** (11), 3617-3626 (2010)
5. A. M. Ljapunov, Problème général de la stabilité du mouvement, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, **9**, 203-474 (1907)
6. A. M. Ljapunov, *Stability of motion* (translated from Russian), Academic Press, New York (1966)
7. J. Hadamard, Sur l'itération et solutions asymptotiques des équations différentielles, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **29**, 224-228 (1901)
8. J. Hadamard, Sur les transformations ponctuelles, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **34**, 349-363 (1906)
9. J. Hadamard, Two works on iteration and related questions, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **50**, 67-75 (1944)
10. T. Levi-Civita, Sopra alcuni criteri di instabilita, *Annali de Matematica*, iii, **5**, 221-305 (1901)
11. A. R. Cigala, Sopra un criterio di instabilita, *Annali de Matematica*, iii, **11**, 67-75 (1905)
12. S. Lattès, Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation, *Annali de Matematica*, iii, **13**, 1-137 (1906)
13. S. Lattès, Sur les formes réduites des transformations ponctuelles dans le domaine d'un point double, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **39**, 309-345 (1911)
14. G. Julia, Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vii, **4** (1), 47-245 (1918)
15. P. Fatou, Mémoire sur les équations fonctionnelles, *Bulletin de la Société de Mathématique de France*, **47**, 161-271 (1919)
16. P. Fatou, Mémoire sur les équations fonctionnelles, *Bulletin de la Société de Mathématique de France*, **48**, 33-94 et 208-314 (1920)
17. L. E. J. Brouwer, Continuous one-one transformations in themselves, *K. Akad. van Wetenschappen Amsterdam*, **11**, 788-798 (1909) — **12**, 286-297 (1909) — **13**, 767-777 (1910) — **14**, 300-310 (1911) — **15**, 352-360 (1912)
18. E. Cotton, Sur la notion de nombre caractéristique de Ljapunov, *Annales de l'Ecole Normale*, **3** (36), 128-185 (1919)
19. G. D. Birkhoff & P. A. Smith, Structure analysis of surface transformations, *Journal de Mathématiques* (Liouville), ix, **7**, 345-379 (1926)
20. G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, **9** (1927)
21. M. Morse, George David Birkhoff and his mathematical work, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **52** (5), Part 1, 357-391 (1946)
22. G. D. Birkhoff, *G. D. Birkhoff's Collected Mathematical Papers*, Dover (1968)
23. G. D. Birkhoff, Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques, *Memoriae Pontifical Academia Scientia Novi Lyncaei*, **53** (1), 85-216 (1935)
24. A. Denjoy, Sur les courbes définies par des équations différentielles à la surface du tore, *Journal de Mathématique*, xi **4**, 333-375 (1932)
25. A. Denjoy, *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences de Paris*, **247**, 1072-1075 — **247**, 1096-1099 — **247**, 1923-1926 — **248**, 325-328 — **248**, 497-501 — **248**, 1253-1256 — **261**, 3917-3920 — **261**, 4293-4296 — **261**, 4579-4582 — **263**, 67-70 (1958-1966)
26. J. P LaSalle & S. Lefschetz, Recent Soviet contributions to ordinary differential equations and nonlinear mechanics, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **2** (3), 467-499 (1961)

27. J. Fourrier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, Firmin Didot Ed., Paris, (1822), réédité par J. Gabay (1988)
28. P. J. Myrberg, Iteration von Quadratwurzeloperationen. I, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ A*, **256**, 1-10 (1958)
29. P. J. Myrberg, Iteration von Quadratwurzeloperationen. II, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ A*, **268**, 1-10 (1959)
30. P. J. Myrberg, Sur l'itération des polynômes réels quadratiques, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, ix, **41**, 339-351 (1962)
31. P. J. Myrberg, Iteration von Quadratwurzeloperationen. III, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ A*, **336**, 1-10 (1963)
32. S. Smale, Diffeomorphisms with many periodic points, In *Differential Combinatorial Topology*, S. S. Cairns ed., Princeton University Press, pp. 63-80 (1963)
33. S. Smale, Differentiable dynamical systems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**, 747-817 (1967)
34. E. C. Boïko, *L'école de l'Académicien Andronov* (en russe), Editions Nauka, Moscou (1983)
35. H. Poincaré, *Conférences sur la Télégraphie sans fil*, Éditions Lumière Électrique (1909)
36. A. A. Andronov, A. A. Witt & S. E. Khaïkin, *Théorie des oscillations* (en russe), Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moscou (1959), Traduit en anglais, Pergamon Press (1966)
37. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon & A. G. Mayer *Théorie qualitative des systèmes dynamiques* (en Russe), Ed. Nauka, Moscow (1966)
38. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon I.I. & A. G. Mayer, *Théorie des bifurcations des systèmes dynamiques dans le plan* (in Russian), Ed. Nauka, Moscow (1967)
39. N. N. Bautin & E. A. Leontovitch, *Méthodes et techniques de l'étude qualitative des systèmes dynamiques dans le plan* (en russe), Nauka, SMB, 1976, Moscou (1976)
40. A. N. Tikhonov, Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées, *Mat. Sbornik*, sc xxxi, **73**, 575-586 (1952)
41. L. S. Pontrjagin, Comportement asymptotique des solutions des systèmes d'équations différentielles quand les dérivées d'ordre le plus élevé contiennent un petit paramètre, *Izv. Acad. Nauk, Mat Ser.*, **21**, 605-626 (1957)
42. E. F. Michenko & N. K. Rozov, Differential equations with small parameter and relaxation oscillations (in Russian), Nauka, Moscow (1975)
43. I. G. Malkin, *Some problems in the theory of nonlinear oscillations*, Moscow (1956), traduit en anglais : AEC-tr-3766 (books 1 & 2), United States Atomic Energy Commission (1959)
44. I. G. Malkin, *Théorie de la stabilité du mouvement* (en Russe), Izd. Nauka, Moscou. (1966)
45. N. Bogoliubov & Yu A. Mitropolski, *Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires* (traduction en français à partir de la seconde édition en russe). Monographies Internationales de Mathématiques Modernes, Gauthier-Villars, Paris (1962)
46. Yu A. Mitropolski, *Problèmes de la théorie asymptotique en théorie des oscillations stationnaires* (traduction en français à partir de la seconde édition en russe). Monographies Internationales de Mathématiques Modernes Gauthier-Villars, Paris (1966)
47. N. Bogoliubov & Yu A. Mitropolski & A. M. Samoilenko, *Méthode de l'accélération de la convergence en mécanique non linéaire* (en Russe), Naukova Dumka, Kiev (1969)
48. Yu A. Mitropolski, *La méthode de la moyenne en mécanique non linéaire* (en Russe). Naukova Dumka, Kiev (1971)
49. I. Gumowski, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, **249**, 2514-2517 (1959) — **250**, 822-825 (1960) — **250**, 1995-1998 (1960) — **250**, 3142-3145 (1960) — **250**, 4322-4325 (1960) — **253**, 1671-1674 (1961) — **253**, 2207-2210 (1961)
50. Yu I. Neïmark, *La méthode des transformations ponctuelles dans la théorie des oscillations non linéaires* (en Russe), Nauka, Moscou (1972)
51. N. N. Leonov, Map of the line onto itself, *Radiofisika*, **2** (6), 942-956 (1959) — **3** (3), 496-510 (1960) **3** (5), 872-886 (1960)

52. N. N. Leonov, Discontinuous map of the line, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **143** (5), 1038-1041 (1962)
53. I. Gumowski & C. Mira *Dynamique chaotique*, Ed. Cépadues, Toulouse (1980)
54. C. Mira, Some historical aspects of nonlinear dynamics. Possible trends for the future, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **7** (9), 2145-2173 (1997)
55. C. Hayashi, *Nonlinear oscillations in physical systems*, Mc Graw-Hill, New York (1964)
56. C. Hayashi, *Selected papers on nonlinear oscillations*, Nippon Printing and publishing Company, Osaka (1991)
57. Y. Ueda, *The road to chaos*, Aerial Press, Santa Cruz (1992)
58. H. Kawakami *Collected papers*, Publication 585 50 234 of the faculty of Sciences of the Tokushima University (1986)
59. E. Cotton, Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, III, **28**, 473-521 (1911)
60. H. Dulac, Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **40**, 324-383 (1912)
61. H. Dulac, Sur les cycles limites, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **51**, 45-188 (1923)
62. H. Dulac, Recherche des cycles limites, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **204**, 1703-1706 (1937)
63. A. Liénard, Etude des oscillations entretenues, *Revue Générale de l'Electricité*, **23**, 901-948 (1928)
64. P. Le Corbeiller, *Les oscillations entretenues et oscillations de relaxation*, Hermann, Paris (1931)
65. P. Fatou, Mouvement d'un système soumis à des forces de courte période, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **56**, 98-139 (1928)
66. J. Haag, Sur les oscillations auto-entretenues, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **199**, 906-909 (1934)
67. J. Haag, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Sur la stabilité des solutions de certains systèmes d'équations différentielles, II, **70** 21-36 (1946) — Sur certains systèmes d'équations différentielles définis par des fonctions périodiques et continues, II, **71**, 205-219 (1947) — Sur l'apparition des solutions associées d'un système différentiel à coefficients périodiques, II, **72**, 69-72 (1948) — Sur certains systèmes différentiels à solutions périodiques, II, **70**, 155-172 (1946) — Sur certains systèmes différentiels à solutions périodiques lentement variable, II, **75**, 15-21 (1951)
68. J. Haag, Sur la stabilité des points invariants d'une transformation, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, II, **73**, 123-134 (1949)
69. J. Haag, Cols, Noeuds et Foyers, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, II, **74**, 167-192 (1950)
70. J. Haag, Sur l'étude asymptotique des oscillations de relaxation, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **292**, 102-105 (1936) — Etude asymptotique des oscillations de relaxation, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, III **60**, 35-64 et 65-111 (1943) — Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillation de relaxation, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, III, **61**, 73-117 (1944)
71. J. Haag, Sur la synchronisation des systèmes oscillations non linéaires, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, III, **67**, 321-392 (1950)
72. J. Haag, Sur la synchronisation des systèmes à plusieurs degrés de liberté, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, III, **64**, 285-338 (1947)
73. T. Vogel, Sur différentes classes de systèmes évolutifs. *Buletinul Institutului Politehnic din Iasi*, IX, **10**, 28-36 (1964)
74. T. Vogel, Topologie des oscillations de déferlement, Actes du *Colloque International des Vibrations non linéaires.* Ile de Porquerolles, 237-256 (1951)
75. T. Vogel, Sur certaines oscillations à déferlement, *Annales de Télécommunication*, **6** (7), 182-189 (1951)
76. T. Vogel, Sur les systèmes déferlants, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **81** (1), 63-75 (1953)
77. T. Vogel, Sur des systèmes dynamiques à hérédité non linéaires et à mémoire totale, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **245**, 1224-1226 (1957) — Systèmes dynamiques héréditaires, *Cahiers de Physique*, **107-108**, 319-328 (1959) — Solutions périodiques des systèmes héréditaires, *Proceedings of Vibration problems* (Warsaw), **3** (1), 3-21 (1962) — Théorie des systèmes périssables : application à la fatigues des métaux, *Journal de Mécanique*, II, **4**, 475-492

78. T. Vogel, Systèmes dynamiques héréditaires à déferlement, *Rendiconti del Seminario Matematici della Universita di Padova*, **22**, 64-80 (1953)

79. T. Vogel, Systèmes dynamiques à hérédité non linéaire et à mémoire totale, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **246**, 59-61 (1958) — Hérédité discontinue dans les systèmes dynamiques, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **246**, 1379-1381 (1958)

80. T. Vogel, Dynamique théorique et hérédité, *Rendiconti del Seminario Matematici dell Università e del Politecnico di Torino*, **21**, 87-98 (1961-1962)

81. T. Vogel, Systèmes déferlants, systèmes héréditaires, systèmes dynamiques, *Trudy Miejdunarodovo Simposiuma po Nelinei Kolebaniam* (Kiev) **2**, 123-130 (1963)

82. T. Vogel, Systèmes à retard, *Colloques Internationaux du CNRS*, n°**148**, 39-55, Editions du CNRS (1965)

83. M. L. Sidèriadès, Systèmes couplés non linéaires, *Le Journal de Physique et le Radium*, supplément au n°11 (tome 17), 159-175 (1956)

84. M. L. Sidériadès Les solutions forcées de l'équation de van der Pol, *L'Onde Electrique*, **463**, 1216-1224 (1965)

85. R. Abraham & Y. Ueda Y. Ed., I. Gumowski and a Toulouse research group in the "prehistoric" times of chaotic dynamics, In *The chaos avant-garde. Memories of the early days of chaos theory*, World Scientific series on nonlinear sciences A, **20** pp. 95-197 (2000)

86. C. Mira, *Chaotic dynamics*, World Scientific Publishing (1987)

87. C. Mira, L. Gardini, A. Barugola & J. C. Cathala, *Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps*, World Scientific Publishing (Nonlinear Science Series A), **20**, (1996)

88. *Transformations Ponctuelles et leurs Applications* (Toulouse 10-14 septembre 1973), Colloques internationaux du CNRS **229** Editions du CNRS (1976)

89. *La science et l'hypothèse*, Flammarion (1902)

90. M. Paty, La place des principes dans la physique mathématique au sens de Poincaré, *Fundamenta philosophiæ*, **3** (2), 61-74 (1998-1999)

91. H. Poincaré, La dynamique de l'électron, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, **19**, 386-402 (1908)

92. H. Poincaré, Sur la dynamique de l¿électron, *Comptes Rendus de l¿Académie des Sciences*, **140**, 1504-1508 (1905)

93. H. Poincaré, Sur la dynamique de l¿électron, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **21**, 129-175 (1906)

94. H. Poincaré *Science et méthode*, Flammarion (1908)

95. H. Poincaré *Dernières pensées* Flammarion (1919)