

# Des vagues en forme d'étoile

Alphonse Leroux<sup>1</sup>, Didier Clamond<sup>2</sup> & Jean Rajchenbach<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique de la Matière Condensée (CNRS-UMR 7336)

<sup>2</sup> Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné (CNRS-UMR MR 7351)

Université de Nice – Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2

email: Jean.Rajchenbach@unice.fr

**Résumé.** Grâce à l'excitation paramétrique d'ondes de surface, nous avons mis en évidence l'existence d'une vague ayant alternativement la forme d'une étoile et d'un polygone. La symétrie de l'étoile (c'est à dire le nombre de ses branches) est indépendante de la forme du récipient, et varie avec les paramètres de vibration imposés. Nous montrons qu'un couplage résonant à trois vagues est à l'origine de la formation de telles vagues, quoique la pertinence d'un tel mécanisme ait été jusqu'à présent contestée pour des vagues purement gravitaires.

**Abstract.** We report a new type of standing gravity waves of large amplitude, having alternatively the shape of a star and of a polygon. This wave is observed by means of a laboratory experiment by vibrating vertically a tank. The symmetry of the star (i.e. the number of branches) is independent of the container form and size, and can be changed according to the amplitude and frequency of the vibration. We show that a mechanism involving a nonlinear resonant couplings between three waves can explain this geometry, although this possibility was previously denied in the case of pure gravity waves.

## 1 Introduction

Les équations qui gouvernent la dynamique des vagues sont intrinsèquement non-linéaires. Ces non-linéarités proviennent d'une part du terme advectif de l'accélération eulérienne, et d'autre part de la condition aux limites cinématique à la surface libre. La conjonction des effets non-linéaires et des effets dispersifs est à l'origine de la formation des ondes solitaires et des vagues scélérates [1, 2]. Une autre conséquence remarquable de ces non-linéarités est qu'elles peuvent engendrer des brisures spontanées de symétrie [3]. Par exemple, il a été montré que les vagues en forme de « fer à cheval » résultent de l'interaction non-linéaire entre cinq vagues [4, 5]. Quoiqu'en conséquence de ces non-linéarité, on se serait attendu à l'existence d'un très grand nombre de variétés de vagues à la surface de l'eau, la mise en évidence de vagues d'un type nouveau reste un événement rare. Ici nous décrivons une vague qui présente alternativement l'aspect d'une étoile ou d'un polygone. Ce type de vague apparaît, sous certaines conditions, à la surface d'un liquide lorsque celui-ci est soumis à des vibrations verticales.

## 2 Description du montage et observations.

Le système que nous étudions est constitué par une couche de fluide d'environ 1 cm d'épaisseur, contenue dans des récipients de dimension et de forme (rectangulaire, circulaire...) variables. Le fluide est newtonien ; il s'agit d'une huile de silicone de viscosité  $10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s et de tension superficielle 0.02 N/m. Le récipient est soumis à des vibrations sinusoidales et verticales dans la gamme de fréquences  $\Omega/2\pi$  comprise entre 7 et 20 Hz. L'amplitude des vibrations peut atteindre plusieurs millimètres, et les déformations de la surface libre sont enregistrées à l'aide d'une caméra rapide (250 im/s).

Nous décrivons dans un premier temps les résultats obtenus lorsque le liquide est contenu dans un récipient de géométrie cylindrique (9 cm de diamètre, niveau de remplissage égal à 7 mm). La fréquence de vibration est ici de 8 Hz. Pour de très petites amplitudes de vibration, on observe des 'ondes de ménisque', qui se propagent depuis la ligne de contact vers le centre de la cellule. Ces ondes de ménisque oscillent à

la même fréquence que celle utilisée pour le forçage. Lorsqu'on augmente l'amplitude de vibration jusqu'à 1.55 mm, il apparaît alors deux ondes axisymétriques contrapropagatives, qui oscillent avec une fréquence moitié de celle du forçage, comme on s'y attend dans le cas d'ondes paramétriquement forcées [7,8] (voir Fig. 1, et film1 sur le site [6]). Lorsque l'onde centripète se focalise au centre de la cuve, elle donne naissance à un jet vertical. On remarque aussi que lorsque les deux ondes centripète et centrifuge se croisent, elles ne se superposent pas simplement : elles subissent un déphasage. Plus précisément, les crêtes restent en coincidence durant un temps de 0.05 s pour les paramètres expérimentaux indiqués ci-dessus. Ce phénomène de déphasage avait déjà été reconnu lors du croisement de deux ondes solitaires planes, et témoigne d'un fort couplage non-linéaire entre les deux ondes [9]. Si on augmente encore l'amplitude de vibration du récipient jusqu'à 1.85 mm, on remarque alors la formation de cinq « coins » dans la ligne de crête des deux ondes centripètes et centrifuges lorsqu'elles se croisent (voir Fig. 2 et film2 dans [6]). Ces « coins » sont la signature de la brisure de la symétrie rotationnelle. Enfin, pour une amplitude de vibration de 1.95 mm, on observe un changement total dans la géométrie des vagues de surface. Les déformations de la surface libre présentent alternativement un aspect d'étoile à cinq branches et de pentagone, séparé par un intervalle de temps égale à la période de l'excitation (cf. Figs. 3.a, 3.b et film4 [6]).

symétrie circulaire) Un fait remarquable est que ces motifs en étoile et en pentagone sont indépendants



Fig.1



Fig.2

**Figure 1.** vagues de symétrie circulaire observées dans un récipient cylindrique (diamètre 9 cm, hauteur de fluide 7 mm). Ces vagues sont créées par des oscillations sinusoidales et verticales du récipient. (amplitude de vibration = 1,70 mm) et oscillent à la fréquence moitié de celle du forçage (ici  $\Omega/2\pi = 8$  Hz). Les crêtes des ondes centripète et centrifuge subissent un déphasage lorsqu'elles se croisent (cf. film 1 [6]).

**Figure 2.** Après avoir augmenté l'amplitude du forçage jusqu'à 1.85 mm, on observe une déformation des crêtes (initialement de symétrie circulaire) avec l'apparition de 5 coins. Ceci est la marque d'une brisure de symétrie (hauteur de remplissage 7 mm,  $\Omega/2\pi = 8$  Hz). (voir film 2 [6]).

de la forme ou de la taille du récipient. On observe des vagues de géométrie identique dans des cuves cylindriques de rayon plus grand, ou dans des récipients rectangulaires (Figs. 4.a et 4.b). Il faut aussi noter qu'on observe des étoiles et des polygones présentant des symétries d'ordre différent (3, 4 et 6), en faisant varier les paramètres expérimentaux. Enfin, il nous faut préciser que ce système présente une très forte hystérésis, c'est à dire que des motifs différents peuvent être observés avec le même jeu de paramètres expérimentaux, pourvu que l'historique du forçage ait été différent. Par conséquent, il est impossible d'établir un diagramme de phase qui présenterait l'ordre de la symétrie observée en fonction des paramètres de vibration imposés.

A ce niveau, il faut souligner que ces vagues sont extrêmes : (i) l'amplitude de la vague peut être du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la nappe liquide ; (ii) dans les creux de la vague, l'épaisseur de la nappe peut être inférieure à 1 mm. Il s'agit donc de vagues très non-linéaires en eau peu profonde :

en effet, la rapport longueur d'onde/profondeur est de l'ordre de 5 ou 7. On peut aussi dire qu'il s'agit de vagues cnoïdales de très grandes amplitudes.

### 3 Interprétation.

L'interprétation que nous proposons ici est inspirée par celle que Mermin et Troian [10] et Pomeau et Newell [11] ont élaborée pour expliquer la formation des quasi-cristaux, ainsi que celle que Edwards et Fauve [12] ont utilisée pour expliquer la genèse de motifs quasi-cristallins dans les ondes capillaires. A ce point, il peut être utile de rappeler que dans nos expériences le nombre d'onde  $|\mathbf{k}|$  est très petit devant  $1/\ell_c$  ( $\ell_c$  étant la *longueur capillaire*). Il en résulte que les effets liés à la tension de surface sont négligeables par rapport aux effets liés à la gravité. Par conséquent, les vagues que nous observons ici sont de *pures* ondes de gravité. Notre explication repose sur le fait qu'une interaction résonante non-linéaire entre trois vagues est à l'origine de la brisure de symétrie. Les conditions de résonance à trois vagues s'écrivent  $\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 = 0$  et  $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_3 = \mathbf{0}$  ( $\omega_i$  et  $\mathbf{k}_i$  sont respectivement les pulsations et les vecteurs d'ondes) [13, 14]. Ces conditions de résonance à trois vagues peuvent être remplies par des vagues gravito-capillaires [15–18], mais jusqu'à présent il existait un consensus énonçant qu'une telle interaction résonante ne pouvait exister dans le cas de vagues purement gravitaires [13]. La raison avancée est que, pour de telles vagues, la relation de dispersion, s'écrit  $\omega \propto |\mathbf{k}|^\alpha$  avec  $\alpha \leq 1$  ( $\alpha = 1/2$  en eau profonde, et  $\alpha = 1$  en eau peu profonde). Il résulte de la concavité de la relation de dispersion que les deux conditions de résonance explicitées ci-dessus ne peuvent être satisfaites simultanément. En fait, nous allons montrer ci-dessous que cet argument n'est pas valable, et que ces conditions peuvent être satisfaites si l'on veut bien prendre en compte dans l'écriture de la relation de dispersion les modifications apportées par le forçage et la dissipation. Nous allons brièvement esquisser ci-dessous comment la relation de dispersion modifiée peut autoriser un processus de résonance à trois vagues, et comment celui-ci peut sélectionner une symétrie d'ordre  $m$ . On sait [7, 8, 19–21] que l'amplitude  $\zeta(\mathbf{k}, t)$  d'une onde de surface

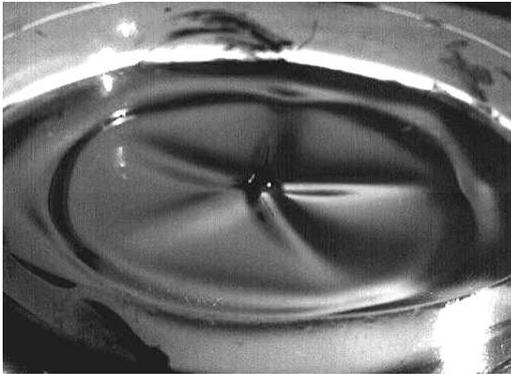


Fig.3.a

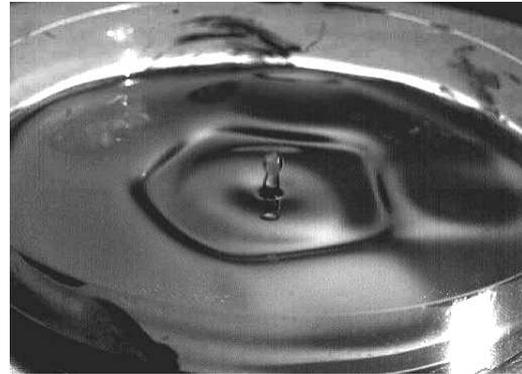


Fig.3.b

**Figure 3.** Pour une amplitude de 1.95 mm (hauteur de liquide 7 mm,  $\Omega/2\pi = 8$  Hz), apparaît une onde stationnaire d'un type nouveau, qui présente alternativement, l'aspect d'une étoile à 5 branches et d'un pentagone. L'intervalle de temps qui sépare ces deux formes est égal à la période du forçage (voir film3 [6])

paramétriquement forcée (ou *vague de Faraday* [22]) obéit en profondeur finie à une équation de Mathieu amortie de la forme :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + 2\sigma \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \omega_0^2 (1 - F \cos \Omega t) \zeta = 0, \quad (1)$$

dans laquelle on reconnaît le terme d'amortissement visqueux  $\sigma$ , la fréquence du forçage  $\Omega/2\pi$ , et où  $F$  correspond à l'amplitude de l'accélération imposée à la cellule divisée par la constante de gravité  $g$ , et où  $\omega_0 = \omega_0(|\mathbf{k}|)$  est la pulsation du mode linéaire de nombre d'onde  $|\mathbf{k}|$  en l'absence de forçage et de dissipation (rappelons que pour des ondes linéaires en profondeur finie  $h$  on a la relation de dispersion  $\omega_0^2 = gk \tanh(kh)$  avec  $k = |\mathbf{k}|$  [14]). Le terme d'atténuation visqueuse  $\sigma$  de l'équation (1) trouve ses origines à la fois dans la dissipation au coeur du fluide (proportionnelle à  $\nu k^2$  [23]) ainsi que dans le frottement avec le fond (proportionnel à  $(\nu k^2)^{\frac{1}{2}}$  [24]). Il faut ici noter que l'équation (1) est linéaire, et n'est valide que dans la limite de vagues d'amplitude infinitésimale en profondeur finie (mais *pas* dans la limite d'une eau très peu profonde). À dire vrai, dans le cas présent de vagues cnoïdales de grandes amplitudes, la validité de l'équation (1) est limitée. Cependant, même avec ses limitations, cette dernière équation a néanmoins l'avantage de permettre de préciser le mécanisme qui initie la formation de ces vagues douées d'une symétrie d'ordre  $m$ .

On sait que les systèmes obéissant à une équation de Mathieu amortie comme l'équation (1) présente une série de langues de résonance autour des fréquences  $n\Omega/4\pi$  (l'entier  $n$  est l'*ordre* de la résonance) [25, 26]. En utilisant le théorème de Floquet, on peut écrire les conditions pour lesquelles l'équation (1) admet des solutions périodiques et bornées [27]. Ces conditions définissent des relations de dispersion qui, dans le cas général, ne peuvent pas s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires. Au moyen d'études numériques, nous avons montré qu'il existe en général deux nombres d'onde correspondant à chacun des ordres de résonance  $n$ . Dans le cas limite des faibles forçage et dissipation, on peut dériver analytiquement les relations de dispersion suivantes :

$$\omega_0 \approx \frac{\Omega}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{F^2}{16} - \frac{4\sigma^2}{\Omega^2}} \right], \quad (2)$$

pour le mode subharmonique, et

$$\omega_0 \approx \Omega \left[ 1 + \frac{F^2}{12} \pm \sqrt{\frac{F^4}{64} - \frac{\sigma^2}{\Omega^2}} \right] \quad (3)$$

pour le mode fondamental. Comme il a été établi auparavant par d'autres méthodes [26], on retrouve à partir des équations (2) et (3) que l'amortissement introduit un seuil pour l'apparition de l'instabilité de Faraday. Dans la limite des faibles  $F$  et  $\sigma$ , le seuil pour la formation du mode subharmonique est donné par  $F_1 \approx 8\sigma/\Omega$ , et par  $F_2 \approx \sqrt{8\sigma/\Omega}$  pour le mode fondamental.

Comme le montrent les équations (2) et (3), on remarque qu'il existe *deux modes* de nombres d'onde *différents* qui oscillent à la *même* fréquence, ceci contrairement au cas des vagues gravitaires non-forcées et non-dissipatives. Suivant l'amplitude du forçage, on doit distinguer plusieurs cas.

(i) Lorsque  $F < F_1$ , l'équation de dispersion (2) n'admet pas de solution. Cela signifie que l'énergie injectée par le forçage est alors trop faible pour compenser la dissipation visqueuse qui serait induite par les mouvements d'une vague.

(ii) Lorsque  $F_1 < F < F_2$ , on observe uniquement des vagues subharmoniques (de pulsation  $\Omega/2$ ). Si un nombre infini de vagues subharmoniques de même nombre d'onde (disons  $k_1^-$ ) sont présentes, on observe alors une vague axisymétrique, parce que les conditions aux limites imposées par la cuve cylindrique ne privilégie aucune direction particulière.

(iii) Lorsque  $F_2 < F < F_3$  (où  $F_3$  correspond au seuil de la troisième langue de Mathieu), il se forme à la fois des vagues subharmoniques, et des vagues oscillant à la fréquence du forçage. Il y a alors deux nombres d'onde  $k_1^-$  et  $k_1^+$  ( $k_1^- \leq k_1^+$ ) correspondant à la fréquence subharmonique, et deux nombres d'onde  $k_2^-$  et  $k_2^+$  ( $k_2^- \leq k_2^+$ ) correspondant à la fréquence fondamentale. Toutes ces vagues interagissent non-linéairement. Pour expliquer la formation d'une déformation de la surface libre possédant une symétrie rotationnelle d'ordre  $m$ , le mécanisme le plus simple à envisager est un couplage résonant à trois ondes. Deux vagues subharmoniques de nombre d'onde différent  $\mathbf{k}_1^-$  et  $\mathbf{k}_1^+$  interagissent entre elles, et interagissent avec une vague  $\mathbf{k}_2^-$  qui oscille à la fréquence fondamentale ( $\omega_2 = \Omega$ ). La condition sur les pulsations  $\omega_1(\mathbf{k}_1^-) + \omega_1(\mathbf{k}_1^+) = \omega_2(\mathbf{k}_2^-)$  est alors automatiquement satisfaite. L'autre condition, qui porte sur les nombres

d'onde ( $\mathbf{k}_1^- + \mathbf{k}_1^+ = \mathbf{k}_2^-$ ), donne naturellement lieu à la sélection de l'angle ( $\mathbf{k}_1^-, \mathbf{k}_1^+$ ), et brise par conséquent l'invariance par rotation. Physiquement, la sélection de cet angle permet un échange continu d'énergie entre les trois modes.

Nous avons décrit ci-dessus le mécanisme résonant entre les trois ondes de nombre d'onde  $\mathbf{k}_1^-, \mathbf{k}_1^+$  et  $\mathbf{k}_2^-$ , mais bien entendu, nous aurions aussi pu considérer une résonance entre les vagues de nombre d'onde  $\mathbf{k}_1^-, \mathbf{k}_1^+$  et  $\mathbf{k}_2^+$ . Cette multiplicité de modes résonants possibles est sans doute une des causes de l'hystérésis observée. Une autre cause peut être le caractère sous-critique de l'instabilité de Faraday pour les fluides visqueux [28], ce qui introduit des effets de mémoire.

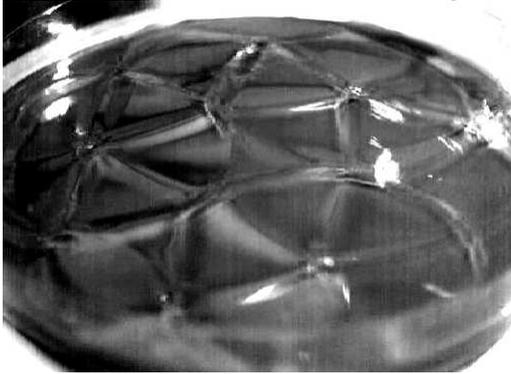


Fig.4.a

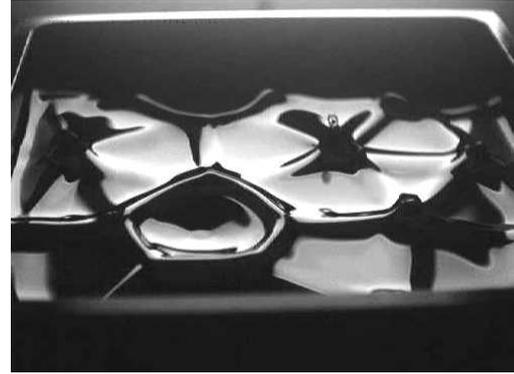


Fig.4.b

**Figure 4.** On observe des étoiles et des pentagones de même taille et symétrie dans des récipients de forme ou de taille différentes, à condition d'avoir un niveau de remplissage, des paramètres de vibration et un historique de forçage identiques.

Fig. 4.a. Pavage de vagues en forme d'étoiles à 5 branches observé dans un récipient cylindrique (diamètre = 17 cm).

Fig.4.b. Pavage d'étoiles et de pentagones observé dans un récipient carré (17 cm x 17 cm). On remarque ici des pentagones et des étoiles qui sont adjacents, et qui oscillent en opposition de phase. C'est un exemple des solutions possibles lors d'une instabilité subharmonique.

Les étoiles à  $m$  branches et les polygones à  $m$  côtés correspondent à la sélection d'un angle  $\theta = 2\pi/m$ , avec  $m$  entier. Clairement, les critères de résonance exprimés ci-dessus ne conduisent pas en général à la sélection d'un nombre  $m$  entier. Quand  $m$  n'est pas entier, le motif de surface reste instationnaire, jusqu'à ce qu'un mode de surface, non parfaitement résonant mais correspondant à  $m$  entier, soit accroché. Une fois que ce mode ( $m$  entier) est accroché, on le voit survivre lors d'une variation modérée des paramètres du forçage. Cela peut être une troisième cause à l'hystérésis observée.

Si le modèle esquissé ci-dessus a l'intérêt de montrer qu'un mécanisme de résonance à trois vagues peut être à l'origine de la formation d'une vague gravitaire présentant une symétrie d'ordre  $m$ , il s'avère néanmoins insuffisant pour prédire l'ordre de la symétrie observée en fonction des paramètres de contrôle. La raison est que les éqs. (2) et (3) ont été dérivées dans le cadre d'une approximation d'amplitude infinitésimale, alors qu'il s'agit de vagues cnoïdales de grandes amplitudes. Pour de telles vagues, l'amplitude intervient dans la relation de dispersion. De plus, considérer des vagues parfaitement sinusoïdales comme des modes propres reste vraiment une approximation très imparfaite. Mais il n'existe pas à ce jour de méthodes mathématiques permettant de décrire les propriétés des vagues de très grandes amplitudes en eau peu profonde.

**Remerciements.** Nous remercions A. Mangin (Société ACRI, Sophia-Antipolis, France) pour de chaleureuses discussions. Cette recherche a été partiellement financée par le CNRS et la région PACA.

## Références

1. D. J. KORTEWEG & G. DE VRIES *Philosophical Magazine*, **39**, 422 (1895).
2. A. CHABCHOUB, A.P. HOFFMANN, & H. AKHMEDIEV, *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 204502 (2011).
3. M. C. CROSS & P. C. HOHENBERG, *Rev. Mod. Phys.*, **65**, 851 (1993).
4. M. Y. SU, *J. Fluid Mech.*, **124**, 73 (1982).
5. D. FRUCTUS, C. KHARIF, M. FRANCIUS, Ø. KRISTIANSEN, D. CLAMOND & J. GRUE, *J. Fluid Mech.*, **537**, 155 (2005).
6. Films visibles sur [http://www.unice.fr/rajchenbach/star-shaped\\_waves.htm](http://www.unice.fr/rajchenbach/star-shaped_waves.htm)
7. T. B. BENJAMIN & F. URSELL, *Proc. R. Soc. London A*, **225**, 505 (1954).
8. J. MILES & D. HENDERSON, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **22**, 143 (1990).
9. M. ABLOWITZ & H. SEGUR, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM Publications, Philadelphia (1981) et M. ABLOWITZ & D. BALDWIN, *Phys. Rev. E*, **86**, 036305 (2012).
10. N. D. MERMIN & S. M. TROIAN, *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 1524 (1985).
11. Y. POMEAU & A. C. NEWELL, *J. Phys. A*, **26**, L429 (1993).
12. W. S. EDWARDS & S. FAUVE, *J. Fluid Mech.*, **278**, 123 (1994).
13. O. M. PHILLIPS, *J. Fluid Mech.*, **9**, 193 (1960).
14. J. Lighthill, *Waves in Fluids*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1978).
15. S. FAUVE, in *Dynamics of Nonlinear and Disordered Systems*, G. Martinez-Meckler and T. H. Seligman, Eds., World Scientific, Singapore (1995).
16. H. W. MÜLLER, *Phys. Rev. E*, **49**, 1273 (1994).
17. S. T. MILNER, *J. Fluid Mech.*, **225**, 81 (1991).
18. W. ZHANG & J. VIÑALS, *J. Fluid Mech.*, **336**, 301 (1997).
19. S. CILIBERTO & J. P. GOLLUB, *J. Fluid Mech.*, **158**, 381 (1985).
20. F. SIMONELLI & J. P. GOLLUB, *J. Fluid Mech.*, **199**, 4714 (1989).
21. A. KUDROLI & J. P. GOLLUB, *Physica D*, **97**, 133 (1996).
22. M. FARADAY, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **52**, 319 (1831).
23. L. D. LANDAU & E. M. LIFSCHITZ, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, U.K. (1959).
24. U. NAM HONG, *Bull. Russian Acad. Sci., Physics/Supplement, Physics of Vibration*, **57**, 131 (1993).
25. M. ABRAMOWITZ & I. A. SEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover (1970).
26. L. D. LANDAU & E. M. LIFSCHITZ, *Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, U.K. (1960).
27. K. KUMAR & L. TUCKERMAN, *J. Fluid Mech.*, **279**, 49 (1994).
28. J. RAJCHENBACH, A. LEROUX & D. CLAMOND, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 024502 (2011).