

# Ondes non linéaires à la surface d'un fluide recouvert d'une membrane élastique

Luc Deike & Eric Falcon

Univ Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, MSC, UMR 7057 CNRS, F-75 013 Paris, France, EU  
luc.deike@univ-paris-diderot.fr

**Résumé.** Nous présentons une expérience de laboratoire permettant d'observer des ondes à l'interface d'un fluide recouvert d'une membrane élastique mince, analogue des ondes observées en océanographie à la surface d'un océan recouvert d'une couche de glace. La relation de dispersion observée met en évidence l'importance des termes de tension et de flexion de la membrane élastique. Le régime d'ondes non linéaires est ensuite analysé du point de vue de la turbulence d'ondes et comparé avec des prédictions théoriques et d'analyse dimensionnelle.

**Abstract.** We present a laboratory experiment to study waves on the surface of an elastic membrane floating on a fluid that mimic waves in oceanography propagating through an ice shelf on oceans. The observed dispersion relation shows the importance of both the tension and the bending of the elastic sheet. The nonlinear wave regime is then analyzed in the scope of wave turbulence and results are compared to theoretical predictions and dimensional analysis.

## 1 Introduction

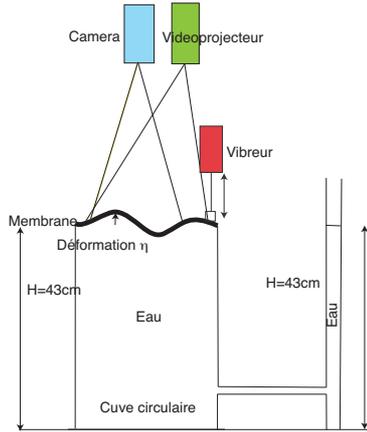
Lorsque des ondes de suffisamment grandes amplitudes se propagent dans un milieu, leurs interactions peuvent engendrer des ondes de différentes longueurs d'ondes. Cet état stationnaire hors équilibre, appelé turbulence d'ondes, se caractérise par un transfert d'énergie entre les différentes échelles spatiales du système. La compréhension de la turbulence d'ondes passe par l'étude des propriétés statistiques et dynamiques d'un ensemble d'ondes interagissant non linéairement entre elles. Ce phénomène se retrouve dans de nombreux domaines de la physique [1,2] : les vagues à la surface de la mer, les ondes d'Alfvén dans le vent solaire, les ondes de spin dans les solides, les ondes de Rossby atmosphériques ou océaniques, et les ondes non linéaires en optique. Nous nous intéressons ici à son application dans un nouveau système.

Lorsqu'une couche élastique mince flotte à la surface d'un fluide, les déformations élastiques de la membrane sont couplées au mouvement du fluide et des ondes gravito-élastiques peuvent se propager. Ces ondes ont été observées en océanographie à la surface de l'océan en présence d'une couche de glace et ont été étudiées théoriquement dans la problématique des déplacements de véhicules sur la glace [3,4]. Cependant, à notre connaissance il n'existe aucune expérience contrôlée de laboratoire permettant d'étudier ce type d'ondes dans un régime non linéaire. Un tel dispositif est présenté et la relation de dispersion des ondes est caractérisé. Les ondes sont observées à l'aide d'une mesure spatio-temporelle du champ de déformation de la surface par profilométrie par transformée de Fourier [5], technique récemment utilisée pour mesurer le régime de turbulence d'ondes sur une plaque élastique [6] et à la surface de l'eau [7]. Dans notre expérience, la relation de dispersion met en évidence l'importance de la tension, due à la fixation de la membrane et de la flexion de cette dernière. Nous obtenons une relation de dispersion analogue au problème géophysique [4]. Le régime non linéaire est ensuite analysé du point de vue de la turbulence d'ondes.

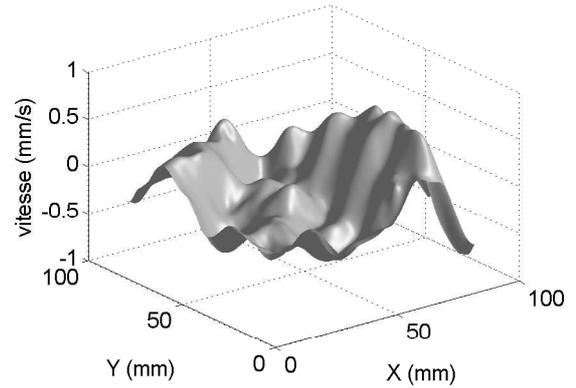
## 2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental représenté sur la Fig. 1 est constitué d'une cuve cylindrique de 20 cm de diamètre, 43 cm de haut, remplie d'eau sur laquelle est collée sur le bord une membrane en latex

d'épaisseur  $h = 0.35$  mm. Nous prenons bien soin de ne pas avoir de bulles d'air piégées entre la membrane et l'eau. La cuve est connectée par un capillaire d'un centimètre de diamètre à un tube vertical qui permet de changer le niveau d'eau et la pression hydrostatique imposée à la membrane. La profondeur du fluide au repos est  $H = 43$  cm. Le module d'Young de la membrane en latex a été mesuré et vaut  $E = 1.5 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup>, sa masse volumique  $\rho_e = 950$  kg/m<sup>-3</sup> et son coefficient de Poisson  $\nu = 0.5$ <sup>1</sup>. Les ondes sont engendrées par deux batteurs (7.5 cm de long et 1 cm de large) collés sur le côté de la membrane à 2 cm du bord, placés perpendiculairement l'un par rapport à l'autre. Chaque batteur est actionné verticalement par un vibreur électromagnétique (LDS V201), dont la fréquence et l'amplitude d'excitation sont pilotées par ordinateur. Les déformations de la membrane sont mesurées par une méthode de profilométrie par transformée de Fourier [5]. Le principe consiste à projeter un réseau de franges (à l'aide d'un vidéoprojecteur haute résolution EPSON TW 3000) sur la surface au repos pour obtenir une image de référence. La différence de phase entre cette image de référence et les images lorsque les franges sont déformées par les ondes est ensuite calculée et permet d'accéder à la déformation de l'interface via l'optique géométrique. La vitesse verticale de l'interface est aussi obtenue en calculant la différence de phase entre deux images successives tout en permettant de réduire le bruit de mesure. Un exemple typique du champ de vitesse verticale à la surface ainsi reconstruite est montré en Fig. 2. La résolution spatiale est déterminé par l'interfrange projeté, ici de 1 mm. Les images sont enregistrées à l'aide d'une caméra rapide Phantom V9, à une fréquence d'acquisition de 1000 images par seconde sur une durée de  $T=3.6$  s. Le champ de mesure est un rectangle au centre de la cellule de  $L = 10$  cm de long et 8 cm de large.



**Figure 1.** Dispositif expérimental vu de profil. Un seul des deux vibreurs est indiqué.



**Figure 2.** Exemple de champ de vitesse de la surface reconstruit par profilométrie.

### 3 Equations d'une membrane élastique mince flottante sur un fluide

Soit un fluide de masse volumique,  $\rho$ , et de profondeur  $H$  recouvert à l'altitude  $z = 0$  par une membrane élastique infinie et homogène, de masse volumique,  $\rho_e$ , de module d'Young,  $E$ , de coefficient de Poisson,  $\nu$ , et d'épaisseur  $h$ . Dans un régime non dissipatif, l'équation gouvernant le déplacement de la membrane  $\eta(x, y, t)$  s'écrit [4]

$$\rho_e h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + D \nabla^4 \eta - T \nabla^2 \eta = p + f(x, y, z, t), \quad (1)$$

$D = (Eh^3)/[12(1-\nu^2)]$  désigne le module de flexion de la membrane,  $T$  la tension imposée à la membrane,  $p$  la pression exercée par le fluide sur la membrane,  $f$  une pression imposée par un opérateur, et  $g$

1. <http://en.wikipedia.org/wiki/Poissonsratio>.

l'accélération de la pesanteur.  $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ . Notons que dans le cas d'une contrainte de compression de la membrane et non pas de tension, le signe de  $T$  est changé. En supposant le fluide incompressible et irrotationnel, l'équation de Bernoulli en  $z = \eta$  nous donne

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} - \rho g \eta$$

avec  $\phi(x, y, z, t)$  le potentiel des vitesses. Une solution sous forme d'onde plane est supposée être

$$\eta \sim e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

et la condition aux bords en  $z = \eta$  est

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = k \tanh(kH) \phi_{z=\eta}.$$

Supposons une faible épaisseur  $h$  de la membrane devant les longueurs d'ondes  $\lambda$  ( $\lambda \gg h$  soit  $kh \ll 1$ ), et  $\rho \gg \rho_e kh$ . En se plaçant, de plus, dans une approximation en eau profonde  $kH \gg 1$ , en l'absence de force extérieure ( $f = 0$ ), la relation de dispersion des ondes linéaires est

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho} k^3 + \frac{D}{\rho} k^5. \quad (2)$$

L'Eq. (2) indique l'existence de trois régimes : un régime d'ondes de gravité à grand  $\lambda > 2\pi\sqrt{T/(\rho g)}$ , un régime d'ondes élastiques de flexion à petit  $\lambda < 2\pi\sqrt{D/T}$ , et entre ces deux valeurs un régime d'ondes élastiques de tension. La transition entre les régimes de gravité et de tension s'obtient simplement en égalisant les deux premiers termes du membre de droite de l'Eq. (2), soit pour un nombre d'onde  $k_{gt} = \sqrt{g\rho/T}$  correspondant à une fréquence

$$f_{gt} = \frac{1}{2\pi} \sqrt[4]{\frac{\rho g^3}{T}} = 2.6 \text{ Hz},$$

et  $\lambda_{tg} = 24 \text{ cm}$ , pour nos paramètres expérimentaux ( $T = 14 \text{ N/m}$ ,  $D = 7.1 \cdot 10^{-6} \text{ N.m}$ ). Le terme de gravité sera donc négligeable pour nos valeurs de longueurs d'ondes  $\lambda$ .

## 4 Relation de dispersion

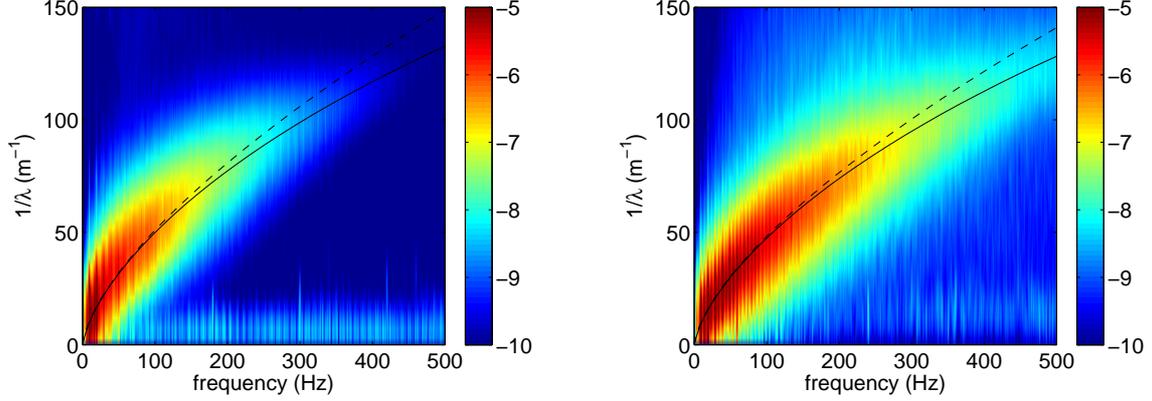
La Fig. 3 montre le spectre spatio-temporel de la vitesse verticale des ondes à la surface de la membrane

$$S_v(\omega, k) \equiv \iint \langle v(\mathbf{r}', t') v(\mathbf{r}' + \mathbf{r}, t + t') \rangle_{\mathbf{r}', t'} e^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{r} dt$$

en fonction de  $f = \omega/2\pi$  et de  $1/\lambda = k/2\pi$ , l'échelle de couleur représentant l'amplitude du spectre en échelle logarithmique. La figure 3a correspond à un forçage à un seul batteur, pour une fréquence d'excitation  $f_p = 10 \text{ Hz}$  (dénommé « forçage faible »); la figure 3b correspond à un forçage à deux batteurs avec pour le premier batteur  $f_p = 10 \text{ Hz}$  et pour le second  $f_p = 20 \text{ Hz}$  (dénommé « forçage fort »). Les longueurs d'ondes de forçage correspondantes sont  $\lambda \sim 5 \text{ cm}$  et  $\sim 9 \text{ cm}$ . Sur les deux figures, l'énergie est trouvée être localisée dans une zone bien précise du spectre spatio-temporel dans le voisinage de la relation de dispersion. En effet, la courbe en trait plein représente la relation de dispersion théorique

$$\omega^2 = \left(\frac{T}{\rho}\right) k^3 + \left(\frac{D}{\rho}\right) k^5$$

pour une valeur de  $T$  ajustée, et est trouvée en bon accord avec l'expérience. La courbe en pointillés représente la relation de dispersion dans le cas des ondes de tension pures  $\omega^2 = (T/\rho)k^3$ , pour la même valeur de  $T$ . La transition entre les régimes d'ondes élastiques de tension et de flexion est ainsi matérialisée



(a) Un batteur ( $f_p = 10$  Hz, amplitude  $A_0$ )      (b) Deux batteurs ( $f_p = 10$  et  $20$  Hz, amplitude  $A_1 > A_0$ )

**Figure 3.** Spectre de la vitesse  $S_v(f, k)$ . L'échelle de couleur correspond à  $\log_{10}(S_v)$ . Relation de dispersion théorique :  $\omega^2 = (T/\rho)k^3$  (- -), et  $\omega^2 = (T/\rho)k^3 + (D/\rho)k^5$  (—) ajustée avec  $T = 12$  N/m (a) et  $T = 14$  N/m (b).

lorsque la courbe pointillés s'écarte de la courbe en trait plein. Notons l'élargissement du spectre autour de la relation de dispersion lorsque le forçage augmente. Cet élargissement pourrait être associé à l'influence des non linéarités, et notamment des interactions non linéaires entre ondes. Comme attendu, le spectre est beaucoup plus intense aux basses fréquences proches de la fréquence d'excitation, et l'amplitude du spectre augmente avec l'amplitude du forçage. Enfin, notons que la plus petite échelle mesurable est détectée jusqu'à environ 400 Hz soit  $\lambda \sim 6$  mm (Fig. 3b).

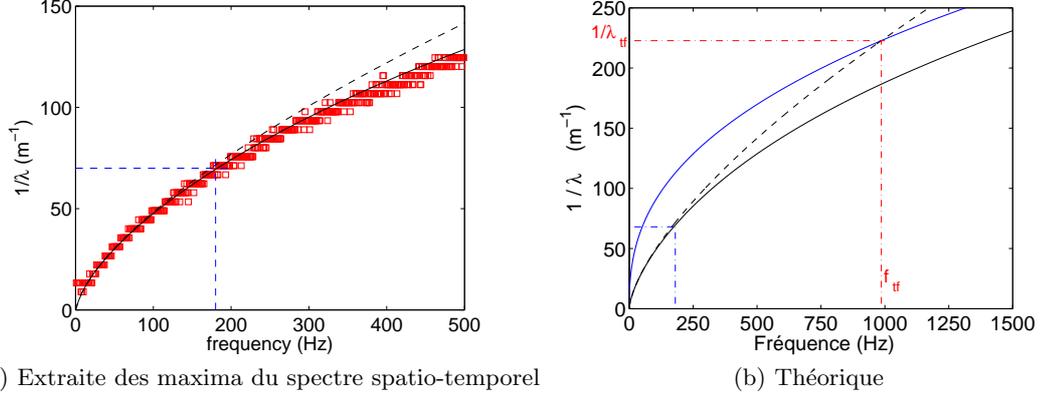
Les maxima de  $S_v(f, k)$  de la Fig. 2 sont tracés sur la Fig. 4a et permettent de déterminer la valeur de  $T$  par un ajustement avec la relation de dispersion  $\omega^2 = \frac{T}{\rho}k^3$  à petit  $k$ . En itérant ce processus pour différents forçages, on observe que la valeur de tension de la membrane  $T$  augmente avec l'amplitude et la fréquence du forçage. De plus, le changement de régime entre les ondes de tension et les ondes de flexion a lieu pour une fréquence qui est trouvée dépendre de la valeur de  $T$  : vers 100 Hz pour un forçage faible, et vers 180 Hz pour un forçage fort (Fig 4). La transition entre les régimes de tension et de flexion s'obtient en égalisant les deux derniers termes du membre de droite de l'Equation (2), soit pour un nombre d'onde  $k_{tf} = \sqrt{T/D}$  correspondant à une fréquence

$$f_{tf} = \frac{1}{2\pi} \sqrt[4]{\frac{T^5}{\rho^2 D^3}} = 986 \text{ Hz},$$

et  $\lambda_{tf} = 2\pi\sqrt{D/T} = 4.5$  mm. La Fig. 4b montre les relations de dispersion théoriques d'ondes de tension pures, d'ondes de flexion pures et d'ondes de tension flexion pour  $T = 14$  N/m. La transition entre les deux régimes intervient au point  $(f_{tf}, \lambda_{tf})$ , point d'intersection entre ces deux dernières courbes. La Fig. 4b montre aussi que la relation de dispersion de tension pure s'écarte de celle des ondes de tension flexion bien avant d'atteindre ce point de transition. En effet, vers 180 Hz, ces deux courbes théoriques s'écartent l'une de l'autre en bon accord avec les observations de la Fig. 4a.

## 5 Turbulence d'ondes

La théorie de la turbulence d'ondes peut s'appliquer à différents types de systèmes d'ondes dispersive se propageant dans un milieu, pour une relation de dispersion  $\omega = ck^\alpha$  donnée, avec  $c$  qui dépend des paramètres physique du problème [1,2]. La conservation de l'énergie donne lieu à une cascade directe d'énergie, l'échelle d'injection de l'énergie étant supposée séparée de l'échelle de dissipation. Le transfert d'énergie se fait à flux d'énergie  $\epsilon$  constant, sans dissipation, à travers les échelles par un processus



**Figure 4.** Relation de dispersion (a) extraite des maxima du spectre spatio-temporel de la Fig. 2 (forçage fort). Relation de dispersion théorique :  $\omega^2 = (T/\rho)k^3$  (- -), et  $\omega^2 = (T/\rho)k^3 + (D/\rho)k^5$  (—) pour  $T = 14$  N/m. Ces deux courbes s'écartent significativement l'une de l'autre vers 180 Hz montrant la transition entre ondes élastiques de tension et de flexion. Relation de dispersion théorique (b) des ondes de flexion pure  $\omega^2 = (D/\rho)k^5$  (— bleu), de tension pure  $\omega^2 = (T/\rho)k^3$  (- -), et d'ondes de tension et flexion  $\omega^2 = (T/\rho)k^3 + (D/\rho)k^5$  (—) pour  $T = 14$  N/m. Ces deux dernières courbes s'écartent significativement l'une de l'autre vers 180 Hz, et l'égalité des termes de tension et de flexion de l'Equation (2) correspond au point  $(f_{tf}, \lambda_{tf})$ .

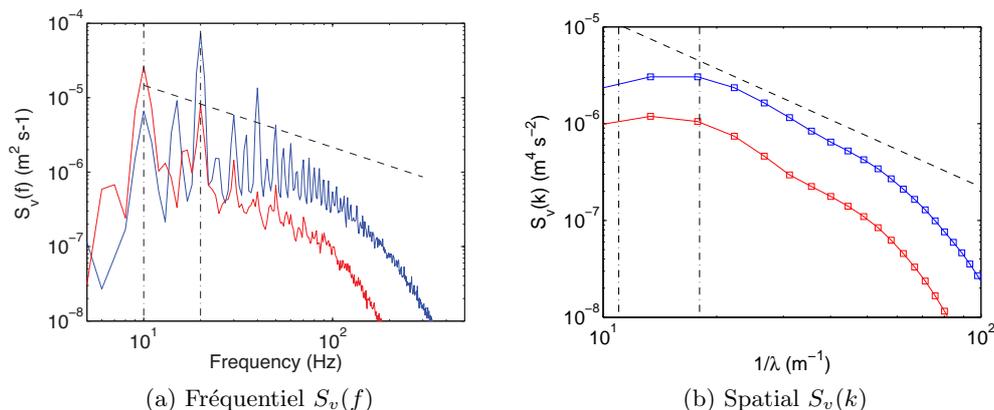
d'interactions à  $N$  ondes. La loi d'échelle du spectre  $S_v$  en fonction du flux d'énergie dépend de  $N$  et est donnée par  $S_v \sim \epsilon^{1/(N-1)}$  [1,2], et il est alors possible de calculer par analyse dimensionnelle une solution pour le spectre. Pour des ondes élastiques de tension-flexion couplées avec le mouvement fluide, il est connu que la non linéarité est quadratique et donc des interactions à 3-ondes ( $N = 3$ ) sont impliquées [8,9]. Pour des ondes élastiques de tension couplées avec le mouvement fluide,  $\omega = (T/\rho)^{1/2} k^{3/2}$ , et  $N = 3$ . On suppose que le spectre s'écrit  $S_v \sim \epsilon^{1/(N-1)} c^x f^y$  avec  $x$  et  $y$  réels à déterminer. Par analyse dimensionnelle, on trouve

$$S_v(f) \sim \epsilon^{1/2} \left( \frac{T}{\rho} \right)^{1/6} f^{-5/6}.$$

Le spectre spatial en fonction de  $k$  s'obtient de la même façon

$$S_v(k) \sim \epsilon^{1/2} \left( \frac{T}{\rho} \right)^{1/4} k^{-7/4}.$$

En intégrant le spectre spatio-temporel de vitesses des ondes  $S_v(k, f)$  de la Fig. 3 sur tous les nombres d'ondes  $k$ , on obtient le spectre temporel de la vitesse verticale  $S_v(f)$  comme le montre la Fig. 5a pour deux forçages. Lorsque le forçage augmente, l'amplitude globale du spectre augmente ainsi que l'amplitude des harmoniques du forçage. Dans le cas du plus grand forçage, le mélange d'onde est plus efficace, mais pas suffisant pour obtenir un spectre continu. La courbe en pointillé représente la loi de puissance  $S_v \sim f^{-5/6}$  prédite par l'analyse dimensionnelle. De même, en intégrant  $S_v(k, f)$  de la Fig. 3 sur toutes les fréquences  $f$ , on obtient le spectre spatial de la vitesse verticale  $S_v(k)$  (Fig. 5b). La courbe en pointillé représente la loi de puissance  $\sim k^{-7/4}$  prédite par l'analyse dimensionnelle. Le spectre spatial est plus lisse que le spectre fréquentiel du fait de la résolution  $\delta k \sim 1/(2L) \sim 5 \text{ m}^{-1}$ , limitée par la taille  $L$  de la fenêtre d'observation. Le régime de turbulence d'ondes n'est clairement pas atteint sur une large gamme fréquentielle ou spatiale, mais ces résultats préliminaires sont encourageants pour atteindre un régime turbulent d'ondes en interaction non linéaire.



**Figure 5.** Spectre fréquentiel  $S_v(f)$  (a) et spectre spatial  $S_v(k)$  (b) de la vitesse des ondes obtenus par intégration du spectre spatio-temporel de la Fig. 3. Forçage à deux batteurs (bleu) et forçage à un batteur (rouge). Les prédictions de l'analyse dimensionnelle sont indiquées en pointillés :  $S_v(f) \sim f^{-5/6}$  (a), et  $S_v(k) \sim k^{-7/4}$  (b). Forçage (lignes verticales) : 10 et 20 Hz correspondants à  $1/\lambda = 11$  et  $18 \text{ m}^{-1}$ .

## 6 Conclusion

Nous avons étudié en laboratoire des ondes linéaires ou non linéaires se propageant à l'interface d'un fluide recouvert d'une membrane élastique mince. Deux régimes d'ondes élastiques sont observées conformément à la relation de dispersion linéaire théorique : un régime d'ondes de flexion et un régime d'ondes de tension. Des résultats préliminaires montrent que lorsque le forçage augmente, des effets non linéaires apparaissent : un élargissement de la relation de dispersion, et le développement des harmoniques du forçage. Une étude plus systématique est en cours pour s'approcher d'un régime de turbulence d'ondes dans ce système.

## Références

1. S. NAZARENKO, *Wave Turbulence*, Lecture Notes in Physics, **825**, Springer, Berlin (2010)
2. V. E. ZAKHAROV, G. FALKOVICH & V. S. LOVOV, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I : Wave Turbulence* Springer, Berlin (1992)
3. V. A. SQUIRE, R. J. HOSKING, A.D. KERR & P. J. LANGHORNE, *Moving Loads on Ice Plates*, Kluwer Acad Publishing (1996)
4. R. M. S. M. SCHULKES, R. J. HOSKING & A. D. SNEYD, Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Part 2, *Journal of Fluid Mechanics*, **180**, 297-318 (1987)
5. P. J. COBELLI, A. MAUREL, V. PAGNEUX & P. PETITJEANS, Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry, *Experiments in Fluids*, **46**, 1037-1047 (2009)
6. P. COBELLI, P. PETITJEANS, A. MAUREL, V. PAGNEUX & N. MORDANT, Space-time resolved wave turbulence in a vibrating plate, *Physical Review Letters*, **103**, 204301 (2009)
7. E. HERBERT, N. MORDANT & E. FALCON, Observation of the nonlinear dispersion relation and spatial statistics of wave turbulence on the surface of a fluid, *Physical Review Letters*, **105**, 144502 (2010)
8. A. V. MARCHENKO & V. I. SHRIRA, Theory of two-dimensional nonlinear waves in liquid covered by ice, *Fluid Dynamics*, **26**, 580-587 (1991)
9. I. V. LAVRENOV & V. G. POLNIKOV, Nonlinear energy transfer over the wave spectrum in water covered by solid ice, *Fluid dynamics*, **38**, 310320 (2003)