

Émergence d'une circulation grande échelle en turbulence 2D

Johann Héroult, Guillaume Michel, François Pétrélis & Stéphan Fauve

Laboratoire de Physique Statistique, UMR 8550, CNRS & Université Paris Diderot, Ens Paris, 24 rue Lhomond 75005 Paris, France.

jherault@lps.ens.fr

Résumé. La cascade inverse d'énergie est l'une des propriétés les plus étonnantes des écoulements 2D turbulents. L'énergie est transférée des échelles d'injection aux structures grandes échelles, grâce aux termes non-linéaires des équations de Naviers-Stokes 2D. Lorsque la puissance injectée ϵ est suffisamment grande, l'échelle la plus grande de la cascade inverse est limitée par la taille du domaine, et l'énergie s'accumule à cette échelle. Ce phénomène est appelé condensation et une circulation à grande échelles (LSC) apparaît. Est-il possible de quantifier cette transition de la LSC? Quelle est la structure de cette LSC? Telles sont les questions, que nous aborderons dans notre présentation à travers nos résultats expérimentaux.

Abstract. One of the striking features of two dimensional turbulence is the presence of large coherent structures, formed by the inverse cascade of energy. In 2D turbulent flow, the energy cascades from the energy injection scale to the large scales and if the injected power is sufficiently large, a large scale flow can be generated at the scale of the domain. We report the experimental study of the emergence of this large scale circulation (LSC) for an electromagnetically forced flow in a liquid metal. We will analyze and quantify the emergence of this large scale circulation.

1 Introduction

La persistance de structures grandes échelles est un phénomène couramment observé dans les écoulements océaniques et atmosphériques. Découverte en 1665 par Cassini, la tache rouge de Jupiter, trois fois plus grande que la Terre, existe depuis au moins trois cent ans alors que son temps de rotation n'est que de sept jours. Cette apparente stabilité de ces grandes structures hydrodynamiques est tout à fait surprenante car elles coexistent et interagissent avec toute une population de structures tourbillonnaires de plus petites échelles dont le comportement est chaotique.

Afin d'étudier les mécanismes d'instabilités de structures grandes échelles en présence de turbulence, nous avons conçu une expérience de turbulence bi-dimensionnelle. Les écoulements turbulents 2d ont la particularité de générer des structures grandes échelles [1] par le biais de la cascade inverse d'énergie, qui transfère l'énergie injectée vers les grandes échelles. Nous allons étudier et quantifier l'apparition d'une circulation globale au sein de l'écoulement turbulent en fonction des paramètres de contrôle de l'expérience.

2 Le montage

Le fluide utilisé est un métal liquide, le Galinstan, liquide à température ambiante. C'est un alliage eutectique de gallium, d'indium et d'étain. L'intérêt du métal liquide réside dans la possibilité de générer un écoulement via les forces de Laplace [2], en imposant un champ magnétique et en injectant du courant. Le liquide est contenu dans une cellule de section carrée de côté $L = 12$ cm avec une hauteur de fluide de 2 cm (cf. figure 1). Cette cellule est placée au centre de deux bobines de Helmholtz dont le champ magnétique vertical B_z peut atteindre 0.1 Tesla. Au fond de la cellule se trouve un réseau de huit électrodes, injectant un courant continu dans le métal liquide. La polarité des électrodes est alternée spatialement.

Comme le courant rentre ou sort par les électrodes, la densité de courant est localement radiale $\mathbf{j} = j_r \mathbf{e}_r$. Le fluide est alors soumis à une force de Laplace donnée par le produit vectoriel du courant avec le champ magnétique : $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Le champ magnétique étant vertical, la force de Laplace est alors azimuthale et un réseau de huit vortex contra-rotatifs apparaît (cf. figure 1 de droite). Ce forçage est symétrique par rapport aux plans centraux de la cellule.

Les mesures de vitesse sont effectuées par des sondes Vives qui mesurent la tension électrique entre deux électrodes. Cette tension est directement proportionnelle au flux ϕ de vitesse entre ces électrodes. Les mesures présentées dans la section 4 sont celle du flux ϕ_L entre le centre de la cellule et la paroi. Seules les structures dont la taille est supérieure à $L/2$ contribuent au flux ϕ_L .

Nous avons utilisé une méthode de *particle tracking* à l'aide d'une caméra rapide qui permet de suivre les trajectoires des particules advectées par l'écoulement. De ces trajectoires, on reconstruit le champ de vitesse. Cette méthode est une alternative à la *Particle Image Velocimetry* (PIV), impossible à mettre en place pour un fluide opaque et réfléchissant.

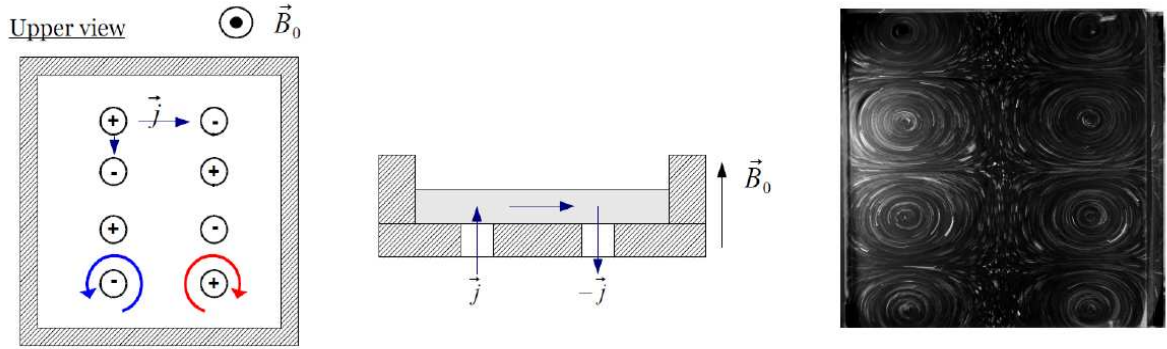


Figure 1. Gauche : schéma vu du dessus de la cellule. Milieu : schéma vu en coupe de la cellule. Droite : photographie de l'écoulement laminaire induit par le forçage.

3 Nombres sans dimension et paramètres de contrôle

Les équations de Navier-Stokes pour un écoulement 2D incompressible dans le plan $x0y$ sont

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} - \frac{1}{\tau} \mathbf{v} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Le membre de gauche correspond à l'opérateur de dérivée lagrangienne. Dans le membre de droite, on retrouve les termes de pression, de diffusion visqueuse et de forçage, noté \mathbf{f} . Le dernier terme de droite est la dissipation linéaire due à la friction de l'écoulement par les couches limites.

Expérimentalement, il est impossible d'obtenir des écoulements purement bidimensionnels à cause des effets tridimensionnels induits par les couches limites transverses (dans la direction z). Dans le cas où ces couches limites sont fortement localisées, on peut approximer la dissipation par un terme linéaire de friction égal à $\tau^{-1} \mathbf{u}$ avec τ un temps de dissipation associé. En présence d'un champ magnétique important, celui-ci contrôle l'épaisseur de la couche limite présente au fond de la cellule. On nomme cette couche limite la couche d'Hartmann.

La dynamique de l'écoulement est régie par la compétition entre les effets inertiels et dissipatifs et on peut construire deux nombres sans dimension

$$\text{Re} = \frac{[v \cdot \nabla v]}{[\nu \Delta v]} = \frac{UL}{\nu} \quad \text{et} \quad \text{Rh} = \frac{[v \cdot \nabla v]}{[(\tau^{-1})v]} = \frac{\tau U}{L} \quad (2)$$

avec L , la taille de la cellule et U la vitesse du forçage, telle que $U = \sqrt{fL}$. Les nombres sans dimension dépendent du courant injecté I et du champ magnétique B tels que $Re \sim \sqrt{IB}$ et $Rh \sim \sqrt{I/B}$.

Les effets dissipatifs à grande échelle sont dominés par la friction, car $Re \approx 10^3 Rh$. Le paramètre de contrôle de l'expérience est alors Rh . Lorsque $Rh > 5$, les termes non-linéaires de l'équation de N-S transfèrent l'énergie des échelles du forçage vers les grandes échelles : l'écoulement devient progressivement turbulent.

Dans la section suivante, nous allons quantifier l'apparition des structures à l'échelle de la cellule (de l'ordre de L) grâce à la mesure du flux ϕ_L .

4 Émergence de la circulation grande échelle

L'écoulement étant turbulent, la mesure du flux ϕ_L par la sonde Vives montre un signal fortement chaotique et dont la densité de probabilité $P(\phi_L)$ est gaussienne et le maximum en zéro (cf. figure 2, courbe rouge) pour $Rh < 12$. Cependant en augmentant Rh , la distribution devient bimodale avec deux maxima symétriques pour $Rh > 12$ (cf. figure 2, courbe bleue).

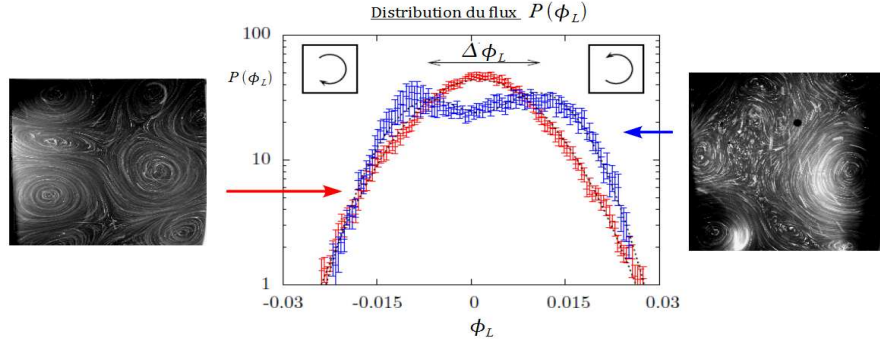


Figure 2. Distribution du flux ϕ_L entre le centre et la paroi de la cellule pour $Rh = 10$ en rouge et $Rh = 14$ en bleu. Les photographies correspondent à l'écoulement pour $Rh < Rh_c$ à gauche et $Rh > Rh_c$ à droite.

Il existe alors un point critique $Rh_c = 12$, tel que la courbure de la distribution $P(\phi_L)$ en $\phi_L = 0$ change de signe. Le développement limité de $P(\phi_L)$ en $\phi_L = 0$ est

$$P(\phi_L) = \alpha_0 + \frac{\alpha_2}{2}(Rh - Rh_c)\phi_L^2 - \frac{\alpha_4}{4}\phi_L^4 + \mathcal{O}(\phi_L^6). \quad (3)$$

Seuls les termes pairs sont conservés du fait de la symétrie ($\phi_L \rightarrow -\phi_L$) du forçage. α_2 et α_4 sont positifs. Le changement de courbure est pris en compte par le coefficient devant le terme quadratique qui change de signe pour $Rh > Rh_c$. Il est au premier ordre linéaire avec l'écart au seuil $Rh - Rh_c$. On peut alors prédire l'évolution des maxima grâce au développement limité de $P(\phi_L)$ pour Rh proche du point critique :

- Pour $Rh < Rh_c$, la dérivée de $P(\phi_L)$ s'annule en $\phi_L = 0$, correspondant à un maximum de P ($P''(\phi_L) < 0$).
- Pour $Rh > Rh_c$, la dérivée de $P(\phi_L)$ s'annule en trois points : $\phi_L = 0$ et $\phi_L = \pm\Delta\phi_L = \pm\sqrt{(\alpha_2/\alpha_4)}(Rh - Rh_c)$. Le premier correspond à un minima et les deux autres aux maxima de $P(\phi_L)$.

L'amplitude du maximum de la distribution $\Delta\phi_L$ au carré est tracée en fonction de Rh sur la figure 3. Proche du point critique Rh_c , $\Delta\phi_L^2$ croît bien linéairement en fonction de $Rh - Rh_c$, en accord avec le calcul précédent.

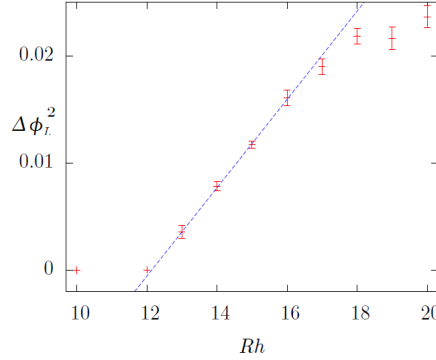


Figure 3. L'amplitude du maximum de la distribution au carré, $\Delta\phi_L^2$, en fonction de Rh

Ce résultat est analogue au comportement d'une bifurcation fourche où la solution stable $\phi_L = 0$ en dessous du point critique, se déstabilise pour $Rh \geq Rh_c$ en donnant deux nouvelles solutions dont l'amplitude croît en $\phi_L \sim \sqrt{Rh - Rh_c}$. Cependant les fluctuations turbulentes permettent au système d'explorer ces deux solutions, normalement déconnectés dans l'espace de phases dans le cas d'une bifurcation fourche. Ce développement limité est aussi analogue à celui de l'énergie libre au seuil d'une transition ferromagnétique qui passe d'un minimum en dessous du point critique à deux minima au dessus. Notons que malgré l'existence de fluctuations turbulentes, ϕ_L suit un comportement de type champ moyen (comme obtenu dans une transition de phase à l'équilibre en négligeant les fluctuations).

Dans cette section, nous avons présenté la bifurcation du maximum de ϕ_L en présence de turbulence. Cette bifurcation est due à l'émergence de structures cohérentes dont la taille est supérieure à $L/2$ et dont les temps de vie vont de la seconde à la minute. Une de ces structures est présente sur la photographie à droite de la figure 2 (en bas à droite de la cellule). À partir de $Rh > 40$, on observe une circulation grande échelle cohérente dont le temps de vie peut dépasser l'heure. La section suivante décrit la structure de cette circulation.

5 Structure de l'écoulement dans la limite faible dissipation

Lorsque $Re > 10^4$ et $Rh > 40$, les effets dissipatifs deviennent très faibles comparés aux effets inertiels pour les structures à l'échelle du forçage. Dans cette limite, une circulation cohérente à grande échelle se forme (cf. figure 4). Elle est constituée d'une circulation à l'échelle du domaine L et de vortex cohérents à l'échelle du forçage $L_f \approx L/4$. De plus, elle est globalement stable sur des temps très longs (supérieures à 1 heure).

Quelle est l'origine de la stabilité de cette circulation à $Rh > 40$? Il semble exister une séparation entre les structures concentrant la vorticité et la circulation à l'échelle de la cellule. Afin d'analyser les transferts entre ces différentes échelles, on décompose le champ de vitesse $\mathbf{u}(x, y)$ en modes de Fourier tels que

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \sum_{n_x, n_y} \hat{u}_x(n_x, n_y) \sin(n_x k_0 x) \cos(n_y k_0 y), \\ u_y(x, y) &= \sum_{n_x, n_y} \hat{u}_y(n_x, n_y) \cos(n_x k_0 x) \sin(n_y k_0 y), \end{aligned} \quad (4)$$

avec $k_0 = \pi/L$. De même pour la vorticité $\omega(x, y)$:

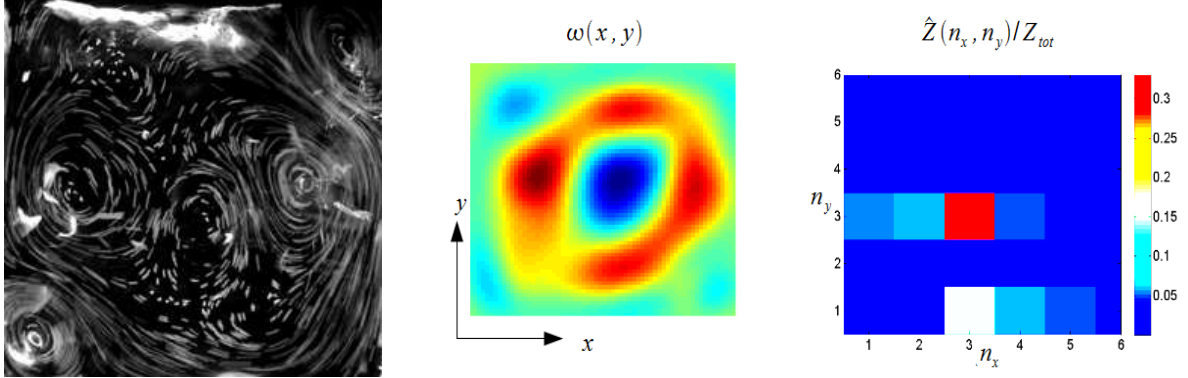


Figure 4. A gauche : photographie de la circulation grande échelle. Milieu : moyenne temporelle de la vorticité $\langle \omega(x, y) \rangle$. Droite : densité spectrale d'entrophie $\hat{Z}_{n_x, n_y} = |\hat{\omega}_{n_x, n_y}|^2$ divisée par l'entrophie totale Z_{tot} .

$$\omega(x, y) = \sum_{n_x, n_y} \hat{\omega}(n_x, n_y) \sin(n_x k_0 x) \sin(n_y k_0 y). \quad (5)$$

(\hat{u}_x, \hat{u}_y) et $\hat{\omega}$ sont liées par la relation suivante : $\hat{\omega} = k_0(n_y \hat{u}_x - n_x \hat{u}_y)$. Grâce à cette décomposition, on peut identifier trois modes importants pour la dynamique :

- Le mode $(n_x, n_y) = (1, 1)$ correspond à la circulation grande échelle
- Le mode $(n_x, n_y) = (2, 4)$ est le mode du forçage \mathbf{f} .
- Le mode $(n_x, n_y) = (3, 3)$.

Comme l'indique la figure 4 du milieu et de droite, la vorticité est dominé par le modes $(3, 3)$ qui concentre plus de 30% de l'entrophie totale (l'entrophie est le carré de la norme de la vorticité). Le mode $(2, 4)$ joue aussi un rôle important dans la stabilité car il fixe l'injection d'énergie ϵ dans le système ($\epsilon = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \rangle$).

Or le terme quadratique de l'équations de N-S ($\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$) permet le couplage direct des ces trois modes. En effet l'interaction de deux modes de Fourier (n_{x1}, n_{y1}) et (n_{x2}, n_{y2}) a une projection sur les modes de Fourier : $n_{x3} = |n_{x1} \pm n_{x2}|$ et $n_{y3} = |n_{y1} \pm n_{y2}|$. Par exemple si le mode 1 est le mode grande échelle $(1, 1)$, le mode 2 correspond au mode $(3, 3)$ et le mode 3 à $(2, 4)$, on a bien $n_{x3} = 4 = 3 + 1$ et $n_{y3} = 2 = 3 - 1$

L'interaction triadique entre les modes $(1, 1)$, $(2, 4)$ et $(3, 3)$ permet d'avancer deux hypothèses en faveur d'une plus grande stabilité de la circulation

1. L'interaction non-linéaire directe de la grande échelle $(1, 1)$ avec le forçage $(2, 4)$ grâce au mode $(3, 3)$ permet de transférer directement l'énergie du forçage vers la grande échelle. Ce transfert direct peut être favorable à la stabilité du système car il est vraisemblablement moins fluctuant qu'un processus impliquant une série de plusieurs interactions non-linéaires.
2. Les modes $(1, 1)$ et $(3, 3)$ sont les modes les plus énergétique (plus de 40% de l'énergie). On peut supposer que la rétroaction de ces deux modes sur le mode $(2, 4)$ stabilise le système, en réduisant l'injection d'énergie dans le système.

La stabilité semble donc être connectée aux interactions triadiques entre les modes $(1, 1)$, $(2, 4)$ et $(3, 3)$.

6 Conclusion

Nous avons présenté deux résultats portant sur l'émergence et la stabilité des structures grandes échelles coexistant avec un background turbulent en turbulence 2d. Le premier résultats porte sur la bifurcation de l'amplitude la plus probable du flux $\Delta\phi_L$. Ce flux est directement relié à la présence de structures à l'échelle de la cellule. L'amplitude $\Delta\phi_L$ augmente comme la racine de l'écart au seuil

$\sqrt{\text{Rh} - \text{Rh}_c}$, mais contrairement à une bifurcation fourche usuelle, les deux solutions $\pm\Delta\phi_L$ sont connectées dans l'espace des phases et le système explore ces deux solutions au cours du temps.

Le second résultat porte sur la stabilité de la circulation cohérente pour Re et Rh grand. Nous avons montré que la structure de la vorticité petites échelles permettait à la circulation grande échelle de transférer directement l'énergie des échelles d'injection aux échelles de dissipation. Inversement, elle permet aux échelles de dissipation de rétroagir sur les échelles d'injection. Ce résultat expérimental est en accord avec de récents calculs numériques [3] et analytiques [4] pour des écoulement à grand Re , où les grandes échelles rétroagissent sur les petites échelles d'injection d'  nergie.

R  f  rences

1. P. TABELING, Two-dimensional turbulence : a physicist approach , *Phys. Reports*, **362**, 1–62, (2002).
2. J. SOMMERIA, Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box , *J. Fluid Mech.*, **170**, 139–168, (1986).
3. Y.-K. TSANG & W. R. YOUNG, Forced-dissipative two-dimensional turbulence : A scaling regime controlled by drag, *Phys. Rev. E*, **79**, 045308(R) (2009).
4. B. GALLET & W. R. YOUNG, A two-dimensional vortex condensate at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **715**, 359–388 (2013).