

# Modèle de Landau–Langevin pour la description des bandes laminaires-turbulentes dans l’écoulement de Couette plan

Joran Rolland & Paul Manneville

Laboratoire d’hydrodynamique, École polytechnique, route de Saclay, 91128 Palaiseau  
 joran.rolland@ladhyx.polytechnique.fr

**Résumé.** On présente une étude numérique et une modélisation des bandes alternativement laminaires et turbulentes se manifestant dans l’écoulement de Couette plan lors de la transition à la turbulence. L’écoulement laminaire est globalement stable jusqu’à un premier nombre de Reynolds  $R_g$ , au dessus duquel la turbulence se maintient sous forme de bandes obliques de grande longueur d’onde. La modulation disparaît au delà d’un deuxième nombre de Reynolds  $R_t$  ; le motif est desorganisé pour  $R$  proche de  $R_t$ . Un paramètre d’ordre est défini pour étudier le motif, et on montre que son comportement peut être modélisé à l’aide d’une équation de Landau avec un bruit blanc additif. En particulier, les fluctuations d’orientation se manifestant près de  $R_t$  se comprennent à l’aide du processus à saut tiré du modèle.

**Abstract.** This paper describes a numerical study and a modelling of the alternately laminar and turbulent oblique bands appearing in transitional plane Couette flow. The laminar flow is globally stable up to a Reynolds number  $R_g$ , above which turbulence is self-sustained and displays a long wavelength oblique modulation. The modulation disappears when  $R$  reaches  $R_t$ . For  $R$  close to  $R_t$  the pattern loses organisation. An order parameter can be defined to measure the modulation, and we show that its behaviour can be modeled by a Landau equation with additive white noise. The orientation fluctuations seen for  $R$  close to  $R_t$  can be understood using the corresponding jump process.

## 1 Introduction

Les écoulements cisailés peuvent maintenir de la turbulence bien en deçà du seuil pour lequel l’écoulement de base est linéairement instable ; en particulier, l’écoulement de Couette plan, l’écoulement entre deux plaques séparées d’une distance  $2h$  en mouvement à la vitesse  $\pm U$ , est linéairement stable pour tout  $R = hU/\nu$ , bien que la turbulence puisse se maintenir sous la forme de bandes obliques de grande longueur d’onde<sup>1</sup> à partir de  $R_g = 325$  et jusqu’à  $R_t = 410$  valeur au delà de laquelle la turbulence apparait homogène [1]. Prigent *et al.* ont montré que ces bandes sont similaires à la spirale turbulente de l’écoulement de Taylor–Couette contra-rotatif, mais n’ont pu faire qu’une étude qualitative du cas de Couette plan. Le motif a pu être reproduit numériquement, par exemple par Barkley *et al.*[2] qui ont choisi un domaine périodique incliné, adapté à l’obliquité de la bande, qui permet d’utiliser des domaines de taille relativement petite, mais contraint l’orientation. Cependant, aucune approche de type “formation de motif” n’avait été menée à terme jusqu’à présent.

On utilise une procédure de modélisation basée sur des simulations numériques directes (DNS) des équations de Navier–Stokes, pour laquelle on opère une baisse contrôlée de la résolution, en particulier dans la direction orthogonale aux parois [3]. Ceci permet un échantillonnage avec des temps et des moyens de calcul raisonnables. En particulier, on montre que le prix à payer est un abaissement des seuils  $R_g$  et  $R_t$  (respectivement 275 et 350 pour une résolution  $N_y = 15$ ).

## 2 Motif à l’équilibre

On étudie des domaines périodiques de tailles  $L_x \times L_z$ , en unité de  $h$ , choisies en fonction des longueurs d’onde du motif déterminées expérimentalements,  $\lambda_x = 110$  et  $45 \leq \lambda_z \leq 85$  [1].

1. Par grande longueur d’onde, il faut comprendre grande par rapport à la longueur d’onde transverse des structures cohérentes qui composent la région turbulente, de l’ordre de  $h$

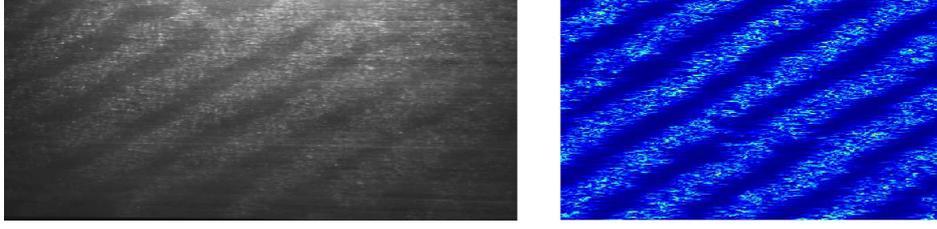


FIG. 1. Photographie du dispositif expérimental (A. Prigent, [1] gauche)  $R = 358$ , exemple de bandes dans un grand domaine (niveaux de couleur de  $\mathbf{u}^2$ , perturbation à l'écoulement de base, droite,  $L_x \times L_z = 432 \times 256$ ,  $R = 290$ ).

En partant du mode de Fourier fondamental du motif, repéré par  $n_x$  et  $n_z$ , on peut définir un paramètre d'ordre instantané [4] :

$$m_{\pm}(t) = \left( \int_{y=-1}^1 dy |\hat{u}_x|^2(n_x, y, \pm n_z, t) \right)^{0.5},$$

qu'on ne repère dans la suite que par le signe de  $n_z$ , le nombre de bandes présente dans le domaine ne variant pas dans la grande majorité des cas. Le paramètre d'ordre  $m_{\pm}$  quantifie la modulation de la turbulence dans l'écoulement, le choix du fondamental est suffisant, la modulation étant quasi sinusoïdale [2,4]. La position du motif dans l'écoulement est déterminée par la phase  $\phi$  de  $\hat{u}_x$ , prise à n'importe quelle ordonnée  $y$ , le déphasage entre les différentes ordonnées étant constant. Le paramètre d'ordre  $m_{\pm}$  étant une quantité fluctuant dans le temps, on échantillonne sa fonction de densité de probabilité (PDF). À partir de la PDF (Fig. 2a), on peut déterminer la moyenne  $M$  de  $m_{\pm}$  pour chaque valeur des paramètres de contrôle. Le décalage entre le maximum de la PDF et 0 est typique d'une variable aléatoire complexe, qui a une probabilité nulle de s'annuler, et dont la phase est, en conséquence, toujours bien définie. Pour suivre la dynamique de la moyenne et des fluctuations de la phase<sup>2</sup>, on découpe une longue série temporelle en  $N$  échantillons de durée  $T$  sur lesquels on réalise une moyenne d'ensemble :

$$\langle \phi \rangle(t) = \sum_{j=0}^N \phi(t + jT) - \phi(jT),$$

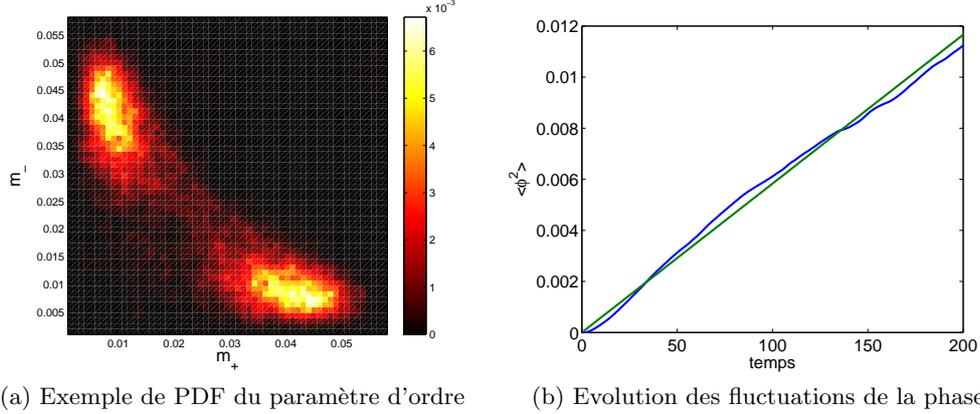
$$\langle (\phi - \langle \phi \rangle)^2 \rangle(t) = \sum_{i=0}^N (\phi(t + iT) - \phi(iT))^2 - \langle \phi \rangle^2(t).$$

On remarque que la moyenne de la phase est sensiblement nulle, tandis que ses fluctuations croissent linéairement avec le temps (Fig. 2b), comportement typique d'une marche aléatoire. Un coefficient de diffusion est déterminé à partir de la pente de  $\langle \phi^2 \rangle(t)$ ; l'opération ne peut être réalisée pour toutes les valeurs des paramètres de contrôle considérées en raison des durées des séries temporelles nécessaires.

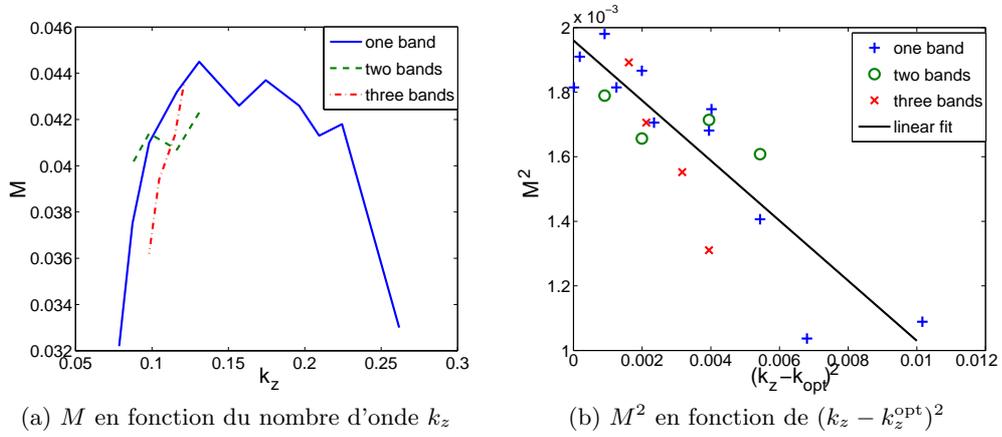
Nous avons réalisé une étude paramétrique, en fonction des nombres d'onde  $k_{x,z} = 2\pi n_{x,z}/L_{x,z}$  en variant la taille du domaine périodique,  $L_x$  et  $L_z$ . On étudie la dépendance en  $L_x$  (resp.  $L_z$ ) à  $L_z$  (resp.  $L_x$ ) et  $R$  constants (ici  $R = 315$  pour  $L_z$  et  $R = 290, 315$  et  $330$  pour  $L_x$ ). On observe une à trois bandes en faisant varier  $L_z$  de 24 à 192 et une à deux bandes en faisant varier  $L_x$  de 55 à 170. La compétition entre une et deux bandes est décrite dans la suite (§ 3). dans chaque cas, on note l'existence d'un nombre d'onde optimal  $k_{x,z}^{\text{opt}}$  pour lequel  $M$  est maximum, de plus la dépendance de  $M^2$  en  $(k_{x,z} - k_{x,z}^{\text{opt}})^2$  est en bonne approximation linéaire pour les plus grandes valeurs de  $R$  (315 et 330). Plus loin du seuil ( $R = 290$ ) on s'écarte de ce comportement; on note de plus un décalage du nombre d'onde optimal.

On étudie la dépendance en nombre de Reynolds  $R$  pour deux tailles fixes  $L_x \times L_z = 110 \times 32$  et  $128 \times 64$ . Comme noté précédemment, l'augmentation du nombre de Reynolds provoque une réduction

2. On ne s'intéresse qu'à un motif développé dont l'orientation ne fluctue pas, on peut abandonner les indices  $\pm$



(a) Exemple de PDF du paramètre d'ordre (b) Evolution des fluctuations de la phase  
 FIG. 2. Fonction de densité de probabilité du paramètre d'ordre et évolution des fluctuations de la phase.



(a)  $M$  en fonction du nombre d'onde  $k_z$  (b)  $M^2$  en fonction de  $(k_z - k_z^{\text{opt}})^2$   
 FIG. 3. Paramètres d'ordre.

de la modulation et une augmentation de la fraction turbulente jusqu'à la disparition du motif [1,2,4]. Près de  $R_t$  la compétition entre orientations se manifeste (les temps de résidence deviennent observables, § 3), de plus, très près du seuil, la modulation peut disparaître de manière transitoire. Nous avons étudié quantitativement l'évolution de la modulation à l'aide du paramètre d'ordre moyen, son écart type n'apportant qu'une information quantitative. Nous avons identifié trois plages de nombre de Reynolds : la première, pour les plus faibles valeurs de  $R$  voit  $M(R_t - R)$  saturer, son comportement est fortement non-linéaire (par exemple dans sa dépendance en  $k_x - k_x^{\text{opt}}$  [4]). La seconde, à nombres de Reynolds intermédiaire, pour laquelle  $M^2$  dépend linéairement de l'écart au seuil  $R_t - R$ . La troisième, pour les plus grandes valeurs de  $R$  dans laquelle se manifeste les fluctuations d'orientation et la réapparition de la turbulence uniforme.

### 3 Fluctuations d'orientation et de longueur d'onde

Pour des valeurs particulières des paramètres de contrôle, le système va subir des changements brutaux d'orientation et dans certains cas de longueur d'onde. Ces changements peuvent être caractérisés par le temps de résidence, passé dans chaque état. On détermine le temps de résidence dans un état donné (orientation et longueur d'onde) à l'aide des séries temporelles de  $m_{\pm}$ , éventuellement de  $m_{\pm 1,2}$  s'il y a compétition entre orientations et longueurs d'onde [4]. Une procédure de seuillage permet déterminer le temps de résidence  $T$ , et on peut échantillonner des PDF cumulées  $1 - Q$  (Fig. 5). La dépendance linéaire

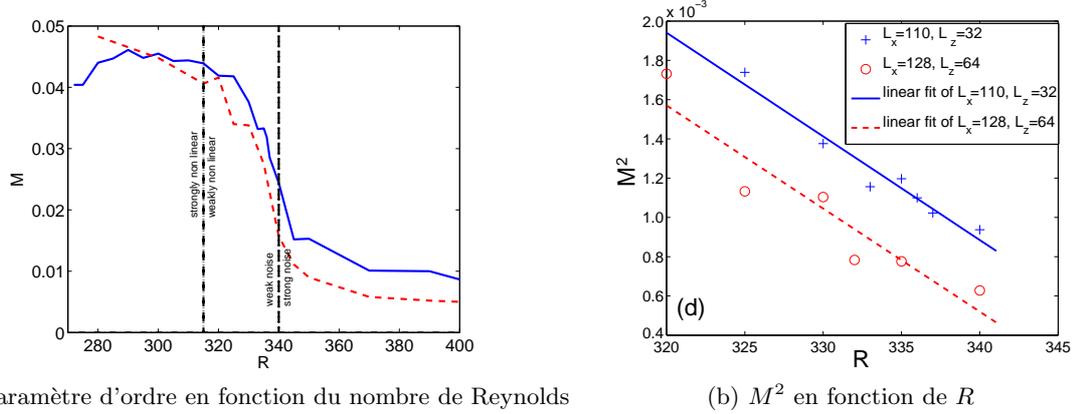


FIG. 4. Paramètre d'ordre en fonction du nombre de Reynolds pour les deux tailles considérées, les lignes en pointillés indiquent approximativement les limites entre les trois régimes (a),  $M^2$  en fonction de  $R$  (b).

en  $T$  est typique d'une loi de type Poisson, et le temps de résidence moyen peut alors être déterminé [5]. Nous l'avons spécifiquement étudiée pour la compétition entre orientation et nombre d'onde pour une seule valeur de  $R$ , et les fluctuations d'orientation pour  $R$  proche de  $R_t$ . Dans le second cas, on réalise une étude systématique de la dépendance en  $R$  (Fig. 5). Le temps de résidence croît exponentiellement avec  $R$ . L'échantillonnage nécessaire pour une estimation précise devient extrêmement long pour les valeurs de  $R$  les plus basses.

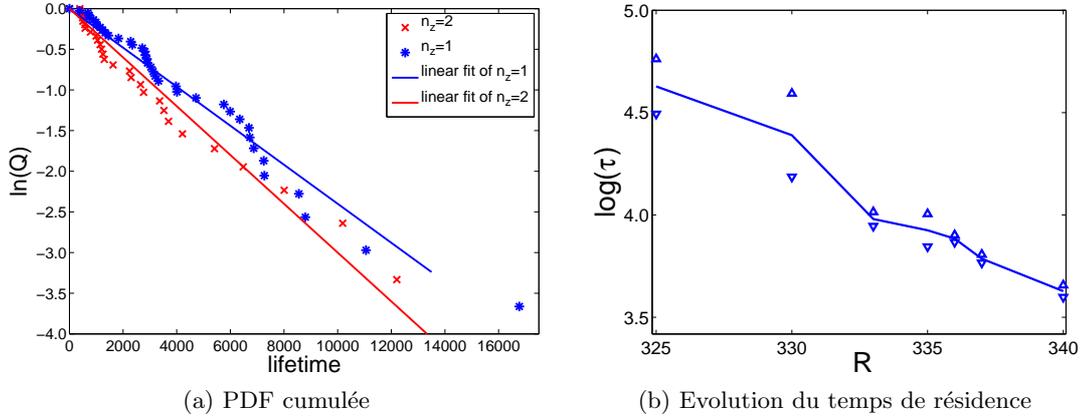


FIG. 5. PDF cumulée de temps de résidence pour une taille donnée (a) Évolution du temps de résidence moyen en fonction du nombre de Reynolds (b).

## 4 Modèle de Landau–Langevin

On modélise le système avec pour contrainte la simplicité du modèle ainsi que la représentation de l'ensemble des caractéristiques observées. On suit une approche typique d'une étude de formation de motif [2,4,5]. Le champ de vitesse est exprimé à l'aide de deux paramètres d'ordre  $A_{\pm}$  :

$$u_x = A_+(\tilde{x}, y, \tilde{z}, \tilde{t}) \exp(i(k_x x + k_z z)) + A_-(\tilde{x}, y, \tilde{z}, \tilde{t}) \exp(i(k_x x - k_z z)) + c.c.,$$

les variables  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{z}$  et  $\tilde{t}$  étant “lentes”. Pour un système confiné, et en se basant sur les symétries du système on peut écrire une équation de Landau pour  $A_{\pm}$  à l’ordre le plus bas, valide près du seuil  $R_t$  :

$$\tau_0 \partial_z A_{\pm} = \left[ \underbrace{\left(1 - R/R_t - \xi_x^2 \delta k_x^2 - \zeta_z^2 \delta k_z^2\right)}_{\tilde{\epsilon}} - g_1 |A_{\pm}|^2 - g_2 |A_{\mp}|^2 \right] A_{\pm} + \zeta_{\pm}(t).$$

Le temps  $\tau_0$  donne l’échelle de temps caractéristique,  $\delta k_{x,z}$  correspond à l’écart au vecteur d’onde optimal, les longueurs de corrélation  $\xi_{x,z}$  contrôlent la sélection du nombre d’onde, le paramètre  $g_1$  contrôle l’amplitude à saturation, et  $g_2$  le couplage entre les deux orientations. On décrit un motif oblique pour  $g_2/g_1 > 1$ . Le bruit additif  $\zeta_{\pm}$  est supposé gaussien et ses fluctuations données par :  $\langle \zeta_{\pm}(t) \zeta_{\pm}(t') \rangle = \alpha^2 \delta(t - t')$ . En posant le potentiel :

$$V = -\frac{1}{2} \tilde{\epsilon} (|A_+|^2 + |A_-|^2) + \frac{1}{4} g_1 (|A_+|^4 + |A_-|^4) + g_2 \frac{1}{2} |A_+|^2 |A_-|^2,$$

on peut réécrire la dynamique (en notant les parties réelles et imaginaires par r et i) :

$$\tau_0 \partial_t A_{\pm}^{\text{r,i}} = \frac{\partial V}{\partial A_{\pm}^{\text{r,i}}} + \zeta_{\pm}(t),$$

et la PDF :

$$\rho(|A_+|, |A_-|) = |A_+| |A_-| \exp(-2V(A_+, A_-)/\alpha^2) / Z,$$

à comparer au résultat de l’expérience numérique sur la Fig. 2.

Dans une approche de type champ moyen, on peut déterminer l’amplitude du mode dominant, au premier ordre non nul en  $\alpha^2$ , pour  $\tilde{\epsilon} > 0$  [4] :

$$A_{\pm} = \left( \frac{1 - R/R_t - \xi_x^2 \delta k_x^2 - \zeta_z^2 \delta k_z^2}{g_1} \right) + o(1), \quad A_{\mp} = \frac{\alpha}{\sqrt{2\tilde{\epsilon}(g_2 - g_1)/g_2}} + o(\alpha),$$

qui met en évidence la dépendance attendue dans la limite faiblement non linéaire en l’écart au seuil (linéaire) et en l’écart au nombre d’onde optimal (quadratique), ainsi que la présence du mode non développé autour d’une valeur non nulle ; et pour  $R > R_t$ ,  $\tilde{\epsilon} < 0$  :

$$A_{\pm} \propto \frac{\alpha}{|\tilde{\epsilon}|} + o(\alpha).$$

On peut écrire l’équation d’évolution de la phase du mode dominant, qui passe d’une variable neutre dans un cas déterministe à une marche aléatoire :

$$\tau_0 \partial_t \phi = \frac{\zeta}{m(t)},$$

d’où l’on tire ses fluctuations :

$$\langle \phi^2 \rangle(t) = \frac{t \alpha^2}{\langle m \rangle + \sigma_m^2}.$$

Ces expressions sont validées par le calcul de la PDF et la simulation du modèle de Landau–Langevin, et permettent une confrontation quantitative aux données des DNS.

En considérant le processus de saut entre les deux minima du potentiel, on peut déterminer le temps de premier passage d’un puit à l’autre du potentiel [5] :

$$\tau = \tau_0 \frac{2\pi\sqrt{2}}{\tilde{\epsilon}} \frac{\sqrt{g_1(g_1 + g_2)}}{g_2 - g_1} \exp\left(\frac{\tilde{\epsilon}^2}{2\alpha^2 g_1} \frac{g_2 - g_1}{g_2 + g_1}\right),$$

expression asymptotique, valable pour des valeurs suffisamment importantes de  $\tilde{\epsilon}$ . Une intégration numérique du modèle, et une détermination des temps de résidence avec la procédure déjà utilisée pour le traitement de la DNS, permet de mettre en évidence les deux limites : pour des petites valeurs de  $\tilde{\epsilon}$ , l’expression asymptotique n’est plus valable, pour les plus grandes valeurs de  $\tilde{\epsilon}$ , l’échantillonnage de temps de résidence devient insuffisant. Le comportement qualitatif du modèle et des DNS est cependant identique en tous points [5].

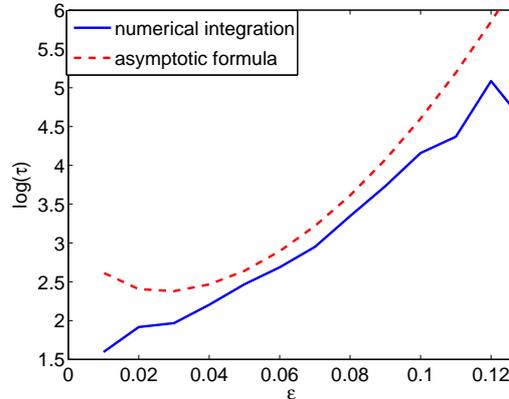


FIG. 6. Évolution du temps de résidence moyen dans le modèle en fonction de l'écart au seuil.

## 5 Discussion

La confrontation des données des DNS au modèle montre qu'il est tout à fait adapté dans la limite faiblement non linéaire et permet une estimation des coefficients qui se comparent favorablement aux valeurs obtenues par Prigent *et al.* pour le système similaire de Taylor–Couette. Une confrontation directe des temps de résidence provenant de la DNS avec l'expression asymptotique est plus difficile, la plage de  $R$  pour laquelle l'estimation de ces temps est possible correspond à des valeurs pour lesquelles l'expression asymptotique n'est plus valable. Une discussion des fluctuations d'orientation et de longueur d'onde est possible dans le même cadre, en ajoutant un second couple de paramètres d'ordre complexes, mais le modèle devient moins lisible du fait de l'augmentation du nombre de paramètres. Les systèmes étendus peuvent être décrits par un modèle de Ginzburg–Landau–Langevin. La disparition transitoire de la modulation est elle à comparer au régime intermittent décrit par Barkley *et al.*. De manière plus générale, le système permet d'étudier la formation d'un motif soumis à un bruit, de manière plus accessible que dans le cas d'un motif soumis au bruit thermique.

La procédure de simulation à basse résolution apparaît bien adaptée pour l'étude semi quantitative du motif à très grand rapport d'aspect, et peut être étendue aux autres écoulements cisailés « bidimensionnels » (Taylor–Couette, Poiseuille plan). La comparaison à l'écoulement dans un tube cylindrique est moins claire, du fait de son caractère « unidimensionnel ». Les mécanismes de formation des alternances laminaire-turbulent restent cependant pour l'instant largement inconnus.

## Références

1. A. PRIGENT, *La spirale turbulente : motif de grande longueur d'onde dans les écoulements cisailés turbulents*, Thèse de doctorat (2001). — A. PRIGENT, G. GRÉGOIRE, H. CHATÉ & O. DAUCHOT, Long-wavelength modulation of turbulent shear flow, *Physica D*, **174**, 100–113 (2003).
2. D. BARKLEY & L. TUCKERMAN, Computational study of turbulent laminar patterns in Couette flow, *Physical Review Letters*, **94**, 014502 (2005) — D. BARKLEY & L. TUCKERMAN, Mean Flow of turbulent-laminar patterns in plane Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **576**, 109–137 (2007).
3. P. MANNEVILLE & J. ROLLAND, On modelling transitional turbulent flows using under-resolved direct numerical simulations : the case of plane Couette flow, *Theoretical Computations in Fluid Dynamics, Sous presse*.
4. J. ROLLAND & P. MANNEVILLE, Ginzburg–Landau description of laminar-turbulent oblique bands in transitional plane Couette flow, *Soumis*.
5. J. ROLLAND & P. MANNEVILLE, Pattern fluctuations in transitional plane Couette flow, *Journal of Statistical Physics*, **142**, 577–591 (2011).