Des mouvements récurrents de Birkhoff aux régimes quasi-périodiques

Jean-Marc Ginoux[1] & Christophe Letellier[2]

[1] Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586), 175, rue du Chevaleret, F-75013 Paris, France
[2] CORIA UMR 6614, Université de Rouen, Av. de l'Université, B.P. 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France
jmginoux@orange.fr

Résumé. Les régimes quasi-périodiques — cas particulier des mouvements récurrents de Birkhoff — sont souvent observés tant dans les systèmes conservatifs que les systèmes dissipatifs. Leur découverte s'est réalisée dans le cadre des techniques d'approximation des solutions par des séries, une approche naturellement employée en mécanique céleste. A travers différents développements autour de ces régimes quasi-périodiques, nous montrons que non seulement une école française s'est développée dans le sillage des travaux de Henri Poincaré, mais encore qu'un pont entre, d'une part, les mathématiques et la mécanique céleste (cas des systèmes conservatifs) et, d'autre part, la radiotechnique (cas des systèmes dissipatifs) a été établie notamment par Hervé Fabre, Nikolai Krylov et Nikolai Bogolyobov. L'étude des régimes périodiques se situe à l'interface entre dynamiques conservatives et dissipatives, et conduisent respectivement au théorème KAM et au chaos.

Abstract. Quasi-periodic regimes — belonging to a sub-class of Birkhoff's recurrent movements — are commonly observed in conservative systems as well as in dissipative systems. Their discovery occurred when devopping some techniques to approximate solutions by series, an approach traditionally used in celestial mechanics. Tracking some developments about quasi-periodic solution, we show that a French school inheritated from Henri Poincaré and a bridge emerged between, in one hand, in mathematics and in celestial mechanics (conservative systems) and, in the other hand, in radiotechnics (dissipative systems), an opportunity quite rarely encountered. Such a bridge was for instance, established by Hervé Fabre, Nikolai Krylov and Nikolai Bogolyobov. Quasi-periodic regimes were investigated at the interface between conservative and dissipative dynamics and lead to the KAM theorem and chaos, respectively.

1 Les mouvements récurrents de Birkhoff

En 1912, George Birkhoff, souhaitant étendre la classe des mouvements périodiques, introduit les *mouvements récurrents* [1] qui se répartissent en deux classes selon les propriétés des fonctions qui les décrivent

- la classe des solutions représentées par des « fonctions continues et périodiques des variables », soit les mouvements périodiques et quasi-périodiques ;
- la classe des solutions qui ne sont pas définies par des équations différentielles analytiques ; soient des mouvements récurrents « qui ne sont ni périodiques, ni dans le voisinage d'aucun mouvement périodique [1], et qui sont d'une nature particulière telle que la désignation de mouvements récurrents *discontinus* leur semble appropriée » [1].

Bien que cela ne soit pas mentionné dans son texte, Birkhoff considère exclusivement les systèmes conservatifs, ce qui justifie la propriété selon laquelle les mouvements récurrents discontinus ne s'inscrivent pas dans le voisinage d'un mouvement périodique. Comme Poincaré l'avait fait dans son mémoire sur le problème des trois corps [2], Birkhoff introduit la notion d'orbites doublement asymptotiques en y substituant la terminologie de « limite oméga » $(t \to \infty)$ et de « limite alpha » $(t \to -\infty)$ [1]. Il est

1. Cette propriété semble ici exclure les comportements chaotiques qui se développent au voisinage d'orbites périodiques instables.

à noter que la présence d'orbites doublement asymptotiques est une spécificité des systèmes conservatifs, puisqu'ils sont invariants par renversement du temps ($t \mapsto -t$).

Lorsque la dimension de l'espace est $n = 1$, seul le point fixe est possible. Pour $n = 2$, le mouvement récurrent ne peut être qu'une courbe fermée (un cycle limite dans le cas dissipatif) ou asymptotique à une courbe fermée. Pour $n \geq 3$, certains des mouvements récurrents peuvent se ramener à des combinaisons de mouvement de période $2\pi k_i$ avec k_i ($i \in [1, n-1]$) réels, postifs et incommensurables. Birkhoff précise cependant qu'en aucun cas ≪ cette classification épuise tous les possibles ≫. Ces mouvements récurrents se caractérisant par ≪ des points-limites [qui] remplissent un continu d'un certain nombre de dimensions ≫. De plus, ≪ tous les mouvements récurrents ne possédant pas cette propriété peuvent être appelés *discontinus* ≫. Birkhoff établit le lien avec l'intégrabilité puisque ≪ dans les problèmes de Dynamique complètement intégrable, c'est seulement le premier type [continu] qui se rencontre ≫. La lecture *a posteriori* de cette remarque conduirait à penser que Birkhoff désigne ici les comportements chaotiques : le problème réside vraisemblablement dans la sensibilité aux conditions initiales qui, pour Bikhoff, masquerait l'existence d'orbites périodiques instables au voisinage de ces mouvements discontinus : pour Birkhoff, les mouvements récurrents ne peuvent être sensibles aux conditions initiales. Ceci est confirmé par la remarque ≪ qu'il existe un mouvement [...] dont les points limites alpha et oméga constituent tout l'intérieur et la surface d'un tore. Un tel mouvement [...] ne peut être récurrent au sens défini ci-dessus ≫.

2 Les fonctions quasi-périodiques

L'étude des fonctions quasi-périodiques remonte à la thèse de Piers Bohl (1865-1921) [3] mais ce n'est qu'Ernest Esclangon (1876-1954) qui introduit le terme de quasi-périodique [4] :

> ≪ La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit quasi-périodique continue est que, pour chaque valeur de x, on puisse, étant donné ϵ positif, trouver un nombre positif δ de façon que l'on ait
>
> $$|f(x+h) - f(x)| < \epsilon\,,$$
>
> chaque fois que les quantités
>
> $$\frac{h}{a_1}, \frac{h}{a_2}, ..., \frac{h}{a_n}$$
>
> diffèrent de nombres entiers de moins de δ en valeur absolue. ≫

≪ Par exemple, il en précise les spécificités comme suit [4] :

> Une fonction périodique $f(x)$ possède la propriété suivante : étant donné un intervalle quelconque (α, ..., β) et un nombre ϵ aussi petit que l'on veut, on peut déterminer une infinité d'intervalles ($\alpha + h$, ..., $\beta + h$), aussi éloignés que l'on veut du premier, dans chacun desquels la fonction considérée reprend la même série de valeurs à moins de ϵ près : d'où le nom de quasi-périodicité donné à cette propriété. ≫

En 1919, Esclangon [5] relève que le problème des fonctions quasi-périodiques avait été implicitement traité par Poincaré à l'aide d'une équation qui peut se ramener à

$$\ddot{x} + x \left(1 + \mu \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(\alpha_i t + \beta_i) \right) = 0$$

où ≪ les α_i ne sont pas *commensurables* entre eux ; sans quoi la fonction serait périodique ≫ [6].

En 1925, Harold Bohr (1887-1951) étend la classe des fonctions quasi-périodiques aux fonctions *presque périodiques* [7]. Ces dernières diffèrent des fonctions quasi-périodiques, qui en sont une sous-classe, dans la mesure où [8] :

1. ≪ les fréquences sont des combinaisons linéaires avec des cœfficients entiers de seulement un nombre fini de fréquences ω_1, ..., ω_s, tandis que dans la théorie de Bohr, tout ensemble dénombrable de nombres réels est admis pour les fréquences ;

2. les cœfficients [de Fourier] a_k sont exponentiellement décroissants avec $|k|$, rendant $f(t)$ tout comme $F(\theta)$ analytiques et réelles, tandis que les fonctions presques périodiques de Bohr sont plutôt bornées et continues. ≫

Comme le remarquent Siegel et Moser, les fonctions ≪ quasi-périodiques sont bien adaptées à la mécanique céleste ≫, comme nous le verrons.

Un développement important de la théorie des fonctions quasi-périodiques est donnée en 1932 par Arnaud Denjoy (1884-1974) : il considère l'équation

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\Phi} = A(\Phi, \theta)$$

pour laquelle il montre que ≪ quand $A(\Phi, \theta)$ est holomorphe (hypothèse de Poincaré), et si α est irrationnel, toutes les caractéristiques passent indéfiniment au voisinage de tout point du tore ≫ [9]. Ce résultat avait été présenté par Poincaré sous la forme d'une conjecture en 1885 [10]. Ce théorème important se retrouve dans de nombreux travaux — parfois sous le nom de théorie de Poincaré-Denjoy — dont les contributions de Carl Siegel (1896-1981) [11] et Vladimir Arnold (1937-2010) [12].

En 1937, Hervé Fabre (1905-1995) dans le cadre d'une étude sur le déplacement des nœuds et des apsides dans les systèmes planétaires établit le lien entre les mouvements récurrents de Birkhoff et les mouvements quasi-périodiques, dans la mesure où ≪ tout mouvement quasi-périodique est récurrent ≫ [13]. Il précise par ailleurs qu'≪ il en est d'autres [des orbites récurrentes] qui ne sont pas quasi-périodiques, et dont on ne peut pas dire si elles sont, ou non, plus générales que les premières ≫. Il semble bien que Fabre ait été confronté à des trajectoires chaotiques dont il n'arrive pas à définir les propriétés, les techniques analytiques qu'il employait alors échouant pour ce type de solutions. Un autre aspect remarquable de la contribution de Fabre est qu'il établit un pont avec les travaux de Krylov et Bogolyobov dans un contexte fort éloigné de la mécanique céleste, celui de la radiotechnique que nous détaillerons dans ce qui suit. A l'aide des travaux des deux russes, Fabre parvient à démontrer la nature quasi-périodique des mouvements récurrents de son système planétaire par rapport à la longitude et au temps.

3 Oscillations quasi-périodiques en radiotechnique

Les oscillations non linéaires dans le domaine de la radiotechnique ont été traitées dès 1908 par Henri Poincaré (1854-1912) [14,15]. Par la suite, de nombreux travaux ont été réalisés, que ce soit par Georg Duffing (1861-1844) [16] ou par Balthazar van der Pol (1889-1959) [17]. Selon Nikolak Krylov (1879-1955) et Nikolai Bogolyobov (1909-1992) [18],

> Toutes ces recherches, si importantes qu'elles soient, ont été élaborées cependant à l'aide de méthodes insuffisamment rigoureuses du point de vue mathématique et il est à remarquer que les premières méthodes rigoureuses en radiotechnique ont été introduites en France, il semble, par MM. Liénard et Cartan, et en URSS par les représentants de l'école Mandelstam-Papalexi. Les savants allemands de l'Ecole Barkhausen-Möller se sont occupés avec succès d'une théorie approximative, qu'on pourrait appeler la théorie quasi-linéaire, utilisée généralement dans les calculs d'ingénieur, mais qui ne semble pas dans la plupart des cas adéquate à supplanter la théorie plus rigoureuse, — justement celle des oscillations non linéaires. ≫

Dès leur première contribution, Krylov et Bogolyobov se concentrent sur les oscillations quasi-périodiques, faisant référence à Bohl et Poincaré. Ils partent de l'équation non linéaire [19]

$$\frac{d^2}{\mathrm{d}t^2} I(t) + \omega^2 I(t) = \epsilon f\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right) + E \sin \alpha t$$

≪ intervenant dans le problème classique de radiotechnique ≫, soit, en fait, l'équation écrite par van der Pol [17]. Lorsque la caractéristique du circuit est celle proposée par van der Pol

$$f(V) = \omega \left[V + \frac{1}{2} A V^2 - \frac{\gamma^2 V^3}{3} \right] ,$$

ils proposent notamment une condition de stabilité des oscillations quasi-périodiques qui s'énonce [19]

$$\left(\frac{E\alpha\gamma}{\omega^2-\alpha^2}\right)^2 < 2\,.$$

Comme ils le remarquent eux-mêmes, Aleksandr Andronov (1901-1952) et Aleksandr Vitt (1902-1937), étudiant l'équation

$$\ddot{x}+\omega^2 x = \mu(1-x^2)\dot{x}+\lambda\sin t\,,$$

avaient obtenu la condition [20]

$$2 < \frac{\lambda^2}{(\omega^2-1)^2}\,,$$

soit une condition équivalente. Par la suite, s'appuyant sur les travaux de Poincaré [10], Denjoy [9] et Birkhoff [1], ils introduisent le nombre de rotation ρ comme une fonction continue, notamment de ϵ. Remarquant que les solutions dégénèrent en des solutions périodiques chaque fois que le nombre de rotation ρ devient rationnel, et étant donnée la continuité de $\rho=\rho(\epsilon)$, ils en déduisent ≪ que l'ensemble des valeurs de ϵ pour lesquelles les solutions quasi-périodiques deviennent simplement périodiques est partout dense, et [...] que cet ensemble consiste en général en intervalles (zones de synchronisation), dans chacun desquels ρ reste constant ≫ [21]. Ce sont ces résultats qui ont influencé Fabre. Il doit être noté que Mary L. Cartwright (1900-1998), dans son étude du rôle de la phase dans les transitions des mouvements quasi-périodiques aux mouvements périodiques [22] solution de l'équation

$$\ddot{v}+\omega^2 v = (\alpha+\beta v-\gamma v^2)\dot{v}+E\omega_1^2\sin\omega_1 t\,,$$

ne fait pas mention des travaux de Krylov & Bogolyobov.

4 Première évidence numérique de régime quasi-périodique

En 1960, Chihiro Hayashi étudie avec deux de ses collègues le système gouverné par l'équation de van der Pol [17] à laquelle est ajouté un terme d'excitation périodique, soit [23]

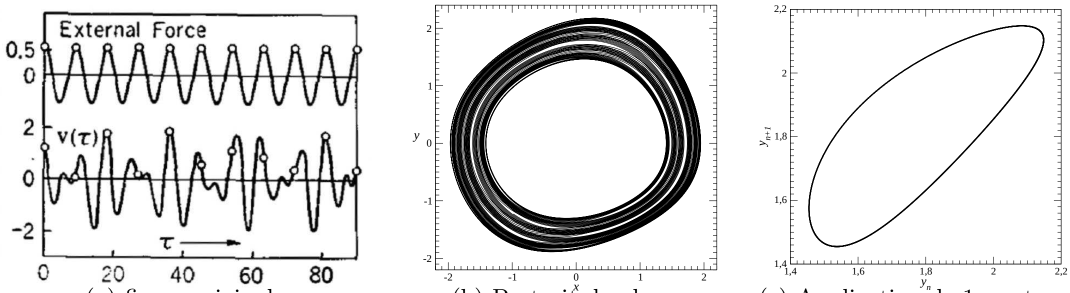
$$\ddot{v}-\mu(1-\beta v-\gamma v^2)\dot{v}+v = B\cos\nu t\,. \tag{1}$$

Hayashi et ses collègue remarquent que ≪ la fréquence de l'oscillation auto-excitée tombe en synchronisation avec la fréquence de forçage, pourvu que ces deux fréquences ne soient pas trop différentes. Si leur différence est suffisamment grande, on peut s'attendre à l'apparition d'oscillations de battement (beat oscillation) ≫. Dans la réédition de sa thèse, Ueda mentionne qu'il avait hésité sur la terminologie, entre *battement* et *quasi-périodique* [24] : on verra dans ce qui suit qu'il s'agit bien de régimes quasi-périodiques. Hayashi et ses collègues montrent, entre autres, des oscillations quasi-périodiques (Fig. 1).

C'est dans cette approche que Yoshisuke Ueda développe sa thèse : certaines des figures de sa thèse sont d'ailleurs issues directement des travaux antérieurs de Hayashi [23]. Dans sa thèse dirigée par Hayashi, Ueda introduit l'équation

$$\ddot{v}-\mu(1-\gamma v^2)\dot{v}+v^3 = B\cos\nu t \tag{2}$$

de type ≪ mixte van der Pol/Duffing pour étudier ≪ les transitions entre les oscillations entraînées et les oscillations presque périodiques ≫ [24]. Il est probable que Ueda ait été amené à proposer une équation mixte en raison de certaines difficultés à obtenir les oscillations quasi-périodiques recherchées comme solution des équations de Duffing ou de van der Pol. Parmi les contributions que nous avons déjà rencontrées, Ueda cite Duffing [16], Andronov et Vitt [25], Cartwright [22], van der Pol [17], Poincaré [10] et le livre de Krylov & Bogolyobov [26]. Toutefois, toutes les simulations sur ordinateurs analogiques concernent des cycles limites, c'est-à-dire des solutions périodiques. Ce n'est qu'en 1970, avec Chihiro Hayashi, Norio Akamatsu & Hidekiyo Itakeura, que Ueda propose la représentation d'une solution qu'il qualifie de presque-périodique (Fig. 2) [28]. Dans cet article, il est fait référence à Bohl [27], Denjoy [9], Bohr [7], travaux qui ne figuraient pas dans sa thèse de 1965. En fait, la solution obtenue par Ueda est une solution quasi-périodique comme le révèle la section de Poincaré (Fig. 2). Ce n'est qu'en 1978, que Ueda publia une solution chaotique, à quelques bifurcations de cette solution quasi-périodique.



(a) figure originale (b) Portrait de phase (c) Application de 1er retour

Fig. **1.** Oscillations de battement (quasi-périodiques) solutions de l'équation (1) obtenus à l'aide d'un ordinateur analogique. Paramètres utilisés : $\mu = 0.15$, $\beta = \frac{4}{3}$, et $\gamma = \frac{4}{3}$. B et ν sont variés mais ne sont pas précisés. Nous avons utilisé $B = 0.1$ et $\nu = 1.1$ pour les figures (b) et (c).

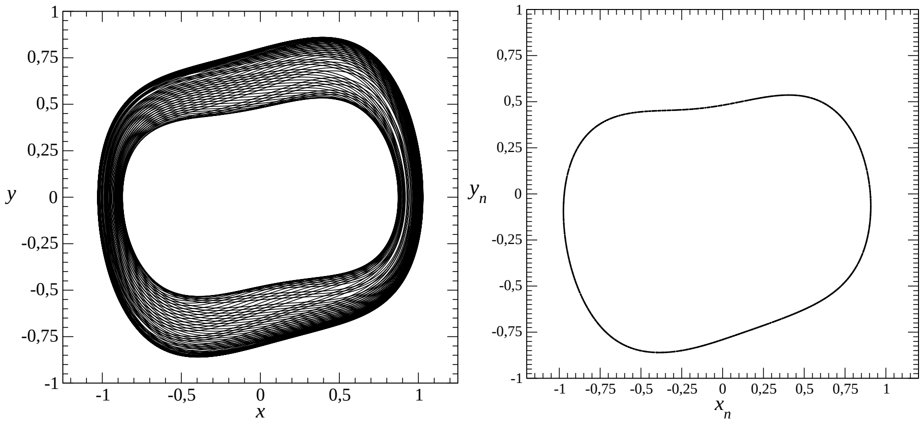

(a) Portrait de phase (b) Section de Poincaré

Fig. **2.** Solution presque- (quasi-) périodique de l'équation (2) obtenue par Ueda et ses collègues. Seule la section de Poincaré (avec 56 points) étaient représentée dans l'article de 1970. Valeurs des paramètres utilisés par Ueda et pour la simulation de cette figure : $\mu = 0.2$, $\gamma = 4$, $B = 0.1$ et $\nu = 1.1$.

5 Conclusion

Le traitement des solutions quasi-périodiques émerge dans le double contexte des mathématiques avec Bohl, Poincaré, Esclangon et Birkhoff. Cet axe de recherche conduit directement au théorème Kam, en passant par les travaux de simulations sur ordinateur de Michel Hénon et Carl Heiles. De manière complémentaire, puisque traitant de systèmes dissipatifs et non plus conservatifs, de la radiotechnique émerge des études plutôt théorique sur des équations du type Duffing ou van der Pol, voire mixte. Les travaux successifs sur les solutions quasi-périodiques montrent deux choses inattendues : l'existence, d'une part d'une école dans le sillage de Poincaré, tant en France qu'à l'étranger et, d'autre part, d'un pont entre les systèmes conservatifs (mathématiques, mécanique céleste) et systèmes dissipatifs (radiotechnique, puis de nombreux domaines appliqués).

Références

1. G. D. Birkhoff, Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **40**, 305-323 (1912).
2. H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Mathematica*, **13**, 1-270 (1890).

3. P. Bohl, *Über die Darstellung von Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten* (De la représentation des fonctions à une variable par des séries trigonométriques à plusieurs arguments proportionnels à la variable), Thèse de doctorat, (1893).
4. E. Esclangon, *Les fonctions quasi-périodiques*, Thèse de la faculté des Sciences de Paris, Gauthier-Villars (1904).
5. E. Esclangon, Nouvelles recherches sur les fonctions quasi-périodiques, *Annales de l¿observatoire de Bordeaux*, Gauthier-Villars, Paris (1919).
6. H. Poincaré, *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, **2**, xvii, p. 277, Gauthier-Vilars, (1893).
7. H. Bohr, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, *Acta Mathematica*, **45**, 29-127 (1925) — **47** 101-214 (1926) — **47**, 237-281 (1926).
8. C. L. Siegel & J. K. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag (1971).
9. A. Denjoy, Sur les caractéristiques à la surface du tore, *Comptes-Rendus de l'Académie des sciences*, **194**, 830-833 (1932).
10. H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 4° série, **1**, 167-244, (1885).
11. C. L. Siegel, Note on differential equations on the torus, *Annals of Mathematics*, **46** (3), 423-428 (1945),
12. V. I. Arnold, Small denominators and problems of the stability of motion in classical and celestial mechanics (in Russian), *Usp. Mat. Nauk.*, **18**, 91-192 (1963).
13. H. Fabre, Sur les orbites absolues de Gylden, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, **205**, 1214-1216 (1937).
14. H. Poincaré, Sur la télégraphie sans fil, *La Lumière Électrique*, 2° série, **4** 259-266 — 291-297 — 323-327 — 355-359 — 387-393 (1908).
15. M. M. Ginoux & L. Petitgirard, Poincaré's forgotten conferences on wireless telegraphy, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **20** (11), 3617-3626 (2010).
16. G. Duffing, *Erzwungene Schingungen bei veränderlicher Eingefrequenz und ihre technische Bedeutung* Vieweg, Branschweig (1918).
17. B. van der Pol, Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance, *Philosophical Magazine*, **7** (3), 65-80 (1927).
18. N. Krylov & N. Bogolyobov, Problèmes fondamentaux de la mécanique non-linéaire, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, **44**, 9-19 (1933).
19. N. Krylov & N. Bogolyobov, Sur le phénomène de l'entrainement en radiotechnique, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, **194**, 1064-1066 (1932).
20. A. A. Andronov & A. Vitt, Théorie Mathématique de l'entrainement (en Russe), *Journal de Physique Technique de l'URSS*, **7** (4, 3-20 (1930).
21. N. Krylov & N. Bogolyobov, Sur les solutions quasi périodiques des équations de la mécanique non-linéaire, *Comptes-Rendus l'Académie des Sciences*, **199**, 1592-1593 (1934).
22. M. L. Cartwright, Forced oscillations in nearly sinusoidal systems, *Journal of the Institute of Electrical Engineering* (London), **95** (3), 88-96 (1948).
23. C. Hayashi, H. Shibayama & Y. Nishikawa, Frequency entrainment in a self-oscillatory system with external force, *IRE Transactions on Circuit Theory*, **7** (4), 413-422, 1960.
24. Y. Ueda, *Some problems in the theory of nonlinear oscillations* (in Japanese), Thèse de doctorat de l'Université de Tokyo, (1965) — Traduite en anglais in *The road to chaos*, Aerial Press (1992).
25. A. A. Andronov & A. Vitt, Zur theorie des Mitnehmens von van der Pol, *Archiv für Elektrotechnik*, **24**, 99-110 (1930).
26. N. Krylov & N. Bogolyobov, Introduction to nonlinear mechanics, *Annals of Mathematical Studies*, **11**, Princeton University Press (1947).
27. P. Bohl, Über die hisichtlich der unabhängigen und abhängigen variabeln periodische differentialgleichung erster ordnung, *Acta Mathematica*, **40**, 321-336 (1916).
28. C. Hayashi, Y. Ueda, N. Akamatsu & H. Itakura, On the behavior of self-oscillatory systems with external force, *Transactions of the Institute of Electronics and Communications Engineers of Japan A*, **53** (3), 150-158 (1970).