

# Propriétés spatio-temporelles de la Turbulence d'ondes capillaires

Michael Berhanu & Eric Falcon

Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, MSC, UMR 7057 CNRS - 75 013 Paris, France  
 michael.berhanu@univ-paris-diderot.fr

**Résumé.** La turbulence d'ondes étudie les propriétés statistiques d'un ensemble d'ondes en interaction non linéaire. Les ondes à la surface d'un fluide constituent l'archétype de ce phénomène pouvant être traité analytiquement dans le cas faiblement non linéaire. Une difficulté expérimentale repose dans la nécessité d'utiliser une mesure du champ d'ondes simultanément dans l'espace bidimensionnel et dans l'espace temporel. Récemment Herbert et al. ont caractérisé la turbulence d'ondes de gravité en utilisant une méthode optique (Profilométrie par Transformée de Fourier). Ici l'utilisation d'une autre méthode optique (« *Diffusing Light Photography* ») associée à une caméra rapide nous permet d'atteindre une meilleure résolution spatiale et de caractériser les propriétés spatio-temporelles de la Turbulence d'ondes capillaires. On obtient la relation de dispersion des ondes capillaires ainsi que le spectre de hauteur de vagues à la fois en fonction du nombre d'onde  $k$  et de la pulsation  $\omega$ . Les propriétés statistiques sont extraites et analysées dans le but d'évaluer la validité des théories faiblement non-linéaire. Enfin comme cette technique n'est pas limitée aux faibles amplitudes de déformation de la surface, nous pouvons aussi étudier la création de vagues capillaires parasites au sommet des vagues raides de gravité et déterminer l'influence de ces structures sur la Turbulence d'ondes.

**Abstract.** Wave Turbulence concerns the study of the statistical properties of a set of numerous nonlinear interacting waves. The archetype of this phenomenon are waves on the surface of a fluid. Analytical predictions can be brought in the weakly nonlinear case. One of the challenge of Wave Turbulence is to reach a simultaneous 2D-space and time measurement of the wave amplitude that goes further than usual spatially localized ones. Recently, Herbert et al. performs this measurement for gravity wave turbulence using an optical method (Fourier Transform Profilometry). Here, we used another optical technique (Diffusing Light Photography) with a fast camera, to reach a better spatial resolution that allows us to investigate spatio-temporal statistics of capillary wave turbulence. Dispersion relations of capillary waves are obtained as well as the full spectrum of wave amplitude both in the  $k$  and  $\omega$  spaces. Statistical properties are extracted and analysed in order to test the validity of Weak Turbulence Theory. Moreover, as this technique is not limited to small amplitudes of surface deformation, we can observe appearance of small capillary waves on steep gravity waves, and to check the impact of this gravity to capillary conversion on Wave Turbulence.

## 1 Introduction

La Turbulence d'ondes se réfère aux états hors-équilibre, statistiquement stationnaires, d'un ensemble d'ondes en interaction non linéaire. Si ces interactions sont suffisamment intenses une cascade turbulente apparaît transférant l'énergie d'une échelle d'injection à une échelle de dissipation. Ce phénomène analogue à la turbulence de l'équation de Navier-Stokes, présente l'intérêt d'être abordable analytiquement de manière exacte dans le cas faiblement non-linéaire [1,2] et ainsi de clarifier de manière plus générale le concept de Turbulence. Cet intérêt fondamental a succité ces dernières années plusieurs expériences discutant de la pertinence de l'approche théorique, particulièrement dans le cas des ondes à la surface d'un fluide [1]. Par exemple des mesures locales au moyen d'une sonde capacitive ont ainsi pu montrer que les spectres de puissance temporels de hauteur de vague vérifient une loi de puissance en accord avec la prédiction théorique pour les ondes capillaires [3]. En revanche pour les ondes de gravité l'exposant dépend de l'intensité du forage en désaccord avec la théorie.

Pour aller plus loin et accéder aux mécanismes intimes de la turbulence, il s'avère nécessaire de connaître le champ de vagues à la fois en espace et en temps. Or la mesure de la topographie d'une

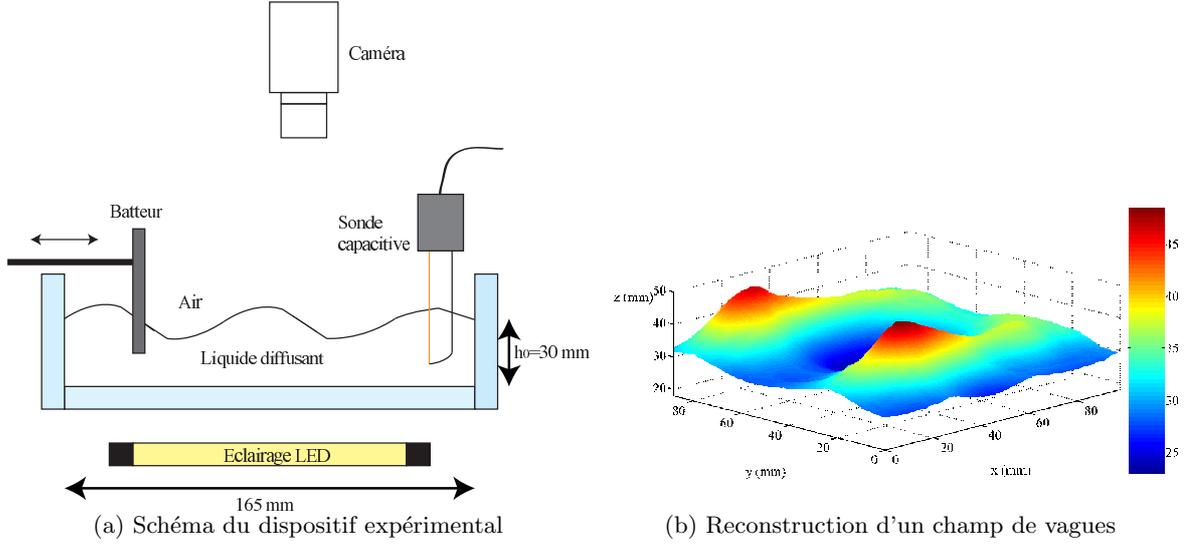
interface fluide en régime turbulent constitue une tâche difficile qui a pu bénéficier de développements expérimentaux récents. La méthode « *Free-Surface Synthetic Schlieren* » [4] repose sur la réfraction des rayons lumineux traversant une épaisseur d'un liquide transparent et permet par corrélation d'images de reconstruire très précisément et avec une grande sensibilité la surface. Néanmoins cette technique est limitée aux faibles déformations et aux faibles pentes et n'a pas pu être utilisée dans les régimes de turbulence d'ondes. La méthode de profilométrie par transformée de Fourier [5] repose quant-à-elle, sur la projection d'un réseau de franges sur le liquide rendu opaque par l'ajout de peinture. La forme de la surface au cours du temps est déduite de la déformation du réseau filmé par une caméra rapide. Cette technique a été utilisée pour obtenir la première caractérisation [6] spatio-temporelle de la Turbulence d'ondes, dans le régime d'ondes de gravité, montrant entre autres la possibilité pour des forçages suffisamment intenses d'observer une relation de dispersion non-linéaire dû à la présence d'ondes dites liées. La correspondance entre espace et temps fournie usuellement par la relation de dispersion linéaire est ainsi sujette à caution. Plus récemment en bénéficiant d'une amélioration technique de la méthode, la turbulence gravito-capillaire a pu être caractérisée sur une plus large étendue spectrale [7]. Néanmoins comme la résolution spatiale est limitée par la distance entre franges, le régime d'ondes capillaires n'est pas complètement résolu.

Nous proposons d'utiliser une autre méthode de mesure plus sensible, adaptée à la caractérisation du régime de Turbulence d'ondes capillaires et restant valable pour de fortes déformations de la surface. Il s'agit de la « *Diffusing Light Photography* » [8,9], qui fut utilisée au milieu des années 90 pour la première caractérisation spatiale de la turbulence d'ondes capillaires excitées paramétriquement. L'intensité lumineuse traversant un liquide diffusant éclairé par le dessous permet de reconstruire la déformation de la surface, sachant que plus l'épaisseur traversée est grande, plus l'intensité lumineuse mesurée en un point à la surface est faible. En revanche ces mesures correspondaient à des « instantanés » du champ de vague, illuminé par un flash, parce que le système CCD à faible bruit utilisé restait limité à des expositions longues et de faibles fréquences d'acquisition. Le progrès technologique des caméras rapides nous permettent de réutiliser cette méthode et de l'appliquer à l'étude spatio-temporelle de la Turbulence d'ondes capillaire.

## 2 Dispositif expérimental et méthode

Les ondes sont produites au moyen d'un batteur dans une cuve transparente (165×165 mm), représentée Fig. 1a. Le batteur est mis en mouvement horizontalement par un vibreur électromagnétique LDS V406, pouvant recevoir en entrée via une carte NI-DAQ des signaux définis par l'expérimentateur. L'intensité du forçage est quantifiée par l'écart type de la vitesse du batteur  $\sigma_v$  mesuré à la fois via un accéléromètre et par un capteur de vitesse. Pour mesurer la topographie spatiale du champ de vagues par « *Diffusing Light Photography* » (DLP), la cuve est éclairée par le dessous par un carré de diodes électroluminescentes Phlox (100×100 mm) et la surface du liquide est imagée par une caméra PCO-EDGE sensible permettant d'enregistrer des images de plus d'un mégapixel avec une fréquence d'acquisition de 200 Hz. Les travaux de Wright et al. [8,9] utilisaient comme liquide diffusant une suspension de sphères de polystyrène de diamètre 1  $\mu\text{m}$  dans de l'eau. En raison du prix élevé de ces microsphères, nous proposons d'utiliser une émulsion commerciale de lipides l'*Intralipid 20%* (Fresenius Kabi), dont les solutions dans l'eau sont utilisées comme milieux diffusants modèles et dont les propriétés optiques ont été caractérisées [10]. Les résultats de cette mesure spatiale sont comparés avec une mesure locale de la hauteur du fluide, obtenue par une sonde capacitive [3] placée en dehors du champ de la caméra. La validité de la méthode DLP repose sur un choix adéquat de la concentration en particules diffusantes, de façon à adapter le libre parcours moyen  $\mathcal{L}^*$  de la lumière au sein du liquide de sorte qu'il soit plus petit que l'épaisseur totale de fluide et plus grand que l'amplitude des déformations à mesurer. Dans ce cas la focalisation des rayons lumineux due à la courbure des surfaces disparaît totalement [8].

Dans les expériences présentées par la suite pour une hauteur au repos du fluide de 30 mm, nous utilisons 6 mL d'*Intralipid 20%* dilué dans 1L d'eau distillée. Cette faible dilution ne modifie pas significativement la viscosité du fluide. Une variation de la hauteur de remplissage de la cuve, permet de calibrer la variation d'intensité lumineuse transmise en fonction de l'épaisseur traversée  $h(x, y)$ , pour chaque



**Figure 1.** Schéma du dispositif expérimental (a). Une cuve transparente en Plexiglass de dimension  $165 \times 165$  mm est remplie sur une hauteur  $h_0 = 30$  mm d'un liquide diffusant (1 L d'eau + 6 mL d'Intralipid 20%). Des vagues sont produites par le mouvement horizontal d'un batteur rectangulaire de largeur 130 mm et plongeant dans le liquide sur une hauteur de 13 mm. La cuve est éclairée par le dessous par un système de diode électroluminescente Phlox produisant un éclairage homogène sur  $100 \times 100$  mm. Une caméra rapide mise au point sur la surface, enregistre l'intensité lumineuse à la surface, pour reconstruire le champ de hauteur de vagues. Une sonde capacitive en dehors du champ de la caméra permet d'avoir une mesure au cours du temps de la hauteur du fluide en un point. (b) Exemple de reconstruction d'un champ de vagues, pour de fortes déformations de la surface libre. Les vagues sont produites dans ce cas par deux batteurs oscillant sinusoïdalement à 5 Hz de façon à obtenir un mode stationnaire résonnant.

point de la surface libre  $M(x, y)$ . En notant  $I_0(x, y)$  l'intensité lumineuse qui serait mesurée en l'absence de liquide, nous trouvons en première approximation une diminution en exponentielle décroissante de l'intensité lumineuse avec  $h(x, y)$  :

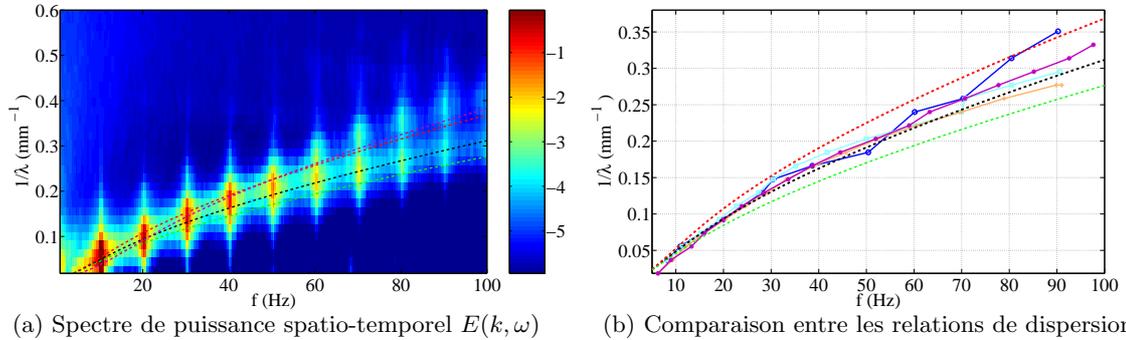
$$I(x, y) = I_0(x, y) \exp\left(\frac{-h(x, y)}{\mathcal{L}^*}\right)$$

Nous remarquons qu'une relation différente proposée dans le second article de Wright et al. [9] permet aussi de calibrer nos mesures, mais s'avère d'un emploi moins aisé. Des études complémentaires devraient permettre d'approfondir le comportement optique de ce liquide diffusant et d'améliorer la calibration de nos mesures. Nous utilisons la valeur de  $\mathcal{L}^*$  trouvé préalablement et le rapport de l'intensité  $I(x, y)$  transmise en un point en présence de vagues par celle transmise pour la surface au repos quand  $h_0(x, y) = 30$  mm pour reconstruire la forme de la déformation de surface à chaque instant. En raison du *Photon shot Noise* d'origine physique, il est nécessaire de filtrer spatialement les images par un noyau Gaussien de largeur 5 pixels, ce qui constitue une limite à la résolution spatiale (typiquement 0.5 mm). Un tel exemple de reconstruction dans un cas d'une vague de forte amplitude est montrée Fig. 1b. Contrairement aux autres techniques, des déformations correspondant à des pentes spatiales  $\frac{\partial h}{\partial x}$  d'ordre un, sont très bien mesurées. Pour un mode résonant excité par un mouvement du batteur à une fréquence de 5 Hz, on a pu observer la création d'ondes capillaires parasites sur les crêtes de ces ondes raides de gravité, du fait de la forte courbure au sommet de ces vagues. L'influence de la présence de ces ondes parasites sur la relation de dispersion et sur les caractéristiques de la Turbulence d'ondes fera l'objet d'une étude ultérieure.

### 3 Forçage sinusoïdal et relation de dispersion

Nous commençons notre étude, par un cas d'excitation sinusoïdale du batteur à une fréquence de 10 Hz pour différentes intensités de forçage. Ces mesures sont effectuées sur une fenêtre de  $54.2 \times 54.2$  mm correspondant à  $960 \times 960$  pixels et une fréquence de 200 Hz. Le spectre spatio-temporel de puissance de hauteur de vagues  $E(\mathbf{k}, \omega)$  est calculé en effectuant une transformée de Fourier à deux dimensions sur les dimensions d'espace conjointement avec une transformée de Fourier en temps, du signal de hauteur de vagues  $h(x, y, t)$ . En effectuant ensuite une intégration sur les différentes orientations de  $\mathbf{k}$ , on obtient le spectre spatio-temporel  $E(k, \omega)$  en fonction de  $k = \|\mathbf{k}\|$ , montrant comment se répartit en moyenne l'énergie du signal de hauteur de vagues à travers les échelles d'espace et de temps.

Sur l'exemple représenté Fig. 2a obtenu à partir du traitement de 2000 images, on observe que la majeure partie de l'énergie se concentre sur des *tâches* discrètes dans l'espace  $(k, \omega)$  situé à la fréquence du forçage et à ses harmoniques, matérialisant la relation de dispersion. Les interactions non-linéaires remplissent le spectre entre les pics de fréquences, mais restent insuffisantes pour faire disparaître la mémoire du forçage, lorsqu'on se déplace vers les petites échelles. En recherchant les maxima locaux du spectre, il est possible de tracer la relation de dispersion expérimentale (Fig. 2b) et de comparer avec la relation de dispersion linéaire  $\omega^2 = \tanh(k h_0) [g k^2 + (\gamma/\rho) k^3]$  pour des valeurs plausibles de la tension de surface  $\gamma$ . Compte tenu de la résolution limitée en  $k$  due à la taille limitée de la fenêtre spatiale et du nombre de pixels, ces mesures ne mettent pas en évidence un déplacement de la relation de dispersion due aux non-linéarités. Toutefois on pourrait interpréter la branche secondaire visible sur le spectre à gauche comme la présence d'ondes liées d'ordre 2 [6]. Cette mesure valide ainsi l'emploi de la DLP dans l'étude des propriétés spectrales du champ de hauteur de vagues, en montrant qu'on retrouve la relation de dispersion linéaire pour une valeur de  $\gamma$  de l'ordre de  $50 \text{ mN.m}^{-1}$ . On remarque aussi que la sensibilité de cette méthode permet de mesurer un signal notable jusqu'à 100 Hz, limite donnée par la valeur de la fréquence d'acquisition de 200 Hz.

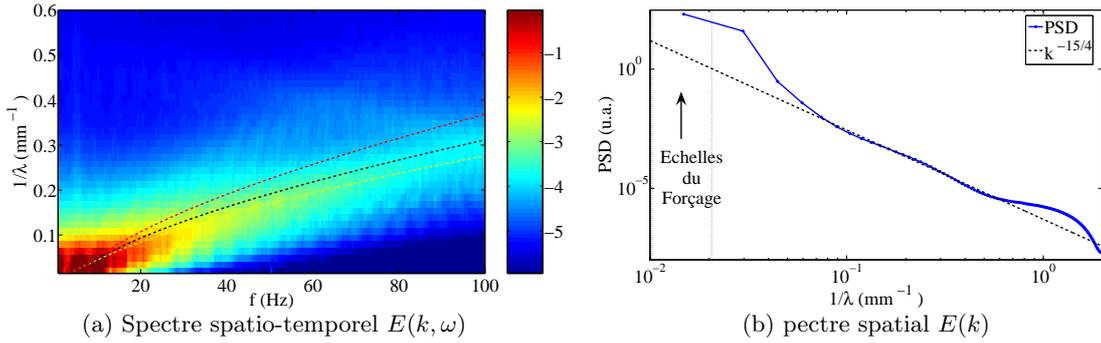


**Figure 2.** Spectre de puissance spatio-temporel  $E(k, \omega)$  (a) de hauteur de vagues en fonction de  $f = \omega/(2\pi)$  et  $1/\lambda = k/(2\pi)$  pour un forçage sinusoïdal à 10 Hz et une vitesse du batteur d'amplitude  $\sigma_v = 12.4 \text{ cm.s}^{-1}$ . L'échelle de couleur correspond à  $\log_{10}(E(k, \omega))$ . La relation de dispersion linéaire est représentée en pointillé pour trois valeurs de la tension de surface, à savoir  $\gamma = 72 \text{ mN.m}^{-1}$  en vert,  $\gamma = 50 \text{ mN.m}^{-1}$  en noir et  $\gamma = 30 \text{ mN.m}^{-1}$  en rouge. La relation de dispersion pour des ondes liées d'ordre 2 et  $\gamma = 50 \text{ mN.m}^{-1}$  est tracée en magenta. Comparaison entre la relation de dispersion linéaire et la relation de dispersion extraite des maxima locaux de  $E(k, \omega)$  (b) pour différentes amplitude de forçage ( $\sigma_v = 9.1 \text{ cm.s}^{-1}$  en bleu,  $\sigma_v = 55 \text{ cm.s}^{-1}$  en cyan,  $\sigma_v = 12.4 \text{ cm.s}^{-1}$  en saumon et  $\sigma_v = 15.9 \text{ cm.s}^{-1}$  en magenta). On note que le seuil d'apparition d'ondes sous harmoniques, appelées « *cross-waves* » [11], est situé entre ces deux dernières valeurs.

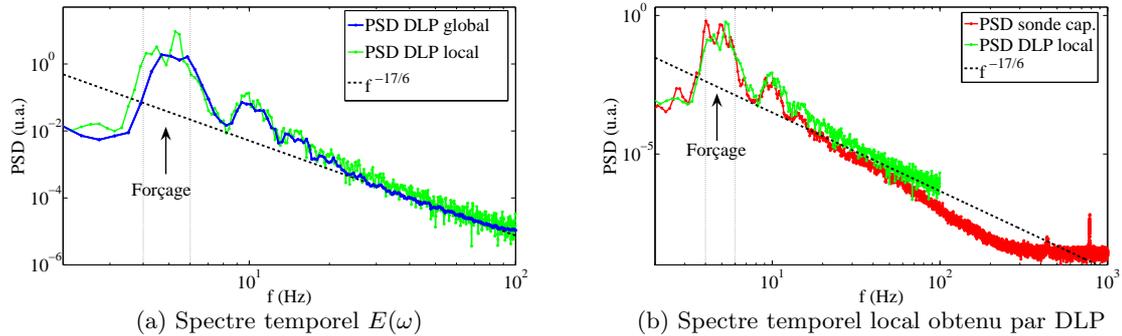
#### 4 Forçage aléatoire et régime de Turbulence d'ondes.

Les régimes de Turbulence d'ondes, s'avèrent plus facile à obtenir, en excitant le batteur avec un signal stochastique en amplitude pour une bande de fréquence [3], permettant de favoriser le mélange initial entre ondes, donnant lieu à la cascade turbulente. Dans cette partie, nous nous concentrons sur les résultats d'une expérience obtenue pour un forçage compris entre 4 et 6 Hz, et un écart type de la vitesse du batteur valant  $\sigma_v = 9.4 \text{ cm.s}^{-1}$ . La fenêtre de mesure correspond désormais à un rectangle de  $77.0 \times 61.6 \text{ mm}$  enregistré sur  $1280 \times 1024$  pixels, la fréquence d'acquisition des images restant fixée à 200 Hz. L'écart type des vagues mesurées par DLP dans la fenêtre de mesure vaut 4 mm et l'inhomogénéité spatiale correspondante est de l'ordre de 13 %.

Le spectre spatio-temporel  $E(k, \omega)$ , calculé sur 5000 images, et représenté Fig. 3a, montre cette fois-ci que l'énergie se répartit continument le long de la relation de dispersion. En moyennant sur toutes les fréquences, on obtient le spectre spatial de hauteur de vagues  $E(k)$  représenté Fig. 3b. Une loi de puissance traduisant la présence d'une cascade turbulente à travers les échelles est observée pour  $k/(2\pi)$  compris entre 0.07 et 0.7  $\text{mm}^{-1}$ , avec un exposant en accord avec la prédiction théorique  $E(k) \sim k^{-15/4}$  [2]. De même en moyennant le spectre spatio-temporel  $E(k, \omega)$  cette fois ci sur les nombres d'ondes  $k$ , on trouve le spectre temporel de hauteur de vague  $E(\omega)$ , représenté Fig. 4a. A nouveau le spectre obtenu exhibe une loi de puissance pour des fréquences  $f$  comprises entre 20 et 100 Hz en accord avec le spectre prédit analytiquement  $E(\omega) \sim \omega^{-17/6}$  [1,2] et observé précédemment dans les expériences utilisant des mesures locales de hauteur de vagues [3]. En utilisant le signal temporel de la sonde capacitive, enregistré sur 200 s et échantillonné à 2000 Hz, nous pouvons comparer l'estimation des spectres temporels entre une mesure locale et globale. Pour cela, en enregistrant le signal de hauteur moyenné sur un carré de 5 pixels, on recrée un signal local à partir des mesures de DLP, dont le spectre temporel (en vert, Fig. 4b) se superpose avec le spectre  $E(\omega)$  global. Le spectre donné par DLP local est aussi très proche du spectre obtenu par la sonde capacitive, après redimensionnement par l'écart type pour avoir des signaux de même intensité. On remarque de plus que si le spectre donné par la sonde capacitive rejoint le niveau de bruit vers 300 Hz, l'écart à la loi de puissance commence à partir de 100 Hz, ce qui signifie qu'à partir de cette échelle la dissipation visqueuse commence à agir et brise l'invariance d'échelle. Il apparaît souhaitable d'utiliser la DLP pour de plus grandes fréquences d'acquisition, pour étudier les échelles de dissipation des ondes capillaires.



**Figure 3.** Spectre spatio-temporel  $E(k, \omega)$  (a) de hauteur de vagues pour un forçage aléatoire dans une bande de fréquence comprise entre 4 et 6 Hz. Le spectre continu le long de la relation de dispersion traduit que les interactions non-linéaires sont suffisamment intenses en régime de turbulence d'ondes pour effacer la mémoire du forçage à l'intérieur de la cascade turbulente. Spectre spatial  $E(k)$  (b) de hauteur de vagues en fonction de  $1/\lambda = k/(2\pi)$ . Une loi de puissance en accord avec la prédiction théorique  $E(k) \sim k^{-15/4}$  est observée pour  $k/(2\pi)$  compris entre 0.07 et 0.7  $\text{mm}^{-1}$ .



**Figure 4.** Spectre temporel  $E(\omega)$  (a) en fonction de la fréquence. Le spectre global estimé sur tout le champ de vagues et le spectre local estimé sur un carré de 10 pixels au centre de la fenêtre de mesures sont comparés et sont tous deux en accord avec la loi de puissance théorique  $E(\omega) \sim \omega^{-17/6}$  pour des fréquences comprises entre 20 et 100 Hz. Le spectre temporel local obtenu par DLP (b) est cette fois-ci comparé au spectre temporel donné par la sonde capacitive.

## 5 Conclusion

Les mesures présentées valident l'utilisation de la méthode de « *Diffusing Light Photography* » dans l'étude de la Turbulence d'ondes capillaires, assez sensible pour résoudre de faibles déformations à petite échelle. Ce travail confirme en utilisant une mesure spatio-temporelle, les résultats obtenus précédemment par des méthodes de mesure locale. La suite consistera à les compléter en cherchant à identifier les mécanismes en jeu dans l'interaction entre ondes et en étudiant les régimes fortement non-linéaires.

**Remerciements :** Nous remercions Alexandre Lantheaume et Jacques Servais pour leur aide technique dans la réalisation de l'expérience ainsi que Nicolas Mordant (LEGI UJF Grenoble) pour son apport dans le traitement des données. Ce travail a été financé par l'ANR Turbonde BLAN07-3-197846.

## Références

1. A. C. NEWELL & B. RUMPF, Wave turbulence, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **43**, 59 (2011)
2. S. NAZARENKO, *Wave Turbulence* Springer, Berlin (2011)
3. E. FALCON, C. LAROCHE & S. FAUVE, Observation of gravity-capillary wave turbulence, *Physical Review Letters*, **98**, 094503 (2007)
4. F. MOISY, M. RABAUD & K. SALSAC, Measurement by digital image correlation of the topography of a liquid surface, *Experiments in Fluids*, **46**, 1021 (2009)
5. P. COBELLI, A. MAUREL, V. PAGNEUX & P. PETITJEANS, Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry, *Experiments in Fluids*, **46**, 1037 (2009)
6. E. HERBERT, N. MORDANT & E. FALCON, Observation of the nonlinear dispersion relation and spatial statistics of wave turbulence on the surface of a fluid, *Physical Review Letters*, **105**, 144502 (2010)
7. P. COBELLI, A. PRZADKA, P. PETITJEANS, G. LAGUBEAU, V. PAGNEUX & A. MAUREL, Different regimes for water wave turbulence, *Physical Review Letters*, **107**, 214503 (2011)
8. W. B. WRIGHT, R. BUDAKIAN & S. J. PUTTERMAN, Diffusing light photography of fully developed isotropic ripple turbulence, *Physical Review Letters*, **76**, 4528 (1996)
9. W. B. WRIGHT, R. BUDAKIAN, D. J. PINE & S. J. PUTTERMAN, Imaging of intermittency in ripple-Wave turbulence, *Science*, **278** 1609 (1997)
10. R. MICHELS, F. FOSCHUM & A. KIENLE, Optical properties of fat emulsions, *Optics Express*, **16** (8), 5909 (2008)
11. B. J. S. BARNARD & W. G. PRITCHARD, Cross-waves. II Experiments, *Journal of Fluids Mechanics*, **55** (2), 245 (1972)