

# Vers une topologie du chaos toroïdal tridimensionnel

Martin Rosalie & Christophe Letellier

CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France  
 Martin.Rosalie@coria.fr

**Résumé.** Un attracteur chaotique toroïdal plongé dans un espace tridimensionnel est étudié. Après avoir transformé le système original pourvu d'une symétrie de rotation en un système *image* sans symétrie, une partition du tore est proposée en tenant compte de l'orientation des structures d'une application de  $n^{\text{ème}}$  retour ( $n$  étant le nombre de plis observés sur la surface du tore).

**Abstract.** A toroidal chaotic attractor embedded in a tridimensional space is investigated. Once the original system with a rotation symmetry is transformed in an *image* system without symmetry, a partition of the tore is proposed using the orientation of the structures of a  $n$ th return map ( $n$  being the number of folds observed on the toroidal surface).

## 1 Introduction

La topologie du chaos toroïdal n'a été que peu abordée, ne serait-ce que parce que la notion de partition — une étape qui simplifie toujours la description de la population d'orbites périodiques instables — est des plus délicate dans ce cas. De plus, l'analyse topologique n'est réellement efficace que dans des espaces de dimension trois, espaces dans lesquels peu d'exemples de chaos toroïdaux sont connus [1,2]. Une première étude du système de Li a été réalisée en tenant compte des propriétés de symétrie [3] : une intersection entre l'axe de symétrie et l'image de l'attracteur — représentation sans symétrie [4] — conduit à un tore de genre trois non trivial dans la mesure où il y a une intersection entre deux des « trous » du tore.

Nous proposons ici l'étape suivante qui consiste en une première étude des séquences de bifurcations présentes dans le système de Li lorsque l'un des paramètres est varié. Typiquement, deux familles de cascades de doublements de période sont obtenues : l'une fait suite à une bifurcation nœud-col induisant des orbites asymétriques, et l'autre succède à une bifurcation fourche qui rompt la symétrie du cycle limite qui donne la périodicité à la fenêtre étudiée. L'orientation des applications de  $n^{\text{ème}}$  retour à une section de Poincaré ( $n$  étant le nombre de plis observés sur la surface) permet de dresser une première cartographie des repliements présents sur l'attracteur.

## 2 Système de Li

Parmi les rares systèmes conduisant à du chaos toroïdal plongé dans un espace tridimensionnel, le système de Li [2]

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + dxz \\ \dot{y} = kx + fy - xz \\ \dot{z} = cz + xy - ex^2 \end{cases} \quad (1)$$

se présente comme un système de Lorenz auquel deux nonlinéarités ont été ajoutées, à savoir le terme  $dxz$  sur la première équation et le terme  $-ex^2$  sur la dernière. Sur un grand domaine de l'espace des paramètres, le système de Li présente des solutions qui se structurent autour d'un tore de genre 3 non trivial [3]. En effet, il a été montré que le tore présentait la particularité d'avoir un trou en forme de « croix », autrement dit, deux trous qui se coupent. Cette structure toroïdale particulière résulte de

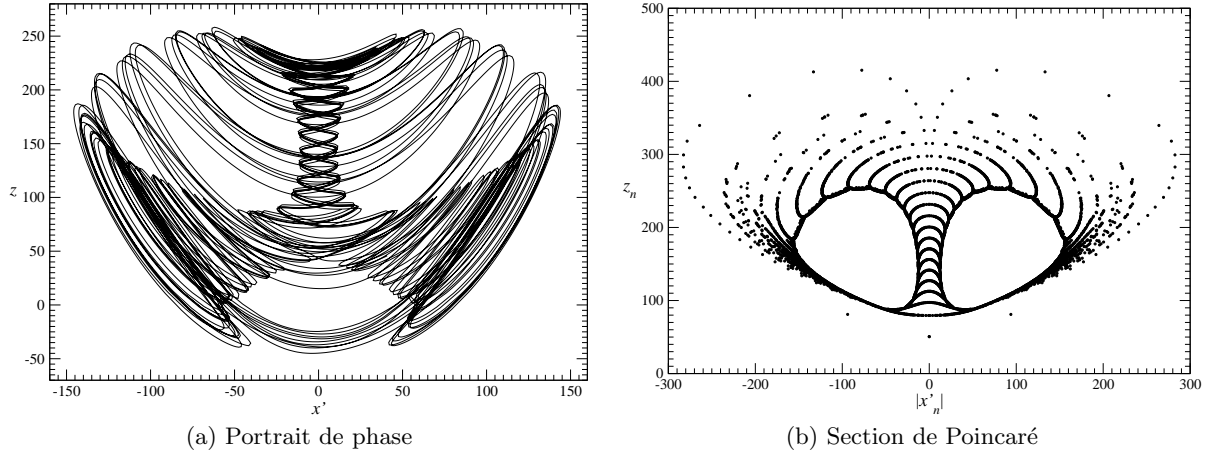


FIG. 1. Section de Poincaré du système (1). Paramètres :  $a = 41$ ,  $c = 11/6$ ,  $d = 0.16$ ,  $e = 0.65$ ,  $k = 55$  et  $f = 20$

l'intersection entre l'axe de rotation  $Oz$  du système de Li avec le tore de genre 1 du système image [5]. Un attracteur chaotique possédant cette structure est représenté Fig. 1a.

De manière à utiliser les propriétés de la symétrie de rotation  $\mathcal{R}_z(\pi)$  de  $\pi$  autour de l'axe  $Oz$ , nous avons utilisé le changement de variables

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases} \quad (2)$$

où  $\varphi = \tan^{-1}(f/a)$  [3]. Une section de Poincaré définie par

$$\mathcal{P} \equiv \{(x'_n, y'_n) \in \mathbb{R}^2 \mid y'_n = 0, z_n > 50\} \quad (3)$$

révèle de nombreux plis — plus d'une vingtaine — apparaissant sur le tore : ces plis sont caractéristiques de la nature chaotique de l'attracteur, en accord avec le scénario de Curry & Yorke [6]. Ces plis sont à extrema différentiables et conduisent à des cascades de doubléments de période comme le montre un diagramme de bifurcations en fonction du paramètre  $a$  (Fig. 2). Les diagrammes de bifurcations sur des structures toroïdales ne révèlent souvent aucune structure particulière hormis en de très rares fenêtres périodiques car la courbe fermée typiquement observée comme section de Poincaré d'un tore est projetée sur un seul axe : en conséquence, la variété sur laquelle se développe l'attracteur est écrasée sur elle-même, brouillant les éventuelles structures liées à la manière dont la variété est visitée. Une section de Poincaré schématique du tore de genre trois que nous étudions se présente sous la forme de deux courbes fermées — l'une symétrique de l'autre par la symétrie  $\mathcal{R}_z(\pi)$  — sur laquelle se greffent des plis. L'une de ses courbes fermées (disons telle que  $x'_n > 0$ ) peut être considérée comme un cercle de rayon moyen  $\rho$  dépendant linéairement du paramètre  $a$ . De manière à nous affranchir de cette dépendance et à éviter l'écrasement de la variété sur elle-même, nous utilisons uniquement la dépendance angulaire

$$\theta_n = 2 \arctan \left( \frac{|x'_n| - 3a + 27}{z_n - 9a + 191 + \sqrt{(|x'_n| - 3a + 27)^2 + (z_n - 9a + 191)^2}} \right) \quad (-\pi \leq \theta_n \leq \pi) \quad (4)$$

des intersections avec la section de Poincaré. Le diagramme de bifurcations est donc obtenu en traçant  $\theta_n$  en fonction du paramètre  $a$  (Fig. 2).

Le diagramme révèle de nombreuses fenêtres périodiques (de période au moins égale à 21), chacune conduisant à une cascade de doubléments de période. Selon la parité de l'orbite, l'orbite est symétrique (orbite impaire) ou non [7,8]. Les fenêtres associées à des orbites impaires débutent par des bifurcations fourches qui brisent la symétrie avant qu'une cascade de doubléments de période ne puissent se développer

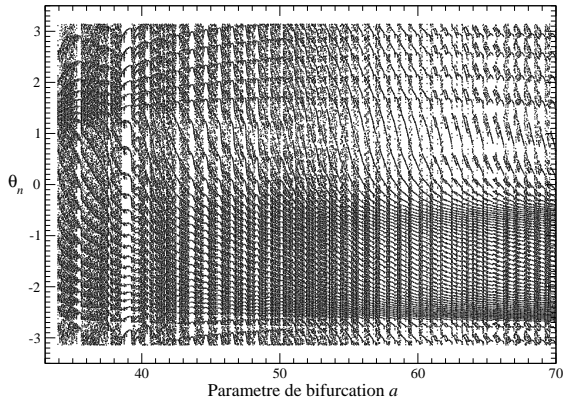


FIG. 2. Diagramme de bifurcations du système de Li en fonction du paramètre  $a$ . La section de Poincaré est dépliée grâce à l'angle  $\theta_n$ .

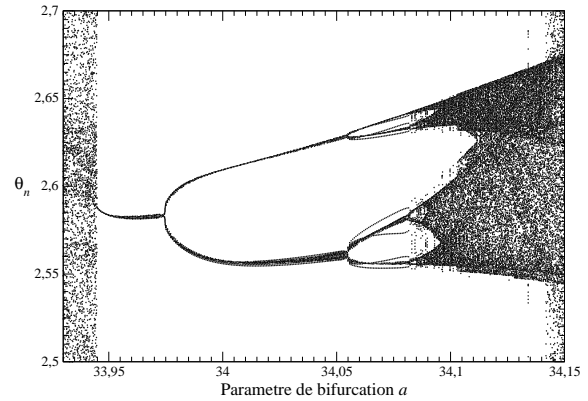


FIG. 3. Agrandissement d'une fenêtre du diagramme de bifurcations (Fig. 2) au voisinage d'un cycle limite de période 24. Autres paramètres identiques à ceux de la Fig. 1.

[9]. Un agrandissement de l'une de ces cascades de doublements de période est représentée Fig. 3. Les premières bifurcations y sont clairement observées. Malheureusement, le pli associé à l'intervalle angulaire sélectionné écrase la variété sur elle-même, ce qui induit des dédoublements des branches du diagramme de bifurcations. Ainsi, malgré le dépliement de la structure toroïdale grâce à l'angle  $\theta_n$ , il reste des artéfacts de « mesures » qui brouillent l'analyse fine de la dynamique.

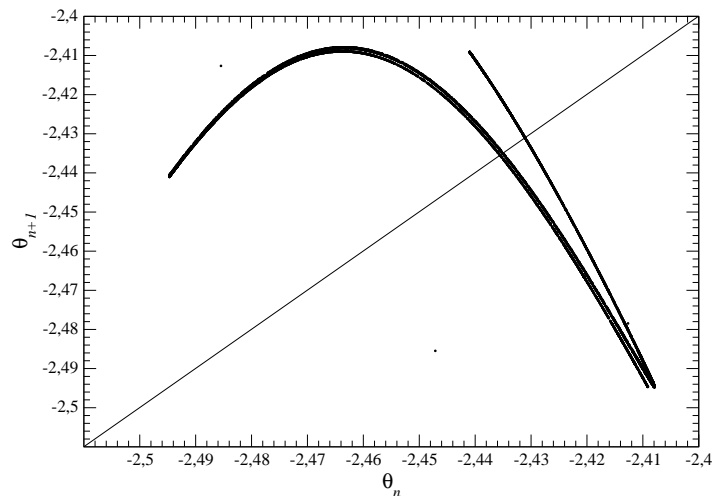


FIG. 4. Application de premier retour à une section de Poincaré de l'une des 21 bandes de l'attracteur. Valeurs des paramètres :  $a = 34, 108$ , les autres étant identiques à celles de la Fig. 1.

Une application de premier retour à une section de Poincaré de l'une des 21 bandes est calculée. Comme attendu après une cascade de doublements de période, l'application de premier retour se présente — en première approximation — comme une application unimodale à extremum différentiable (Fig. 4). Notons toutefois une branche décroissante « double », un phénomène observé dans de nombreux autres systèmes. Dans ce cas, la crise survient toujours lorsque cette branche « aditionnelle » atteint le niveau de l'extremum, ce qui est bien le cas ici. Nous pouvons noter par ailleurs une structure légèrement feuilletée résultant du pli présent sur cet intervalle angulaire. Ce sont de nouvelles complications que nous devons résoudre avant de parvenir à une caractérisation topologique complète de l'attracteur.

### 3 Topologie du système image

#### 3.1 Le système image

Afin de nous affranchir de la structure complexe présentée par le tore de genre 3 dans l'espace des phases  $\mathbb{R}^3(x', y', z)$ , nous choisissons d'évacuer la symétrie par le changement de coordonnées [4]

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re}(x' + iy')^2 = x'^2 + y'^2 \\ v = \operatorname{Im}(x' + iy')^2 = 2x'y' \\ w = z. \end{cases} \quad (5)$$

Ce système ne comporte plus aucune trace de la symétrie de rotation  $\mathcal{R}_z(\pi)$  : il est appelé système *image*. L'attracteur se structure maintenant sur un tore de genre 1 (Fig. 5) : l'axe  $Ow$  coupe l'attracteur, ce qui implique le tore de genre 3 non trivial obtenu dans l'espace  $\mathbb{R}^3(x', y', z)$  [5,3].

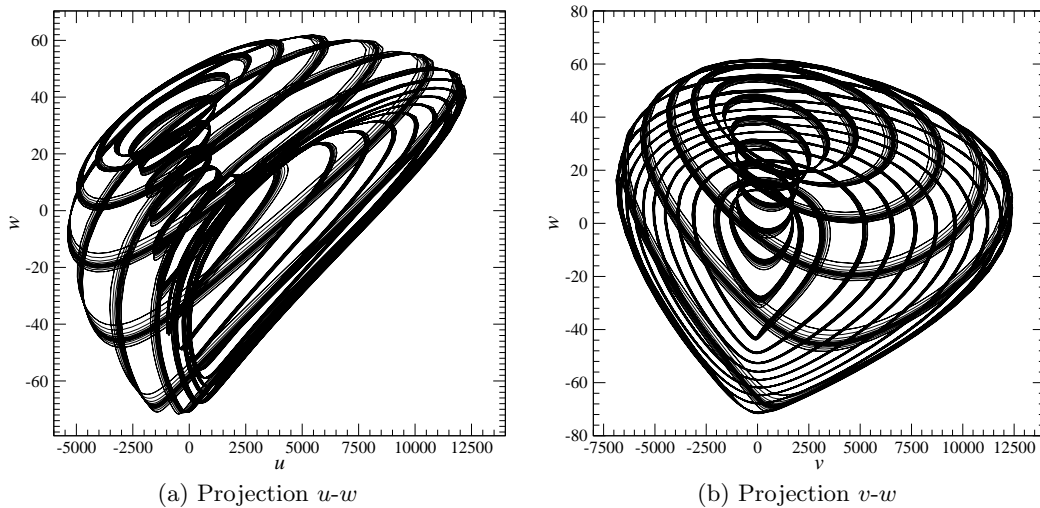


FIG. 5. Projections du portrait de phase du système image dans l'espace  $\mathbb{R}^3(u, v, w)$ . Valeurs des paramètres identiques à celles de la Fig. 4.

#### 3.2 Principe de l'analyse sur le système de Rössler

Avant de poursuivre l'analyse du système image, nous exposons ici le principe de notre analyse sur le système de Rössler [10]

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (6)$$

pour des valeurs de paramètres telles que l'attracteur corresponde à un attracteur à trois bandes chaotiques (Fig. 6a). Ces valeurs sont choisies dans la fenêtre de période 3 du diagramme de bifurcations, lorsque la dynamique est encore unimodale ( $a < 0.43295$  pour  $b = 2$  et  $c = 4$ , [11]). La valeur de  $a$  est choisie après la cascade de doublements de période et avant la crise qui détruit la nature « à trois bandes » de l'attracteur. Dans ce cas, une application de premier retour à une section de Poincaré locale sur une bande est telle que la branche croissante jouxte la bissectrice.

Lorsque l'application de 5<sup>ème</sup> retour à une section de Poincaré globale est calculée, nous obtenons deux structures unimodales à minimum différentiable et une structure à maximum différentiable (Fig.



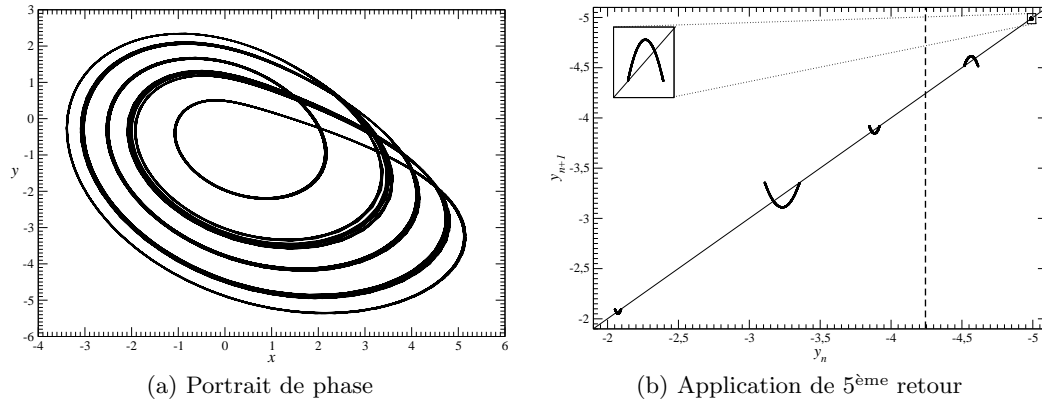


FIG. 6. Attracteur chaotique à cinq bandes solution du système de Rössler. Les valeurs des paramètres sont choisies juste avant la crise :  $a = 0.400628$ ,  $b = 2$  et  $c = 4$ .

6b). L'orbite donnant naissance à la cascade de doublements de période est l'orbite codée par (10110) où 0 est la branche croissante et 1 la branche décroissante [11]. Sa parité est impaire, c'est-à-dire qu'elle s'inscrit sur un espace tangent subissant un nombre impair de demi-tours [9,11], propriété requise pour autoriser la cascade de doublements de période. Chacune des bandes se développent donc respectivement sur des bandes, impaire, paire, impaire, impaire et paire. De ce fait, le nombre de demi-tours diffèrent et, en conséquence, lorsqu'une application de 5<sup>ème</sup> retour est calculée sur une section de Poincaré globale, les structures « en cloche » sont d'orientation inversée selon leur appartenance à une bande paire ou impaire (Fig. 6b). L'idée est alors d'utiliser l'orientation des structures pour établir la partition de l'attracteur puisque la partition se situe nécessairement entre les deux orientations opposées (ligne en pointillés de la Fig. 6b). Plus la fenêtre utilisée est associée à une périodicité élevée, meilleure est la partition.

### 3.3 Application au chaos toroïdal image

La section de Poincaré révèle une structure annulaire en 21 bandes (Fig. 7a), chacune comportant un pli caractéristique de la cascade de doublements de période (Fig. 7b). De ce point de vue, chaque bande, qui fait une révolution sur le tore autour du « trou » central, possède la structure de l'application réalisée sur le système image (Fig. 4). Il est à noter qu'une application de premier retour à une section de Poincaré — locale — sur une bande est équivalente à un agrandissement d'une application de 21<sup>ème</sup> retour sur cette même bande. Les 21 bandes sont numérotées arbitrairement à partir de la première bande traversée lors de notre simulation numérique.

Deux constatations peuvent être faites sur cette section de Poincaré. La première est que l'orientation de la surface du tore par rapport à ce qu'aurait celle d'un tore régulier (sans pli). Dans la partie droite de la section de Poincaré (Fig. 7a), les bandes se redressent progressivement jusqu'à être colinéaires au rayon de la section du tore (bandes 10 et 11). Ensuite, les bandes redeviennent progressivement tangentes à la surface moyenne du tore (ou à peu près perpendiculaires au rayon du tore). Sur cette portion du tore (bandes 10 à 14), la surface du tore présente un pli qui induit un demi-tour sur les bandes. Ainsi, le long de la section du tore, les bandes s'inversent.

Par ailleurs, lorsqu'une application de 21<sup>ème</sup> retour à la section de Poincaré est calculée, les structures associées à chaque bande — représentées isolément Fig. 7b — présentent clairement deux orientations distinctes : la partition passerait ainsi entre les bandes 1 et 2, et les bandes 13 et 14 (lignes en tirets, Fig. 7a). Notons que cette inversion, contrairement à ce qui se passe sur le système de Rössler, se développe progressivement. Elle est pilotée par l'écrasement de la structure autour de l'un des extrema. Puisque l'attracteur se développe sur une structure toroïdale, il est nécessaire que l'inversion survienne deux fois le long de la surface du tore. Cette inversion doit donc se combiner avec la modification de l'orientation des bandes pour obtenir un nombre impair de demi-tours.

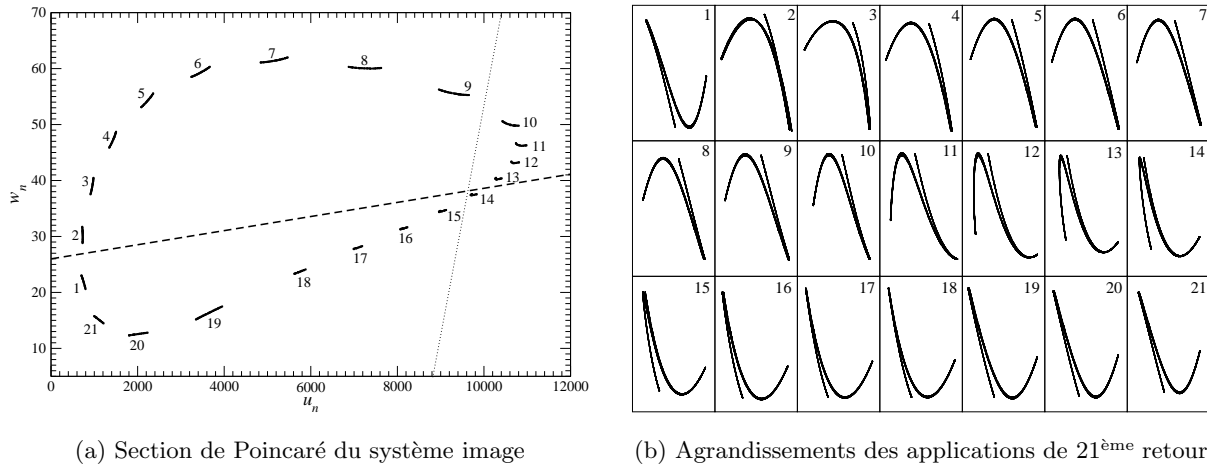


FIG. 7. Partition de la section de Poincaré du système image (a) à partir de l'orientation des applications de premier retour à une section de Poincaré de chacune des 21 bandes. De telles applications peuvent être également obtenues à l'aide d'agrandissement d'une application de 21<sup>ème</sup> retour sur chacune des bandes.

## 4 Conclusion

Nous avons abordé la topologie d'un attracteur chaotique toroïdal solution d'un système tridimensionnel. Ce système possède une symétrie de rotation par  $\pi$  autour de l'axe  $Oz$ . Après avoir évacué la symétrie par un changement de coordonnées permettant d'obtenir une représentation du système image — sans symétrie résiduelle —, nous obtenons un attracteur structuré sur un simple tore de genre 1. La surface de tore présente de nombreux plis pour permettre une dynamique chaotique. Afin d'obtenir une partition du tore — étape importante pour la construction d'une dynamique symbolique — nous avons utilisé l'orientation des structures « en cloche » de l'application de  $n^{\text{ème}}$  retour ( $n$  étant le nombre de plis sur la surface) pour en proposer une. Il nous reste maintenant à l'utiliser pour l'étude de la population d'orbites périodiques.

## Références

1. BO DENG, Constructing homoclinic orbits and chaotic attractors, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **4** (4), 823-841, 1994.
2. D. LI, A three-scroll chaotic attractor, *Physics Letters A*, **372** (4), 387-393, 2008.
3. C. LETELLIER & R. GLIMORE, Poincaré sections for a new three-dimensional toroidal attractor, *Journal of Physics A*, **42**, 015101 (2009).
4. C. LETELLIER & R. GILMORE. Covering dynamical systems : Two-fold covers, *Physical Review E*, **63**, 16206, 2001.
5. C. LETELLIER, R. GILMORE & T. JONES, Peeling bifurcation of toroïdal chaotic attractors, *Physical Review E*, **76**, 066204, 2007.
6. J. CURRY & J. A. YORKE, A transition from Hopf bifurcation to chaos : computer experiments with maps on  $\mathbb{R}^2$ , *Lecture Notes in Mathematics*, **668**, 48-66, 1978.
7. C. LETELLIER, P. DUTERTRE, J. REIZNER & G. GOUESBET, Evolution of multimodal map induced by an equivariant vector field, *Journal of Physics A*, **29**, 5359-5373, 1996.
8. R. GILMORE & C. LETELLIER, Dressed Symbolic Dynamics, *Physical Review E*, **67** (3), 036205, 2003.
9. Y. AIZAWA & T. UEZU, Topological aspects in chaos and in  $2^k$  period-doubling cascade, *Progress in Theoretical Physics*, **67** (3), 982-985, 1982.
10. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398 (1976).
11. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5** (1), 271-282, 1995.