

# Analyse d'écoulements à partir de champs d'observables échantillonnés à des temps arbitraires

Florimond Guéniat<sup>1,2</sup>, Lionel Mathelin<sup>2</sup> & Luc Pastur<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Université Paris-Sud 11, F-91405 Orsay Cedex

<sup>2</sup> LIMSI-CNRS BP 133, F-91403 Orsay Cedex

florimond.gueniat@limsi.fr

**Résumé.** Plusieurs techniques existent pour l'analyse d'écoulements instationnaires comme la célèbre Décomposition Orthogonale Propre (POD en anglais) ou, plus récemment, la Décomposition en Modes Dynamiques (DMD). Cette dernière technique s'appuie sur un ensemble de vecteurs d'observables du système échantillonné tous les  $\Delta t$ , introduisant *de facto* une fréquence d'échantillonnage fixe. Dans ce travail, nous présentons une approche permettant l'extraction de modes dominants, similaires aux modes DMD, sans la limitation à un échantillonnage fixe. Cette approche, appelée NU-DMD<sup>1</sup>, permet une utilisation plus flexible de cette classe de méthodes et élargit significativement son spectre d'application.

**Abstract.** Several tools are readily available for analysis of unsteady fluid flows such as the celebrated Proper Orthogonal Decomposition (POD) or, the more recently introduced, Dynamic Modes Decomposition (DMD) [3]. Dynamic Modes Decomposition relies on a set of observable vectors acquired every  $\Delta t$  in time, *de facto* introducing a sampling frequency. In this work, we use an approach, called NU-DMD, to extract DMD-like modes which naturally copes with the sampling limitations mentioned above.

## 1 Motivation

Un système physique ouvert possède, potentiellement, un nombre infini de degrés de liberté. Néanmoins, les écoulements sont le plus souvent organisés autour de structures cohérentes qui jouent un rôle décisif dans la dynamique. On peut par exemple penser aux grandes structures tourbillonnaires des allées de von Karman, que l'on observe aussi bien dans des expériences de laboratoire que dans le sillage de structures à grande échelle telles que des navires ou des îles, pour lesquels les nombres de Reynolds sont très grands et la turbulence pleinement développée. Ces structures invitent à chercher des moyens de réduction de la dimension effective des écoulements considérés.

Une idée classique est de rechercher une base vectorielle, constituée de modes, capable de décrire les réalisations  $\mathbf{u}$  du champ mesuré. Ce champ possède une structure dans l'espace,  $\mathbf{r}$ , et évolue dans le temps,  $t$ . Dans l'hypothèse de séparation des variables d'espace et de temps, on cherche alors à écrire  $\mathbf{u}$  sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i \geq 1} a_i(t) \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}), \quad (1)$$

la base des  $\{\boldsymbol{\psi}_i\}$  (ou des  $\{a_i\}$ ) étant a priori de dimension infinie, discrète ou continue. Dans l'optique d'une réduction de modèle et, plus généralement, dans les méthodes de Galerkin, on se restreint à un ensemble fini de modes :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i \in \mathcal{S}} a_i(t) \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}),$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}$  est une approximation du champ  $\mathbf{u}$ . Lorsque les conditions aux limites sont homogènes, une base naturelle est donnée par les modes de Fourier. Dans des problèmes aux conditions aux limites plus complexes, on peut recourir à des méthodes empiriques de décomposition suivant les axes principaux de l'ensemble des données (modes POD), ou rechercher des champs solutions des équations de Navier-Stokes

1. Pour Non Uniform Dynamic Mode Decomposition.

linéarisées autour d'un état de base stationnaire (modes globaux). Récemment, Schmid [1] et Rowley [2] ont proposé une nouvelle méthode de décomposition, la Dynamic Modes Decomposition (DMD) basée sur l'hypothèse de l'existence d'un opérateur de Koopman [3], permettant théoriquement d'extraire directement les informations de la dynamique (non-linéaire) de l'écoulement en régime permanent instationnaire. L'algorithme standard de cette dernière méthode utilise un ensemble de vecteurs observables, mesurés à intervalles de temps réguliers, introduisant *de facto* une fréquence d'échantillonnage. Le pas de temps  $\Delta t$  doit être suffisamment petit pour résoudre les petites échelles temporelles de la dynamique. De l'ensemble ordonné de ces vecteurs résulte une matrice de Krylov dont sont extraits, par la DMD, les modes physiquement pertinents.

Néanmoins, lors du processus d'acquisition, ce type de contrainte peut poser des difficultés. A titre d'exemple, considérons la situation classique, en mécanique des fluides, où l'observable est un champ à deux composantes, de dimension deux (2D2C), mesuré par *Particule Imagery Velocimetry* (PIV). En PIV, les tailles standards sont des champs de  $1000 \times 1000$  pixels. Supposons que la fréquence pertinente la plus élevée soit à 200 Hz (situation très optimiste en écoulement turbulent), le critère de Shannon-Nyquist impose alors une fréquence d'échantillonnage supérieure à 400 Hz. Avec des images de 12-bit, la bande passante ainsi nécessaire est supérieure à 1 Gb/s. De plus, si le spectre de Fourier de la dynamique est à large bande, la durée de l'acquisition de données doit être importante. La combinaison d'une haute fréquence d'échantillonnage et d'une longue durée d'acquisition conduit à des contraintes sévères, tant pour le matériel de mesure que pour les ressources de traitements de données et de stockage.

De surcroît, certaines mesures de l'observable peuvent être corrompues, par des causes internes ou externes à l'expérience, par exemple au niveau du matériel, ou par la non-convergence d'un algorithme de pré-traitement. Les faux vecteurs en PIV sont une illustration de ce problème. S'il est souvent possible de remplacer les données manquantes ou corrompues, par diverses techniques telle la gappy-POD, de l'information non physique risque d'être introduite, en particulier dans le contenu spectral.

Dans cette contribution, nous présentons une méthode, que nous avons nommée NU-DMD, permettant de calculer des modes similaires aux modes DMD, mais pour des données échantillonnées quasi-aléatoirement.

## 2 Algorithme DMD

Présentons tout d'abord l'algorithme DMD. Pour que la méthode puisse s'appliquer, il faut supposer qu'il existe un opérateur d'évolution  $A$  de la dynamique agissant sur un ensemble d'observables  $\mathbf{u}(t)$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{u}(t_{i+1}) =: \mathbf{u}_{i+1} = A \mathbf{u}_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

La méthode revient à décomposer l'opérateur, en recherchant ses modes propres  $\phi_i$  et valeurs propres  $\lambda_i$ . En ayant à disposition ces informations et on suppose que ce spectre est une base de l'espace des phases, soit

$$\mathbf{u}_i = A^i \mathbf{u}_0 = \sum_k \nu_{k0} \lambda_k^i \Phi_k,$$

où les  $\nu_{k0}$  sont les coefficients de projection du premier champ sur la base des modes, et à partir de laquelle on pourra facilement remonter à l'équation (1). Pour déterminer  $\{\phi_i\}$  et  $\{\lambda_i\}$  sont estimés en décomposant une matrice similaire à l'opérateur d'évolution  $A$ .

Présentons tout d'abord une décomposition basée sur la détermination d'une matrice compagnon, plus facilement appréhendable. On suppose

$$\mathbf{u}_N = c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_{N-1} \mathbf{u}_{N-1},$$

d'où, en notant  $K_1^N$  l'espace de Krylov  $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{N-1}\}$

$$AK_1^N = K_1^N C + \mathbf{r} \quad \text{avec} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & \dots & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_{N-1} \end{pmatrix}.$$

L'algorithme DMD de Schmid est subtilement différent. On commence par décomposer par SVD la matrice de Krylov

$$K_1^N = U \Sigma V^H.$$

On introduit dans l'équation  $AK_1^N = K_2^N$ , soit

$$AU = K_2^N V \Sigma^{-1},$$

avec  $K_2^N := \{A\mathbf{u}_0, A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \dots, A\mathbf{u}_N\}$ . En multipliant à gauche par  $U^H$ , nous obtenons

$$U^H AU = U^H K_2^N V \Sigma^{-1} \equiv S$$

avec  $S$  une matrice similaire à  $A$ .  $A$  n'étant pas connu explicitement (seule son *action* sur certains vecteurs est connue), cette approche permet de se ramener à l'approximation d'un opérateur linéaire connu et de petite taille,  $S$ .

Les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice similaire  $S$  sont des valeurs propres de  $A$ . En effet, prenons  $\lambda$  une valeur propre de  $S$ , et  $\nu$  un vecteur propre associé :

$$\begin{aligned} AK_1^N \nu &= K_1^N C \nu \\ &= K_1^N \lambda \nu \\ &= \lambda K_1^N \nu \\ A(K_1^N \nu) &= \lambda (K_1^N \nu) \end{aligned}$$

Des vecteurs propres  $\nu_i$  de la matrice similaire – par exemple la matrice compagnon –  $C$  sont donc déduits des vecteurs propres  $\phi_i$  de  $A$  par  $\phi_i \equiv K_1^N \nu_i$

### 3 Algorithme NU-DMD

L'objectif principal est de réaliser une décomposition spectrale de dimension finie de l'écoulement. A cette fin, on peut fixer par avance la forme de la décomposition à obtenir. On peut rechercher une décomposition similaire à la DMD, c'est-à-dire décomposer  $\mathbf{u}$  sous la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{k=1}^{N_m} e^{i \sigma_k t} \phi_k(\mathbf{x}) \equiv \sum_{k=1}^{N_m} \lambda_k^t \phi_k(\mathbf{x}), \quad (2)$$

avec  $N_m$  le nombre de modes choisis pour la décomposition. La méthode repose sur l'analyse d'un jeu de données :  $\{\mathbf{u}_{t_i}\}_{i=1}^N$ ,  $t_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i$ . Les temps  $t_i$  sont arbitraires, et non nécessairement ordonnés. Ces  $N$  champs de données seront utilisées sous la forme d'une pseudo matrice de Krylov  $\mathbb{R}^{N_p \times N} \ni K := (\mathbf{u}_{t_1} \mathbf{u}_{t_2} \dots \mathbf{u}_{t_N})$ . Les champs de données  $\{\mathbf{u}_{t_i}\}_{i=1}^N$  sont représentés sous forme de vecteurs.

On recherche des modes tels que, d'après (2),

$$\mathbf{u}_{t_i} \approx \lambda_1^{t_i} \phi_1 + \lambda_2^{t_i} \phi_2 + \dots + \lambda_{N_m}^{t_i} \phi_{N_m}.$$

Ce que l'on peut réécrire matriciellement :

$$K = M V + R \approx M V, \quad (3)$$

où  $R$  est une matrice de résidu,  $V \in \mathbb{C}^{N_m \times N}$  est une pseudo matrice de Vandermonde :

$$V := \begin{pmatrix} \lambda_1^{t_1} & \lambda_1^{t_2} & \dots & \lambda_1^{t_N} \\ \lambda_2^{t_1} & \lambda_2^{t_2} & \dots & \lambda_2^{t_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N_m}^{t_1} & \lambda_{N_m}^{t_2} & \dots & \lambda_{N_m}^{t_N} \end{pmatrix},$$

et finalement  $M \in \mathbb{C}^{N_p \times N_m}$  une matrice contenant les modes spatiaux :

$$M := (\phi_1 \dots \phi_{N_m}).$$

Pour écrire (2), il faut avoir accès aux deux matrices qui viennent d'être définies, la pseudo Vandermonde  $V$  et la matrice des modes  $M$ . On peut facilement trouver une approximation de cette dernière :

$$M \approx K V^+, \quad (4)$$

où  $V^+$  est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de  $V$ . En suivant un raisonnement similaire à celui décrit dans [4], on peut substituer l'écriture de la matrice  $M$  dans (3), pour obtenir  $K \approx K V^+ V + R$ . Déterminer  $V$  s'obtient alors en minimisant une norme de la matrice des résidus  $R$  :

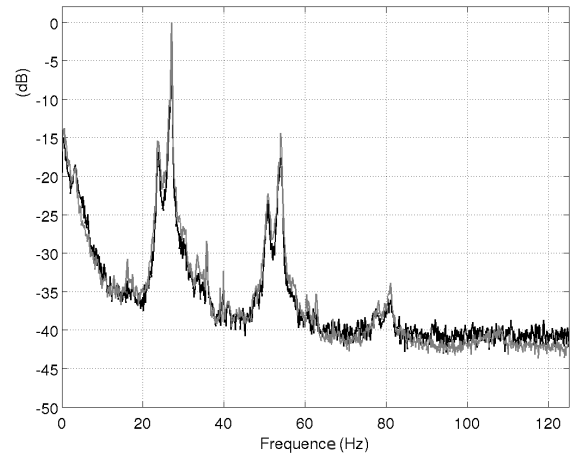
$$R \approx K (I_N - V^+ V).$$

On peut alors déterminer la pseudo Vandermonde  $V$  par minimisation de la norme de la matrice résidu  $R$ . Les modes se déduisent alors de (4).

## 4 Résultats



(a) Vue de l'écoulement



(b) Spectre de puissance

**Figure 1.** Vue de l'écoulement de cavité par ensemencement avec de la fumée de spectacle (a). On y voit les oscillations dans la couche cisailée affleurante et les structures intra-cavitaires révélées par le contraste lumineux entre zones ensemencées ou pas. Spectre de puissance (b) de l'écoulement considéré dans cette étude, où l'on voit émerger un pic dominant à la fréquence de 27.0 Hz. Le spectre de puissance a été calculé par deux systèmes de métrologie différents (anémométrie laser en un point de l'écoulement ou moyenne sur les champs PIV), ce qui explique les deux courbes sur la figure.

Pour illustrer la méthode, nous allons nous appuyer sur un écoulement de cavité ouverte, à très faible nombre de Mach. Une visualisation instantanée de l'écoulement est présentée sur la Figure 1a), pour un rapport longueur sur hauteur de cavité égal à 1.5, une profondeur de cavité  $H = 5$  cm, une vitesse en amont de 2.10 m/s, et une épaisseur de couche limite, à l'aplomb du bord amont de la cavité, de  $\theta_0 = 1.10$  mm. Ce type d'écoulement présente un spectre de puissance de vitesse structuré autour de pics bien définis, engendrés par les oscillations de la couche cisailée (Figure 1b), ce qui en fait un cadre approprié pour tester l'efficacité de l'algorithme.

On dispose d'un ensemble de champs de vitesse 2D2C expérimentaux, résolus en temps, obtenus par PIV rapide (fréquence d'échantillonnage 250 Hz). Le dispositif expérimental et la métrologie employée sont détaillés dans la référence [5]. Pour tester notre algorithme de NU-DMD, nous avons tirés  $N$  champs au hasard parmi les 5500 de la base de données PIV ; pour l'analyse la taille de chacun des champs est réduite à 7500 pixels. Une comparaison entre la DMD, réalisée sur les  $N$  premiers champs de vitesse, et la NU-DMD, est présentée dans le tableau 1.

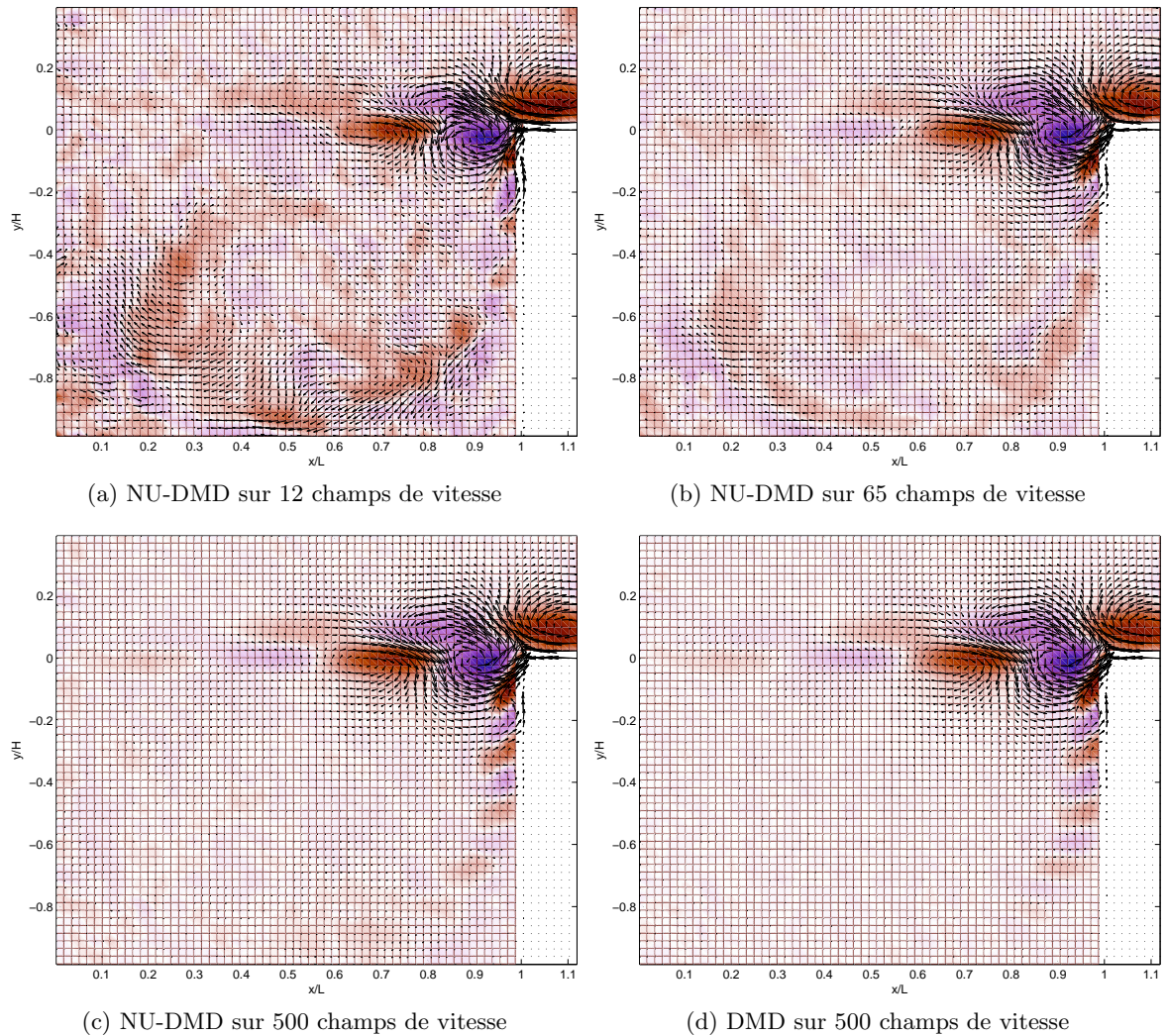
**Table 1.** Fréquence du premier mode identifié, par DMD et NU-DMD, à partir des  $N$  premiers champs de vitesse pour la DMD, de  $N$  champs tirés au hasard pour la NU-DMD. Il est à noter que la fréquence du mode dominant est identifiée par NU-DMD à partir de seulement  $N = 12$  champs.

$N$	12	28	38	65	90	200	500	1000
DMD	20.8	26.8	26.3	26.9	27.8	27.5	27.0	27.0
NU-DMD	27.0	27.0	27.0	27.0	27.0	27.0	27.0	27.0

La DMD ne peut identifier le mode dominant avec moins de 500 champs, contrairement à la NU-DMD, qui identifie la fréquence du mode dominant, à 27.0 Hz, à partir de 12 champs seulement. La structure spatiale des premiers modes dynamiques, obtenus par DMD et NU-DMD, sont comparables, comme on peut le voir sur la figure 2. Néanmoins, alors que la fréquence dominante de l'écoulement est immédiatement estimée correctement par NU-DMD, la structure du champ associé s'affine lorsque le nombre de champs utilisés pour la décomposition augmente. Cela se comprend par le fait que l'information contenue dans 12 champs n'est pas encore suffisante pour assurer une convergence de la structure du mode vers sa structure moyenne sur tout l'échantillon. Malgré tout, le mode se structure bien, même à  $N = 12$ , autour de la couche cisailée, comme attendu pour un mode de Kelvin-Helmholtz.

## 5 Conclusion

Lorsque, pour des contraintes liées à un écoulement ou à une expérience, l'acquisition de champs de données ne peut être uniforme dans le temps, l'algorithme DMD ne peut être utilisée. L'algorithme présenté ici, de NU-DMD, peut quant à lui toujours identifier les structures dominantes de l'écoulement, à partir de quelques champs de données nécessaires seulement. La NU-DMD est donc un outil pratique, au champ d'application potentiellement large, permettant d'explorer les caractéristiques physiques d'un jeu d'observables (ici le champ de vitesse), et ce quelque soient les contraintes sur les données : qu'elles soient en nombre limité, avec des "trous", ou pour un échantillonnage aléatoire.



**Figure 2.** Structure du mode dominant, associé à la fréquence de 27.0 Hz, obtenu par NU-DMD réalisée sur respectivement 12, 65 et 500 champs de vitesse, à comparer au mode DMD dominant obtenu en utilisant les 500 premiers champs de vitesse.

## Références

1. P. J. SCHMID, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *Journal of Fluid Mechanics*, **656**, 5-28 (2010)
2. C. W. ROWLEY, I. MEZIC, S. BAGHERI, P. SCHLATTER & D. S. HENNINGSON, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of Fluid Mechanics* **641**, 115-127 (2009)
3. B.O. KOOPMAN, Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **17**, 315-318 (1931)
4. K. CHEN, J.H. TU & C.W. ROWLEY, Variants of dynamic mode decomposition : connections between Koopman and Fourier analyses, *soumis*.
5. J. BASLEY, L. R. PASTUR, F. LUSSEYRAN, T. M. FAURE & N. DELPRAT, Experimental investigation of global structures in an incompressible cavity flow using time-resolved PIV, *Experiment in Fluids*, **50** (4), 905-918 (2011)