

# Cascade inverse et déclin de la turbulence d'ondes gravito-capillaires

Luc Deike & Eric Falcon

Matière et Systèmes Complexes, Université Paris Diderot, CNRS UMR 7057  
10 rue Alice Domont et Léonie Duquet, 75205 Paris, France  
luc.deike@univ-paris-diderot.fr

**Résumé.** Deux études expérimentales de turbulence d'ondes à la surface d'un fluide sont présentées. Le régime transitoire de la turbulence d'ondes capillaires en déclin est trouvé auto-similaire au cours du temps. Le spectre de l'amplitude des vagues montre une loi de puissance dont l'exposant est trouvé constant au cours du déclin et proche de l'exposant théorique du régime stationnaire. En régime stationnaire, l'observation d'une cascade inverse d'ondes de gravité est présentée.

**Abstract.** Two experimental studies on surface wave turbulence are presented. The transient regime of capillary wave turbulence is found to be self similar in time. The power spectrum of wave amplitude is found to be a power law with a constant exponent during the decay. This exponent is close to the predicted stationary one. In a stationary regime, the observation of an inverse cascade of gravity waves is presented.

Lorsque des ondes de suffisamment grandes amplitudes se propagent dans un milieu, leurs interactions peuvent engendrer des ondes de différentes longueurs d'ondes. Cet état stationnaire hors équilibre, appelé turbulence d'ondes, se caractérise par un transfert d'énergie entre les différentes échelles spatiales du système. La compréhension de la turbulence d'ondes passe par l'étude des propriétés statistiques et dynamiques d'un ensemble d'ondes interagissant non linéairement entre elles. Ce phénomène se retrouve dans de nombreux domaines de la physique : les vagues à la surface de la mer, les ondes d'Alfén dans le vent solaire, les ondes de spin dans les solides, les ondes de Rossby atmosphériques ou océaniques, les ondes non linéaires en optique...

Contrairement à la turbulence hydrodynamique, la théorie de la turbulence d'ondes permet d'obtenir des résultats analytiques exacts [1]. Les résultats expérimentaux de turbulence d'ondes en laboratoire furent longtemps rares, mais s'intensifient depuis une dizaine d'année (voir [2] pour une revue). Notre travail s'inscrit dans la continuité de cette exploration expérimentale qui permet à la fois de sonder la validité des théories existantes et l'appréhension de nouveaux phénomènes.

L'un des résultats théoriques les plus importants de la turbulence d'ondes est l'existence de solutions à l'équation cinétique des ondes sous la forme de cascade à la *Kolmogorov*. La conservation de l'énergie donne naissance à une cascade directe correspondant à un flux d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles. Pour les ondes de capillarité, cette cascade directe a été observée et le régime permanent a été caractérisé [3,4,5]. Nous présentons ici l'étude de la turbulence d'ondes capillaires dans un régime transitoire de déclin. Pour les ondes de gravité, l'existence d'une cascade inverse (des petites échelles vers les grandes échelles) est prédite théoriquement [1] mais n'a jamais été observée jusqu'alors dans un système d'ondes de surface. Dans un second temps, nous présentons l'observation de cette cascade inverse d'ondes de gravité [6].

## 1 Turbulence d'ondes capillaires en déclin

On appelle turbulence décroissante ou en déclin l'évolution libre sans forçage d'un écoulement initialement dans un état turbulent. En turbulence hydrodynamique, de nombreuses études expérimentales ont été réalisées sur ce régime transitoire (voir par exemple [7]). Les mesures de turbulence d'ondes en déclin sont plus rares [8][9]. De façon analogue à la turbulence hydrodynamique, nous partons d'une situation

où la turbulence est développée (les spectres sont ceux du régime permanent) et nous laissons relaxer le système sans forçage extérieur. La question est de savoir comment relaxe alors le système d'ondes non linéaire.

### 1.1 Dispositif expérimental

Nous utilisons un dispositif similaire à celui décrit dans [3] : une cuve circulaire de diamètre 20 cm remplie de fluide (eau ou mercure) à une hauteur  $h$ . Les vagues sont engendrées par un piston de largeur 129 mm, immergé d'une profondeur  $H$ , situé à 2 cm du bord de la cuve et actionné par un exciteur de vibrations (Brüel & Kjaer, 4809). Ce vibreur électromagnétique est piloté en vitesse par la tension appliquée à ses bornes. L'agitation utilisée est un forçage aléatoire en amplitude et en fréquence dans une gamme étroite (bruit coloré). Les mesures de la hauteur des vagues  $\eta(t)$  en un point sont réalisées à l'aide d'un fil capacitif, situé face au centre du batteur à 8 cm de celui-ci. Une géométrie carré ou circulaire de la cuve ne change pas les résultats. La turbulence d'ondes permanente est obtenue en actionnant le batteur à basses fréquences (bruit coloré 0.1-4 Hz ou 0.1-6 Hz) pendant une durée suffisante ( $> 30$  s). L'agitation est alors arrêtée et  $\eta(t)$  est mesurée. Le temps d'acquisition est choisi suffisamment long pour que les vagues puissent relaxer. Ce temps diffère selon le fluide (40 s dans l'eau et 90 s dans le mercure) puisque l'inertie du fluide (et donc sa viscosité) joue un rôle dans le déclin. Comme la durée d'acquisition est assez courte, l'expérience est effectuée  $N$  fois ( $N=300$  dans le cas de l'eau,  $N=180$  pour le mercure), afin d'effectuer des moyennes d'ensemble et d'obtenir une statistique satisfaisante. Ce moyennage donne suffisamment de statistique pour étudier le processus de déclin : le signal est découpé en petites tranches temporelles de durée  $\delta t$  ( $\delta t = 2$  s pour l'eau,  $\delta t = 4.5$  s pour le mercure, Figs 1 et 2), les différents instants (intervalle  $[t, t + \delta t]$ ) du déclin sont ainsi caractérisés. L'écart type de l'amplitude  $\sigma_\eta$  et le spectre de l'amplitude des vagues sont évalués sur ces intervalles  $[t, t + \delta t]$ , et le résultat moyenné sur les  $N$  expériences. On peut alors suivre l'évolution temporelle de ces grandeurs moyennées. Nous avons réalisé deux séries d'expériences, l'une dans l'eau l'autre dans le mercure. La hauteur de fluide est  $h = 25$  mm et le piston est immergé au maximum ( $H = 24$  mm).

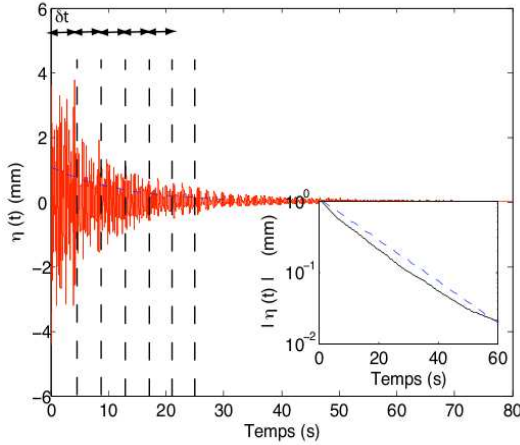


FIG. 1. Principal :  $\eta(t)$  (en rouge) au cours du temps dans le mercure (excitation à  $t < 0$ , arrêt du forçage à  $t = 0$ ). Le système relaxe jusqu'à l'équilibre. Le découpage par intervalle de temps  $\delta t$  est indiqué. Encart : moyenne glissante sur 180 acquisitions. En pointillés  $\langle |\eta| \rangle = \langle |\eta_0| \rangle \exp(-t/\tau_{Hg})$  avec  $\tau_{Hg} = 15$  s.

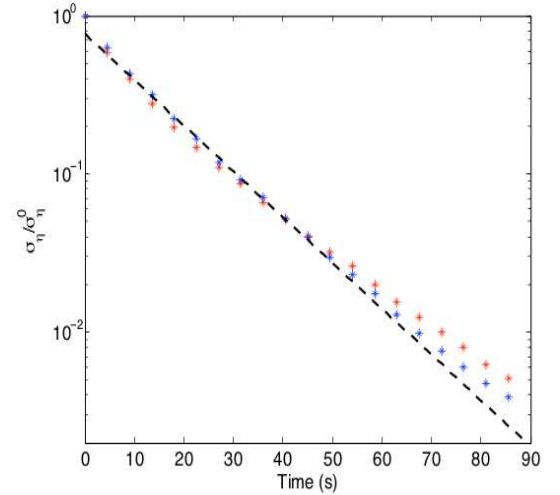


FIG. 2. Décroissance de  $\langle \sigma_\eta \rangle$  dans le mercure : pour deux forçages différents (0.1-4 Hz en rouge et 0.1-6 Hz en bleu). En pointillés :  $\sigma_\eta = \sigma_\eta^0 \exp(-t/\tau_{Hg})$  avec  $\tau_{Hg} \approx 15$  s.

## 1.2 Relaxation du signal de hauteur des vagues

La figure 1 montre un signal de hauteur des vagues  $\eta(t)$  (en rouge) à la surface du mercure relaxant jusqu'à l'équilibre. La courbe en pointillés correspond à une décroissance exponentielle. L'encart présente la moyenne d'ensemble sur les enveloppes des signaux (moyenne glissante)  $\langle |\eta| \rangle$ . La relaxation se fait de façon quasi exponentielle :  $\langle |\eta| \rangle = \langle |\eta_0| \rangle \exp(-t/\tau)$ , avec  $\tau$  le temps de décroissance et  $\langle |\eta_0| \rangle$  la hauteur initiale moyenne des vagues.  $\tau$  est trouvé indépendant du forçage mais dépend fortement du fluide. On obtient  $\tau_{H_2O} = 5.8s$  et  $\tau_{Hg} = 15s$ . La figure 1 montre l'évolution temporelle de la moyenne d'ensemble de l'écart type du signal de la hauteur des vagues (pour deux forçages 0.1-4 Hz en rouge et 0.1-6 Hz en bleu).  $\langle \sigma_\eta \rangle$  décline donc exponentiellement en fonction du temps :  $\langle \sigma_\eta \rangle = \langle \sigma_\eta^0 \rangle \exp(-t/\tau)$ , avec  $\tau$  le temps caractéristique de la décroissance (même valeur que par la relaxation de  $\eta$ ) et  $\langle \sigma_\eta^0 \rangle$  la valeur de  $\langle \sigma_\eta \rangle$  au moment de l'arrêt du forçage. Le système est bien complètement relaxé à la fin de l'expérience,  $\langle \sigma_\eta \rangle$  est quasi nulle (diminution de plus de deux ordres de grandeurs par rapport à la valeur initiale, Fig. 2). Le temps de dissipation visqueuse d'une onde capillaire est donnée par  $\tau_\nu = \frac{1}{2k^2\nu}$  [10], avec  $\nu$  la viscosité cinématique et  $k$  le nombre d'onde. En utilisant la relation de dispersion des ondes capillaires on obtient  $\tau_\nu = \frac{(\gamma/\rho)^{2/3}}{2\nu\omega^{4/3}}$ , avec  $\gamma$  la tension de surface,  $\rho$  la masse volumique et  $\omega$  la pulsation. Le rapport des temps visqueux du mercure et de l'eau est :  $\tau_\nu^{Hg}/\tau_\nu^{H_2O} \sim 5$ , ce qui est du même ordre de grandeur que le rapport des temps de relaxation trouvé expérimentalement ( $\tau_{exp}^{Hg}/\tau_{exp}^{H_2O} \sim 3$ ). La viscosité du fluide pilote bien la dissipation d'énergie lors du déclin des vagues.

## 1.3 Evolution temporelle des spectres

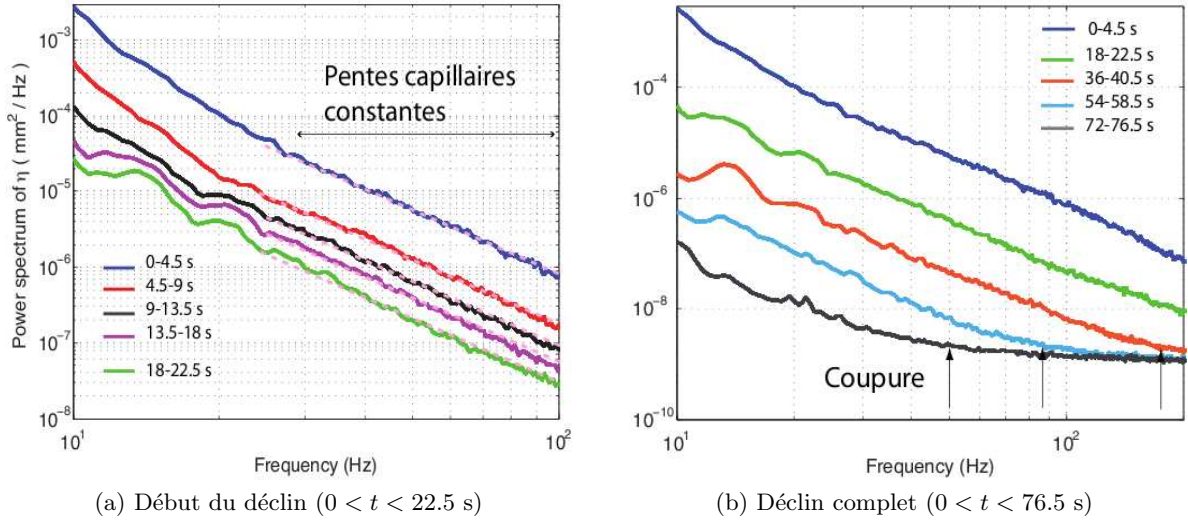


FIG. 3. Spectre de la hauteur des vagues à la surface du mercure à différents moments  $[t, t + \delta t]$  de la décroissance. (a) début de la décroissance (en bleu, entre 0 et 4.5s, en rouge entre 4.5 et 9s, en noir entre 9 et 13.5s, en mauve entre 13.5 et 18s et en vert entre 18 et 22.5s). Les pentes en pointillés ont une pente de -3. (b) décroissance complète (en bleu, entre 0 et 4.5s, en vert entre 18 et 22.5s, en noir entre 36 et 40.5s, en mauve entre 54 et 58.5s et en rouge entre 72 et 76.5s). La fréquence de coupure (indiqué par les flèches) diminue au cours du temps.

La figure 3 montre les spectres de l'amplitude des vagues  $S_\eta(f)$  à différents instants de la décroissance. Chaque courbe correspond à  $S_\eta(f)$  calculée sur une durée  $\delta t$  (Fig. 1) puis moyennée sur l'ensemble des  $N$  expériences. La figure 3 (gauche) montre les cinq premiers moments du déclin (de haut en bas). A chaque instant le spectre dans le régime capillaire (de 20 à 100 Hz) est décrit par une loi de puissance

$S_\eta \sim f^{-\alpha}$  avec  $\alpha = 3 \pm 0.2$ . Le spectre est donc très proche du spectre théorique du régime permanent ( $S_\eta^{cap} \sim f^{-17/8}$  [1]). L'amplitude du spectre diminue au cours du temps puisque la dissipation visqueuse a lieu. La figure 3b montre les spectres sur toute la durée du déclin. Les spectres sont toujours en loi de puissance pour  $t < 4\tau$ , donc à l'exception des temps très long (le spectre en noir entre 72 et 76.5 s est complètement "effondré"). De plus, les hautes fréquences s'atténuent les premières (cf. flèches sur la figure 3 droite) : la zone inertielle se réduit au cours du déclin, la fréquence de coupure du spectre diminue au cours du temps, en accord avec de précédentes expériences [8]. Toutes les fréquences du spectre déclinent de la même manière (spectre de pente constante au cours du déclin, cf. pointillés sur la figure 3a et les hautes fréquences moins énergétiques disparaissent en premier (cf. flèches sur la figure 3b)).

En conclusion, le spectre de l'amplitude des vagues capillaires décroît selon une loi auto-similaire en loi de puissance de la fréquence  $S_\eta \sim f^{-\alpha}$  avec un exposant  $\alpha$  indépendant du temps et proche de celui observé en régime permanent. Le déclin se matérialise alors par une décroissance de l'amplitude du spectre à toutes les fréquences et une réduction de la zone inertielle. Chaque étape du déclin peut être vu comme un début de déclin avec une énergie plus faible.

## 2 Cascade inverse en turbulence d'ondes de gravité

Pour les ondes de gravité, la conservation de l'énergie engendre une cascade directe d'énergie des grandes aux petites échelles. Cette cascade *à la Kolmogorov* a été observée *in situ* par les océanographes [11] et en laboratoire [3,12]. Le processus résonnant d'interaction entre ondes de gravité étant un processus à quatre ondes [13], une autre quantité, l'action d'ondes, est conservée. Ainsi, une cascade inverse d'action d'ondes est prédite théoriquement [1] des petites aux grandes échelles et a été observée numériquement [14,15]. Il s'agit d'un phénomène tout à fait remarquable : les interactions faiblement non linéaire entre ondes de petites longueurs d'ondes créent des ondes de grandes longueurs d'ondes. Des tentatives d'observation de cascades inverses en turbulence d'ondes ont été réalisées dans différents systèmes : "second son" dans l'hélium superfluide [16] et en optique non linéaire [17].

### 2.1 Dispositif expérimental

Le système est similaire à celui décrit pour le déclin de la section 1.1. Le système est maintenant forcé en régime stationnaire (l'enregistrement de l'amplitude des ondes se fait au cours de l'agitation) et avec une excitation stochastique entre 16 et 22 Hz. Le temps d'enregistrement est de 1000 secondes. La hauteur de fluide est  $h = 18$  mm et l'immersion du piston est  $H = 9$  mm. La faible immersion du piston permet d'éviter la génération de cross waves, sous harmoniques du forçage [18] qui gêneraient l'observation d'une cascade inverse d'ondes de gravité. Les résultats dans l'eau et dans le mercure sont similaires. L'excitation aléatoire entre 16 et 22 Hz est choisie afin de pouvoir induire des interactions entre ondes de gravité (la transition gravito-capillaire étant situé autour de 25 Hz) et d'observer la cascade directe dans le régime capillaire.

### 2.2 Observation d'une cascade inverse d'ondes de gravité

La figure 4 montre le spectre de l'amplitude des vagues pour un forçage stochastique entre 16 et 22 Hz à différentes amplitudes du forçage. À faible forçage (en bleu), on observe la réponse du système au forçage (entre 16 et 22 Hz) ainsi que les harmoniques du forçage (à deux fois les fréquences de forçage, puis trois). Aucune réponse n'est observée à basse fréquence en dehors d'un pic à 3.6 Hz. Ce pic correspond à une longueur d'ondes de  $\lambda \sim 10$  cm (en utilisant la relation de dispersion des ondes de gravité), ce qui est équivalent à la moitié de la taille de la cellule. Il s'agit donc d'un mode de la boîte. Lorsque le forçage augmente, dans la gamme des hautes fréquences le spectre se remplit entre les harmoniques pour donner une loi de puissance : c'est la cascade directe de capillarité. L'exposant du spectre capillaire (pente en pointillés) est trouvé un peu plus faible que la prédiction théorique (pente -2.1 au lieu de -2.8). Dans la gamme des basses fréquences, le spectre se peuple continûment lorsque le forçage augmente. Il convient de

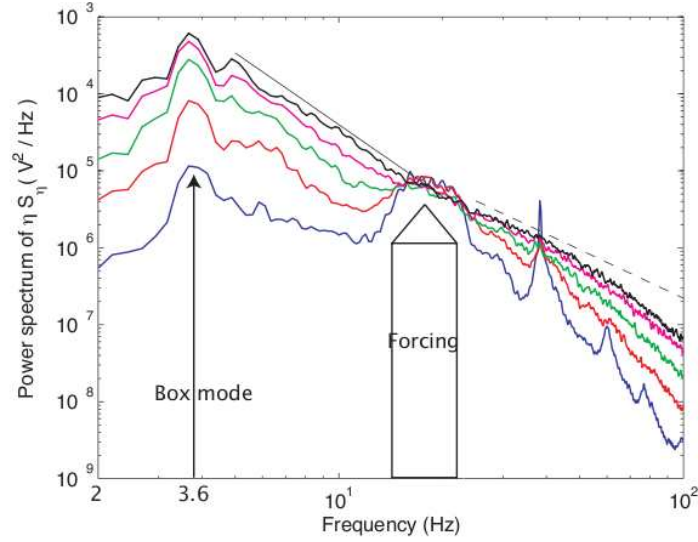


FIG. 4. Spectre pour différentes amplitudes du forçage aléatoire de fréquences comprises entre 16 et 22 Hz. Le forçage augmente sur les courbes de bas en haut. La pente de la ligne pleine est  $-3.1$ , la pente en pointillés est  $-2.1$ . Le mode de la boîte à  $3.6$  Hz est indiqué.

remarquer que l'amplitude de la réponse à la fréquence de forçage augmente peu avec le forçage. L'énergie est donc transférée à d'autres échelles notamment vers les grandes échelles.

A suffisamment haut forçage (en noir), le spectre à basse fréquence (de  $4$  à  $16$  Hz) est une loi de puissance  $S_{\eta}^{inverse} \sim f^{-\nu}$  avec  $\nu = 3.1 \pm 0.1$ . Il s'agit de l'apparition de la cascade inverse d'ondes de gravité. L'exposant du spectre de la cascade inverse est trouvé proche du résultat théorique ( $\nu_{theo} = -11/3 \approx -3.6$  [1]). La limite haute fréquence de la cascade inverse correspond au forçage et la limite basse fréquence est le mode de la boîte : la cascade inverse d'ondes de gravité est observée sur une gamme de fréquence proche d'une décade. Remarquons que cela correspond à une gamme de plus d'une décade dans le domaine spatial des nombre d'ondes  $k$ .

### 3 Conclusion

Le régime transitoire de la turbulence d'ondes capillaires en déclin est caractérisé : le spectre de l'amplitude des vagues décroît de façon auto-similaire en loi de puissance  $S_{\eta} \sim f^{-\alpha}$  avec  $\alpha = 3 \pm 0.2$  tout au long du déclin. L'exposant de ce spectre non stationnaire est proche de celui observé en régime stationnaire. La zone inertielle diminue au cours du temps à partir des hautes fréquences. L'évolution de la fréquence de coupure au cours du temps sera caractérisée prochainement.

L'observation d'une cascade inverse d'ondes de gravité a aussi été présentée. En effet, en excitant des ondes à une échelle de l'ordre de la longueur capillaire, des ondes à plus grandes échelles apparaissent par interaction non linéaire à quatre ondes. Le spectre de la cascade inverse suit une loi de puissance  $S_{\eta}^{inv} \sim f^{-\nu}$  avec  $\nu = 3.1 \pm 0.1$ . Une étude plus détaillée de cette cascade inverse sera présentée dans [6].

### Références

1. V. E. ZAKHAROV, V. S. LVOV & G. FALKOVITCH, *Kolmogorov spectra of turbulence*, Springer-Verlag (1992).
2. E. FALCON, Laboratory experiments on wave turbulence, *Discrete and continuous dynamical systems B*, **13** (4), 819-840 (2010).

3. E. FALCON, C. LAROCHE & S. FAUVE, Observation of gravity-capillary wave turbulence, *Physical Review Letters*, **98**, 094503 (2007).
4. M. YU. BRAZHNIKOV G. V. KOLMAKOV, A. A. LEVCHENKO & L. P. MEZHOV-DEGLIN, Observation of capillary turbulence on the water surface in a wide range of frequencies, *Europhysics Letters*, **58**, 510-516 (2002).
5. C. FALCÓN, E. FALCON, U. BORTOLOZZO & S. FAUVE, Observation of gravity-capillary wave turbulence, *Europhysics Letters*, **86** 14002 (2009).
6. L. DEIKE, C. LAROCHE & E. FALCON, en préparation.
7. M. S. MOHAMED & J. LARUE, The decay power law in grid-generated turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, **219**, 195-214 (1990).
8. KOLMAKOV, G. V. AND LEVCHENKO, A. A. AND BRAZHNIKOV, M. YU., L. P. MEZHOV-DEGLIN, A. N. SILCHENKO & P. V. E. MCCLINTOCK, Quasiadiabatic decay of capillary turbulence on the charged surface of liquid hydrogen, *Physical Review Letters*, **93**, 074501 (2004).
9. B. MIQUEL & N. MORDANT, en préparation.
10. L. LANDAU & F. LIPSCHITZ, *Mécanique des fluides*, Edition Mir (1951).
11. Y. TOBA, Local balance in the air-sea boundary processes III. On the spectrum of wind waves, *Journal of the Oceanographical Society of Japan*, **29**, 209-220 (1973). — K. K. KAHMA, A study of the growth of the wave spectrum with fetch, *Journal of Physical Oceanography*, **11**, 1503-1515 (1981).
12. S. NAZARENKO, S. LUKASCHUK, S. MCLELLAND & P. DENISSENKO, Statistics of surface gravity wave turbulence in the space and time domains, *Journal of Fluid Mechanics*, **642**, 395-420 (2010).
13. L. F. MCGOLDRICK, O. M. PHILLIPS, N. E. HUANG & T. H. HODGSON, Measurements of third-order resonant wave interactions, *Journal of Fluid Mechanics*, **25**, 437-456 (1966).
14. A. O. KOROTKEVICH, Simultaneous numerical simulation of direct and inverse cascades in wave turbulence, *Physical Review Letters*, **101**, 074504 (2008).
15. S. Y. ANNENKOV & V. I. SHRIRA, Direct numerical simulation of downshift and inverse cascade for water wave turbulence, *Physical Review Letters*, **96**, 204501 (2006).
16. A. O. GANSHIN, V. B. EFIMOV, G. V. KOLMAKOV, L. P. MEZHOV-DEGLIN & P. V. E. MCCLINTOCK, Observation of an inverse energy cascade in developed acoustic turbulence in superfluid helium, *Physical Review Letters*, **101**, 065303 (2008).
17. U. BORTOLOZZO, J. LAURIE, S. NAZARENKO & S. J. RESIDORI Optical wave turbulence and the condensation of light, *Journal of the Optical Society of America B*, **26**, 2280-2284 (2009).
18. J. MILES, Parametrically excited, progressive cross-waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **186**, 129-146 (1988) — J. J. MAHONY, Cross-waves. Part 1. Theory, *Journal of Fluid Mechanics*, **55**, 229-244 (1972) — B. J. S. BARNARD & W. G. PRITCHARD, Cross-waves. Part 2. Experiments, *Journal of Fluid Mechanics*, **55**, 245-255 (1972).