

Propriétés multifractales dans l'espace de Hilbert : analyse de séries temporelles non linéaires et invariants d'échelle utilisant la décomposition modale empirique et transformation de Hilbert

François Schmitt¹, Yongxiang Huang², Zhiming Lu², & Yulu Liu²

¹ CNRS, Laboratoire d'Océanologie et de Géosciences, UMR 8187, F-62930 Wimereux

² Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, 200072 Shanghai China
francois.schmitt@univ-lille1.fr

Résumé. La méthode de décomposition modale empirique (EMD) a été développée il y a une dizaine d'années pour décomposer des séries temporelles non-linéaires et non-stationnaires en une somme de modes, chaque mode étant localisé en fréquence. Cette décomposition est associée à une transformation de Hilbert-Huang (HHT) visant à extraire localement une fréquence instantanée et une amplitude. Cette nouvelle méthode d'analyse, baptisée EMD-HHT, a rencontré un grand succès dans de nombreux domaines des sciences de la nature de la société. Ici nous présentons une généralisation, que nous avons développée récemment. Cette généralisation permet d'extraire les exposants multifractals de séries temporelles non stationnaires invariantes d'échelle ; ceci fournit une méthode alternative, utilisant l'espace de Hilbert, pour la caractérisation multifractale, qui peut être comparée à d'autres méthodes comme les fonctions de structure, les transformées en ondelette ou la méthode MFDA (Multifractal detrended fluctuation analysis). En tant qu'illustration, nous appliquons la méthode à des données de turbulence, et des données d'irradiance.

Abstract. Empirical mode decomposition (EMD) has been proposed about ten years ago to decompose nonlinear and non-stationary time series into a sum of modes, each one narrow-banded. This decomposition is associated to a Hilbert-Huang transform (HHT) in order to locally extract an instantaneous frequency and an amplitude. This new analysis method, called EMD-HHT, has met a large success in many fields of natural and social sciences. Here we present a generalization, which we developed recently. With this generalization, multifractal exponents can be extracted from non stationary scale invariant time series. This corresponds to an alternative way to characterize multifractal time series, using Hilbert space. It can be compared to other more classical methods such as structure functions, wavelet transform or multifractal detrended fluctuation analysis. As an illustration, we apply here the method to turbulence data and irradiance time series.

1 Introduction

Il y a plus d'une dizaine d'années, Norden Huang a proposé une méthode intitulée décomposition modale empirique (EMD, pour *Empirical Mode Decomposition*), pour analyser des séries temporelles non-linéaires et non stationnaires possédant une « large bande » [1,2]. Cette méthode permet de décomposer une série temporelle quelconque en une somme de plusieurs séries temporelles, appelées « modes » (IMF, pour *Intrinsic Mode Function*). Chaque mode possède une fréquence caractéristique. Pour un bruit blanc ou un bruit Gaussien fractionnaire, la répartition de ces fréquences caractéristiques est telle que la décomposition correspond à un banc de filtre dyadique [3,4]. La décomposition modale empirique s'accompagne souvent d'une transformation spectrale de Hilbert pour chaque mode pris séparément, permettant de proposer une densité spectrale d'énergie de Hilbert pour les séries temporelles [1,2]. Cette nouvelle méthode d'analyse, baptisée EMD-HHT, a rencontré un grand succès dans de nombreux domaines des sciences de la nature de la société : une recherche sur le Web of Science en janvier 2011 donne plus de 1600 articles ayant « *empirical mode decomposition* » ou « *Hilbert Huang transform* » dans leur titre ou leurs mots clés.

Ici nous présentons une généralisation, que nous avons développée récemment [5,6] et appliquée en turbulence [5,7,8] et dans le domaine de l'environnement [9,10] : cette généralisation permet d'extraire les exposants multifractals de séries temporelles non stationnaires invariantes d'échelle ; ceci fournit une méthode alternative, utilisant l'espace de Hilbert, pour la caractérisation multifractale. Nous rappelons dans une première section les principaux résultats obtenus : validation sur des simulations de mouvements Brownien fractionnaire et des simulations multifractales, puis rappel de son point fort par rapport à d'autres méthodes : elle est moins perturbée par l'existence d'échelles caractéristiques dans la série temporelle analysée, provenant par exemple d'un forçage déterministe superposé aux fluctuations stochastiques invariantes d'échelle. Dans une seconde section nous illustrons l'application de cette méthode à des séries temporelles de turbulence puis d'irradiance.

2 Intermittence dans l'espace de Hilbert

Nous considérons ici un signal non-linéaire, comportant différentes échelles de façon simultanée. L'idée de la décomposition est de considérer un signal en tant que superposition de différentes oscillations monocomposantes, appelées fonctions modales intrinsèques. Pour cela chaque mode doit satisfaire à deux conditions : 1) la différence entre le nombre de minima locaux et le nombre de traversée du zéro doit être zéro ou un ; 2) la moyenne glissante de la somme de l'enveloppe définie par les maxima locaux et l'enveloppe définie par les minima locaux est nulle. La décomposition est faite de façon itérative, en considérant à chaque étape le signal comme étant la somme d'une composante basse fréquence et d'une composante haute fréquence. A la fin de la décomposition, la méthode exprime une série temporelle $x(t)$ comme la somme d'un nombre fini de modes $C_i(t)$ et un résidu final $r_n(t)$ [1,11] :

$$x(t) = \sum_{i=1}^N C_i(t) + r_n(t) \quad (1)$$

Après la décomposition en une somme de modes, une analyse spectrale de Hilbert est effectuée sur chaque mode pris séparément, ce qui s'écrit :

$$C_i^H(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{C_i(t')}{t-t'} dt' \quad (2)$$

La combinaison de $C_i(t)$ et $C_i^H(t)$ permet de construire un signal analytique [12] sous la forme $C_i^A(t) = C_i(t) + jC_i^H(t) = \mathcal{A}_i(t)e^{j\theta_i(t)}$. La fréquence instantanée est définie par $\omega_i = \frac{d\theta_i(t)}{dt}$. Pour chaque mode, la densité spectrale de Hilbert est définie comme le carré de l'amplitude $H(\omega, t) = \mathcal{A}^2(\omega, t)$. $H(\omega, t)$ donne une valeur locale de l'énergie dans une représentation temps-fréquence et on peut extraire la densité de probabilité jointe $p(\omega, \mathcal{A})$ de la fréquence et de l'amplitude instantanées, pour l'ensemble des modes $i = 1 \dots N$. Ceci permet d'estimer la densité spectrale marginale (de Hilbert) :

$$h(\omega) = \int_0^\infty H(\omega, t) dt \quad (3)$$

qui est une densité d'énergie pour une fréquence ω . Ceci est comparable à la densité spectrale d'énergie estimée par la transformée de Fourier $E(f)$, bien que les définitions de f et ω soient différentes. L'objectif recherché par ce type de méthode est d'effectuer la décomposition au niveau local, de façon adaptative, dans un espace temps-fréquence, par une méthode ne nécessitant pas d'hypothèse a priori.

La densité spectrale d'énergie $h(\omega)$ est un second moment statistique. Pour étudier l'intermittence multifractale d'une série temporelle, nous avons généralisé ceci pour un moment d'ordre $q > 0$ quelconque [5,6] :

$$\mathcal{L}_q(\omega) = \int_0^\infty p(\omega, \mathcal{A}) \mathcal{A}^q d\mathcal{A} \sim \omega^{-1-\zeta(q)} \quad (4)$$

Ici, $\mathcal{L}_q(\omega)$ est un spectre d'amplitude de Hilbert généralisé; on a supposé une invariance d'échelle caractérisée par l'exposant qui peut aussi être, classiquement, estimé via les fonctions de structure $\zeta(q)$:

$$\langle (\Delta V_\tau)^q \rangle \approx \tau^{\zeta(q)} \quad (5)$$

Celui-ci caractérise l'intermittence multifractale de la série temporelle. Notre proposition ci-dessus correspond à une nouvelle méthodologie pour l'analyse de l'intermittence en fonction de l'échelle non plus dans l'espace physique, mais dans l'espace de Hilbert.

Des études à partir de simulations de séries temporelles monofractales (mouvement Brownien fractionnaire) et multifractales montrent que les exposants $\zeta(q)$ estimés dans l'espace de Hilbert sont très proches de ceux estimés par les méthodes classiques; les paramètres sont même souvent estimés de façon plus précise par cette méthode [5,6]. On constate également que cette approche est moins influencée par des structures à grande échelle comme des forçages périodiques ou des gradients, par comparaison par exemple avec les fonctions de structure, qui sont très perturbées par ces forçages [8].

3 Application à des données de turbulence et d'irradiance

Nous avons analysé avec cette méthode des données de turbulence provenant d'une expérience de turbulence homogène et isotrope : des mesures de turbulence en aval d'une grille active à une distance $x/M = 48$ de la grille dans la direction de l'écoulement, où M est la taille de la maille. Le nombre de Reynolds est $Re_\lambda = 720$ et la fréquence des mesures est $f_s = 40$ kHz [13]. Lorsque la méthode EMD est appliquée à ces données (Fig. 1) : on constate que chaque mode est bien localisé en fréquence et que la reconstitution de l'ensemble des modes produit un signal ayant un spectre de Kolmogorov en $-5/3$, en accord avec la théorie de Richardson-Kolmogorov pour la turbulence homogène et isotrope. Ces séries temporelles possèdent des fluctuations structurées, possédant des corrélations à longue portée, et des propriétés intermittentes et multifractales [14,15].

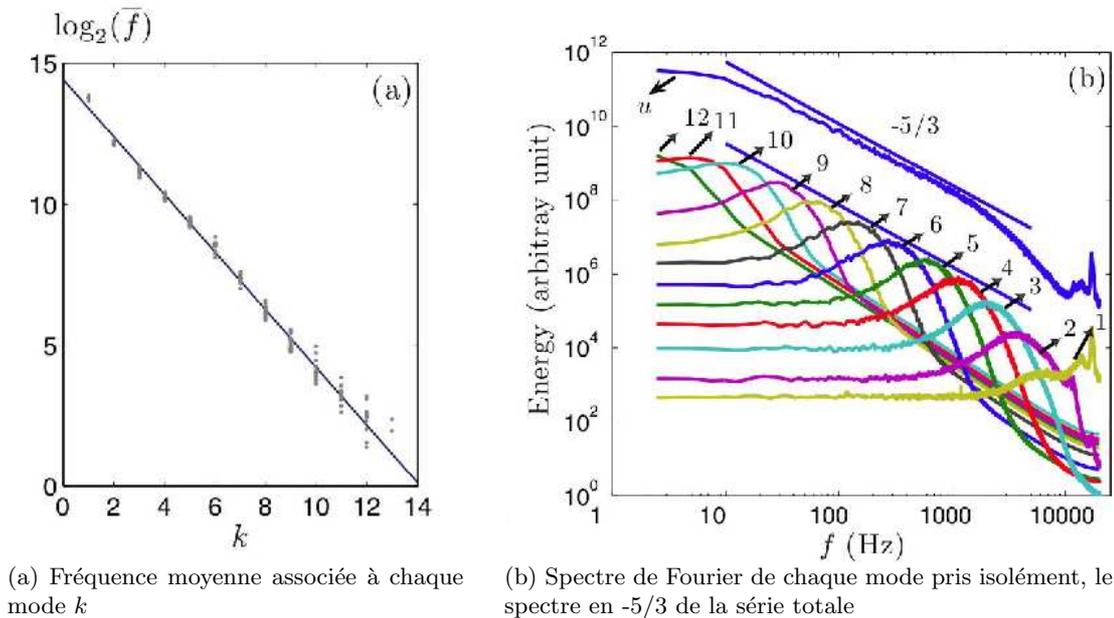


FIG. 1. Application de la méthode EMD à des données de turbulence.

L'analyse spectrale en Fourier est comparée à l'analyse spectrale dans l'espace de Hilbert (Fig. 2) : les deux courbes ont des comportements très similaires; cette analyse est la première mise en évidence d'un

spectre de Kolmogorov en $-5/3$ dans l'espace de Hilbert [5]. Nous avons également estimé les exposants $\zeta(q)$ par cette méthode, comparés aux estimations via les fonctions de structure (non montré ici) [5].

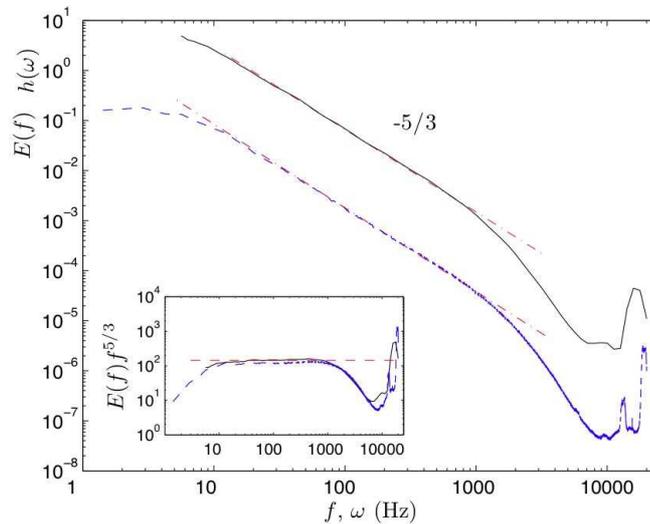


FIG. 2. Analyse spectrale en Fourier (en bas) comparée à l'analyse spectrale dans l'espace de Hilbert (en haut) : les deux courbes ont des comportements très similaires et une invariance d'échelle mise en évidence par les spectres compensés (insert).



FIG. 3. Capteur « *Ultra miniature light intensity recorder* » modèle MDS-MkV/L de la société Alec Electronics.

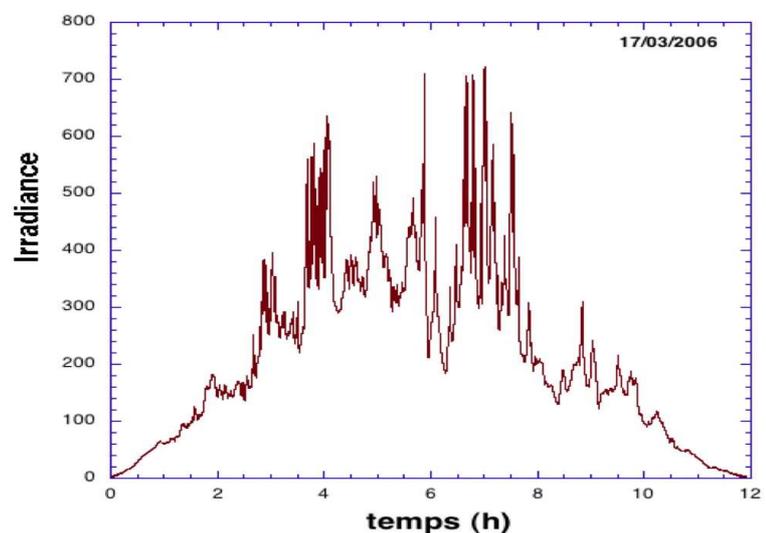


FIG. 4. Données d'irradiance totale dans le visible, mesurées toutes les secondes au niveau du sol à Wimereux (Pas-de-Calais) le 17 Mars 2006. De fortes fluctuations sont visibles.

Ici nous appliquons aussi la méthode à des données environnementales : ils s'agit de mesures de l'irradiance totale dans le visible (en nombre de photons par unité de surface) mesurée au niveau du sol toutes les secondes pendant une journée. La mesure est effectuée à l'aide d'un capteur « *Ultra miniature light intensity recorder* » modèle MDS-MkV/L de la société Alec Electronics, de diamètre 18 mm et

longueur 93 mm (Fig. 3). La très forte variabilité associée aux données analysées est représentée Fig. 4. Cette variabilité est indirectement associée à la turbulence de l'atmosphère : les mesures concernent les photons reçus au niveau du récepteur, de diamètre d'environ 2 cm : chaque photon reçu peut avoir parcouru un chemin optique différent, direct ou indirect. En raison de la variabilité multi-échelle de la couverture nuageuse, l'irradiance possède de fortes fluctuations, en dehors du lever et du coucher du soleil. Ici, nous analysons les données dans la partie centrale de cette courbe. Ce type de données a été très peu étudié (voir cependant Soubdhan et al [16]).

L'analyse spectrale des données, dans l'espace de Fourier et de Hilbert, est représentée Fig. 5. On constate une bonne invariance d'échelle avec une pente de l'ordre de $\beta = 1.5$. Cette invariance d'échelle est sans doute liée, de façon indirecte, à l'invariance d'échelle des nuages en tant que scalaires passifs advectés par la turbulence de l'atmosphère. Une estimation plus précise de la pente spectrale, à partir d'une moyenne d'ensemble sur plusieurs jours et dans différentes conditions météorologiques, permettra de comparer l'exposant empirique avec des valeurs théoriques telles que $5/3$ ou $7/5$ correspondant à différentes formes de turbulence. L'invariance d'échelle en espace de Hilbert est estimée pour différents moments $\mathcal{L}_q(\omega)$ (Fig. 6). On constate une bonne invariance d'échelle sur près de deux décades. Les exposants estimés de cette façon sont représentés en insert (Fig. 6), montrant la courbe moyenne de $\zeta(q)$ et la variabilité obtenue en choisissant une zone différente pour les ajustements des pentes. Sa nonlinéarité confirme le caractère multifractal de ces données visuellement très intermittentes.

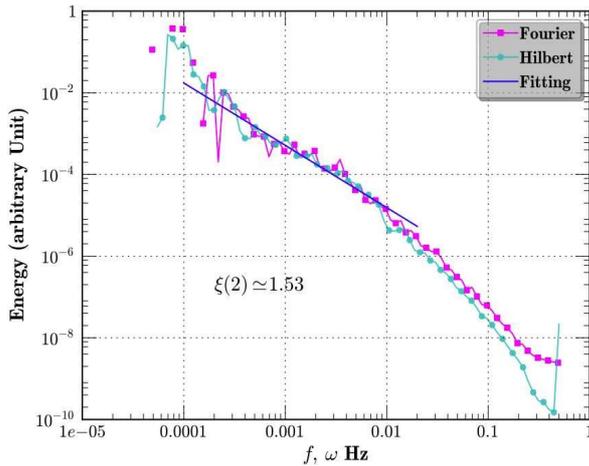


FIG. 5. Spectre d'énergie en Fourier et en espace de Hilbert des données d'irradiance.

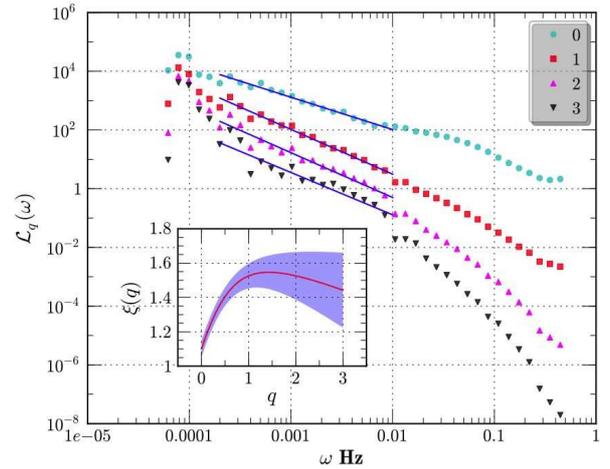


FIG. 6. Invariance d'échelle des différents moments estimés en espace de Hilbert et en insert, la fonction d'invariance d'échelle $\zeta(q)$ non linéaire.

4 Conclusion

Cette étude a rappelé ici la méthode EMD-HHT, et la généralisation que nous avons récemment proposée pour étudier dans l'espace de Hilbert les séries temporelles intermittentes et invariantes d'échelle (multifractales). Nous avons illustré la méthode à l'aide de données de turbulence, et des données d'irradiance. Cette nouvelle méthode pour extraire les exposants multifractals pour caractériser l'intermittence de séries temporelles, hérite des propriétés de la méthode EMD-HHT : analyse en temps-fréquence, estimation de la fréquence instantanée et de l'amplitude instantanée, caractérisations dans l'espace de Hilbert, méthode adaptative, sans a priori pour l'analyse, permettant d'être utilisée pour des séries non linéaires et non stationnaires.

Remerciements

Ce travail a été soutenu financièrement par la *National Natural Science Foundation of China* (programmes N^{os} 10772110 et 11072139) et le *Shanghai Program for Innovative Research Team in Universities*. Y. H. a été financé par une bourse de doctorat en cotutelle en alternance du Ministère Français des Affaires Etrangères et par l'Université de Lille 1. Le code EMD en MATLAB utilisé ici a été écrit par Dr Gabriel Rilling et Pr. Patrick Flandrin du laboratoire de Physique, CNRS & ENS Lyon, et est disponible sur le site <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>. Les données de turbulence ont été mesurées dans la soufflerie Corrsin de la *Johns Hopkins University* et peuvent être téléchargées sur la page de C. Meneveau : <http://www.me.jhu.edu/meneveau/datasets.html>.

Références

1. N. E. HUANG, Z. SHEN, S. R. LONG, M. C. WU, H. H. SHIH, Q. ZHENG, N.-C. YEN, C. C. TUNG & H. H. LIU, The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **454**, 903–995 (1998).
2. N. E. HUANG, Z. SEN & S. R. LONG, A new view of nonlinear water waves : The Hilbert spectrum. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **31**, 417–457 (1999).
3. P. FLANDRIN, G. RILLING & P. GONÇALVÈS, Empirical mode decomposition as a filter bank, *IEEE Signal Processing Letters*, **11**, 112–114 (2004).
4. Z. WU & N. E. HUANG, A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method. *Proceedings of the Royal Society of London A*, **460**, 1597–1611 (2004).
5. Y. X. HUANG, F. G. SCHMITT, Z. M. LU, & Y. L. LIU, An amplitude-frequency study of turbulent scaling intermittency using Hilbert spectral analysis, *Europhysics Letters*, **84**, 40010 (2008).
6. Y. X. HUANG, F. G. SCHMITT, Z. M. LU, & Y. L. LIU, Analyse de l'invariance d'échelle de séries temporelles par la décomposition modale empirique et l'analyse spectrale de Hilbert, *Traitement du Signal*, **25**, 481–492 (2008).
7. Y. X. HUANG, F. G. SCHMITT, Z. M. LU, & Y. L. LIU, Autocorrelation function of velocity increments time series in fully developed turbulence, *Europhysics Letters*, **84**, 40010 (2009).
8. Y. X. HUANG, F. G. SCHMITT, Z. M. LU, P. FOUGAIROLLES, Y. GAGNE & Y. L. LIU, Second order structure functions in fully developed turbulence, *Physical Review E*, **82**, 026319 (2010).
9. F. G. SCHMITT, Y. X. HUANG, Z. M. LU, Y. L. LIU & N. FERNANDEZ, Analysis of turbulent fluctuations and their intermittency properties in the surf zone using empirical mode decomposition, *Journal of Marine Systems*, **77**, 473–481 (2009).
10. Y. X. HUANG, F. G. SCHMITT, Z. M. LU & Y. L. LIU, Analysis of daily river flow fluctuations using empirical mode decomposition and arbitrary order Hilbert spectral analysis, *Journal of Hydrology*, **373**, 103–111 (2009).
11. P. FLANDRIN, & P. GONÇALVÈS, Empirical mode decompositions as data-driven wavelet-like expansions. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, **2**, 477–496 (2004).
12. S. R. LONG, N. E. HUANG & C. C. TUNG, The Hilbert techniques : an alternate approach for non-steady time series analysis, *IEEE Geoscience and Remote Sensing Society Letters*, **3**, 6–11 (1995).
13. H. S. U. K. KANG, S. CHESTER & C. MENEVEAU, Decaying turbulence in an active-grid-generated flow and comparisons with large-eddy simulation, *Journal of Fluid Mechanics*, **480**, 129–160 (2003).
14. U. FRISCH, *Turbulence : the legacy of AN Kolmogorov*, Cambridge University Press, (1995).
15. D. SCHERTZER, S. LOVEJOY, F. G. SCHMITT, Y. CHIGIRINSKAYA & D. MARSAN, Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency, *Fractals*, **5**, 427–471 (1997).
16. T. SOUBDHAN, R. EMILION & R. CALIF, Classification of daily solar radiation distributions using a mixture of Dirichlet distributions, *Solar Energy*, **83**, 1056–1063 (2009).