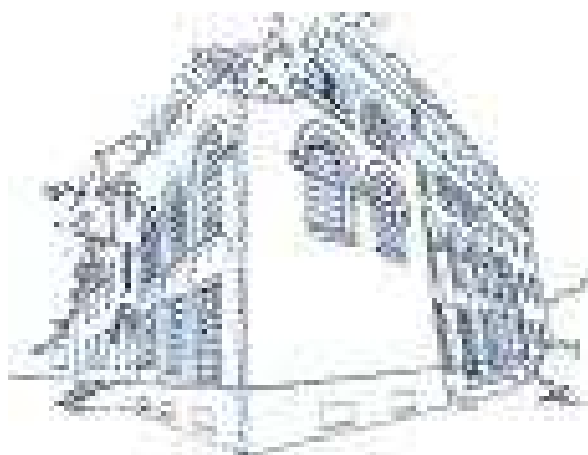




C. Josserand, M. Lefranc & C. Letellier
Éditeurs

Poincaré

Résumés des exposés de la 14^e
Rencontre du Non-Linéaire
Paris 2011



Institut Henri Poincaré

Non-Linéaire Publications

RENCONTRE DU NON-LINÉAIRE
 Université Pierre et Marie Curie, PARIS
 16–18 Mars 2011

Nous remercions vivement l'Institut Henri Poincaré, l'Université Pierre et Marie Curie, la Fondation Pierre-Gilles de Gennes, le Réseau National des Systèmes Complexes, l'Institut Jean le Rond d'Alembert, le Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes, Molécules (PhLAM), le Complexe de Recherche Interprofessionnel en Aérothermochimie (CORIA), et le GDR 2984 "Contrôle et Dynamique des Ensembles Complexes" pour leur soutien matériel et financier.

Le comité scientifique est composé de :

Amandine AFTALION	LMV — Versailles
Yacine AMAROUCHÈNE	CPMOH — Bordeaux
Arezki BOUDAUD	RDP — ENS Lyon
Jean-René CHAZOTTES	CPhT — Polytechnique
Silvia DE MONTE	Ecologie & Evolution — ENS Paris
John DUDLEY	FEMTO-ST — Besançon
Eric FALCON	MSC — Paris
Sébastien GALTIER	IAS — Orsay
Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Anke LINDNER	PMMH — ESPCI, Paris
Mathis PLAPP	LPMC — Polytechnique
Patrice MEUNIER	IRPHE — Marseille

Les *Rencontres annuelles du Non-linéaire* sont organisées par :

Christophe JOSSERAND	Institut Jean le Rond d'Alembert — Paris 6
Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Christophe LETELLIER	CORIA — Rouen

Le Colloque *Fluides Complexes et Biologiques* est organisé par :

Yacine AMAROUCHÈNE	CPMOH — Bordeaux
Anke LINDNER	PMMH — ESPCI, Paris
Thomas PODGORSKI	LSP — Grenoble

Ces Comptes-Rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

Non Linéaire Publications
 Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray
 cedex

Toutes les informations concernant les *Rencontres* sont publiées sur le serveur :

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/>

Renseignements :

rnl@nonlineaire.univ-lille1.fr

Table des matières

Des dynamiques temporelles aux diagrammes spatio-temporels : défauts, cohérence de phase et observabilité <i>Dalila Amroun Aliane, Luc Pastur, Christophe Letellier</i>	1
Forme et persistance de tourbillons lenticulaires dans les écoulements stratifiés tournants : du laboratoire à la Tâche Rouge de Jupiter ! <i>Orian Aubert, Michael Le Bars, Patrice Le Gal, Philip Marcus</i>	7
Etude d'une équation de convection-réaction-diffusion en écoulement compressible <i>Federico Bianco, Sergio Chibbaro, Roger Prud'homme</i>	13
Quantification de la qualité du sommeil par entropies de Shannon <i>D. Bounoiare, A. Portmann, R. Naeck, U. S. Freitas, A. Cuvelier, J.-F. Muir, C. Letellier</i>	19
Formes normales singulières non linéaires : un nouvel observateur <i>Driss Boutat, Gang Zheng, Latifa Boutat-Baddas & Mohamed Darouach</i>	25
Panaches thermiques dans les fluides à seuil <i>Anne Davaille, Blandine Gueslin, Anna Massmeyer</i>	31
Une transition de phase dans un écoulement turbulent confiné ? <i>François Daviaud, Pierre-Philippe Cortet, Arnaud Chiffaudel, Bérengère Dubrulle, Éric Herbert</i>	37
Cascade inverse et déclin de la turbulence d'ondes gravito-capillaires <i>Luc Deike, Eric Falcon</i>	41
Instabilités centrifuges dans un écoulement de cavité : décomposition en modes dynamiques <i>Christelle Douay, Florimond Guéniat, Luc Pastur, François Lusseyran, Thierry Faure</i>	47
Transition pointe-jet à l'interface huile/solution de polymères dans des systèmes microfluidiques <i>Aurélien Duboin, Florent Mallogi, Fabrice Monti, Patrick Tabeling</i>	53
Stochastic evolution of a turbulent interface in a shear flow <i>Yohann Duguet, Philipp Schlatter</i>	57
Instabilité micro-onde dans les paquets d'électrons relativistes sur anneaux de stockage <i>Clément Evain, Joanna Barros, Alexandre Loulergue, Marie-Agnès Tordeux, Ryutaro Nagaoka, Marie Labat, Lodovico Cassinari, Gaëlle Creff, Laurent Manceron, Jean-Blaise Brubach, Pascale Roy, Marie-Emmanuelle Couprie</i>	63

Etude expérimentale de l'écoulement de Couette-Taylor avec modulation de fréquence <i>Martial Gassa Feugaing, Olivier Crumeyrolle & Innocent Mutabazi</i>	69
Des mouvements récurrents de Birkhoff aux régimes quasi-périodiques <i>Jean-Marc Ginoux, Christophe Letellier</i>	75
La première rencontre du non-linéaire : Paris, 28-30 Janvier 1933 <i>Jean-Marc Ginoux, Loïc Petitgirard</i>	81
Opérateur de Koopman et identification de structures cohérentes : application à un écoulement de cavité <i>Florimond Guéniat, Luc Pastur, François Lusseyran, Thierry Faure</i>	87
Un équivalent particulaire de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky <i>François James, Phung Thanh-Tam, Pascal Brault</i>	93
Nouvelles vagues solitaires à la surface de l'eau <i>Alphonse Leroux, Didier Clamond, Jean Rajchenbach</i>	97
Modélisation par approche globale de la dynamique du blé pluvial observée par télédétection spatiale en zone semi-aride <i>Sylvain Mangiarotti, Laurent Drapeau, Raphael Coudret, Lionel Jarlan</i>	103
Identification des paramètres du modèle de Lorenz en contexte perturbé, par une approche de stratégie d'évolution <i>Sylvain Mangiarotti, Marc Schoenauer</i>	109
Dynamique intégrro-différentielle en longueur d'onde optique, à retards multiples, pour le « Reservoir Computing » <i>Romain Martinenghi, Sergei Rybalko, Lennert Appeltant, Guy Van der Sand, Jan Danckaert, Maxime Jacquot, Yanne Chembo, Laurent Larger</i>	115
Système de communication haut débit par chaos en phase utilisant un composant dédié : un interféromètre à 3 ondes <i>Jérémy Oden, Roman Lavrov, Laurent Larger</i>	121
Dynamique du seuil d'excitabilité des neurones <i>Jonathan Platkiewicz, Romain Brette</i>	127
Etude d'un canal stratifié différentiellement chauffé <i>Bérangère Podvin, Patrick Le Quéré</i>	133
Fortelling catastrophes ? <i>Yves Pomeau, Martine Le Berre, Jean-Louis Le Mouél, Clément Nartreau, Patrice Fromy</i>	139
Modèle de Landau–Langevin pour la description des bandes laminaires-turbulentes dans l'écoulement de Couette plan <i>Joran Rolland, Paul Manneville</i>	145
Vers une topologie du chaos toroïdal tridimensionnel <i>Martin Rosalie, Christophe Letellier</i>	151
Biais dans l'analyse de dynamiques lentes/rapides à forte composante linéaire : cas de la détection de non-linéarité <i>Elise Roulin, Ubiratan Santos Freitas, Christophe Letellier</i>	157

Propriétés multifractales dans l'espace de Hilbert : analyse de séries temporelles nonlinéaires et invariants d'échelle utilisant la décomposition modale empirique et transformation de Hilbert	
<i>François Schmitt, Yongxiang Huang, Zhiming Lu, Yulu Liu</i>	163
Dynamique cardiaque de nourrissons à risque	
<i>Emad Yacoub, Ubiratan Freitas, Valérie Messenger, Eric Mallet, Christophe Letellier</i>	169
'Venting' dans un milieu granulaire immergé	
<i>Valérie Vidal, Germán Varas, Jean-Christophe Géminard</i>	175
Index	181

Des dynamiques temporelles aux diagrammes spatio-temporels : défauts, cohérence de phase et observabilité

Dalila Amroun Aliane¹, Luc Pastur² & Christophe Letellier³

¹ LEQ, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, BP 32, Bab Ezzouar, 16111 Alger

² LIMSI-CNRS, Université de Paris Sud, BP 133, Bât 508, 91403 Orsay cedex

³ CORIA-UMR 6614, Université de Rouen, BP 12, 76801 St-Etienne du Rouvray cedex

amroun_dalila@yahoo.fr

Résumé. Un premier lien explicite est proposé entre les portraits de phase reconstruits à partir de mesures locales et la dynamique des défauts observés dans les diagrammes spatio-temporels, et ce lorsque les différents oscillateurs sont en synchronisation de phase. Le système étudié est un laser monomode à élargissement homogène où la diffraction est prise en compte. L'intensité laser est utilisée pour construire les diagrammes spatio-temporels et les portraits de phase d'un oscillateur donné. Nous montrons que la visite du voisinage d'un point singulier de l'espace reconstruit où existe un fort défaut d'observabilité se traduit par la présence de défauts dans les diagrammes spatio-temporels, que les régimes soient quasi-périodiques ou chaotiques. Toutefois, pour une chaîne de systèmes de Rössler, il est possible d'avoir des dynamiques chaotiques associées à des diagrammes sans défauts, lorsque le chaos est avec cohérence de phase et sans problème d'observabilité.

Abstract. A first explicit link is here proposed between phase portraits reconstructed from local measurements and the dynamics of defects observed in spatio-temporal diagrams, when the different oscillators are phase synchronized. The system under study is a homogeneously broadened single-mode laser with diffraction taken into account. Laser intensity is used to construct spatio-temporal diagrams and phase portraits of a given oscillator. We show that the visit of the neighborhood of a fixed point in the reconstructed phase space where there is a strong lack of observability induces defects in spatio-temporal diagrams, either the regimes are quasi-periodic or chaotic. However, for a chain of Rössler systems, it is possible to observe chaotic dynamics associated to diagrams without defects, in the case of phase-coherence chaos without any lack of observability.

1 Introduction

Les systèmes spatialement étendus sont habituellement étudiés en termes de diagrammes spatio-temporels et leur analyse se limite le plus souvent aux premières instabilités [1]. A cause de l'absence d'un théorème de type « Takens » [2] pour les systèmes spatio-temporels, la dynamique résultante est rarement étudiée à partir de portraits de phase reconstruits à partir d'une variable mesurée localement. Nous proposons ici un premier lien explicite entre de tels portraits de phase et la dynamique des défauts observés dans les diagrammes spatio-temporels, lorsque les différents oscillateurs sont en synchronisation de phase [3]. Dans ce cas, les dynamiques locales sont globalement équivalentes, et nous montrons l'existence d'une relation entre la dynamique d'un oscillateur choisi arbitrairement et la dynamique des défauts observés dans les diagrammes spatio-temporels.

Pour cela, nous utilisons un laser monomode à élargissement homogène où la diffraction est prise en compte [4]. La dynamique est étudiée *via* l'intensité laser, et nous montrons que l'observabilité très pauvre fournie par cette variable influence la structure des portraits de phase et l'apparition des défauts. Dans la mesure où la visite du voisinage d'un point singulier associé à une forte perte d'observabilité est directement reliée à la présence de défauts dans les diagrammes spatio-temporels, la relation entre les défauts et l'observabilité implique la possibilité d'avoir des dynamiques (locales) chaotiques associées à des diagrammes sans défauts, ce que nous montrons avec une chaîne de systèmes de Rössler.

2 Modèle du laser

Le système étudié est un laser monomode à élargissement homogène, décrit par les équations de Maxwell-Bloch normalisées avec diffraction dans la direction x [4,5] :

$$\begin{cases} \partial_t e = -\sigma(e - p) + iA\partial_x^2 e \\ \partial_t p = -(1 - i\delta)p + ed \\ \partial_t d = -\gamma(d - r + \frac{1}{2}(ep^* + e^*p)) \end{cases} \quad (1)$$

Les quantités normalisées e , p et d sont respectivement le champ électrique, la polarisation macroscopique et l'inversion de population. Les paramètres $\gamma = \gamma_{\parallel}/\gamma_{\perp}$ et $\sigma = \gamma_{\ell}/2\gamma_{\perp}$ se définissent à partir du taux de relaxation de la polarisation γ_{\perp} , de l'inversion de population γ_{\parallel} et de l'intensité optique γ_{ℓ} . Le temps est normalisé par rapport à la durée de vie de la cohérence $\tau_{\perp} = 1/\gamma_{\perp}$. Le désaccord de fréquence $\delta = (\omega - \omega_a)/\gamma_{\perp}$ représente la différence, normalisée, entre la fréquence du champ ω et celle de la transition atomique résonante ω_a . A est le paramètre de diffraction, et r le taux de pompage. L'opérateur différentiel partiel $\partial/\partial t$ ($\partial/\partial x$) est noté par ∂_t (∂_x). Le système (1) est simulé par un anneau de 71 oscillateurs couplés [6], après le changement de variable $(e, p, d) \mapsto (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, x_5)$.

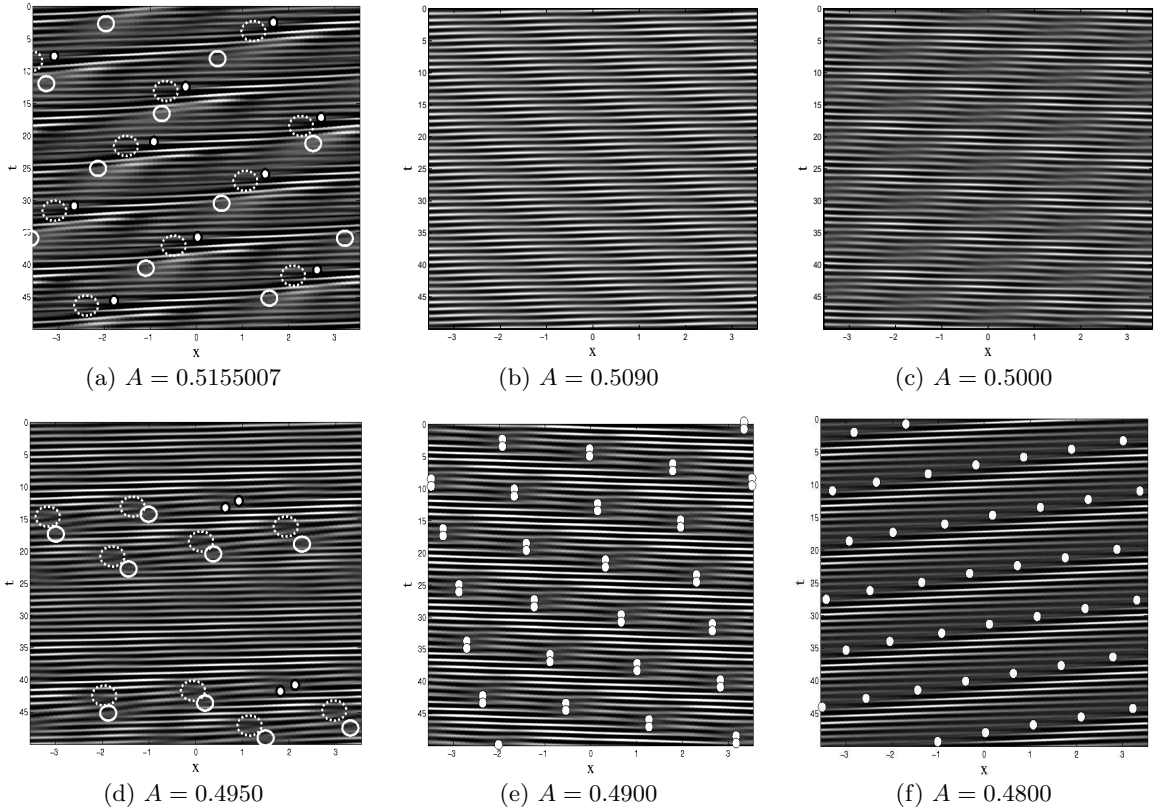


FIG. 1. Diagrammes spatio-temporels du système laser (1). Les autres paramètres : $\sigma = 3$, $\gamma = 1$, $r = 30$ et $\delta = -2$. Les défauts observés en (e) et (f) sont en fait des paires d'annihilation-crédation n'affectant pas la structure globale des diagrammes. Les annihilations (créations) sont représentées par des cercles en pointillés (continus). Les défauts topologiques de charge nulle — correspondant ainsi à une paire d'annihilation-crédation — sont désignés par des petits disques blancs.

Pour la gamme de paramètres choisie ici, tous les diagrammes spatio-temporels sont caractérisés par une onde progressive avec des modulations et contiennent parfois des défauts (Figs 1). Un défaut topologique correspond à « un point du milieu où l’amplitude locale est nulle et la phase non définie » [7]. Sur cette gamme des paramètres, tous les oscillateurs de notre anneau sont synchronisés avec un décalage de phase [6] : il est donc possible d’étudier la dynamique à travers une série temporelle issue d’un unique oscillateur de position spatiale x .

La dynamique est étudiée par des portraits de phase reconstruits sur les dérivées successives de l’intensité $I = x_1^2 + x_2^2 = |e|^2$. Un oscillateur laser isolé décrit par les équations (1) avec $A = 0$, donc dans l’espace des phases $\mathbb{R}^5(\mathbf{x}) = \mathbb{R}^5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, est étudié *via* la fonction de mesure $h : \mathbb{R}^5(\mathbf{x}) \mapsto \mathbb{R}^1(I)$ où I est l’intensité. Le portrait de phase est ensuite reconstruit avec les dérivées successives de l’intensité I , que nous noterons \mathbf{X} .

L’application $\Phi : \mathbb{R}^5(\mathbf{x}) \mapsto \mathbb{R}^5(\mathbf{X})$ est ainsi une transformation de coordonnées de l’espace des phases original $\mathbb{R}^5(\mathbf{x})$ vers l’espace reconstruit $\mathbb{R}^5(\mathbf{X})$. Φ définit un difféomorphisme si elle est injective et si $\text{Det } \mathcal{J}_\Phi \neq 0$ ($\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5(\mathbf{x})$), où \mathcal{J}_Φ est la matrice jacobienne de Φ [8]. Dans notre cas, $\text{Det } \mathcal{J}_\Phi = 0$ ($\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5(\mathbf{x})$), ce qui signifie que la dynamique n’est jamais observable à travers la mesure de l’intensité. Ceci se traduit, par exemple, par le fait que l’onde progressive dans $\mathbb{R}^5(\mathbf{x})$ devient un point singulier \mathbf{X}^* de $\mathbb{R}^5(\mathbf{X})$ correspondant à $I_0 = \bar{e}^2$ où \bar{e} est la solution laser stationnaire [4]. La perte d’observabilité est maximale pour cette onde progressive puisqu’un nombre infini d’états différents de $\mathbb{R}^5(\mathbf{x})$ possède pour image un unique point de $\mathbb{R}^5(\mathbf{X})$. Il y a alors une forte singularité associée à ce point. Nous devons raisonner sur un oscillateur isolé car il n’existe pas de théorie générale de l’observabilité pour les équations aux dérivées partielles ; toutefois la perte d’observabilité est liée à la complexité des couplages entre les variables et à la dimension du système original [9]. L’observabilité ne peut que se dégrader lors de l’inclusion de l’oscillateur dans un système spatio-temporel, ne serait-ce que parce que la dimension de l’espace des phases augmente [10].

3 Portraits de phase et sections Poincaré

L’intensité a été calculée sur l’oscillateur localisé au point $x = 0$ pour différentes valeurs du paramètre de bifurcation A . Une application de premier retour à une section de Poincaré — définie par $Y_n = \dot{I}_n = 0$ et $\dot{Y}_n < 0$ — a été calculée pour chaque valeur de A .

Le régime observé pour $A = 0.5155006$ est quasi-périodique, caractérisé par un tore T^2 (non montré). Après une bifurcation de Hopf, un autre régime quasi-périodique structuré autour d’un tore T^3 apparaît pour $A = 0.5090$ (Fig. 2b). La structure annulaire caractéristique du tore est mise en évidence en utilisant une tranche de la section de Poincaré [11], définie comme une fine couche choisie au « milieu » de la section de Poincaré. Pour retrouver la courbe fermée caractéristique des régimes quasi-périodiques, un tore T^2 doit être « tranché » une fois à l’aide de l’habituelle section de Poincaré. Un tore T^3 nécessite deux étapes : 1) une section de Poincaré dont 2) une tranche est ensuite retenue.

Le tore T^3 (Fig. 2b) est régulier (absence d’auto-intersection), ce qui se traduit par une tranche de l’application de premier retour (ici utilisée comme une reconstruction de la section de Poincaré) se présentant comme une courbe fermée dont la courbure est toujours positive (Fig. 3a). Quand $A = 0.5$, l’application de premier retour ressemble à un tore plissé (Fig. 2c) dont la tranche présente un point où la courbure est négative (Fig. 3b). La courbe de cette tranche est incomplète, la simulation devrait être plus longue pour l’obtention d’une courbe fermée.

L’explosion du tore a lieu pour $A = 0.495$ comme le montre le nuage de points organisés autour du « fantôme » du tore (Fig. 2d). La tranche de l’application de premier retour n’est maintenant plus fermée comme cela devrait l’être : de plus, elle se coupe avec elle-même. Le tore T^3 qui résulte de la crise après un plissement autour de $A = 0.5$ ne peut plus être plongé dans un espace de dimension 4 comme cela était le cas pour un tore T^3 régulier. En conséquence, l’application de premier retour pour $A = 0.49$ (Fig. 2e) présente de petits segments presque perpendiculaires à la première bissectrice localisés au voisinage du point singulier $\mathbf{X}^* = \bar{e}^2 = 29$, c’est-à-dire à une forte perte d’observabilité. La tranche d’application de premier retour associée au tore T^3 (Fig. 3c) suggère que la tranche devrait être plongée dans \mathbb{R}^3 : le tore correspondant n’est donc pas trivial et doit être plongé dans un espace de dimension au moins égale à 5.

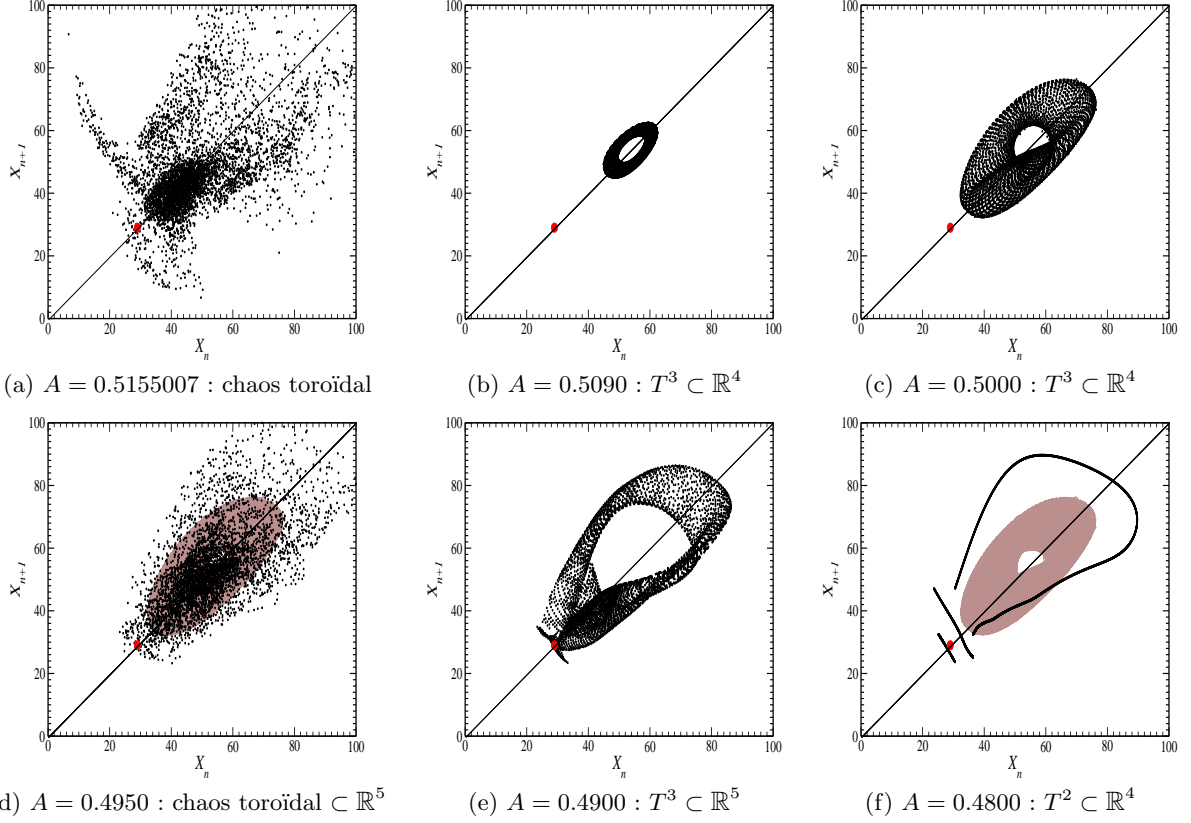


FIG. 2. Applications de premier retour à une section de Poincaré (X, Z) définie par $Y = 0$ et $\dot{Y} < 0$. Les applications sont construites à partir de la variable $X_n = I_n$, pour des valeurs décroissantes de A . Autres paramètres identiques à ceux de la Fig. 1.

En suivant le même raisonnement, l'application unidimensionnelle observée pour $A = 0.48$ (Fig. 2f) et présentant des segments disjoints implique que la dynamique se structure autour d'un tore T^2 non-trivial nécessitant d'être plongé au moins dans \mathbb{R}^4 .

La singularité ici est associée à la forte perte d'observabilité au voisinage de \mathbf{X}^* . La visite de cette singularité implique l'apparition de défauts dans les diagrammes spatio-temporels. Le régime quasi-périodique pour $A = 0.5$ est par contre associé à un diagramme spatio-temporel sans défauts (Fig. 1c) car le voisinage de \mathbf{X}^* n'est pas visité. Les défauts sont donc la signature d'une perte d'observabilité qui interdit toute estimation de la phase. Par ailleurs, c'est seulement lorsque l'attracteur chaotique croise la singularité \mathbf{X}^* que les auto-intersections de la trajectoire apparaissent, ce qui induit des défauts irréguliers dans le diagramme spatio-temporel (Fig. 1d). Quand la dynamique est de nouveau quasi-périodique ($A = 0.49$ puis $A = 0.48$), les défauts sont encore présents puisque l'attracteur visite toujours le voisinage du point singulier. Dans ce cas, les défauts correspondent à des annihilations et créations quasi-simultanées n'affectant pas la structure globale du diagramme spatio-temporel (Fig. 1e, f). Des défauts irréguliers (Fig. 1a) sont aussi observés pour l'attracteur chaotique toroidal observé en $A = 0.5155007$.

4 Chaîne de systèmes de Rössler

Avec une chaîne de 71 systèmes de Rössler [12] couplés ($\epsilon = 2$) *via* la variable y selon $\epsilon(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1})$ où j désigne le $j^{\text{ème}}$ oscillateur, nous allons montrer que les défauts dans les diagrammes spatio-temporels ne sont pas nécessairement liés à la nature chaotique de la dynamique locale. Les conditions aux limites

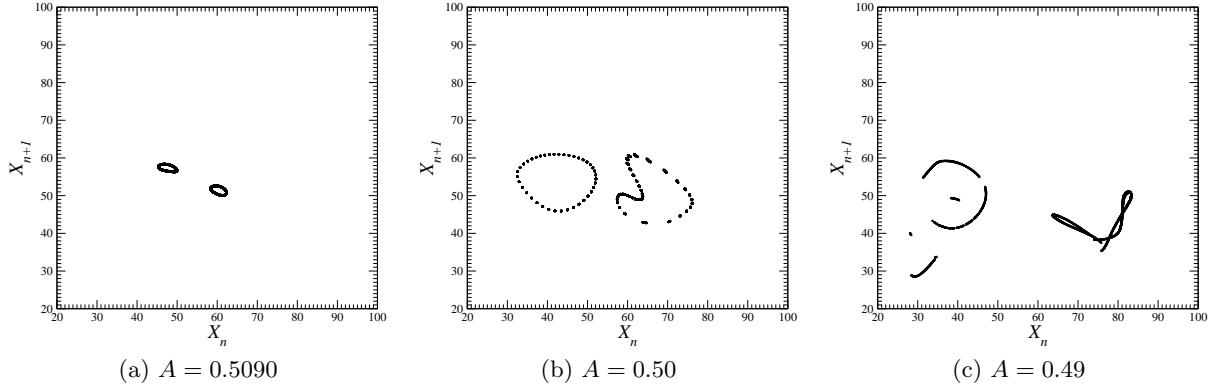


FIG. 3. Tranches des applications de premier retour à une section de Poincaré représentées en Fig. 2. Les tranches sont définies par $X_n = I_n = X_B \pm 0.06$ où X_B est la coordonnée du barycentre de l'application de premier retour. Autres paramètres identiques à ceux de la Fig. 1.

de la chaîne sont prises libres. Le système de Rössler est ici utilisé lorsqu'il produit un attracteur de type « spirale » possédant une cohérence de phase, et un autre de type « vis » possédant une incohérence de phase [13]. Les diagrammes spatio-temporels ont été calculés pour ces deux cas. Les systèmes de Rössler sont couplés par la variable y qui est une variable telle que l'application $\Phi : \mathbb{R}^3(x, y, z) \mapsto \mathbb{R}^3(y, \dot{y}, \ddot{y})$ est un difféomorphisme global, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune perte d'observabilité [9]. Seule l'incohérence de phase sera alors responsable de l'apparition de défaut.

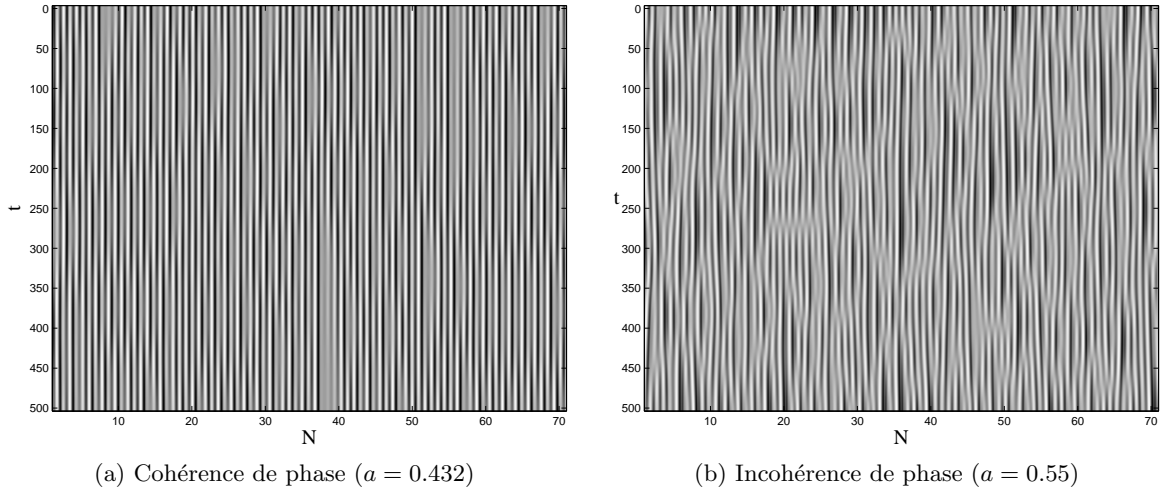


FIG. 4. Diagrammes spatio-temporels pour une chaîne de $N = 71$ systèmes de Rössler dans un régime de cohérence de phase (a) et d'incohérence de phase (b). Autres paramètres : $b = 2$, $c = 4$ et $\epsilon = 2$.

Dans le cas cohérent ($a = 0.432$), le diagramme ne présente aucun défaut (Fig. 4a). Les attracteurs sont en synchronisation de phase puisqu'il n'y a pas de dérive dans les ondes. Lorsque l'on mesure localement la variable y ($N = 1$) pour reconstruire le portrait de phase, la dynamique (chaotique) obtenue est très similaire à celle d'un système de Rössler isolé pour les mêmes valeurs de paramètres. Quand les oscillateurs produisent du chaos avec incohérence de phase ($a = 0.55$), le diagramme spatio-temporel présente clairement des défauts topologiques distribués de manière chaotique (Fig. 4b). Nous avons ainsi montré que l'incohérence de phase est ici responsable de l'apparition des défauts dans les diagrammes

spatio-temporels. Il est donc possible d'avoir une dynamique chaotique n'induisant pas de défauts dans le diagramme spatio-temporel correspondant.

5 Conclusion

La dynamique d'un système laser spatio-temporel a été analysée à l'aide de portraits de phase, d'applications de premier retour, de « tranches » de sections de Poincaré et de diagrammes spatio-temporels. Lorsque les régimes quasi-périodiques ou chaotiques sont associés à des attracteurs traversant le voisinage du point singulier \mathbf{X}^* , des défauts apparaissent dans les diagrammes spatio-temporels. Le voisinage de \mathbf{X}^* est visité de façon quasi-périodique (chaotique) lorsque le régime est quasi-périodique (chaotique). Par conséquent, la distribution des défauts dans les diagrammes reflète la nature de la dynamique.

Ainsi, l'existence de singularité dans l'application de l'espace des phases original vers l'espace reconstruit à partir de l'intensité induit des tores T^n non-triviaux, qui ne peuvent plus être plongés dans \mathbb{R}^{n+1} mais au moins dans \mathbb{R}^{n+2} . La première difficulté rencontrée avec ces tores réside dans les sections de Poincaré qui ne sont plus des courbes fermées mais des courbes avec auto-intersections et/ou sous forme de segments disjoints. De telles propriétés résultent d'un défaut d'observabilité où, par définition, la phase n'est plus définie. C'est cette perte d'observabilité qui est responsable de l'apparition des défauts dans les diagrammes spatio-temporels.

Nous avons ainsi montré que la distribution des défauts dans les diagrammes spatio-temporels reflète la dynamique avec laquelle la trajectoire visite le voisinage de singularité de l'application $\Phi : \mathbb{R}^5(\mathbf{x}) \mapsto \mathbb{R}^5(\mathbf{X})$. La distribution des défauts est ainsi une signature suffisante de la dynamique sous-jacente mais pas nécessaire. C'est ainsi que, dans le cas d'une chaîne de systèmes de Rössler, nous avons montré que des régimes chaotiques avec cohérence de phase pouvaient être observés sans aucun défaut dans les diagrammes spatio-temporels correspondants.

Références

1. M. C. CROSS & P. C. HOHENBERG, Pattern formation outside of equilibrium, *Reviews of Modern Physics*, **65** (3), 851-1123 (1993).
2. F. TAKENS, Detecting strange attractors in turbulence, *Lecture Notes in Mathematics*, **898**, 366-381 (1981).
3. S. BOCCALETTI, J. KURTHS, G. OSIPOV, D. L. VALLADARES & C. S. ZHOU, The synchronization of chaotic systems, *Physics Reports*, **366**, 1 (2002).
4. D. AMROUN, M. BRUNEL, C. LETELLIER, H. LEBLOND & F. SANCHEZ, Complex intermittent dynamics in large-aspect-ratio homogeneously broadened single-mode lasers, *Physica D*, **203**, 185-197 (2005).
5. P. K. JAKOBSEN, J. V. MOLONEY, A. C. NEWELL & R. INDIK, Space-time dynamics of wide-gain-section lasers, *Physics Review A*, **45**, 8129-8137 (1992).
6. D. AMROUN ALIANE, L. PASTUR & C. LETELLIER, Defects in spatio-temporal diagrams and their relations to phase coherence and lacks of observability, *Physics Review E*, submitted
7. J. DAVIDSEN & R. KAPRAL, Defect-mediated turbulence in systems with local deterministic chaos, *Physical Review Letters*, **91** (5), 058303 (2003).
8. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & J. MAQUET, Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics, *Physical Review E*, **71**, 066213 (2005).
9. C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Investigating nonlinear dynamics from time series : the influence of symmetries and the choice of observables, *Chaos*, **12**, 549-558 (2002).
10. C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE On the interplay among synchronization, observability and dynamics *Physical Review E*, **82**, 016204 (2010).
11. M. KLEIN, G. BAIER & O. E. RÖSSLER, From n-tori to hyperchaos, *Chaos, Solitons & Fractals*, **1** (2), 105-118 (1991).
12. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398 (1976).
13. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5** (1), 271-282 (1995).

Forme et persistance de tourbillons lenticulaires dans les écoulements stratifiés tournants : du laboratoire à la Tâche Rouge de Jupiter !

Orian Aubert¹, Michael Le Bars¹, Patrice Le Gal¹ & Philip Marcus²

¹ I.R.P.H.E., 49 rue F. Joliot-Curie, 13384, Marseille, France

² Department of Mechanical Engineering, University of California, Berkeley, CA94720, USA
aubert@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. La Grande Tâche Rouge de Jupiter et les meddies de l'Océan Atlantique sont les exemples les plus connus de tourbillons anticycloniques lenticulaires existant dans les écoulements stratifiés tournants. Leurs formes et leurs persistance restent cependant énigmatiques alors que l'existence de la Tâche Rouge de Jupiter est déjà mentionnée par Cassini au 17^{ème} siècle. Les meddies persistent quant à eux pendant plusieurs années dans l'Océan Atlantique en ayant encapsulé de l'eau méditerranéenne. Grâce à l'équilibre des différentes forces agissant sur le fluide à l'intérieur des tourbillons, il nous a été possible de comprendre leur persistance et de prédire leur rapport d'aspect vertical qui est proportionnel au rapport $\frac{f}{N}$ de la fréquence de rotation et de la fréquence de Brunt-Väisälä, multiplié par la racine du nombre de Rossby. Nos expériences montrent que cette loi d'échelle est respectée par ces tourbillons depuis l'échelle du laboratoire jusqu'à la Tâche Rouge de Jupiter.

Abstract. The Great Red Spot of Jupiter and the meddies of the Ocean Atlantic are the best known examples of anticyclonic lenticular vortices living in rotating and stratified flows. Their forms and their persistence are however rather puzzling whereas the existence of the Great Red Spot of Jupiter is already mentioned by Cassini in the 17th century. The meddies persist for several years in the Atlantic Ocean, with encapsulated mediterranean sea water. Balancing the different forces acting on the fluid inside the vortex, it was possible to understand and predict their persistence and their vertical aspect ratio which is found to be proportional to the ratio $\frac{f}{N}$ of the rotation frequency and the Brunt-Väisälä frequency, multiplied by the square root of the Rossby number. Our experiments show that this scaling law is respected by these vortices from the laboratory scale up to the Great Red Spot of Jupiter.

1 Introduction

Des écoulements très complexes ont lieu dans l'atmosphère externe de Jupiter : bandes alternées de forts vents zonaux superposées à des structures tourbillonnaires intenses et fortement turbulentes, dont la célèbre Grande Tache Rouge (GRS) qui a été observée par les astronomes depuis le 17^{ème} siècle. La GRS est une énorme structure anticyclonique de tailles typiques 25000 km de long et 12000 km de largeur. La vitesse du fluide à l'intérieur de la GRS atteint 100 km/h. Son épaisseur a été récemment évaluée à partir de mesures thermiques [1,2] à environ 46 km. En fait, ces structures tourbillonnaires ne sont pas inhabituelles dans les atmosphères des planètes géantes gazeuses, mais la GRS reste remarquable en raison de sa longévité. Des tourbillons de forme lenticulaire qui persistent à long terme ont également été observés dans les océans depuis les années 70 [3,4]. En particulier, les meddies [5] (tourbillons d'eau méditerranéenne) sont des tourbillons anticycloniques que l'on trouve essentiellement dans l'Océan Atlantique Nord-Est, et qui contiennent de l'eau chaude et salée d'origine méditerranéenne, piégée dans un coeur pouvant être relativement homogène. Les meddies ont des diamètres typiques de l'ordre de 100 km et des extensions verticales de l'ordre de 1 km. Leur durée de vie peut aller jusqu'à plusieurs années.

D'un point de mécanique des fluides, la Tâche Rouge de Jupiter et les meddies appartiennent au même type de systèmes : ceux sont des tourbillons anticycloniques qui évoluent dans un milieu stratifié tournant et qui persistent sur des durées étonnement longues. Ces deux ingrédients (rotation et stratification) ont *a priori* des conséquences antagonistes. D'une part, la stratification verticale de densité et mesurée par

la fréquence de Brunt-Väisälä $N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}}$ (où ρ , est la densité du fluide, z la coordonnée verticale et g l'accélération de la pesanteur), limite les mouvements le long du gradient de densité. D'autre part, la rotation de la planète caractérisée par le paramètre de Coriolis $f = 2 \Omega \sin \phi$, où le taux de rotation Ω de la planète est pondéré par la latitude locale ϕ . Cette force homogénéise l'écoulement le long de l'axe de rotation en accord avec le théorème de Proudman-Taylor. La stabilité des tourbillons dans un milieu en rotation est relativement bien connue [6,7] de même que la dynamique des tourbillons dans les fluides stratifiés [8,9], par contre très peu d'études ont combiné les deux effets, en particulier d'un point de vue expérimental [10]. Nous montrons ici que le compromis entre l'effet dû à la rotation d'une part et celui dû à la stratification d'autre part est la source de génération et d'équilibre de ces tourbillons cohérents et stables qui souvent possèdent une forme typique lenticulaire.

2 Etude expérimentale des tourbillons dans une cuve tournante, stratifiée en eau salée

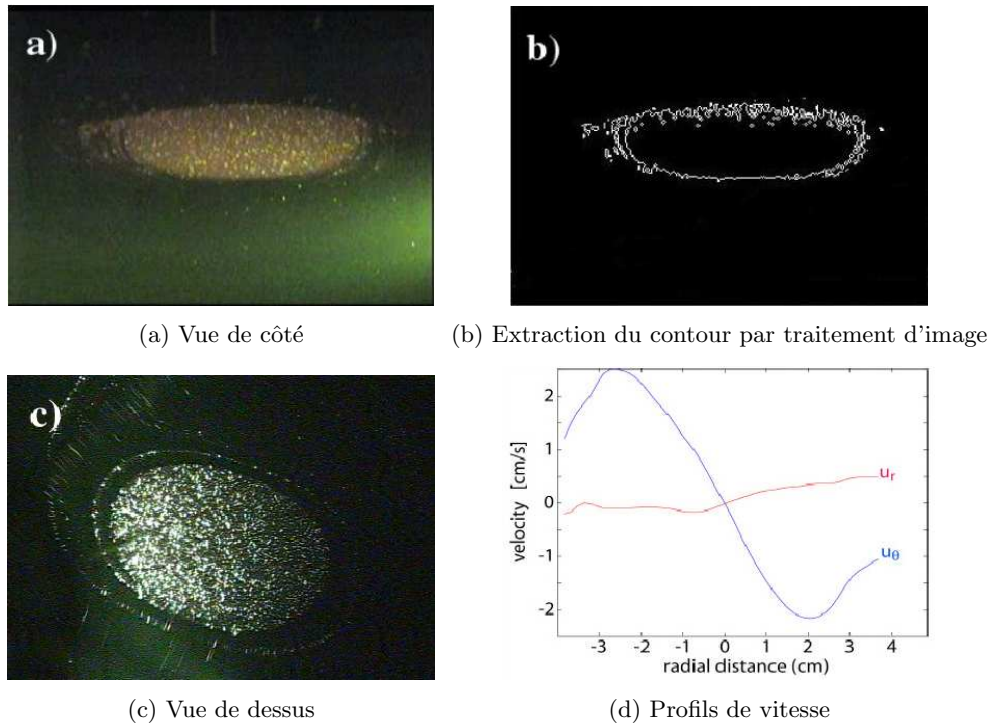


FIG. 1. Tourbillon anticyclonique généré dans notre expérience pour $N = 2.3$ rad/s, $f = 2$ rad/s. Le contour est extrait par traitement d'image afin de déterminer le rapport d'aspect $\alpha = 0.3$ (épaisseur 3.8 cm et diamètre 12.6 cm). Les profils de vitesse dans un plan horizontal et le long d'un diamètre sont obtenus par mesure PIV à partir de visualisations telles que celle de la figure (c).

Nous avons effectué une étude expérimentale systématique de tourbillons lenticulaires en ne gardant que les deux principaux ingrédients : la stratification et la rotation. La rotation est reproduite expérimentalement en utilisant un réservoir transparent de dimensions $L \times L \times H = 50 \times 50 \times 70$ cm fixé sur une table tournante. En utilisant la méthode classique dite du "double bucket", une stratification linéaire d'eau salée est réalisée dans la cuve : des stratifications avec une fréquence de Brunt-Väisälä N variant de 1,2 à 1,8 rad/s sont faciles à obtenir. Une fois l'état de rotation solide atteint (la vitesse de rotation Ω est comprise entre 0,8 et 3,5 rad/s dans nos expériences, ce qui correspond à un paramètre

de Coriolis $f = 2 \Omega$ variant de 1,6 à 7 rad/s), nous injectons suivant l'axe de rotation de la table et à la profondeur correspondante un petit volume de fluide homogène et isodensité coloré à l'aide de fluorescéine et encensé de particules de diamètre $100\mu\text{m}$ afin de réaliser de l'anémométrie par images de particules (PIV). Dès qu'il est injecté, le liquide coloré est dévié horizontalement par la stratification et la force de Coriolis l'organise rapidement sous la forme d'un anticyclone. Nous avons ensuite suivi son évolution temporelle en se servant de deux systèmes de visualisation utilisant des nappes laser et des caméras vidéo. Une coupe verticale permet de suivre l'évolution du rapport d'aspect au fil du temps par traitement d'images (Figs 1a et 1b). Une coupe horizontale suivie d'un post-traitement PIV permet de mesurer le champ de vitesse horizontale (Figs 1c et 1d) et ainsi déterminer le nombre de Rossby du vortex qui est défini par $\text{Ro} = -\Omega_v/f$ où Ω_v est la vitesse de rotation du tourbillon en son centre. Comme on le voit sur la figure 1d), le coeur du vortex est en rotation solide et la vitesse radiale u_r reste négligeable par rapport à la vitesse azimutale u_θ . Dans toutes nos expériences, cet état comme illustré sur les figures 1 persiste pendant des durées très longues d'environ 1000 à 1800 périodes de rotation, avec une atténuation progressive du nombre de Rossby.

3 Modélisation des tourbillons dans un fluide stratifié tournant

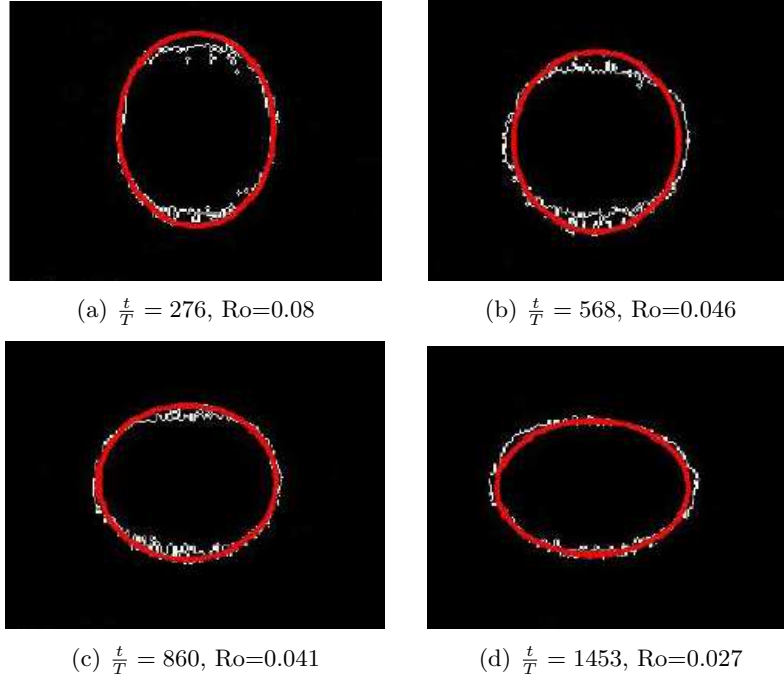


FIG. 2. Contours (en blanc) du tourbillon, extraits par traitement d'image à différents temps pour $\frac{f}{N} = 4,25$ comparés aux profils théoriques (en rouge) donnés par l'équation 2. Le volume $V = 60$ ml du vortex est déterminé par une première image par simple extrapolation de sa forme. Ro est le nombre de Rossby number mesuré par PIV à chaque temps $\frac{t}{T}$ compté en nombre de tours de la table tournante.

Dans la configuration étudiée, les équations d'Euler incompressibles linéarisées et écrites en coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans le référentiel en rotation, se réduisent à un simple équilibre géostrophique dans le plan horizontal et à un équilibre hydrostatique dans la direction verticale (équations 1). En effet, en prenant comme référence l'environnement fixe et stratifié linéairement avec $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\Delta\rho}{dz} = \text{cste}$, où $\Delta\rho(z)$ est la stratification imposée linéaire, nous supposons que l'intérieur du tourbillon est en rotation solide anticyclonique $u_\theta = -\Omega_v r$ et caractérisé par l'anomalie de densité $\rho' = -\Delta\rho(z)$. Les équations

s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho_0 f u_\theta = -\rho_0 f \Omega_v r \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho' = -N^2 \rho_0 z \end{cases} \quad (1)$$

où p est l'anomalie de pression entre l'intérieur et l'extérieur du tourbillon. Une anomalie locale ρ' de densité crée un gradient de pression, qui génère à son tour la vitesse azimutale. En réalité, la viscosité assure la continuité du profil de vitesse à la frontière du tourbillon provoquant ainsi la lente décroissance du nombre de Rossby. Néanmoins, les équations 1 restent valables car cette évolution se fait de manière quasistatique.

L'intégration du système d'équations 1 donne la pression à n'importe quel endroit (r, z) dans le tourbillon, en fonction d'une simple inconnue p_{00} correspondant à la pression au centre du tourbillon. A l'extérieur de celui-ci, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ et $p = 0$. La forme auto-similaire du tourbillon est alors obtenue par la continuité de l'anomalie de pression avec l'environnement :

$$p_{00} = \rho_0 \frac{Ro f^2}{2} r^2 + \rho_0 \frac{N^2}{2} z^2 \quad (2)$$

A partir de cette équation, il est possible d'obtenir la loi d'échelle pour le rapport d'aspect α entre l'épaisseur et le diamètre du vortex : $\alpha = (f/N) Ro^{1/2}$. Ce résultat est le résultat principal de notre étude. La proportionnalité entre α et le rapport de f/N avait déjà été établie par les expériences de Hedstrom & Armi [10], mais la dépendance en Ro qu'ils avaient trouvée était linéaire, alors que nous prétendons qu'elle est en $Ro^{1/2}$. Cependant, il semble que dans leurs expériences, les tourbillons étaient au moment des mesures encore non-axisymétriques, avec des éjections de vorticité dans l'environnement stratifié. Ainsi, nous pensons que les tourbillons produits dans cette expérience n'étaient pas en équilibre géostrophique. L'équation donnant la forme du vortex permet de déterminer le volume V de fluide à l'intérieur du vortex, volume qui est directement lié à la pression interne inconnue p_{00} par l'équation suivante :

$$p_{00} = \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{9 V^2 Ro^2 N^2 f^4}{4 \pi^2} \right)^{1/3} . \quad (3)$$

Un exemple de l'évolution temporelle d'un vortex dans le plan vertical est représenté sur la figure 2. Après l'injection, l'équilibre du tourbillon étant obtenu, nous déterminons la meilleure valeur de p_{00} pour dessiner le contour du vortex. Cette valeur de p_{00} permet alors de déduire le volume de fluide à l'intérieur du vortex. En supposant qu'il n'y a pas de perte de ce volume au cours de l'évolution du tourbillon, p_{00} est alors recalculée pour chaque image avec le nombre de Rossby déterminé simultanément par des mesures PIV dans le plan horizontal. Les formes théoriques obtenues se superposent remarquablement bien avec les vrais contours pour les temps longs comme le montre la figure 2. Notons qu'aucun paramètre ajustable autre que le volume initial n'a été utilisé pour la prédiction qui s'avère être remarquable.

4 La longévité exceptionnelle des tourbillons en milieu stratifié tournant

Comme nous l'avons déjà indiqué, la source de l'équilibre interne du tourbillon provient de l'anomalie de densité : le tourbillon persiste aussi longtemps que cette anomalie existe. Dans nos expériences, la disparition de l'anomalie de densité est essentiellement due à la diffusion du sel à l'interface du vortex. Pour vérifier cela, nous avons effectué des simulations numériques directes de notre écoulement. A partir d'un volume de fluide homogène et isodensité placé dans un environnement salin stratifié linéairement, on résout numériquement les équations de Navier-Stokes axisymétriques couplées à une équation d'advection-diffusion pour la concentration en sel. Nous avons ensuite suivi l'évolution temporelle du nombre de Rossby pour plusieurs valeurs de la diffusion du sel représenté par le nombre de Schmidt. Les résultats présentés sur la figure 3 confirme que l'échelle de temps de l'évolution du tourbillon est directement liée au nombre Schmidt. Dans nos expériences comme dans l'océan, ce nombre vaut $Sc = 700$ et on peut

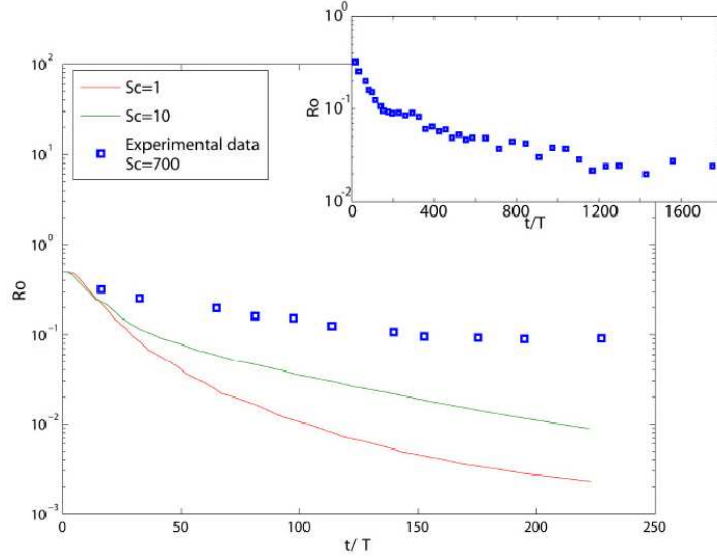


FIG. 3. Evolution du nombre de Rossby d'un vortex en fonction du temps. Mesures expérimentales (carrés) comparées aux résultats des simulations numériques directes (lignes pleines) pour plusieurs valeurs de la diffusivité du sel mesurée par le nombre de Schmidt. L'évolution expérimentale à temps très longs est représentée dans l'encart.

remarquer que la durée de vie meddies est de l'ordre de 4 ans, ce qui donne à près de 1400 périodes de rotation de la Terre ce qui correspond tout-à-fait avec la durée de vie de nos tourbillons expérimentaux en termes de nombre de tours de la table. Dans l'atmosphère de Jupiter, les processus de diffusion sont très rapides, mais les effets thermiques dynamiques doivent également être prises en compte. Comme le montre Marcus et al. [12], le rayonnement rapide de la chaleur à la surface de la GRS est compensé par une forte recirculation à l'intérieur du vortex, qui est en conséquence entièrement mélangé. Ainsi, l'anomalie de densité est maintenue en continu et les équations d'équilibre 1 restent valables.

5 Loi d'échelle universelle : du laboratoire à la tâche rouge de Jupiter

Pour comparer directement les résultats expérimentaux avec des mesures d'objets géophysiques, les valeurs trouvées dans la littérature correspondant à la Tâche Rouge de Jupiter et aux meddies [13,14,15] ont été placés dans un graphe ($\alpha N/f, Ro^{1/2}$) dans la figure 4. Y compris pour nos données expérimentales, la plage de nombre de Rossby couverte va de 0,02 à 0,3 et les gammes de $\alpha N/f$ de 0,13 à 0,6. Comme on peut le constater sur la figure, tous les points suivent la même tendance linéaire, montrant l'universalité de notre mise à l'échelle $\alpha = (f/N) Ro^{1/2}$.

6 Conclusion

En conclusion, nous avons démontré par cette étude que les tourbillons anticycloniques en milieu stratifié tournant ont des formes typiques dont le rapport d'aspect suit une loi d'échelle universelle qui peut être dérivée des premiers principes de la mécanique des fluides. L'exceptionnelle longévité de ces tourbillons provient de la persistance d'une anomalie de densité, qui est maintenue sur une durée beaucoup plus grande que l'échelle de temps visqueux, puisque dictée par la lente diffusion chimique au sein du fluide. Ce comportement validé par des expériences de laboratoire s'applique universellement à des vortex géophysiques et en particulier à la Tâche Rouge de Jupiter.

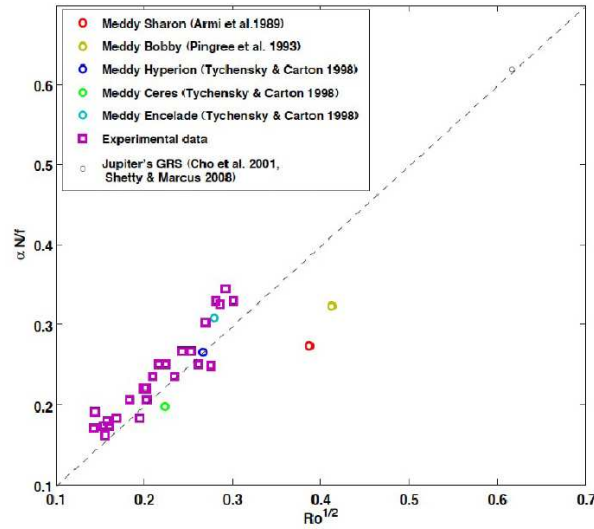


FIG. 4. Vérification de la loi d'échelle par les résultats expérimentaux, les données concernant la Tâche Rouge de Jupiter et les données pour différents Meddies connus dans la littérature.

Références

1. J. Y.-K. CHO, M. DE LA TORRE JUAREZ, A. P. INGERSOLL & D. G. DRITSCHER, A high resolution, three-dimensional model of Jupiter's Great Red Spot, *Journal of Geophysical Researches*, **106**, 5099-5105 (2001).
2. S. SHETTY, & P. S. MARCUS, Changes in Jupiter's Great Red Spot, *soumis*.
3. J. C. MACWILLIAMS, Submesoscale coherent vortices in the ocean, *Reviews in Geophysics*, **23**, 165-183 (1985).
4. D. B. OLSON, Rings in the ocean, *Annual Review in Earth and Planets Science*, **19**, 283-311 (1991).
5. L. ARMI & W. ZENK, Large lenses of highly saline Mediterranean water, *Journal of Physical Oceanography*, **14**, 1560-1576 (1984).
6. E. J. HOPFINGER & G. J. F. VAN HEIJST, Vortices in rotating fluids, *Annual Review in Fluid Mechanics*, **19**, 283-311 (1991).
7. G. J. F. VAN HEIJST & H. J. H. CLERCX, LABORATORY MODELING OF GEOPHYSICAL VORTICES, *Annual Review in Fluid Mechanics*, **41**, 143-164 (2009).
8. P. BILLANT & J.-M. CHOMAZ, EXPERIMENTAL EVIDENCE FOR A NEW INSTABILITY OF A VERTICAL COLUMNAR VORTEX PAIR IN A STRONGLY STRATIFIED FLUID, *Journal in Fluid Mechanics*, **418**, 167-188 (2000).
9. R. GODOY-DIANA, J.-M. CHOMAZ & P. BILLANT, VERTICAL LENGTH SCALE SELECTION FOR PANCAKE VORTICES IN STRONGLY STRATIFIED VISCOUS FLUIDS, *Journal in Fluid Mechanics*, **504**, 229-238 (2004).
10. K. HEDSTROM & L. ARMI, AN EXPERIMENTAL STUDY OF HOMOGENEOUS LENSES IN A STRATIFIED ROTATING FLUID, *Journal in Fluid Mechanics*, **191**, 535-556 (1988).
11. L. ARMI, D. HEBERT, N. OAKEY, J. PRICE, P. L. RICHARDSON, T. ROSSBY & B. RUDDICK, THE HISTORY AND DECAY OF A MEDITERRANEAN SALT LENS, *Nature*, **333**, 649-651 (1988).
12. P. S. MARCUS, X. ASAY-DAVIS, M. H. WONG & I. DE PATER, Jupiter's new red oval : dynamics, color and relationship to Jovian climate change, *soumis*.
13. L. ARMI, H. DAVE, N. OAKEY, J. F. PRICE, P. L. RICHARDSON, H. T. ROSSBY & B. RUDDICK, Two years in the life of a Mediterranean salt lens, *Journal on Physical Oceanography*, **19**, 354-370 (1989)
14. R. D. PINGREE & B. LE CANN, A shallow meddy (a smeddy) from the secondary Mediterranean salinity maximum, *Journal in Geophysical Researches*, **98** (C11), 169-185 (1989)
15. A. TYCHENSKY & X. CARTON, Hydrological and dynamical characterization of Meddies in the Azores region : A paradigm for baroclinic vortex dynamics, *Journal on Geophysical Researches*, **103** (C11), 61-79 (1989).

Etude d'une équation de convection-réaction-diffusion en écoulement compressible

Federico Bianco, Sergio Chibbaro, & Roger Prud'homme

Institut Jean le Rond d'Alembert — Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05
bianco@dalembert.upmc.fr

Résumé. Nous avons étudié la propagation d'un front de flamme dans une configuration unidimensionnelle en solvant numériquement une équation de advection-diffusion-réaction (ADR). Nous avons choisi un modèle simplifié dans lequel le couplage avec d'autres phénomènes est négligé et le fluide réactant est une mixture de gaz. En outre, la vitesse de l'écoulement compressible est donnée de façon analytique. A l'aide de la simulation numérique nous analysons la différence entre différents modèles qui sont communément utilisés dans les études fondamentales en combustion et en biologie. Puis nous avons caractérisé l'effet de la compressibilité sur la dynamique du front et dans quelles conditions il est possible que la flamme s'éteigne avant la saturation de la réaction.

Abstract. We have studied the front propagation in a one dimensional case of combustion by solving numerically an advection-reaction-diffusion equation. The physical model is simplified so that no coupling phenomena are considered and the reacting fluid is a binary mixture of gas. The compressible flow field is given analytically. We analyse the differences between popular models used in fundamental studies of compressible combustion and biological problems. Then, we investigate the effects of compressibility on the front interface dynamics for different reaction types and we characterise the conditions for which the reaction stops before its completion.

1 Introduction

Transport of reacting species advected by laminar or turbulent flows described by an advection reaction diffusion equation (ARD), is an issue of interest in many fields, e.g., population dynamics, propagation of plankton in oceanic currents, reacting chemicals in the atmosphere, ozone dynamics, complex chemical reactions, and combustion. While these phenomena have been and are being widely studied in the case of incompressible flows, the transport of reactive species advected by compressible flows is less discussed. Only recently has been extended to the study of population dynamics [1]. Combustion processes are particularly complex because they involve a large number of chemical species and a large number of reactions. In addition, the concentration of these species, and the release of chemical energy during reactions, greatly affect the flow field of the fuel and oxidizer mixture. Consequently, the numerical study of this phenomenon requires the solution of a large number of coupled partial difference equations (conservation of species, momentum conservation and energy conservation).

The complexity can be greatly reduced if we minimize the physical details. In particular, if we neglect the effects of the coupling between the various equations and we minimize the number of species, combustion can be described approximately by an advection reaction diffusion equation :

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) = \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) + s \quad (1)$$

which describes the spatio-temporal behavior of a fraction ϕ of the reactive mixture which moves with velocity \mathbf{u} . The mean density of the mixture is ρ , $\gamma = \rho D$ is the diffusion coefficient and s is the source term.

Although there is a strong connection between the study of population dynamics and combustion, as the simplified mathematical model is equivalent when we consider incompressible flows, in the case of compressible flows we will show briefly that the parallelism requires a little more attention.

2 Model

If we consider a compressible reactive flow, and if the fluid is a mixture of N perfect gas, the local total mass balance over a volume V gives

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2)$$

where $\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_k \rho_k$ is the density of the mixture and $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ is the resultant velocity field [2,3]. This equation is the summation over the N mass species conservation

$$\frac{\partial \rho c_k}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{u} + \mathbf{v}_k)c_k] = R_k \quad (k = 1, \dots, N) \quad (3)$$

where $c_k(\mathbf{x}, t)$ is the mass fraction (ρ_k/ρ), $\mathbf{v}_k(\mathbf{x}, t)$ and R_k are the diffusion velocity and the reaction rate of the k th species, respectively. Of course, by definition, $\sum_{k=1}^N R_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_k c_k = 0$ as mass cannot be generated during chemical reactions.

If the mixture contains only two species, the pressure gradients are small, and volume forces are neglected [2]. Equation (3) for the k th species can be expressed as

$$\rho \frac{dc_k}{dt} = \rho \left[\frac{\partial c_k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c_k \right] = \nabla \cdot (\rho D \nabla c_k) + R_k \quad (k = 1, 2) \quad (4)$$

where the diffusion velocity is rewritten according to Fick's law. Equation (4) describe the spatio-temporal behavior of the fractions (c_1, c_2) of a binary reacting mixture in a compressible velocity field. Such as, for example, the fresh air as well as the burnt gas in a combustion reaction. If D is constant, equation (4) in conservative form becomes

$$\frac{\partial \rho c_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} c_k) = D \nabla \cdot (\rho \nabla c_k) + R_k \quad (k = 1, 2). \quad (5)$$

If D and ρ are constant, equation (4) becomes the widely studied incompressible advection-reaction-diffusion equation with constant diffusion coefficient. Equations (4) and (5) differ from the equation

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \theta) = D_0 \nabla^2 \theta + F(\theta) \quad (6)$$

which is often found in literature [1,4] to describe the advection, diffusion and reaction of a scalar in a compressible flow. This equation is typical for studying the population dynamics and the scalar $\theta(\mathbf{x}, t)$, which is the concentration of a population [1]. However, this model is not correct for the concentration of combustion products. In fact, in equation (6), if $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$, the concentration θ can take values greater than one because this is not a fractional parameter. Notably if one considers the Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov reaction rate (FKPP) [5], the rate of grow ($F(\theta) = \alpha c(1 - c)$) in equation (6), if not correctly rescaled, can take negative values. This could be in agreement with the population dynamics point of view but is formally incorrect for the chemical reactions during a combustion.

2.1 Problem statement and numerical details

We have considered for simplicity a one dimensional case in which there is no feedback from the reaction rate, to the velocity field of the mixture. The velocity field is steady state and analytical so that the total mass balance becomes

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho u = \rho \left[1 + U_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] = \text{constant} = \beta = 1 \quad (7)$$

where U_0 is a parameter defined on the interval $[0, 1]$ and $L = 1$ is the length scale of the velocity field. As shown in Fig. 1, when $U_0 = 0$ the mixture moves with constant velocity, the density is constant and

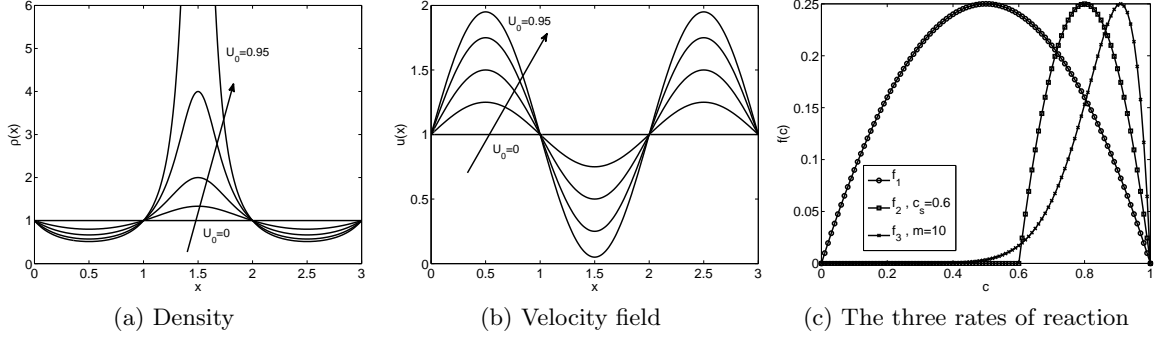


FIG. 1. Density (a) and velocity field (b) of the mixture as function of parameter U_0 . In (c) the three rates of reaction considered as function of the mass fraction : the FKPP reaction (f_1); the ignition type reaction (f_2) with threshold $c_s = 0.6$ and the general m th order Fisher reaction (f_3) with $m = 10$.

the problem becomes incompressible. On the other hand if U_0 tends to one the density varies very rapidly between 0.5 and the infinity.

If we consider the product $\rho D = \gamma$ constant and we collect and replace the velocity u with its analytic function, equation (4) becomes

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \left[1 + U_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \left(\frac{\gamma}{\beta} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) + f(c). \quad (8)$$

In this case, and later on, we will refer to $c(x, t)$ as the mass fraction of the reacted products, like the mass fraction of burnt gas in a combustion reaction. If only D is constant the balance equation for the burnt gas (5) gives :

$$\frac{\partial c^+}{\partial t} = u \left[\frac{D}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial c^+}{\partial x} \right) - \frac{\partial c^+}{\partial x} \right] + f(c^+). \quad (9)$$

If we use equation (6) instead, we will get the following one-dimensional ARD equation

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - u \frac{\partial \theta}{\partial x} - \theta \frac{\partial u}{\partial x} + f(\theta). \quad (10)$$

We will consider three different non-linear rates of reaction, as shown in Fig. 1c. The FKPP non linear rate of reaction or autocatalytic reaction is

$$f_1(c) = \alpha_1 c(1 - c). \quad (11)$$

The ignition type rate of reaction is

$$f_2(c) = \begin{cases} 0 & \text{if } c \leq c_s \\ \alpha_2 (c - c_s)(1 - c) & \text{if } c > c_s \end{cases} \quad (12)$$

and the general m th order Fisher's non-linearity :

$$f_3(c) = \alpha_3 c^m (1 - c). \quad (13)$$

If we use equations (8) and (9) c is defined in the interval $[0, 1]$. The reaction rates then, by definition, are always positives or zero which means that the reaction is irreversible. As we will show soon this is not true for equation (6). The constants α_1 , α_2 and α_3 are chosen so that $\max(f_i(c)) = \alpha_1/4$. In this way reactions have different reaction rates but with comparable characteristic times. Equations (8), (9) and (10) have been solved numerically using a fourth order finite different scheme for spatial discretization and a fourth order Runge-Kutta method for time advancement. The numerical domain has a dimension $L_x = nL$, where n is an even natural number, and periodic boundary condition have been applied.

3 Results

First of all we are interested in how the compressibility affects the time and the spatial behaviour of the fraction of burnt gas. We will solve now equation (8) setting up an initial condition for $c(x, t)$ as :

$$c(x, t = 0) = \exp \left[\frac{-(x - x_0)^2}{\sigma_0} \right]. \quad (14)$$

Results are shown in Fig. 2. If we focus just the front interface, it is possible to identify a general behavior : when $U_0 = 0$, the test case collapses to an incompressible advection-diffusion-reaction case where $u(x, t) = 1$ and $D_0 = \frac{\gamma}{\beta} = \gamma$ (as $\beta = 1$). Therefore, the burnt fraction moves with a constant velocity while it diffuses. The front interface is smooth end follows an exponential law.

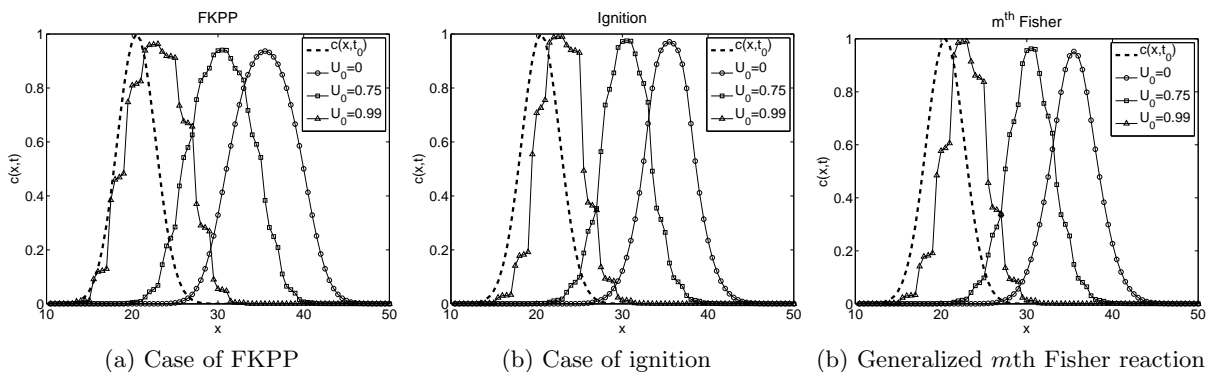


FIG. 2. In continuous line, the mass fraction of burnt gas after a transient of $t = 15$. In dashed line the initial condition where $x_0 = 20.5$ and $\sigma_0 = 10$. Parameter $\frac{\gamma}{\beta} = 0.1$ ($\beta = 1, \gamma = 0.1$) and coefficient $\alpha_1 = 0.1$ are such that the maximum rate of reaction is $\max(f_i) = 0.025$. In the case of ignition reaction the threshold was set up $c_s = 0.6$ while the exponent on the general Fisher non linearity is $m = 10$. Having fixed the grid step $dx = 0.025$ and the time step $dt = 0.0005$ we have run different simulations varying the coefficient U_0 .

By increasing U_0 the front interface becomes more and more uneven. When U_0 tends to one, it becomes discontinuous. Moreover, the barycentric velocity of burnt fraction decreases by increasing U_0 . These simulations were then repeated by solving equations (8) and (10) in the case of FKPP reaction (Fig. 3). We set up in both cases $D = \gamma = 0.1$ and the initial condition $c(x, t_0) = c^+(x, t_0) = \theta(x, t_0)$. The numerical method can be said to be validated since the three models are completely equivalent when $U_0 = 0$, where the three equations degenerate in the case of incompressible flow. Moreover, increasing U_0 but keeping it fairly low, there are no particular differences between the results obtained from equations (8) and (10). In this range of U_0 , the hypothesis ρD constant is not far from the hypothesis D constant. Nevertheless results are different from those obtained through the model represented by equation (10). Peaks of the concentration appear in proximity of the density peaks of the fluid. Increasing U_0 , we increase the compressibility and the concentration appears more and more peaked. Here, θ has values higher than the unity and hence confirming that in such areas the reaction rate is negative. For U_0 tending to unity, the differences between the three equations are particularly marked. The diffusion model becomes particularly important since it is found, as expected, a relevant difference between the results from equations (8) and (9).

We consider now the ignition reaction and we study under which condition the reaction blows off. That is when the reaction stops before being completed. The phenomena can be studied by following in time the mass fraction of burnt gas which is defined, in normalized form, as :

$$m_b(t) = \frac{\int_0^{L_x} c(x, t) \rho(x) dx}{\int_0^{L_x} \rho(x) dx}. \quad (15)$$

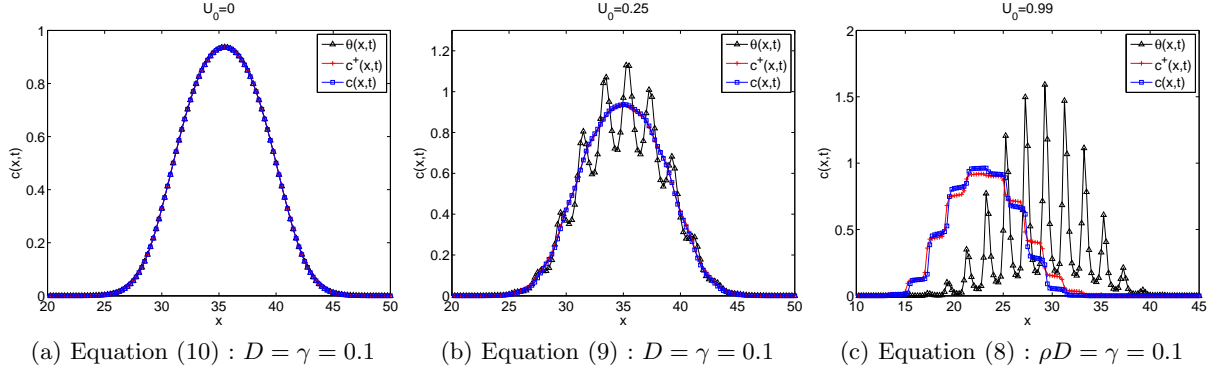


FIG. 3. Comparison between results from equations (10), (9) and (8) after a transient of $t = 15$ by increasing U_0 . The reaction rate is an FKPP type, the initial condition $c(x, t_0) = c^+(x, t_0) = \theta(x, t_0)$ with $x_0 = 20.5$ and $\sigma_0 = 10$, the grid step $dx = 0.025$ and the time step $dt = 0.0005$.

If the reaction does not blow off, m_b saturates to one. Otherwise, it stabilize to a lower value, which means that the fractions are no longer reacting.

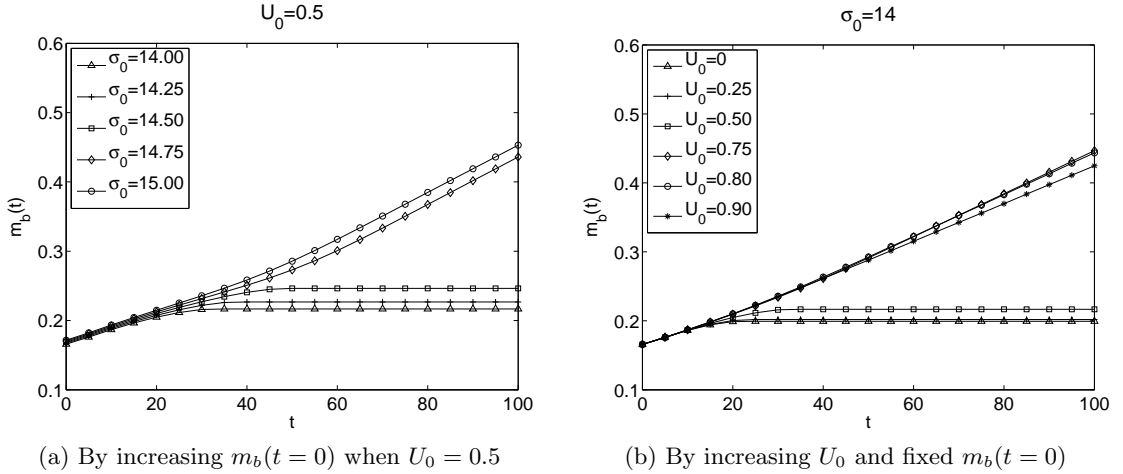


FIG. 4. Mass of burnt gas (m_b) as function of time. The ignition rate of reaction with threshold $c_s = 0.7$ is considered. Parameter values : $\alpha_2 = \frac{0.1}{(1-c_s)^2} = 1.111$ and the diffusion coefficient $\rho D = 0.4$.

We set up an initial condition as in (14) and we have varied σ_0 , having fixed $U_0 = 0.5$, until the blow-off phenomena occur. Results are shown in Fig. 4 which confirms that, in the case of relatively high diffusion and slow reactions, if the initial burnt fraction is too low the reaction can quench. Then, if we fix the initial burnt fraction, Fig. 4 shows that by increasing the compressibility of the flow field (increasing U_0) the blow-off phenomena can disappear. In particular, there is a maximum value of $U_0 \in [0.75, 0.8]$, for which the reaction quenches with more difficulty. We have then studied the possibility of blow-off when the m^{th} order Fisher's reaction is applied. The approach has been the same, so that we firstly fixed $U_0 = 0.5$ studying a range of σ_0 for which the blow off appears and then we fixed σ_0 studying the effects of compressibility. The reaction never blows off as shown in Fig. 5.

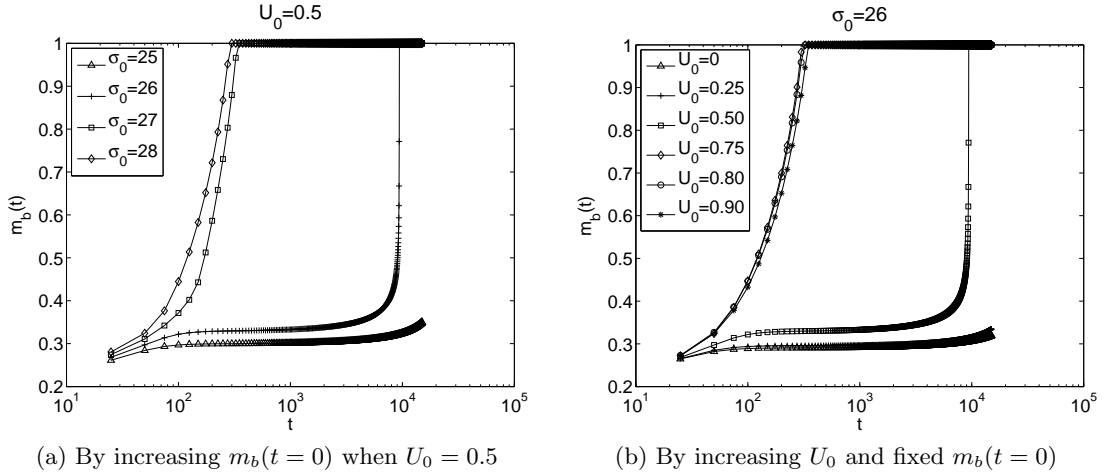


FIG. 5. Mass of burnt gas (m_b) as function of time. The general m th order with $m = 10$ reaction is considered. The parameter α_3 is such as $\max[f_2(c)] = \max[f_3(c)]$ and $\rho D = 0.4$.

4 Conclusion

This brief analysis has helped us to shed some light to the possibility of extending the models, typically used on the study of population dynamics, to the simplified advection-reaction and diffusion of the products of a combustion. In particular we showed that equation 6 applied to compressible flow fields leads to peaks of the concentration θ greater than unity. This means that, unless we rescale correctly the reaction term, the rate of reaction can take negative values. Since combustion is an irreversible process a suitable reaction term has to be positive or at least zero. We also studied the blow off phenomena which is typical for the ignition like reactions. We highlight then the role of compressibility of the flow field noting that by increasing the parameter U_0 , as long as lower than 0.8, the efficiency of the reaction increases. At last, we have studied the blow off phenomena when general m th order Fisher reaction was applied. For these kind of reactions this phenomena does not occur because even for very low concentration of the combustion products the reaction rate is still greater than zero.

Références

1. P. PERLEKAR, R. BENZI, D. R. NELSON & F. TOSCHI, Population dynamics at high Reynolds number, *Physical Review Letters*, **105** (14), 144501 (1975).
2. T. POINSOT & D. VEYNANTE, *Theoretical and numerical combustion*, Edwards (2005).
3. R. PRUD'HOMME, *Flows of reactive fluids*, Springer (2010)
4. S. BERTI, D. VERGNI & A. VULPIANI, Combustion dynamics in steady compressible flows, *European Physics Letters*, **83**, 54003 (2008).
5. A. KOLMOGOROV, I. PETROVSKY & N. PISCOUNOFF, Combustion dynamics in steady compressible flows, *Bulletin de l'Université d'Etat à Moscou*, **1** (1) (1937).

Quantification de la qualité du sommeil par entropies de Shannon

D. Bounoiare^{1,2}, A. Portmann¹, R. Naeck^{1,2}, U. S. Freitas^{1,3}, A. Cuvelier¹, J.-F. Muir¹, & C. Letellier²

¹ GRHV UPRES EA 3830, CHU de Rouen — Université de Rouen, France

² CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

³ ADIR Association, Hôpital de Bois-Guillaume, CHU de Rouen, France

bounoiare@coria.fr

Résumé. L'estimation de la qualité du sommeil demeure un problème délicat à appréhender en raison des multiples facteurs susceptibles de l'affecter comme l'âge. A cela s'ajoute l'absence de normes claires. Des indicateurs comme l'indice (pondéré ou non) de fragmentation du sommeil ont été introduits mais ils présentent des limitations dans leurs applications ou leur construction. Aussi, nous introduisons ici deux entropies de Shannon construites sur deux diagrammes de proches retours, eux-mêmes basés sur les hypnogrammes. Ces deux entropies sont respectivement corrélées à la fragmentation et à l'efficacité du sommeil, deux indicateurs importants dans l'estimation de la qualité du sommeil. L'apport de nos deux entropies est qu'elles prennent en compte, par définition, la distribution avec laquelle les événements surviennent durant la nuit.

Abstract. Estimating sleep quality remains a difficult problem due to the multiplicity of factors which may affect it. Moreover, there is a lack of standard indicators to assess sleep quality. Indicators like the (weighted or not) sleep fragmentation index have been introduced but they have their own limitations in their applications or by construction. Thus, we propose two new indicators, namely two Shannon entropies, built from close returns diagrams, themselves based on classic hypnograms. These two entropies are respectively correlated to the sleep fragmentation and the sleep efficiency, two relevant indicators for assessing the sleep quality. The point is that our two entropies, by definition, take into account the way according which the events are distributed during the night.

1 Introduction

La somnolence diurne excessive est le symptôme cardinal de désordres du sommeil conduisant notamment à une détérioration de la « continuité » de ce sommeil et de sa capacité récupérative. La quantification de la « fragmentation du sommeil » est donc un enjeu majeur pour l'estimation de la qualité du sommeil, mais il n'est pas le seul. L'un des premiers quantificateurs proposés fut le taux de transitions au stade 1 du sommeil [2]. Puis, il fut montré que les micro-éveils avaient une corrélation significative avec les scores de tests de latence multiples du sommeil [3]. Ce n'est qu'une fois que les micro-éveils furent bien définis [4], qu'ils furent régulièrement utilisés comme un indicateur de la fragmentation du sommeil [5]. Il reste que la corrélation avec la somnolence diurne excessive n'est pas toujours acquise [5,6] ; pourtant lorsque des quantificateurs du sommeil sont introduits, c'est toujours par rapport à l'indice de micro-éveils qu'ils sont évalués [7,8].

Puisque la corrélation entre le taux de fragmentation du sommeil [7] et le taux de micro-éveils obtenu lors de polysomnographies d'insuffisants respiratoires chroniques sous assistance ventilatoire non invasive était plus faible qu'annoncée [7], nous proposons ici un nouvel indicateur de fragmentation du sommeil : il repose sur une entropie de Shannon estimée à partir d'un diagramme de proches retours [9]. L'avantage d'une entropie de Shannon par rapport à l'indice de fragmentation du sommeil (IFS) [7] ou de l'indice pondéré de fragmentation du sommeil (IPFS) [8] est qu'elle tient compte de la durée de chaque fenêtre sur laquelle le stade de sommeil demeure inchangé. De manière à ne tenir compte que des phases de sommeil, comme c'est le cas pour le calcul du taux de micro-éveils, la construction du diagramme de proches retours a également été modifiée de manière à optimiser la corrélation entre l'entropie et le taux de micro-éveils qui est maintenant de $r = 0,60$. Par ailleurs, une seconde entropie de Shannon est construite à partir du diagramme de proches retours pour estimer l'efficacité du sommeil.

2 Méthode

Les données cliniques ont été enregistrées au laboratoire de sommeil du service de pneumologie de l'hôpital de Bois-Guillaume du CHU de Rouen. Les patients étaient insuffisants respiratoires chroniques et étaient sous assistance ventilatoire non invasive. Les patients de cette étude souffrent de deux types d'insuffisance respiratoire chronique. Le premier type est lié au syndrome obésité-hypoventilation (SOH) qui se définit par l'existence d'une insuffisance respiratoire hypercapnique ($\text{PaO}_2 < 70 \text{ mmHg}$, $\text{PaCO}_2 \geq 45 \text{ mmHg}$) chez un sujet obèse ($\text{IMC} > 30 \text{ kg.m}^{-2}$) qui ne présente par ailleurs aucune autre cause d'insuffisance respiratoire [10] : cette affection ne touche toutefois qu'environ 10% des obèses sévères. Le second type se désigne comme la Broncho-Pneumopathie Chronique Obstructive (BPCO). Il se réfère à une obstruction des petites voies aériennes et un emphysème, deux atteintes qui conduisent à une limitation du débit entraînant une augmentation de la fréquence ventilatoire. Les principales caractéristiques de nos patients sont reportées Tab. 1. 19 patients étaient hypercapniques.

TAB.1. Principales caractéristiques cliniques des patients ($n = 35$).

Paramètres	Moyenne	(SD)
Age (années)	64,1	(11,8)
Homme :Femme	22 :11	
IMC (kg.m^{-2})	42,0	(10,8)
PaO_2 (kPa)	9,5	1,2
PaCO_2 (kPa)	5,8	(0,9)
Cause d'IRC	n	(%)
BPCO	14	(42)
SOH	19	(58)

Valeurs normales : ($10,7 < \text{PaO}_2 < 12,0$) cmH_2O , $\text{PaCO}_2 \approx 5,3 \text{ cmH}_2\text{O}$, ($18,5 < \text{IMC} < 25$) kg.m^{-2} et l'obésité se définit par un $\text{IMC} > 30 \text{ kg.m}^{-2}$. IRC = Insuffisance Respiratoire Chronique. IMC = Indice de Masse Corporelle.

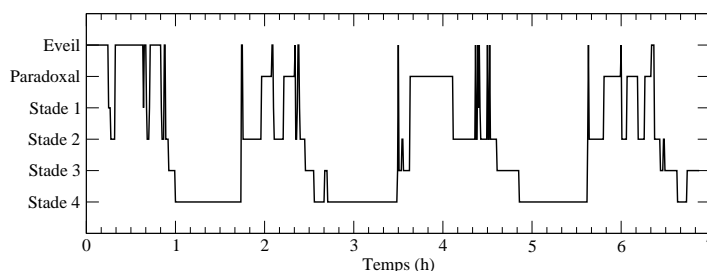


FIG. 1. Exemple d'hypnogramme obtenu après codage de la polysomnographie par la neurologue experte. Cas du patient #35.

Deux enregistrements ont été retirés en raison d'artéfacts (par le signal cardiaque par exemple). Les patients étaient à l'hôpital pour une polysomnographie de routine, une technique standard d'évaluation du sommeil. Les enregistrements ont été effectués avec un polysomnographe de la société CIDELEC (France) : ils étaient constitués de deux voies électroencéphalographiques pour lesquelles les électrodes étaient dans les positions C_4-A_1 , C_3-A_2 , deux électrodes pour électro-oculogrammes, un électro-myogramme au niveau du menton, la mesure de l'évolution du débit et de la pression au sein du circuit de ventilation. Comme dans toute analyse polysomnographique, les enregistrements ont été codés manuellement par une neurologue experte en sommeil. Le codage a été réalisé selon les critères de Rechtschaffen et Kales [11]. Les six stades codés sont l'éveil, le sommeil lent léger (stades 1 et 2), le sommeil lent profond (stades 3 et 4), et le sommeil paradoxal (stade 5). Dans une deuxième lecture, les micro-éveils ont également été codés selon les indications de l'American Sleep Disorders Association. Un exemple d'hypnogramme est présenté Fig. 1.

3 Estimation de la fragmentation du sommeil

3.1 Indice de Fragmentation du Sommeil

Le taux de micro-éveils est utilisé dans la pratique médicale de routine comme une première mesure de la fragmentation du sommeil. D'autres indicateurs sont également utilisés pour estimer la qualité du

sommeil. Mentionnons le temps de sommeil total T_{ST} qui se définit comme la durée totale passée en sommeil (stades 1 à 5), l'efficacité du sommeil qui est définie comme le rapport du T_{ST} sur le temps total au lit T_{TL} . Un indice de fragmentation du sommeil (IFS) a été introduit comme le nombre total d'éveils et de transitions au stade 1 divisé par le temps de sommeil total T_{ST} [12]. Le coefficient de corrélation entre l'IFS et le taux de micro-éveils obtenu avec la population de patients de cette étude était de 0,54 ($p = 0,005$). Ensuite, cet indicateur fut modifié de manière à inclure l'ensemble des transitions entre stades différents de sommeil, pour conduire à l'Indice de Fragmentation du Sommeil [7]

$$\text{IFS} = \frac{N_{\text{éveils intra-sommeil}} + N_{\text{transition entre stades}}}{T_{ST}}. \quad (1)$$

La corrélation était légèrement plus faible ($r = 0,52$, $p = 0,001$) mais sur une population différente.

Lorsqu'il est calculé sur notre population de patients, l'IFS présente un coefficient de corrélation de 0,50 ($p = 0,003$) avec le taux de micro-éveils, ce qui est inférieur à celui obtenu avec la population initialement ayant permis la validation de cet indice, population de patients qui présentait divers troubles du sommeil comme la parasomnie, l'insomnie, des troubles respiratoires du sommeil, des troubles du rythme circadien, des syndrômes de mouvements périodiques des jambes, etc.

Il est important de noter que cet indice ne tient pas en compte de la manière avec laquelle les différentes transitions d'un stade à l'autre se répartissent au cours de la nuit : ainsi, il n'est pas fait de différence si ces transitions interviennent avec une distribution relativement homogène au cours de la nuit ou par bouffées, l'impact sur la qualité globale du sommeil pouvant être fortement différente. Cet aspect est particulièrement important dans la mesure où les intervalles de sommeil doivent être au moins de 5 à 10 minutes pour permettre un repos efficace et éliminer la somnolence diurne [1,13,14].

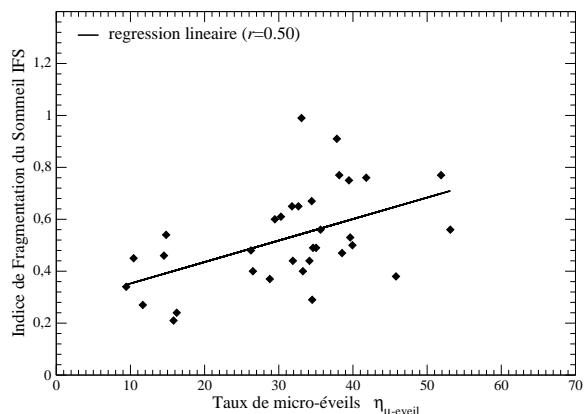


FIG. 2. Indice de Fragmentation du Sommeil (IFS) en fonction du taux de micro-éveils pour notre population de patients ($r = 0,50$, $p = 0,003$).

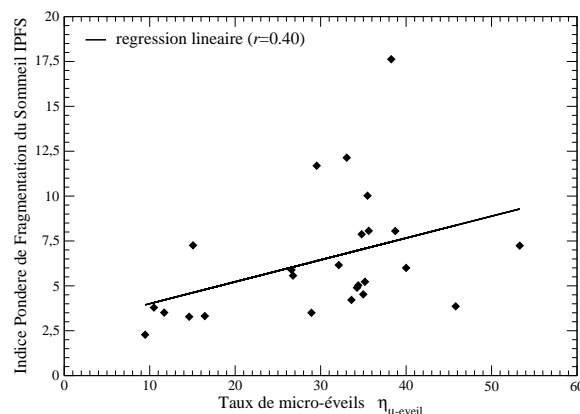


FIG. 3. Indice Pondéré de Fragmentation du Sommeil (IPFS) en fonction du taux de micro-éveils pour notre population de patients. ($r = 0,40$, $p = 0,02$).

3.2 L'Indice Pondéré de la Fragmentation du Sommeil

L'Indice Pondéré de la Fragmentation du Sommeil (IPFS) a été introduit pour tenir compte du fait que les différents stades du sommeil contribuent de manière différente à la qualité du sommeil [8]. Des transitions d'un stade à l'autre sont souhaitées comme celles du stade 1 au stade 2, tandis que d'autres sont néfastes à un sommeil de qualité comme les transitions du stade 3 à l'éveil. L'IPFS consiste à assigner un coût à toutes les transitions possibles. Pour ce faire, chaque époque k , codée en stade, se voit attribuer une pondération E_k représentative de sa contribution relative à la qualité du sommeil selon la correspondance suivante [8] :

Etat	Eveil	Stade 1	Stade 2	Stade 3	Stade 4	Stade 5
E_k	0	3	4	5	7	3

La $k^{\text{ème}}$ transition est alors pondérée selon la quantité $\omega_k = E_k - E_{k+1}$. Le taux de transitions pondérées de sommeil est alors défini comme

$$R = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} \omega_k}{T_{\text{ST}}} \quad \forall \omega_k > 0 \quad (2)$$

où T_{ST} désigne le temps de sommeil total. Seules les transitions pondérées positives sont prises en comptes, car ce sont elles seules qui dégradent la qualité du sommeil. La mesure de la fragmentation du sommeil se fait alors par l'IPFS défini comme

$$\text{IPFS} = \frac{R}{M} \quad (3)$$

où M est la médiane des poids affectés à chaque époque de sommeil de l'hypnogramme.

La population de patients sur laquelle cet indice a été évalué comprend des patients pouvant présenter des signes de fatigue et somnolence diurne et lors de la nuit des apnées obstructives du sommeil, des périodes d'hypoventilation, un syndrome de mouvement périodique des jambes. Tous ces facteurs peuvent générer une fragmentation de la macro et microstructure du sommeil. La corrélation obtenue entre l'IPFS et le taux de micro-éveils était alors de 0,72. Nous avons appliqué cet indice à notre population (Fig. 3). Il apparaît que pour huit de nos patients, la médiane est nulle en raison d'une efficacité de sommeil trop faible : l'IPFS n'est alors pas défini puisque conduisant à une division par zéro. Le coefficient de corrélation entre l'IPFS et le taux de micro-éveils est de 0,41 ($p = 0,02$), ce qui est finalement plus faible que à celui obtenu avec l'IFS. De ce fait, non seulement il ne semble y avoir aucun avantage à introduire l'IPFS puisqu'il n'y a pas d'amélioration du coefficient de corrélation, mais encore, l'IPFS n'est pas défini pour les 8 patients de notre protocole qui dorment le moins.

3.3 Entropie de Shannon

L'indice pondéré n'apparaît donc pas comme très fiable. Par ailleurs, l'IFS ne tient compte que des transitions, mais pas de leur distribution au cours de la nuit, c'est-à-dire si elles surviennent de manière homogène durant la nuit ou si elles surviennent en salves. Il apparaît alors nécessaire de vérifier si la prise en compte de la distribution des transitions d'un stade à l'autre ne pourrait améliorer la corrélation avec le taux de micro-éveils. Une mesure qui naturellement prend en compte cette distribution repose sur la notion d'entropie définie comme

$$S_h = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_i \log P_i \quad (4)$$

où P_i est une probabilité à définir. De manière à consolider la statistique sur laquelle l'entropie va être calculée, un diagramme de proches retours [15] est construit à partir de l'hypnogramme $\{\sigma_k\}_{k=1}^N$ selon la matrice

$$C_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma_i \neq \sigma_{i-j} \\ 1 & \text{si } \sigma_i = \sigma_{i-j}. \end{cases} \quad (5)$$

où $j \in [0, 50]$ est le décalage temporel. Le diagramme de proches retours construit à partir de l'hypnogramme du patient 35 est représenté Fig. 4a. Toutefois, pour tenir compte du fait que les micro-éveils ne peuvent survenir que lors de stades de sommeil et non d'éveil, un diagramme de proches retours faisant abstraction des épisodes d'éveils est utilisé (Fig. 4b). L'entropie est alors calculée à partir des probabilités P_i d'observer un segment horizontal de points non-récurents — codés 0 — de longueur i [9]. L'entropie ainsi obtenue est alors corrélée avec le taux de micro-éveils avec un coefficient $r = 0,60$ ($p = 0,0002$) (Fig. 5). Si la corrélation est meilleure que celles obtenues avec les deux indices précédemment discutés, cela reste non significatif ($p < 0,58$) : il faudrait une population plus de dix fois supérieure pour que l'amélioration soit significative.

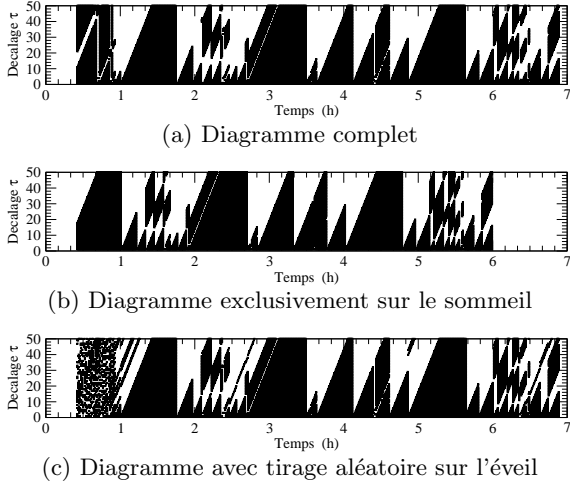


FIG. 4. Diagrammes de proches retours construits à partir de l'hypnogramme du patient #35 (Fig. 1).

4 Estimation de l'efficacité du sommeil

L'efficacité du sommeil se définit comme le rapport du temps de sommeil total sur le temps passé au lit. Une efficacité normale est supérieure à 85%. Toutefois, celle-ci décroît avec l'âge, passant de plus de 95% vers 15 ans à moins de 80% vers 70 ans [6]. A priori, le taux de micro-éveils est nettement moins corrélé à l'efficacité que ne l'est la fragmentation [16]. Aussi, nous avons construit une seconde entropie, S_e , reposant sur un diagramme de proches retours construit selon la matrice C_{ij} mais à partir de l'hypnogramme $\{\sigma'_k\}_{k=1}^N$ tel que

$$\begin{cases} \sigma'_k = \epsilon \in [0, 5] & \text{si } \sigma_k = 0 \text{ (éveil)} \\ \sigma'_k = \sigma_k & \text{si } \sigma_k \neq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Ainsi, chaque épisode d'éveil, qui réduit l'efficacité du sommeil, est remplacé par une époque de sommeil choisie aléatoirement de manière à augmenter l'entropie : l'entropie S_e est donc construite pour augmenter lorsque l'efficacité du sommeil décroît. Nous trouvons effectivement que l'entropie S_e est anti-corrélée avec l'efficacité ($r = -0,83$, $p < 10^{-7}$) (Fig. 6). Notons que cette entropie est significativement ($p \leq 0,0003$) moins corrélée avec le taux de micro-éveils ($r = 0,38$, $p = 0,029$) qu'avec l'efficacité. Toutefois, lorsque l'entropie d'efficacité S_e est tracée en fonction de l'entropie de fragmentation S_f (Fig. 7), elles sont corrélées l'une avec l'autre ($r = 0,77$, $p \leq 10^{-7}$). Nous avons donc ici une corrélation claire entre l'entropie d'efficacité et celle de fragmentation : plus il y a de micro-éveils, moins l'efficacité est bonne.

5 Conclusion

Nous avons ici étudié la qualité du sommeil à l'aide de deux entropies, l'une évaluant l'efficacité, l'autre la fragmentation. En tenant compte de la distribution des événements au cours de la nuit, ces deux entropies se présentent comme étant fortement corrélées, chacune étant significativement corrélée respectivement à l'efficacité et à la fragmentation du sommeil. De ce point de vue, la fragmentation du sommeil conduit naturellement à la réduction de l'efficacité du sommeil. Nous devons toutefois, élargir notre population pour vérifier la fiabilité de nos conclusions.

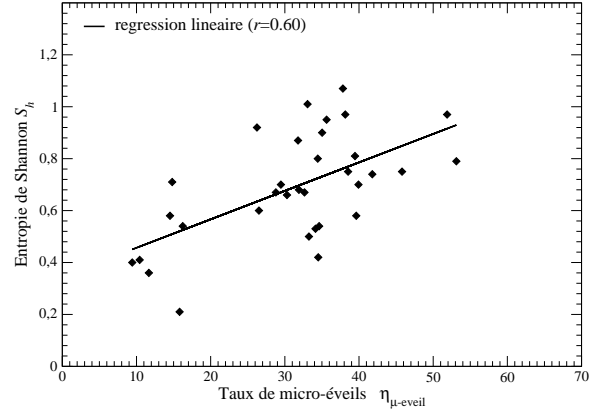


FIG. 5. Entropie de Shannon en fonction du taux de micro-éveils, ($r = 0,60$, $p = 0,0002$).

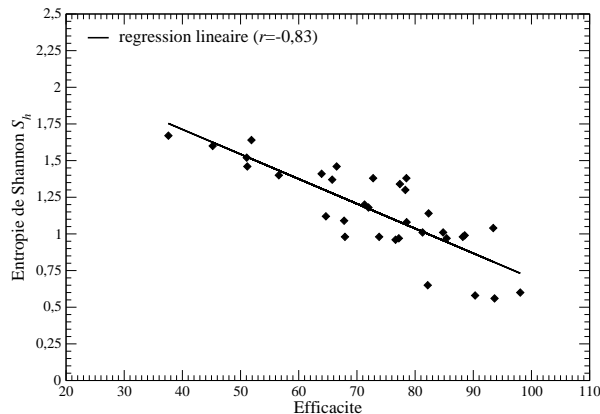


FIG. 6. Entropie de Shannon en fonction de l'efficacité du sommeil. ($r = -0,83$, $p \leq 10^{-7}$).

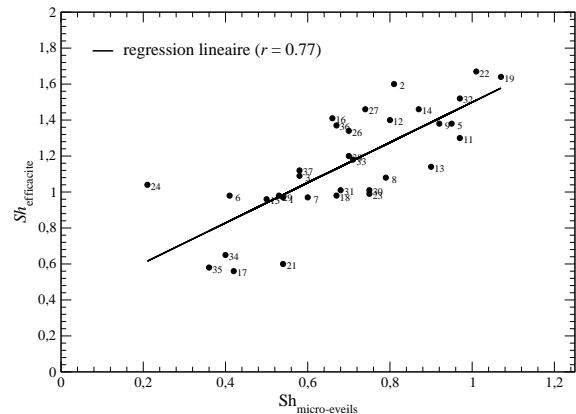


FIG. 7. Carte sur les deux entropies de Shannon.

Références

1. B. LEVINE, T. ROEHR, E. STEPANSKI, F. ZORICH & T. ROTH, Fragmenting sleep diminishes its recuperative value, *Sleep*, **10**, 590-599 (1987).
2. T. ROTH, K. M. HARTSE, F. ZORICK & W. CONWAY, Multiple naps and the evaluation of daytime sleepiness in patients with upper airway sleep apnea, *Sleep*, **3** (3-4), 425-439 (1980).
3. M. A. CARSKADON, E. D. BROWN & W. C. DEMENT, Sleep fragmentation in the elderly : relationship to daytime sleep tendency, *Neurobiology Aging*, **3**, 321-327 (1982).
4. M. BONNET *et al*, EEG arousals : scoring rules and examples : a preliminary report from the Sleep Disorders Atlas Task Force of the American Sleep Disorders Association, *Sleep*, **15**, 172-184 (1992).
5. E. J. STEPANSKI, Improving the utility of interpreting sleep fragmentation, *Journal of Clinical Sleep Medicine*, **3** (3), 275-276 (2007).
6. M. BONNET, D. ARAND, EEG Arousal Norms by Age, *Journal of Clinical Sleep Medicine*, **3** (3), 271-274 (2007).
7. J. HABA-RUBIO, V. IBANEZ, E. SFORZA, An alternative measure of sleep fragmentation in clinical practice : the sleep fragmentation index, *Sleep Medicine*, **5**, 577-581 (2004).
8. V. SWARNKAR, U. R. ABEYRATNE, C. HUKINS & B. DUCE, A state transition-based method for quantifying EEG sleep fragmentation, *Medicine & Biology Engineering Computation*, **47**, 1053-1061 (2007).
9. C. LETELLIER, E. ROULIN & O. E. RÖSSLER, Inequivalent topologies of chaos in simple equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **28**, 337-360 (2006).
10. R. KESSLER, A. CHAOUAT, P. SCHINKEWITZ, M. FALLER, S. CASEL, J. KRIEGER & E. WEITSENBLUM, The obesity-hypoventilation syndrome revisited : a prospective study of 34 consecutive cases, *Chest*, **120n** 369-376 (2001).
11. A. RECHTSCHAFFEN & A. KALES, A manual of standardized terminology and scoring system for sleep stages of human subjects, Bethesda, MD, U.S. National Institute of Neurological Disease and Blindness, Neurological Information Network. *National Institute of Health* (US), p. 204 (1968).
12. M. J. MORRELL, L. FINN, H. KIM, P. E. PEPPARD, M. SAFWAN BADR & T. YOUNG, Sleep fragmentation, awake blood pressure, and sleep-disordered breathing in a population-based study, *American Journal of Respiratory Critical Care Medicine*, **162** (6), 2091-2096 (2000).
13. R. DOWNEY & M. H. BONNET, Performance during frequent sleep disruption, *Sleep*, **10**, 354-363 (1987).
14. R. G. NORMAN, M. A. SCOTT, I. AYAPPA, J. A. WALSLEBEN & D. M. RAPOPORT, Sleep continuity measured by survival curve analysis, *Sleep*, **29**, 1625-1631 (2006).
15. G. B. MINDLIN & R. GILMORE, Topological analysis and synthesis of chaotic time series, *Physica D*, **58**, 229-242 (1992).
16. M. EKSTEDT, T. AKERSTEDT & M. SÖDERSTRÖM, Micro-arousals during sleep are associated with increased levels of lipids, cortisol, and blood pressure, *Psychosomatic Medicine*, **66**, 925-931 (2004).

Formes normales singulières non linéaires : un nouvel observateur

Driss Boutat¹, Gang Zheng², Latifa Boutat-Baddas³ & Mohamed Darouach³

¹ Loire Valley University, ENSI de Bourges, Laboratoire PRISME, 88, Boulevard Lahitolle 18020 Bourges Cedex

² INRIA Lille-Nord Europe, 40, avenue Halley, 59650 Villeneuve d'Ascq

³ CRAN-CNRS, UHP NancyI, IUT de Longwy 186, rue de Lorraine, 54400 Cosnes-et-Romain
driss.boutat@ensi-bourges.fr

Résumé. Les systèmes singuliers (connus aussi sous le nom de systèmes implicites ou systèmes algébro-différentiels) ont été introduits pour modéliser une large classe de systèmes pour lesquels la représentation d'état standard n'est pas applicable. On les rencontre dans les domaines des industries minérales et chimiques, en électronique et en économie. L'estimation de l'état de ces systèmes est d'une grande importance pour le diagnostic et pour la commande. Contrairement au cas des systèmes singuliers linéaires où il existe des résultats sur la synthèse des observateurs, pour les systèmes non linéaires il n'existe que quelques résultats, on cite par exemple [5]. Tous ces résultats supposent que la non linéarité est Lipschitzienne. Dans cet article, nous présentons une nouvelle approche de synthèse d'observateur pour les systèmes singuliers, elle est fondée sur le développement d'une nouvelle forme normale. Les conditions géométriques nécessaires et suffisantes d'existence de cette forme normale et une méthode simple de synthèse de l'observateur seront présentées. Un exemple numérique est présenté pour illustrer la méthode.

Abstract. Descriptor systems (known also as generalized, singular or differential algebraic (DA) systems) can describe a large class of systems, which are not only of theoretical interest but also have a great importance in practice. They are frequently encountered in chemical and mineral industries, in electronic and economic systems. The state estimation problem for descriptor systems has been the subject of several studies in the past decades and almost results exist for linear systems, only few results exist for a class of nonlinear systems where the nonlinearity is Lipschitz. This paper presents an observability normal form for nonlinear singular systems. The interest of the proposed form is to improve the observer design for these systems. Necessary and sufficient geometrical conditions to guarantee the existence of a diffeomorphism which transforms the nonlinear singular systems into the proposed normal form are given. A numerical example is given to illustrate the approach.

1 Introduction

Dans cette note on s'intéresse à la classe des systèmes suivante :

$$N\dot{x} = f(x) + \sum_{k=1}^p g_k(x)u_k, y = h(x) \quad (1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ désigne l'état du système, $u_i \in \mathbb{R}^m$ désignent les entrées, $y \in \mathbb{R}^p$ les sorties mesurées. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, le champ de vecteur qui régit l'évolution du système et les $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ les directions de contrôle et N est une matrice constante de type $n \times n$.

Si N est inversible on dit que le système (1) est régulier. Ainsi, il s'écrit sous la forme classique : $\dot{x} = \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^p \tilde{g}_i(x)u_i$ où $\tilde{f} = N^{-1}f$ et $\tilde{g}_k = N^{-1}g_k$ pour $k = 1 : n$. Si le rang(N) < n alors, on dit que le système (1) est singulier. Dans ce cas, le système est régi par un jeu d'équations différentielles (dynamiques) et un autre jeu d'équations algébriques (pour cette raison les systèmes singuliers sont aussi appelés systèmes algébro-différentiels). Si on dérive un certain nombre de fois les équations algébriques et que l'on obtienne un ensemble de nouvelles dynamiques qui forme avec les anciennes un système d'équations différentielles indépendantes, alors on aboutit à un système régulier.

Pour les systèmes réguliers linéaires ou non linéaires les méthodes de traitement des problèmes d'observateur et de commande sont nombreuses dans la littérature (voir par exemple [1]). Cependant, la carence

des systèmes singuliers en dynamiques rend les problèmes de conception d'observateurs et de commandes très difficiles à traiter. On trouve quelques travaux pour les systèmes linéaires [6,4,7]. Ces mêmes travaux ont été adaptés aux systèmes non linéaires Lipschitziens [5,3]. Dans cet article, on va s'intéresser à une classe des systèmes dynamiques (1). Plus précisément la classe des systèmes avec une dynamique manquante et une seule équation algébrique c'est-à-dire le cas où $\text{rang}(N) = n - 1$. Dans ce travail, nous allons présenter une autre nouvelle méthode de concevoir un observateur pour cette classe de systèmes que nous appellerons les formes d'observabilité canoniques singulières non-linéaires (FOCSN). Puis, nous donnerons un algorithme permettant de transformer un système singulier non-linéaire, qui satisfait des conditions géométriques, en une forme (FOCSN).

Cet article est organisé comme suit : La section 2 est consacrée à la forme (FOCSN) et son observateur. Dans la section 3, nous donnons les conditions géométriques pour qu'un système singulier peut être mis sous la forme (FOCSN). Un exemple numérique est donné dans la section 4.

2 Une forme d'observabilité canonique singulière non linéaire

Cette section est dédiée à une classe de formes canoniques singulières et à la conception d'un observateur. Les formes qui nous intéressent sont de la forme :

$$N\dot{z} = z + \beta(y) + \sum_{k=1}^p \alpha_k(y)u_k, \quad y = Cz \quad (2)$$

où $z \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $y \in \mathbb{R}$ sa sortie (la mesure) et $\beta(y) \in \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs qui ne dépend que de la sortie y . La matrice $C = (1, 0, \dots, 0)$ et la matrice N est de rang $n - 1$ et elle est de la forme :

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Notons que l'on ignore l'évolution de l'état z_1 et qu'à la place on a l'équation algébrique :

$$0 = z_n + \beta_n(y) + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,n}(y)u_k$$

où $\beta_n(y)$ est la $n^{\text{ème}}$ composante de β et $\alpha_{k,n}(y)$ la $n^{\text{ème}}$ composante de α_k .

Proposition 1. *Le système dynamique suivant*

$$N\dot{\hat{z}} - K(\dot{\hat{z}}_1 - \dot{y}) = \hat{z} + \beta(y) + \sum_{k=1}^p \alpha_k(y)u_k, \quad \hat{y} = C\hat{z} \quad (4)$$

est un observateur pour (2) où K est choisi de sorte que la matrice $(N - KC)$ soit une matrice Hurwitz.

Démonstration. Si l'on note par $e = \hat{z} - z$ l'erreur d'observation entre (4) et (2), alors sa dynamique est linéaire et s'écrit comme $\Gamma\dot{e} = e$ où $\Gamma = N - KC$. Grâce à la forme de la matrice N et celle de C , il est facile de montrer que la paire (N, C) est observable, c'est-à-dire que la matrice $O = \left(C^T (CN)^T \dots (CN^{n-1})^T \right)^T$ est de rang maximum n . Par conséquent, on peut choisir K pour rendre la matrice Γ Hurwitz i.e. la partie réelle de ses valeurs propres est < 0 . En outre, la matrice Γ est inversible. Donc, Γ^{-1} est aussi Hurwitz. D'où $\dot{e} = \Gamma^{-1}e$ est asymptotiquement stable. Donc, (4) est un observateur pour (2). ■

Il est important de noter que l'observateur (4) présente explicitement la dérivée de la sortie, c'est-à-dire $\dot{\hat{y}}$ et \dot{y} . Cependant, en pratique, la dérivée d'une sortie avec du bruit cause une amplification de ce dernier. Pour surmonter ce problème ; nous allons introduire l'estimateur algébrique : $\eta_1 = \hat{z}_1 - y$, $\eta_k = \hat{z}_k$ pour $2 \leq k \leq n$ et comme Γ est inversible (les parties réelles de ses valeurs propres < 0), alors on remplace l'observateur (4) par le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \Gamma^{-1}\eta + \tilde{\beta}(y) + \sum_{k=1}^p \tilde{\alpha}_k(y)u_k \\ \eta_1 = \hat{z}_1 - y, \eta_i = \hat{z}_i \text{ pour } 2 \leq i \leq n \end{cases} \quad (5)$$

où $\tilde{\beta}(y) = \Gamma^{-1}\beta(y)$, $\Gamma^{-1}\tilde{\alpha}_i =$. Il faut noter que le système dynamique (5) est régulier.

Avant de présenter la section suivante, faisons une remarque importante.

Remarque 1. Nous allons mettre la forme (2) sous la forme équivalente suivante que nous appellerons sa forme régulière :

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i-1} + \beta_{i-1}(y) + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,i-1}(y)u_k \text{ pour } i = 2 : n \\ \dot{z}_1 = z_n + \dot{y} + \beta_n(y) + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,n}(y)u_k \\ y = Cz \end{cases} \quad (6)$$

où $\beta_i(y)$ pour $i = 1 : n$ sont les composantes de $\beta(y)$ dans (2) et où l'équation algébrique

$$0 = z_n + \beta_n(y) + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,n}(y)u_k$$

est remplacée par l'équation "différentielle"

$$\dot{z}_1 = z_n + \beta_n(y) + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,n}(y)u_k + \dot{y}.$$

En supposant théoriquement que $\dot{z}_1 = \dot{y}$, si on regarde \dot{y} comme une entrée du système, et si on ré-ordonne le vecteur état $z_i = \xi_{i+1}$ pour $i = 2 : n - 1$, $z_1 = \xi_n$ et $z_n = \xi_1$, cette forme régulière « artificielle »¹ (6) s'écrit sous la forme compacte suivante :

$$\dot{\xi} = A\xi + \gamma(y) + \dot{y}e_1 + \sum_{k=1}^p \mu_k(y)u_k, \quad y = \xi_n \quad (7)$$

où A est la matrice de Brunovsky (on a $N^T = A$) et e_1 est le vecteur dont la première composante vaut 1 et les autres sont nulles. Si comme il a été dit ci-dessus ; \dot{y} est considérée comme une entrée, alors la forme (7) bien connue dans la littérature pour les systèmes réguliers sous le nom de forme normale d'observabilité non linéaire.

3 Résultat principal

L'objectif principal de cette section est de caractériser la classe des systèmes dynamiques singuliers de la forme (1) qui peut se mettre sous la forme (7). Comme cette dernière est équivalente à (2) l'objectif est alors atteint et on peut utiliser l'observateur (5) pour estimer les états du système (1).

On va présenter notre algorithme pour les systèmes sous la forme (1) avec $y = Cx = x_1$ et N comme dans (2). Le résultat peut être généralisé à N et y quelconque.

1. La terminologie « artificielle » est justifiée par le fait qu'on utilise \dot{y} comme une entrée du système.

3.1 Régularisation

Comme dans la remarque 1 ci-dessus, on peut régulariser le système (1) en ajoutant une dynamique artificielle en x_1 de la manière suivante :

$$N\dot{x} + \dot{x}_1 e_n = f(x) + \dot{y}e_n + \sum_{k=1}^p g_k(x)u_k, \quad y = x_1 \quad (8)$$

où pour $1 \leq i \leq n$, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Il est clair que

$$N\dot{x} + \dot{x}_1 e_n = \dot{x}_2 e_1 + \dot{x}_3 e_2 + \dots + \dot{x}_n e_{n-1} + \dot{x}_1 e_n = P\dot{x} \text{ avec } P = (e_n, e_1, \dots, e_{n-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc, (8) est équivalent au système suivant :

$$P\dot{x} = f(x) + \dot{y}e_n + \sum_{k=1}^p g_k(x)u_k, \quad y = x_1 \quad (9)$$

La matrice P est inversible et il est facile de voir que son inverse $Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$ est tel

que $Qe_n = e_1$. En multipliant les deux membres de l'équation (9) par Q , on obtient la forme régulière *artificielle*

$$\dot{x} = Qf(x) + \dot{y}e_1 + \sum_{k=1}^p Qg_k(x)u_k, \quad y = x_1 \quad (10)$$

L'idée essentielle derrière le fait de regarder un système singulier sous la dernière forme (10) permet de le traiter par des méthodes classiques introduites par Krener.

Hypothèse 1 *On suppose que le système (1) (ou son équivalent (10)), satisfait la condition de rang²*

$$\text{rank} (dh^T, (dL_F h)^T, (dL_F^2 h)^T, \dots, (dL_F^{n-1} h)^T) = n \quad (11)$$

où L_F^j désigne la dérivée de Lie j fois dans la direction de $F = Qf$ et $h(x) = y = Cx$.

Avant de donner le résultat, nous allons décrire des objets associés naturellement à un système qui satisfait à la condition du rang d'observabilité (11). Le premier objet donné dans la condition (11) étant le co-repère $\theta = ((\theta_i)_{i=1:n})$. Il est formé des 1-formes différentielles indépendantes suivantes : $\theta_1 = dx_1$ et $\theta_i = dL_F^{i-1} h$ pour $2 \leq i \leq n$. A partir de là, on définit un repère $\tau = (\tau_i)_{i=1:n}$ formé par le premier champ de vecteurs τ_1 déterminé par les équations algébriques

$$\theta_i(\tau_1) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } \theta_n(\tau_1) = 1,$$

et les autres sont obtenus par induction comme suit : $\tau_{i+1} = [\tau_i, F]$ pour $1 \leq i \leq n-1$, où $[\cdot, \cdot]$ désigne le crochet de Lie. L'évaluation de θ sur τ donne la matrice inversible suivante : $\Lambda = \theta\tau = (\Lambda_{i,j})$, où pour $1 \leq i, j \leq n$ on a $\Lambda_{i,j} = \theta_i(\tau_j)$. Par construction des τ_i il est facile de voir que : $\Lambda_{i,n-(i-1)} = 1$ et $\Lambda_{i,j} = 0$ pour $i \geq j$. Par conséquent, la famille de 1-formes différentielles suivantes : $\omega = \Lambda^{-1}\theta$, a ses composantes données par : $\omega_n = \theta_1$ et $\omega_{n-k} = \theta_{k+1} - \sum_{j=n-k-1}^n \Lambda_{k,j}\omega_j$ pour $k = 1 : n-1$. Nous avons le résultat suivant.

2. On l'appellera par abus de langage condition d'observabilité.

Théorème 1. *Sous la condition de rang d'observabilité 1, il existe un difféomorphisme qui transforme le système (10) sous la forme 7) si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

- $[\tau_i, \tau_j] = 0$ pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, [\tau_i, g_k] = 0$ et $[\tau_i, e_1] = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $k = 1 : p$
- $d\omega = 0, [\tau_i, g_k] = 0$ et $[\tau_i, e_1] = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $k = 1 : p$.

Si l'une des conditions équivalentes du théorème est satisfaite alors la différentielle du difféomorphisme en question est donnée par $d\phi = \omega$. Dans l'exemple ci-dessous, on présentera l'algorithme qui donne un tel difféomorphisme.

4 Exemple numérique

Considérons le système singulier non-linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = x_1 + x_1 x_3 + x_1^2 + (1 + x_1) u \\ \dot{x}_3 = x_2 + u \\ 0 = x_3 + x_1 + u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (12)$$

D'après la technique présentée dans la dernière section, ce système peut être réécrit sous la forme du système non-linéaire régulier

$$\dot{x} = Qf + Qgu = \begin{bmatrix} x_3 + x_1 \\ x_1 + x_1 x_3 + x_1^2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + x_1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{y} \quad (13)$$

En posant $F = Qf$, on peut calculer les 1-formes suivantes :

$$\theta_1 = dh = dx_1, \theta_2 = dL_F h = dx_1 + dx_3 \text{ et } \theta_3 = dL_F^2 h = dx_1 + dx_2 + dx_3.$$

Maintenant, on va calculer le repère τ de (12) :

$$\tau_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \tau_2 = [\tau_1, F] = \frac{\partial}{\partial x_3} \text{ et } \tau_3 = [\tau_2, F] = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Il est clair que pour tout $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$, on a $[\tau_i, \tau_j] = 0$.

De plus, il est facile de vérifier que pour $1 \leq i \leq 2$, on a $[\tau_i, g] = 0$ et $[\tau_i, e_1] = 0$ où $g = \frac{\partial}{\partial x_1} + (1 + x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$, et $e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$. D'où $A = \theta\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 \end{bmatrix}$ est inversible. Ainsi on a $\omega = A^{-1}\theta =$

$\begin{bmatrix} -x_1 dx_1 + dx_2 \\ dx_3 \\ dx_1 \end{bmatrix}$, ce qui donne le changement de coordonnées $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T = (x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, x_3, x_1)^T$. En posant $z_1 = \xi_1, z_2 = \xi_2 + \frac{y^2}{2}$ et $z_3 = \xi_3$, on obtient la forme (2)

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = z_1 + u \\ \dot{z}_3 = z_2 + u \\ 0 = z_3 + y + u \\ y = z_1 \end{cases}$$

En choisissant $K = (5, 5, 1)^T$; $(N - KC)$ est inversible et les valeurs propres de $(N - KC)^{-1}$ sont $(-0.2679, -1, -3.7321)$. Dans la simulation, l'entrée u de (12) est choisit comme suit :

$$u = \begin{cases} \sin(2t), & t \in [0, 12.5] \\ 1 + \sin(3t), & t \in (12.5, 25] \\ \sin(4t), & t \in (25, 37.5] \\ 1 - \sin(2t), & t \in (37.5, 50] \end{cases}$$

Les résultats de simulation pour l'observateur sont présentés Figs. 1.

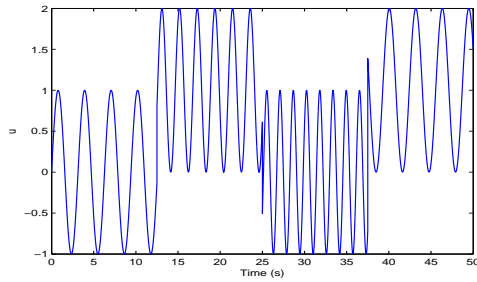
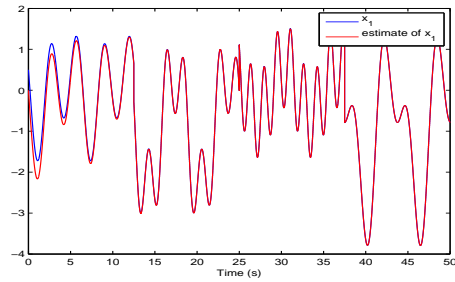
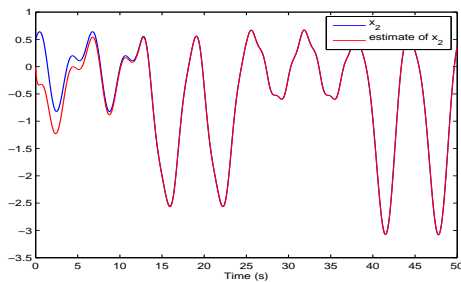
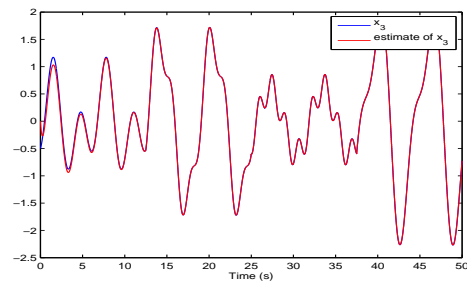
(a) L'entrée u (b) L'état z_1 et son estimé \hat{z}_1 avec les conditions initiales $z_1(0) = 0.5$ et $\hat{z}_1(0) = 0$ (c) L'état z_2 et son estimé \hat{z}_2 avec les conditions initiales $z_2(0) = 0.5$ et $\hat{z}_2(0) = 0$.(d) L'état z_3 et son estimé \hat{z}_3 avec les conditions initiales $z_3(0) = -0.5$ et $\hat{z}_3(0) = 0$.

FIG. 1. Simulations pour l'observateur.

5 Conclusion

Dans cet article nous avons proposé une nouvelle méthode de synthèse d'observateur pour une classe de systèmes singuliers non-linéaires. Nous avons d'abord proposé une forme normale d'observabilité singulière non-linéaires, ce qui nous a permis de concevoir un nouvel observateur. Nous avons aussi caractérisé géométriquement les systèmes singuliers qui peuvent se transformer sous une telle forme normale. Nous avons présenté l'algorithme de transformation sur un exemple numérique et nous avons donné les résultats de l'estimation de l'état pour cet exemple.

Références

1. A. J. KRENER & A. ISIDORI, Linearization by output injection and nonlinear observers, *Systems & Control Letters*, **3**, 47-52 (1983).
2. D. BOUTAT, A. BENALI, H. HAMMOURI & K. BUSAWON New algorithm for observer error linearization with a diffeomorphism on the outputs, *Automatica*, **45** (10), 2187-2193 (2009).
3. M. DAROUACH & L. BOUTAT-BADDAS, Observers for a class of nonlinear singular systems, *IEEE Transactions in Automatic Control*, **53**, 2627-2633 (2008).
4. M. DAROUACH, M. ZASADZINSKI & M. HAYAR, Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**, 1068-1072 (1996).
5. G. LU & D. W. C. HO, Full-order and reduced-order observer for Lipschitz descriptor systems : The unified LMI approach, *IEEE Transactions on Circuits & Systems II*, **53** (7), 563-567 (2006).
6. M. DAROUACH & M. ZASADZINSKI, Data reconciliation in generalized linear dynamic systems, *AICHE Journal*, **37**, 193-201 (1991).
7. D. KOENIG & S. MAMMAR, Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47** (12), 2057-2062 (2002).

Panaches thermiques dans les fluides à seuil

Anne Davaille¹, Blandine Gueslin², & Anna Massmeyer¹

¹ Laboratoire FAST (CNRS UMR 7608 / UPMC / Univ. P-Sud), Bat. 502, rue du Belvedere, Campus Universitaire, 91405 ORSAY)

² IGP, Rue Cuvier, 75005 Paris

davaille@fast.u-psud.fr

Résumé. Nous avons mené une étude expérimentale sur le développement des panaches thermiques dans le Carbopol, un fluide rhéofluidifiant, présentant une contrainte seuil. Les panaches sont générés à l'aide d'une source de chaleur ponctuelle. Trois régimes différents sont observés en fonction d'un paramètre caractéristique Y_0 , rapport entre la contrainte d'origine thermique et la contrainte seuil (équivalent à l'inverse du nombre de Bingham). Pour de faibles valeurs de Y_0 , aucun mouvement n'est observé; tandis que pour des valeurs intermédiaires de Y_0 , une cellule de convection apparaît mais elle reste confinée autour de la source de chaleur. Pour de grands Y_0 , cette cellule se déstabilise en panache. Le comportement de ces panaches est épisodique et leur morphologie est très différente du "champignon" classique rencontré dans les fluides newtoniens. Les mesures des champs de température (par cristaux liquides) et de vitesse (par PIV) montre le développement d'un écoulement "bouchon" à l'intérieur de l'anomalie thermique du panache, ce qui explique sa morphologie en "doigt". En outre, le démarrage du panache et sa montée dans la cuve sont précédés par le développement d'une zone d'endommagement. Ces observations apportent de nouvelles contraintes sur la dynamique de la transition liquide-solide dans les gels.

Abstract. We present new laboratory experiments on the development of thermal plumes out of a localized heat source in Carbopol, a yield-stress and shear-thinning fluid. Depending on the Yield number Y_0 , which compares the thermally-induced stress to the yield stress, three different regims obtain. For low Y_0 , no convection develops; while for intermediate values, a small-scale convection cell appears and remains confined around the heater. For high Y_0 , this cell becomes unstable and a thermal plume develops. Its rise through the tank can be episodic and its morphology differs from the mushroom-shape typically encountered in newtonian fluids. Combined temperature and velocity field measurements show that a plug flow develops within the plume thermal anomaly, therefore producing a rising finger-shape. Moreover, light scattering highlights the development of a damaged zone prior to the plume onset, and the peculiar structure of the gel around the plume as it rises. This brings new insights into the solid-liquid transition of soft gels.

1 Introduction

Bien que nombre de fluides géologiques (laves, manteaux planétaires,...) et industriels (ex : verres, pâtes alimentaires, bétons...) soient non-newtoniens, l'apparition et les caractéristiques des instabilités d'origine thermique dans de tels fluides sont encore mal connues et comprises. La difficulté vient du fait que la viscosité de ces fluides devient infinie lorsque l'amplitude du cisaillement tend vers 0. Par conséquent, les instabilités convectives ne peuvent croître à partir d'un état statique soumis à des perturbations infinitésimales [1,2,3], contrairement à la convection de Rayleigh-Bénard dans les fluides newtoniens [4].

Nous avons étudié le développement des panaches thermiques issus d'une source ponctuelle de chaleur dans le Carbopol, un fluide rhéofluidifiant, présentant une contrainte seuil. Lorsque la puissance de chauffage et la rhéologie du fluide varie, différents régimes de convection sont observés. Nous résumons ici leurs phénoménologies et leurs conditions d'existence.

2 Dispositif expérimental

La source de chaleur est constituée d'un élément Peltier couvert par un disque de cuivre de 25 mm de diamètre et 4 mm d'épaisseur. Elle est placée au centre d'une cuve en plexiglas carrée (20 × 20 × 30 cm).

Au temps $t = 0$, on applique une puissance électrique P constante aux bornes du Peltier. Les évolutions temporelles des températures de la source et de l'air ambiant sont enregistrées par ordinateur. Le fluide est ensemencé avec trois types de cristaux liquides thermochromiques, chacun réfléchissant la lumière à une température différente. Une section verticale de la cuve passant par le centre de la source de chauffage est illuminée par un plan laser vert (532 nm). Le champ de température est ainsi matérialisé par des lignes brillantes qui correspondent aux trois isothermes (Fig. 1, [5]). Le champ de vitesse est aussi calculé par *Particle Image Velocimetry*.

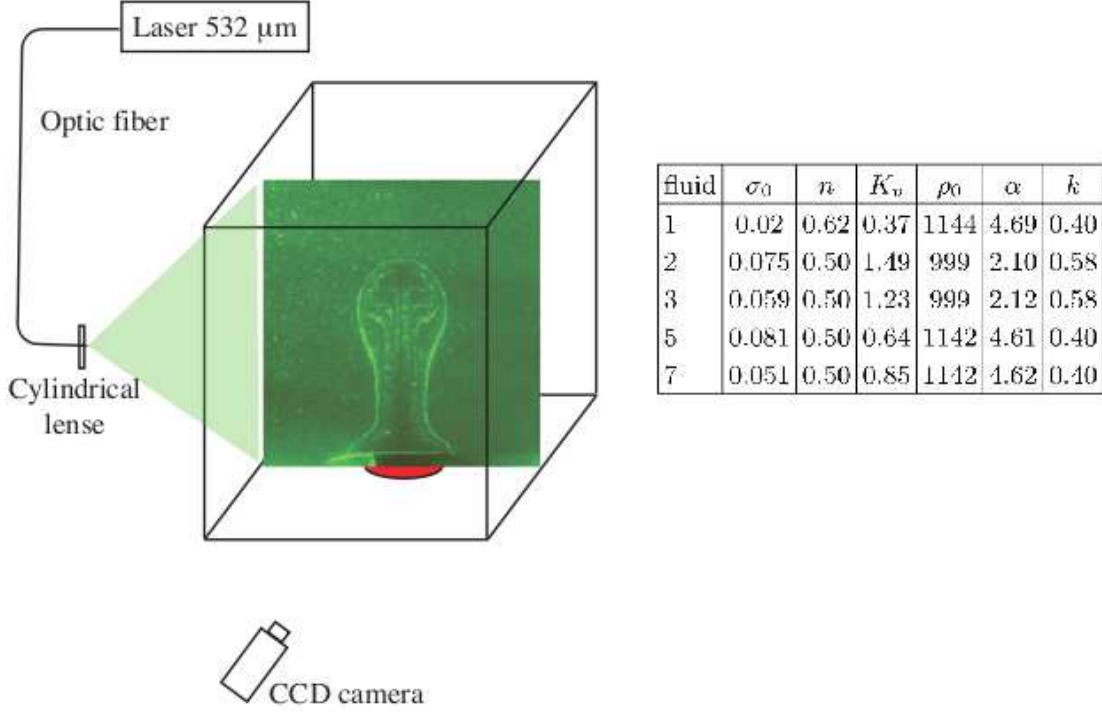


FIG. 1. Dispositif expérimental. Image d'un panache thermique dans un sirop de glucose newtonien. Les lignes brillantes représentent les isothermes. Table 1 : Propriétés des fluides à 20°C. Rheologie : σ_0 contrainte-seuil en Pa, n exposant rhéofuidifiant, K_v consistance en Pa.sⁿ. Propriétés thermiques : ρ densité en kg.m⁻³, α expansion thermique en 10⁻⁴.K⁻¹, conductivité thermique k en J/kg/K.

Les fluides utilisés sont des mélanges de Carbopol (0.6-0.8 g/L de Noveon ETD2050), d'eau et de glycerol (entre 0 et 50 %). Leur rhéologie est bien décrite par le modèle d'Herschel-Buckley [6,7] (Fig. 2) :

$$\sigma = \sigma_0 + K_v \dot{\gamma}^n \quad (1)$$

où σ désigne la contrainte et $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement. La table 1 donne les valeurs des propriétés physiques que nous avons mesurées. Une incertitude de 30% est observée sur la contrainte-seuil σ_0 . Seule la consistance K_v est sensible à la température et décroît d'un facteur 2 entre 20 et 40°C.

Une poche de fluide chaud s'élèvera sous l'action de la gravité, uniquement si la contrainte d'origine thermique σ_{th} excède la contrainte seuil [8,9,10,3]. Ceci fait apparaître un paramètre caractéristique $Y_0 = \frac{\sigma_{th}}{\sigma_0}$, équivalent à l'inverse du nombre de Bingham. Pour une puissance de chauffage constante, la poche de fluide chaude génère une contrainte qui s'écrit :

$$\sigma_{th} \sim \frac{\alpha \rho g P}{k} \quad (2)$$

ce qui implique :

$$Y_0 = \frac{\sigma_{th}}{\sigma_0} = \frac{\alpha \rho g P}{\sigma_0 k} \quad (3)$$

En variant la puissance électrique P entre 0.02 et 6.5 W et la contrainte seuil entre 0.02 et 0.081, nous avons donc décrit 3 ordres de grandeurs en Y_0 (entre 2 et 2250). La durée d'une expérience variait entre 1 heure et 4 jours.

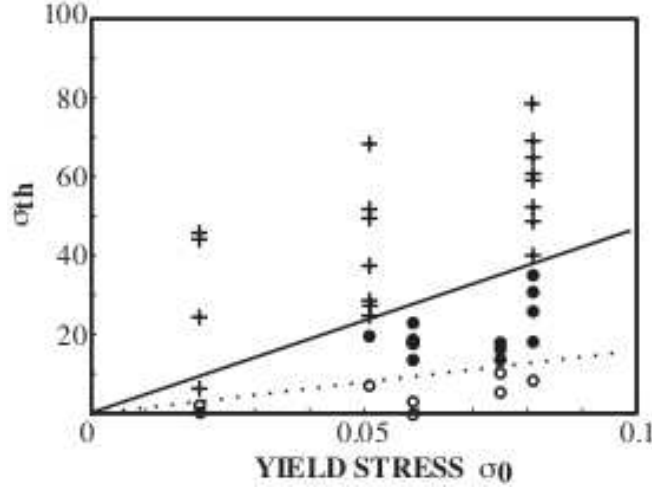


FIG. 2. Diagramme des régimes en fonction de la contrainte seuil et de la contrainte d'origine thermique. Croix : développement de panaches ; disques : cellule de convection autour de l'élément chauffant ; cercles : aucun mouvement n'est détecté. La ligne noire représente $Y_{c2} = 460$ et les tirets $Y_{c1} = 159$.

3 Trois régimes différents

Tout d'abord, une poche de liquide chaud croît par diffusion de la chaleur autour de l'élément chauffant (Fig. 3a). L'évolution du système dépend ensuite des valeurs relatives de σ_0 et σ_{th} (Fig. 2). Pour Y_0 inférieur à $Y_{c1} = 159$ (± 12), aucun mouvement ne peut se développer. Pour $Y_{c1} < Y_0 < Y_{c2}$, $Y_{c2} = 460$ (± 10), une cellule de convection se développe, avec des mouvements très lents qui restent confinés autour de la source de chaleur. Dans ce régime, la structure thermique reste bien prédite par l'équation de la chaleur en régime conductif.

Pour $Y_0 > Y_{c2}$, après une phase de conduction ($t < 200$ sec sur Fig. 4), puis une phase de convection lente confinée autour de la source ($200 < t < 500$ sec), un panache émerge de la poche chaude (Fig. 3b-c, $t > 500$ sec). Il monte ensuite dans la cuve en deux étapes, rapidement tout d'abord, puis à une vitesse constante plus lente (Fig. 4). A l'échelle de 0.1 mm, les trajectoires des particules autour de l'anomalie thermique ne sont pas continues mais montrent des décalages brusques, comme si une zone d'endommagement se constituait autour du panache (Fig. 4). Ce comportement rappelle les phénomènes de glissement et de bandes de cisaillement observés dans les expériences de rhéométrie du carbopol [11,12]. On peut aussi les comparer aux avalanches et fractures rencontrées dans les écoulements granulaires, et ils sont sans doute dus à la structure microscopique du Carbopol. En effet celui-ci est une solution concentrée de petites ($5\text{-}20 \mu m$) « éponges » de polymère [6].

D'autre part, l'évolution des isothermes montre que leurs positions oscillent au cours du temps avant d'atteindre un régime stationnaire. Compte-tenu de la durée importante des oscillations, ces dernières ne sont pas dues à l'élasticité du fluide mais plutôt à des instabilités hydrodynamiques dans le conduit du panache.

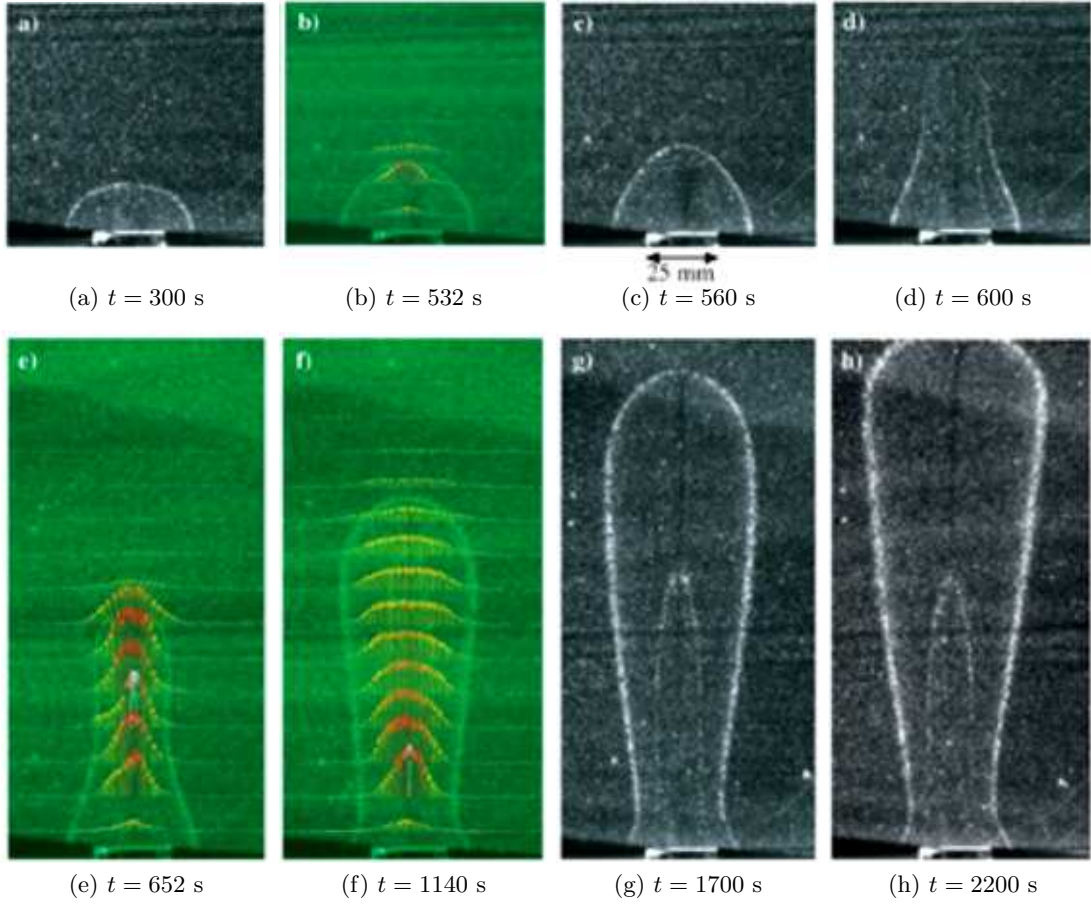
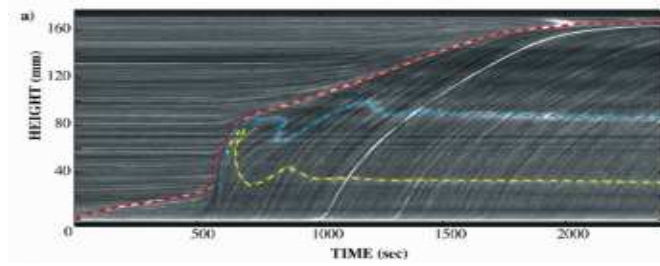


FIG. 3. Développement d'un panache thermique dans le fluide 7 (Tab. 1). Les lignes brillantes sont les isothermes. Les flèches colorées représentent la composante verticale de la vitesse V_z . Elles sont superposées à l'image brute. Le même code de couleur a été utilisé pour (b), (e) et (f). Le maximum de V_z (en blanc) est 0.38 mm/sec.

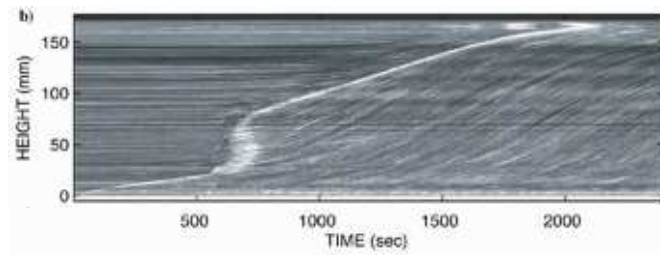
La morphologie en « doigt » du panache est très différente du champignon rencontré dans le cas newtonien (Fig. 1). Les champs de vitesse montrent que le matériau montant est entièrement confiné à l'intérieur de l'anomalie thermique (Fig. 3 et 5). D'autre part, les profils radiaux de vitesse autour de l'axe du panache sont très plats. Pour estimer le taux de cisaillement local, nous pouvons calculer le second invariant du tenseur des déformations à partir des champs de vitesse (V_r, V_z). Pour une géométrie cylindrique, il s'écrit :

$$\gamma_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\left(\frac{dV_r}{dr} \right)^2 + \frac{V_r^2}{r^2} + \left(\frac{dV_z}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dV_z}{dr} + \frac{dV_r}{dz} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

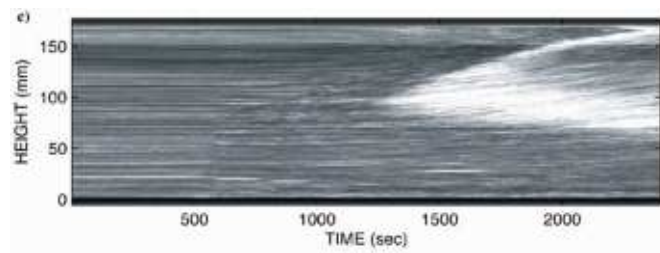
La figure 5 montre la carte de γ_0 pour $t = 2000$ s : le cisaillement dans la région de l'axe du panache est pratiquement nul. Le fluide à cet endroit monte comme un bouchon. Ce type d'écoulement est caractéristique des fluides à contrainte seuil et a déjà été observé dans les conduites [13]. En outre, même une fois que la vitesse le long de l'axe du panache a atteint son régime stationnaire, le panache continue de s'élargir (Fig. 3). Comme déjà vu dans les mesures de rhéométrie, la propagation de la limite entre les deux phases solide et liquide présentes dans le système est lente [14,12].



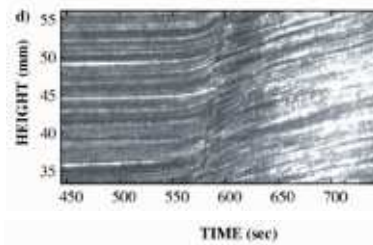
(a) sur l'axe du panache



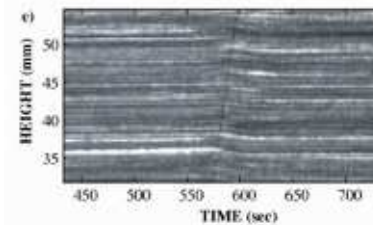
(b) décalées par rapport à l'axe



(c) décalées par rapport à l'axe



(d) zoom sur la section verticale (b)



(e) zoom sur la section verticale (c)

FIG. 4. Intensité de la lumière en fonction du temps et de la hauteur le long de trois lignes verticales de pixels. Les isothermes sont soulignées de rouge (24.6°C), bleue (31.5°C) et jaune (39.5°C) sur a). On peut aussi suivre les particules s'élevant dans l'axe du panache. Après une étape de conduction, le panache se développe rapidement autour de $t = 550$ s. Les barres verticales blanches correspondent aux images de la figure 3. Les zooms (d) et (e) font apparaître une zone de très fort cisaillement, voire de fracture.

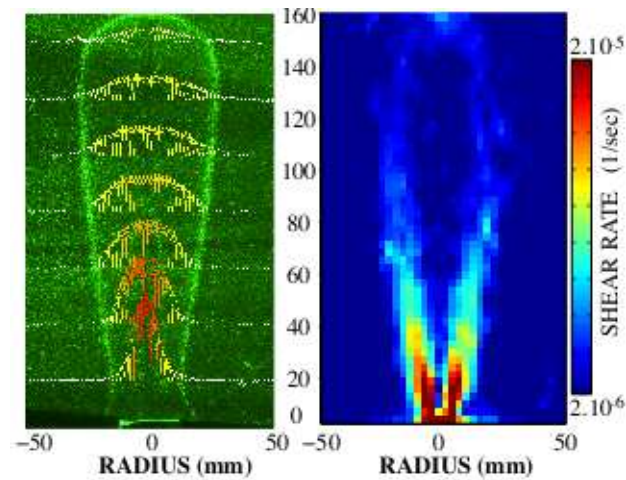


FIG. 5. Vitesse verticale (a) et taux de cisaillement local (b) pour $t = 2000$ s.

Références

1. J. ZHANG, D. VOLA & I. A. FRIGAARD, Yield stress effects on Rayleigh-Benard convection, *Journal of Fluid Mechanics*, **566**, 389-419 (2006).
2. V. S. SOLOMATOV & A. C. BARR, Onset of convection in fluids with strongly temperature-dependent, power-law viscosity. 2. Dependence on the initial perturbation, *Physics of the Earth and Planets Interiors*, **165**, 1-13 (2007).
3. N. J. BALMORTH & A. C. RUST, Weakly nonlinear viscoplastic convection, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **158**, 36-45 (2009).
4. S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover (1961).
5. A. DAVAILLE, A. LIMARE, F. TOUITOU, I. KUMAGAI, J. VATTEVILLE, Anatomy of a laminar starting thermal plume at high Prandtl number, *Experiments in Fluids*, **50** (2), 285-300 (2010).
6. J. M. PIAU, Carbopol gels : Elastoviscoplastic and slippery glasses made of individual swollen sponges Meso- and macroscopic properties, constitutive equations and scaling laws, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **144**, 1-29 (2007).
7. P. COUSSOT, L. TOCQUER, C. LANOS & G. OVARLEZA, Macroscopic versus local rheology of yield stress fluids, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **158**, 85-90 (2009).
8. A. N. BERIS, J. A. TSAMOPOULOS, R. C. ARMSTRONG & R. A. BROWN, Creeping motion of a sphere through a Bingham plastic, *Journal of Fluid Mechanics*, **158**, 219-244 (1985).
9. N. DUBASH & I. FRIGAARD, Conditions for static bubbles in viscoplastic fluids *Physics of Fluids*, **16** (12), 4319-4330 (2004).
10. H. TABUTEAU, P. COUSSOT & J. R. DE BRUYN, Drag force on a sphere in steady motion through a yield-stress fluid, *Journal of Rheology*, **51** (1), 125-137 (2007).
11. F. CATTON & C. BARAVIAN, Plastic behavior of some yield stress fluids : from creep to long-time yield, *Rheologica Acta*, **47**, 601-607 (2008).
12. T. DIVOUX, D. TAMARII, C. BARENTIN & S. MANNEVILLE, Transient shear banding in a simple yield stress fluid, *Physical Review Letters*, **104**, 208301 (2010).
13. C. GABARD & J.-P. HULIN, Miscible displacement of non-Newtonian fluids in a vertical tube, *European Physical Journal*, **21** (3), 388-393 (2006).
14. J. C. BAUDEZ & P. COUSSOT, Abrupt transition from viscoelastic solidlike to liquidlike Behavior in jammed materials, *Physical Review Letters*, **93** (12), 128302 (2004).

Une transition de phase dans un écoulement turbulent confiné ?

François Daviaud¹, Pierre-Philippe Cortet², Arnaud Chiffaudel¹, Bérengère Dubrulle¹, & Éric Herbert¹

¹ CEA, IRAMIS, SPEC, CNRS URA 2464, Groupe Instabilité et Turbulence, 91191 Gif-sur-Yvette, France.

² Laboratoire FAST, CNRS UMR 7608, Université Paris-Sud, Université Pierre et Marie Curie, Bât. 502, Campus universitaire, 91405 Orsay, France.

françois.daviaud@cea.fr

Résumé. Nous rapportons l'étude expérimentale de la susceptibilité de la brisure de symétrie dans un écoulement de von Kármán confiné rotatif et turbulent dans la gamme de nombre de Reynolds de 150 à 1.10^6 . Nous rapportons l'observation de la divergence de cette susceptibilité à un Reynolds intermédiaire de 90 000 ce qui est la preuve expérimentale de la possibilité de l'existence d'une transition de phase dans un système très fluctuant en temps et en espace. De plus cette transition est associée à un maximum de l'amplitude des fluctuations de la symétrie de l'écoulement instantané correspondant à des brisures intermittentes et spontanées de symétrie entre différents états métastables.

Abstract. We experimentally study the susceptibility to symmetry breaking of a closed turbulent von Kármán swirling flow from $Re = 150$ to $Re \approx 10^6$. We report a divergence of this susceptibility at an intermediate Reynolds number $Re = Re_\chi = 90\,000$ which gives experimental evidence that such a highly space and time fluctuating system can undergo a "phase transition". This transition is furthermore associated with a peak in the amplitude of fluctuations of the instantaneous flow symmetry corresponding to intermitencies between spontaneously symmetry breaking metastable states.

1 Introduction

Les transitions de phase sont des phénomènes omniprésents dans les systèmes physiques et sont généralement associés à des brisures de symétrie. La symétrie gouverne également la transition vers la turbulence : lorsque le nombre de Reynolds augmente une succession de bifurcations brise les diverses symétries de l'écoulement laminaire [1]. À fort nombre de Reynolds il est couramment admis que toutes les symétries brisées sont statistiquement restaurées [2]. Cependant cette vision est discutée par des études récentes d'écoulements turbulents en rapportant des faits inattendus comme la turbulence à durée de vie finie [3] ou l'hypothétique existence d'une transition turbulente [4,5,6,7]. Par conséquent et bien que les écoulements turbulents soient intrinsèquement des systèmes hors équilibre on peut se demander si les transitions observées peuvent être interprétées en terme de transition de phase. Dans ce travail nous introduisons la notion de susceptibilité de la brisure de symétrie dans un écoulement turbulent de von Kármán et étudions sa dépendance en Reynolds dans la gamme 150 à $1 \cdot 10^6$ à l'aide d'une vélocimétrie par imagerie de particules (PIV) stéréoscopique. Nous observons une divergence de la susceptibilité pour un Reynolds critique $Re = Re_\chi \simeq 90\,000$ ce qui fixe le seuil pour une éventuelle « transition de phase » turbulente. Il apparaît de plus que cette divergence coïncide avec un maximum de l'amplitude des fluctuations de la symétrie de l'écoulement instantané.

2 Paramètres de contrôle et paramètre d'ordre global

Notre montage expérimental est constitué d'un cylindre de Plexiglas rempli d'un mélange eau-glycérol. Le liquide est mécaniquement entraîné par deux turbines coaxiales tournant en sens opposé (Fig. 1). Les turbines sont constituées de disques plats sur lesquels sont fixées 16 pales radiales incurvées. Les mesures de vitesse sont réalisées avec une PIV stéréoscopique fournissant les 3 composantes de la vitesse dans un plan méridien. Nous prendrons pour notation des fréquences de rotation des turbines respectives f_1 et

f_2 . Les paramètres de contrôle sont le nombre de Reynolds $Re = \pi(f_1 + f_2)R^2/\nu$ avec ν la viscosité du fluide et $\theta = (f_1 - f_2)/(f_1 + f_2)$ qui contrôle l'asymétrie du forçage.

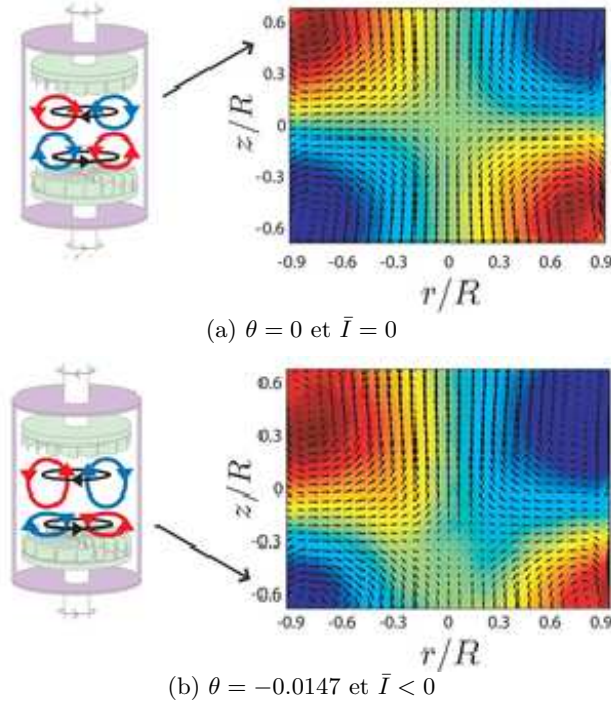


FIG. 1. Schéma de la topologie de l'écoulement turbulent de von Kármán lorsque $Re = 800\,000$. Le champ de vitesse moyen correspondant est représenté à droite. Les flèches représentent la vitesse poloidale (u_r, u_z) tandis que les niveaux de couleurs (de bleu à rouge) représentent la vitesse azimutale (ou toroïdale u_φ).

Lorsque $\theta = 0$ le système expérimental est symétrique pour toute rotation R_π qui permute la position des turbines : les conditions du problème sont invariantes pour n'importe quelle π -rotation autour d'un axe radial passant au centre du cylindre. Lorsque $\theta \neq 0$ le système expérimental n'est plus R_π symétrique. Ainsi le paramètre de contrôle θ détermine la distance à la symétrie R_π exacte et suivant sa valeur l'écoulement va s'ajuster en adoptant différentes symétries (Fig. 1). 1) lorsque $\theta = 0$ l'écoulement est exactement R_π symétrique, composé de deux cellules toriques de recirculation séparées par une couche de cisaillement localisée à l'équateur. 2) lorsque $\theta \neq 0$ l'écoulement est asymétrique à deux cellules, la couche de cisaillement est décalée vers la turbine la plus lente [9]. Dans le but de quantifier la distance de l'écoulement à la symétrie R_π nous utilisons le moment angulaire normalisé et moyenné en espace $I(Re, \theta, t)$ comme paramètre d'ordre.

$$I(t) = \frac{1}{\nu} \int_{\nu} r dr d\varphi dz \frac{r u_\varphi(t)}{\pi R^2 (f_1 + f_2)}$$

avec ν le volume de l'écoulement. Un exemple des fluctuations temporelles de $I(t)$ à $\theta = 0$ en régime turbulent est donné Fig. 2. À l'aide de ce paramètre d'ordre global moyenné nous pouvons définir une susceptibilité de l'écoulement à la brisure de symétrie : $\chi_I = \partial \bar{I} / \partial \theta |_{\theta=0}$.

3 Divergence critique de la susceptibilité

Dans le cas laminaire si $\theta = 0$ alors $\bar{I} = 0$ grâce à la symétrie de l'écoulement. Lorsque θ s'éloigne de 0 l'asymétrie de l'écoulement augmente et donc le moment angulaire \bar{I} s'éloigne de 0 également. Le

paramètre de symétrie \bar{I} évolue linéairement avec θ (Fig. 3) et la susceptibilité vaut 0,24. En augmentant le Reynolds la turbulence pleinement développée est présumée atteinte lorsque $Re \approx 10\,000$. Dans ce cas, si $\theta = 0$, la symétrie R_π de l'écoulement instantané est brisée mais la symétrie du champ de vitesse moyen est restaurée comme cela est observé communément en turbulence usuelle. Si on fait varier θ on observe comme dans le cas laminaire la brisure de la symétrie R_π de l'écoulement moyen. On observe Fig. 3 que $\bar{I}(\theta)$ pour un Reynolds de 800 000 et au voisinage proche de $\theta = 0$ varie beaucoup plus vite que dans le cas laminaire. Par conséquent il apparaît que la turbulence accroît brutalement la sensibilité de l'écoulement aux brisures de symétrie. La susceptibilité χ_I augmente de deux ordres de grandeur (Fig. 3) entre $Re = 150$ et $Re = 90\,000$, puis celle-ci décroît d'un facteur 4 entre $Re = 90\,000$ et $Re = 800\,000$. Ce dernier résultat suggère que $\chi_I(Re)$ au voisinage de $Re = Re_\chi \approx 90\,000$ subit une divergence critique.

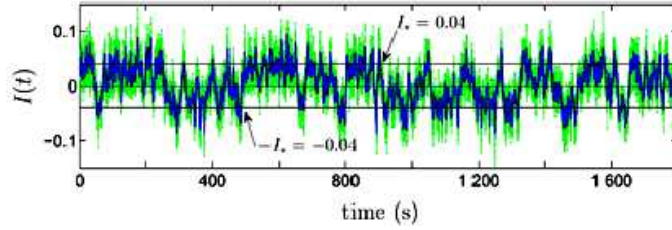


FIG. 2. Moment angulaire global I en fonction du temps pour $Re = 43\,000$ et $\theta = 0$. La ligne verte claire provient de l'acquisition PIV à 15 Hz et la ligne bleue foncée est filtrée passe-bas à 1 Hz. On a représenté des lignes à $I(t) = \pm I_* = \pm 0.04$ pour guider l'œil.

4 Momentisation

Lorsque $|\theta|$ augmente la courbe $\bar{I}(\theta)$ subit une brutale rupture de pente en $|\theta| = |\theta_r|$ qui est très proche de $\theta = 0$ ($|\theta_r| \approx 0.9\,10e-3$ à $Re = 65\,000$). Au delà de $|\theta_r|$, à grand Reynolds, on retrouve la variation lente et linéaire de \bar{I} avec θ observée dans le régime laminaire. Puisque $\bar{I}(|\theta| > |\theta_r|)$ à grand Reynolds est indépendant de Re il est raisonnable d'extrapoler $\bar{I}(|\theta| > |\theta_r|)$ à $\theta = 0$. Cette extrapolation décrit le comportement idéal de \bar{I} au voisinage du Reynolds critique Re_χ si χ_I diverge : \bar{I} saute de $-I_0$ à I_0 avec $|I_0| \approx 0.05$. Ce saut peut être interprété comme une "momentisation turbulente" spontanée I_0 à $\theta = 0$ par analogie avec la momentisation magnétique ferromagnétique spontanée M_0 à champ nul de la transition para-ferromagnétique classique.

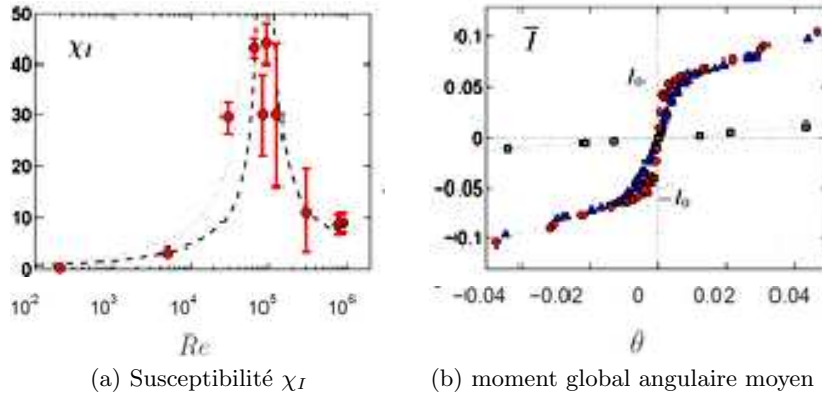


FIG. 3. Susceptibilité χ_I à la brisure de symétrie en fonction du Reynolds à $\theta = 0$ (a) et moment global angulaire moyen \bar{I} en fonction de θ (b) à $Re = 150$ (vert \square), $Re = 65\,000$ (rouge \circ) et $Re = 800\,000$ (bleu \triangle).

Une signature de cette momentisation peut être observée dans les fluctuations du moment angulaire instantané à un $Re \approx Re_\chi$ au voisinage du maximum de susceptibilité et $\theta = 0$ (Fig. 2). Bien que la moyenne $\bar{I}(\theta = 0) = 0$, la valeur instantanée de $I(t)$ ne fluctue pas au voisinage de zéro mais tend à se fixer préférentiellement sur deux plateaux où $I = \pm I_*$ avec $I_* \approx I_0$. Il apparaît que le moment global angulaire fluctue beaucoup au cours du temps en suivant deux échelles temporelles. Les fluctuations rapides sont reliées aux "classiques" petites échelles de la turbulence tandis que les fluctuations plus lentes sont liées aux intermittences temporelles correspondant à un temps de séjour de quelques dizaines de secondes. Une moyenne temporelle sur une seule de ces périodes intermittente montre un écoulement qui brise spontanément la symétrie homologue à l'écoulement moyen obtenu à $\theta \neq 0$. Ce dernier résultat montre une très forte connexion entre les fluctuations spontanées de symétrie de l'écoulement près du maximum de susceptibilité et l'écoulement moyen obtenu en brisant la symétrie grâce au paramètre de contrôle θ . L'interprétation des grandes fluctuations de $I(t)$ en terme de multistabilité suggère que la réponse linéaire de l'écoulement moyen $\bar{I}(\theta)$ au voisinage proche de $\theta = 0$ (c'est-à-dire $|\theta| < |\theta_r|$) (Fig. 3) est le résultat d'une moyenne temporelle de différents états métastables en proportions différentes.

5 Conclusion

Bien que les bifurcations avec brisure de symétrie soient communément observées dans les écoulements turbulents les outils théoriques associés ne sont pas encore bien établis. Les travaux sur les transitions de phase en présence de fluctuations considèrent généralement un système dans lequel un bruit externe est introduit [10]. Or un bruit multiplicatif est connu pour générer un état de brisure de symétrie ordonnée par une transition de phase hors équilibre [11]. Enfin l'écoulement turbulent dans lequel nous pouvons avoir accès à la fois aux évolutions des états spatio-temporels et aux moyennes des grandeurs thermodynamiques apparaît comme un outil parfaitement adapté à l'étude des transitions de phase hors équilibre dans les systèmes fortement fluctuants.

Références

1. P. MANNEVILLE, *Dissipative Structures and Weak Turbulence*, Academic Press, Boston (1990).
2. U. FRISCH, *Turbulence — The Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
3. B. HOF, J. WESTERWEEL, T. M. SCHNEIDER & B. ECKHARDT, Finite lifetime of turbulence in shear flows, *Nature*, **443**, 59-62 (2006).
4. F. CHILLÁ, M. RASTELLO, S. CHAUMAT & B. CASTAING, Long relaxation times and tilt sensitivity in Rayleigh Benard turbulence, *European Physical Journal B*, **40**, 223-227 (2004).
5. R. J. A. M. STEVENS, J.-Q. ZHONG, H. J. H. CLERCX, G. AHLERS & D. LOHSE, Transitions between turbulent states in rotating Rayleigh-Bénard convection, *Physical Review Letters*, **103**, 024503 (2009).
6. P. TABELING, G. ZOCCHI, F. BELIN, J. MAURER & H. WILLAIME, Probability density functions, skewness, and flatness in large Reynolds number turbulence, *Physical Review E*, **53**, 1613-1621 (1996).
7. F. RAVELET, L. MARIÉ, A. CHIFFAUDEL & F. DAVIAUD, Multistability and memory effect in a highly turbulent flow : Experimental evidence for a global bifurcation, *Physical Review Letters*, **93**, 164501 (2004).
8. P.-P. CORTET, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD & B. DUBRULLE, Experimental evidence of a phase transition in a closed turbulent flow, *Physical Review Letters*, **105**, 214501 (2010).
9. P.-P. CORTET, P. DIRIBARNE, R. MONCHAUX, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD & B. DUBRULLE, Normalized kinetic energy as a hydrodynamical global quantity for inhomogeneous anisotropic turbulence, *Physics of Fluids*, **21**, 025104 (2009).
10. N. G. VAN KAMPEN, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland Personal Library, Elsevier (1981).
11. C. VAN DEN BROECK, J. PARRONDO & R. TORAL, Noise-induced nonequilibrium phase transition, *Physical Review Letters*, **73**, 3395-3398 (1994).

Cascade inverse et déclin de la turbulence d'ondes gravito-capillaires

Luc Deike & Eric Falcon

Matière et Systèmes Complexes, Université Paris Diderot, CNRS UMR 7057
10 rue Alice Domont et Léonie Duquet, 75205 Paris, France
luc.deike@univ-paris-diderot.fr

Résumé. Deux études expérimentales de turbulence d'ondes à la surface d'un fluide sont présentées. Le régime transitoire de la turbulence d'ondes capillaires en déclin est trouvé auto-similaire au cours du temps. Le spectre de l'amplitude des vagues montre une loi de puissance dont l'exposant est trouvé constant au cours du déclin et proche de l'exposant théorique du régime stationnaire. En régime stationnaire, l'observation d'une cascade inverse d'ondes de gravité est présentée.

Abstract. Two experimental studies on surface wave turbulence are presented. The transient regime of capillary wave turbulence is found to be self similar in time. The power spectrum of wave amplitude is found to be a power law with a constant exponent during the decay. This exponent is close to the predicted stationary one. In a stationary regime, the observation of an inverse cascade of gravity waves is presented.

Lorsque des ondes de suffisamment grandes amplitudes se propagent dans un milieu, leurs interactions peuvent engendrer des ondes de différentes longueurs d'ondes. Cet état stationnaire hors équilibre, appelé turbulence d'ondes, se caractérise par un transfert d'énergie entre les différentes échelles spatiales du système. La compréhension de la turbulence d'ondes passe par l'étude des propriétés statistiques et dynamiques d'un ensemble d'ondes interagissant non linéairement entre elles. Ce phénomène se retrouve dans de nombreux domaines de la physique : les vagues à la surface de la mer, les ondes d'Alfén dans le vent solaire, les ondes de spin dans les solides, les ondes de Rossby atmosphériques ou océaniques, les ondes non linéaires en optique...

Contrairement à la turbulence hydrodynamique, la théorie de la turbulence d'ondes permet d'obtenir des résultats analytiques exacts [1]. Les résultats expérimentaux de turbulence d'ondes en laboratoire furent longtemps rares, mais s'intensifient depuis une dizaine d'année (voir [2] pour une revue). Notre travail s'inscrit dans la continuité de cette exploration expérimentale qui permet à la fois de sonder la validité des théories existantes et l'appréhension de nouveaux phénomènes.

L'un des résultats théoriques les plus importants de la turbulence d'ondes est l'existence de solutions à l'équation cinétique des ondes sous la forme de cascade à la *Kolmogorov*. La conservation de l'énergie donne naissance à une cascade directe correspondant à un flux d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles. Pour les ondes de capillarité, cette cascade directe a été observée et le régime permanent a été caractérisé [3,4,5]. Nous présentons ici l'étude de la turbulence d'ondes capillaires dans un régime transitoire de déclin. Pour les ondes de gravité, l'existence d'une cascade inverse (des petites échelles vers les grandes échelles) est prédite théoriquement [1] mais n'a jamais été observée jusqu'alors dans un système d'ondes de surface. Dans un second temps, nous présentons l'observation de cette cascade inverse d'ondes de gravité [6].

1 Turbulence d'ondes capillaires en déclin

On appelle turbulence décroissante ou en déclin l'évolution libre sans forçage d'un écoulement initialement dans un état turbulent. En turbulence hydrodynamique, de nombreuses études expérimentales ont été réalisées sur ce régime transitoire (voir par exemple [7]). Les mesures de turbulence d'ondes en déclin sont plus rares [8][9]. De façon analogue à la turbulence hydrodynamique, nous partons d'une situation

où la turbulence est développée (les spectres sont ceux du régime permanent) et nous laissons relaxer le système sans forçage extérieur. La question est de savoir comment relaxe alors le système d'ondes non linéaire.

1.1 Dispositif expérimental

Nous utilisons un dispositif similaire à celui décrit dans [3] : une cuve circulaire de diamètre 20 cm remplie de fluide (eau ou mercure) à une hauteur h . Les vagues sont engendrées par un piston de largeur 129 mm, immergé d'une profondeur H , situé à 2 cm du bord de la cuve et actionné par un exciteur de vibrations (Brüel & Kjaer, 4809). Ce vibreur électromagnétique est piloté en vitesse par la tension appliquée à ses bornes. L'agitation utilisée est un forçage aléatoire en amplitude et en fréquence dans une gamme étroite (bruit coloré). Les mesures de la hauteur des vagues $\eta(t)$ en un point sont réalisées à l'aide d'un fil capacitif, situé face au centre du batteur à 8 cm de celui-ci. Une géométrie carré ou circulaire de la cuve ne change pas les résultats. La turbulence d'ondes permanente est obtenue en actionnant le batteur à basses fréquences (bruit coloré 0.1-4 Hz ou 0.1-6 Hz) pendant une durée suffisante (> 30 s). L'agitation est alors arrêtée et $\eta(t)$ est mesurée. Le temps d'acquisition est choisi suffisamment long pour que les vagues puissent relaxer. Ce temps diffère selon le fluide (40 s dans l'eau et 90 s dans le mercure) puisque l'inertie du fluide (et donc sa viscosité) joue un rôle dans le déclin. Comme la durée d'acquisition est assez courte, l'expérience est effectuée N fois ($N=300$ dans le cas de l'eau, $N=180$ pour le mercure), afin d'effectuer des moyennes d'ensemble et d'obtenir une statistique satisfaisante. Ce moyennage donne suffisamment de statistique pour étudier le processus de déclin : le signal est découpé en petites tranches temporelles de durée δt ($\delta t = 2$ s pour l'eau, $\delta t = 4.5$ s pour le mercure, Figs 1 et 2), les différents instants (intervalle $[t, t + \delta t]$) du déclin sont ainsi caractérisés. L'écart type de l'amplitude σ_η et le spectre de l'amplitude des vagues sont évalués sur ces intervalles $[t, t + \delta t]$, et le résultat moyenné sur les N expériences. On peut alors suivre l'évolution temporelle de ces grandeurs moyennées. Nous avons réalisé deux séries d'expériences, l'une dans l'eau l'autre dans le mercure. La hauteur de fluide est $h = 25$ mm et le piston est immergé au maximum ($H = 24$ mm).

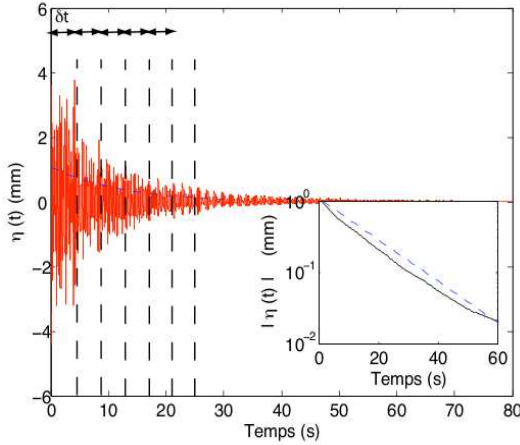


FIG. 1. Principal : $\eta(t)$ (en rouge) au cours du temps dans le mercure (excitation à $t < 0$, arrêt du forçage à $t = 0$). Le système relaxe jusqu'à l'équilibre. Le découpage par intervalle de temps δt est indiqué. Encart : moyenne glissante sur 180 acquisitions. En pointillés $\langle |\eta| \rangle = \langle |\eta_0| \rangle \exp(-t/\tau_{Hg})$ avec $\tau_{Hg} = 15$ s.

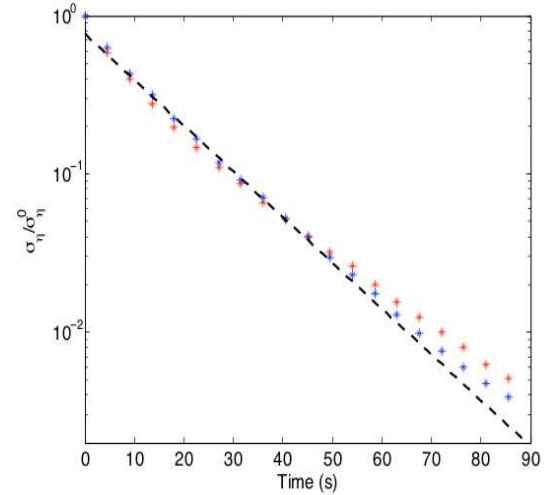


FIG. 2. Décroissance de $\langle \sigma_\eta \rangle$ dans le mercure : pour deux forçages différents (0.1-4 Hz en rouge et 0.1-6 Hz en bleu). En pointillés : $\sigma_\eta = \sigma_\eta^0 \exp(-t/\tau_{Hg})$ avec $\tau_{Hg} \approx 15$ s.

1.2 Relaxation du signal de hauteur des vagues

La figure 1 montre un signal de hauteur des vagues $\eta(t)$ (en rouge) à la surface du mercure relaxant jusqu'à l'équilibre. La courbe en pointillés correspond à une décroissance exponentielle. L'encart présente la moyenne d'ensemble sur les enveloppes des signaux (moyenne glissante) $\langle |\eta| \rangle$. La relaxation se fait de façon quasi exponentielle : $\langle |\eta| \rangle = \langle |\eta_0| \rangle \exp(-t/\tau)$, avec τ le temps de décroissance et $\langle |\eta_0| \rangle$ la hauteur initiale moyenne des vagues. τ est trouvé indépendant du forçage mais dépend fortement du fluide. On obtient $\tau_{H_2O} = 5.8s$ et $\tau_{Hg} = 15s$. La figure 1 montre l'évolution temporelle de la moyenne d'ensemble de l'écart type du signal de la hauteur des vagues (pour deux forçages 0.1-4 Hz en rouge et 0.1-6 Hz en bleu). $\langle \sigma_\eta \rangle$ décline donc exponentiellement en fonction du temps : $\langle \sigma_\eta \rangle = \langle \sigma_\eta^0 \rangle \exp(-t/\tau)$, avec τ le temps caractéristique de la décroissance (même valeur que par la relaxation de η) et $\langle \sigma_\eta^0 \rangle$ la valeur de $\langle \sigma_\eta \rangle$ au moment de l'arrêt du forçage. Le système est bien complètement relaxé à la fin de l'expérience, $\langle \sigma_\eta \rangle$ est quasi nulle (diminution de plus de deux ordres de grandeurs par rapport à la valeur initiale, Fig. 2). Le temps de dissipation visqueuse d'une onde capillaire est donnée par $\tau_\nu = \frac{1}{2k^2\nu}$ [10], avec ν la viscosité cinématique et k le nombre d'onde. En utilisant la relation de dispersion des ondes capillaires on obtient $\tau_\nu = \frac{(\gamma/\rho)^{2/3}}{2\nu\omega^{4/3}}$, avec γ la tension de surface, ρ la masse volumique et ω la pulsation. Le rapport des temps visqueux du mercure et de l'eau est : $\tau_\nu^{Hg}/\tau_\nu^{H_2O} \sim 5$, ce qui est du même ordre de grandeur que le rapport des temps de relaxation trouvé expérimentalement ($\tau_{exp}^{Hg}/\tau_{exp}^{H_2O} \sim 3$). La viscosité du fluide pilote bien la dissipation d'énergie lors du déclin des vagues.

1.3 Evolution temporelle des spectres

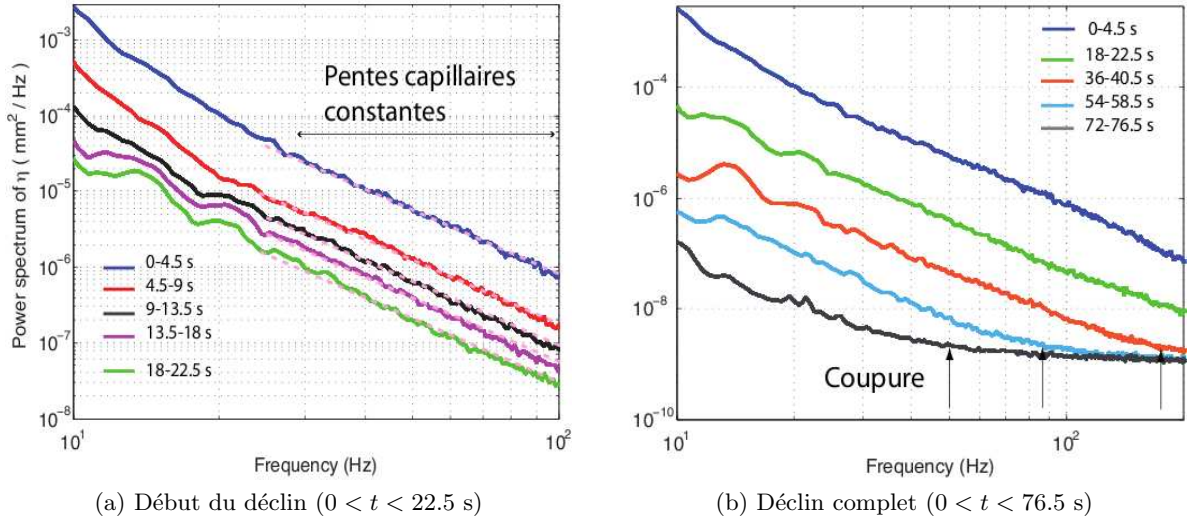


FIG. 3. Spectre de la hauteur des vagues à la surface du mercure à différents moments $[t, t + \delta t]$ de la décroissance. (a) début de la décroissance (en bleu, entre 0 et 4.5s, en rouge entre 4.5 et 9s, en noir entre 9 et 13.5s, en mauve entre 13.5 et 18s et en vert entre 18 et 22.5s). Les pentes en pointillés ont une pente de -3. (b) décroissance complète (en bleu, entre 0 et 4.5s, en vert entre 18 et 22.5s, en noir entre 36 et 40.5s, en mauve entre 54 et 58.5s et en rouge entre 72 et 76.5s). La fréquence de coupure (indiqué par les flèches) diminue au cours du temps.

La figure 3 montre les spectres de l'amplitude des vagues $S_\eta(f)$ à différents instants de la décroissance. Chaque courbe correspond à $S_\eta(f)$ calculée sur une durée δt (Fig. 1) puis moyennée sur l'ensemble des N expériences. La figure 3 (gauche) montre les cinq premiers moments du déclin (de haut en bas). A chaque instant le spectre dans le régime capillaire (de 20 à 100 Hz) est décrit par une loi de puissance

$S_\eta \sim f^{-\alpha}$ avec $\alpha = 3 \pm 0.2$. Le spectre est donc très proche du spectre théorique du régime permanent ($S_\eta^{cap} \sim f^{-17/8}$ [1]). L'amplitude du spectre diminue au cours du temps puisque la dissipation visqueuse a lieu. La figure 3b montre les spectres sur toute la durée du déclin. Les spectres sont toujours en loi de puissance pour $t < 4\tau$, donc à l'exception des temps très long (le spectre en noir entre 72 et 76.5 s est complètement "effondré"). De plus, les hautes fréquences s'atténuent les premières (cf. flèches sur la figure 3 droite) : la zone inertielle se réduit au cours du déclin, la fréquence de coupure du spectre diminue au cours du temps, en accord avec de précédentes expériences [8]. Toutes les fréquences du spectre déclinent de la même manière (spectre de pente constante au cours du déclin, cf. pointillés sur la figure 3a et les hautes fréquences moins énergétiques disparaissent en premier (cf. flèches sur la figure 3b)).

En conclusion, le spectre de l'amplitude des vagues capillaires décroît selon une loi auto-similaire en loi de puissance de la fréquence $S_\eta \sim f^{-\alpha}$ avec un exposant α indépendant du temps et proche de celui observé en régime permanent. Le déclin se matérialise alors par une décroissance de l'amplitude du spectre à toutes les fréquences et une réduction de la zone inertielle. Chaque étape du déclin peut être vu comme un début de déclin avec une énergie plus faible.

2 Cascade inverse en turbulence d'ondes de gravité

Pour les ondes de gravité, la conservation de l'énergie engendre une cascade directe d'énergie des grandes aux petites échelles. Cette cascade *à la Kolmogorov* a été observée *in situ* par les océanographes [11] et en laboratoire [3,12]. Le processus résonnant d'interaction entre ondes de gravité étant un processus à quatre ondes [13], une autre quantité, l'action d'ondes, est conservée. Ainsi, une cascade inverse d'action d'ondes est prédite théoriquement [1] des petites aux grandes échelles et a été observée numériquement [14,15]. Il s'agit d'un phénomène tout à fait remarquable : les interactions faiblement non linéaire entre ondes de petites longueurs d'ondes créent des ondes de grandes longueurs d'ondes. Des tentatives d'observation de cascades inverses en turbulence d'ondes ont été réalisées dans différents systèmes : "second son" dans l'hélium superfluide [16] et en optique non linéaire [17].

2.1 Dispositif expérimental

Le système est similaire à celui décrit pour le déclin de la section 1.1. Le système est maintenant forcé en régime stationnaire (l'enregistrement de l'amplitude des ondes se fait au cours de l'agitation) et avec une excitation stochastique entre 16 et 22 Hz. Le temps d'enregistrement est de 1000 secondes. La hauteur de fluide est $h = 18$ mm et l'immersion du piston est $H = 9$ mm. La faible immersion du piston permet d'éviter la génération de cross waves, sous harmoniques du forçage [18] qui gêneraient l'observation d'une cascade inverse d'ondes de gravité. Les résultats dans l'eau et dans le mercure sont similaires. L'excitation aléatoire entre 16 et 22 Hz est choisie afin de pouvoir induire des interactions entre ondes de gravité (la transition gravito-capillaire étant situé autour de 25 Hz) et d'observer la cascade directe dans le régime capillaire.

2.2 Observation d'une cascade inverse d'ondes de gravité

La figure 4 montre le spectre de l'amplitude des vagues pour un forçage stochastique entre 16 et 22 Hz à différentes amplitudes du forçage. À faible forçage (en bleu), on observe la réponse du système au forçage (entre 16 et 22 Hz) ainsi que les harmoniques du forçage (à deux fois les fréquences de forçage, puis trois). Aucune réponse n'est observée à basse fréquence en dehors d'un pic à 3.6 Hz. Ce pic correspond à une longueur d'ondes de $\lambda \sim 10$ cm (en utilisant la relation de dispersion des ondes de gravité), ce qui est équivalent à la moitié de la taille de la cellule. Il s'agit donc d'un mode de la boîte. Lorsque le forçage augmente, dans la gamme des hautes fréquences le spectre se remplit entre les harmoniques pour donner une loi de puissance : c'est la cascade directe de capillarité. L'exposant du spectre capillaire (pente en pointillés) est trouvé un peu plus faible que la prédiction théorique (pente -2.1 au lieu de -2.8). Dans la gamme des basses fréquences, le spectre se peuple continûment lorsque le forçage augmente. Il convient de

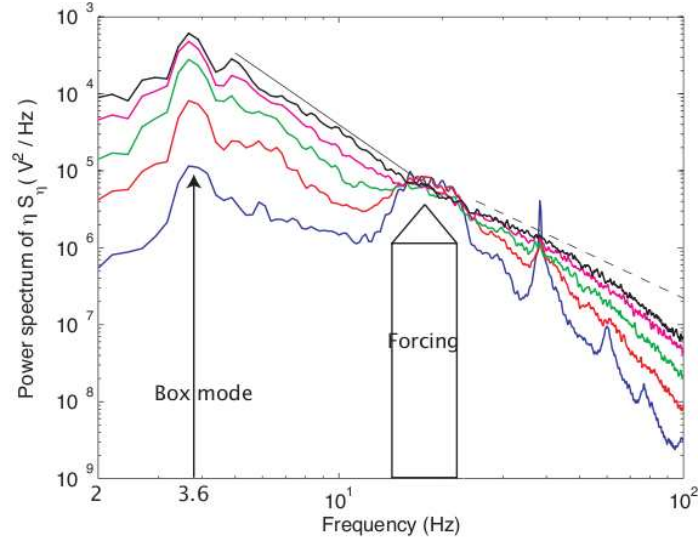


FIG. 4. Spectre pour différentes amplitudes du forçage aléatoire de fréquences comprises entre 16 et 22 Hz. Le forçage augmente sur les courbes de bas en haut. La pente de la ligne pleine est -3.1 , la pente en pointillés est -2.1 . Le mode de la boîte à 3.6 Hz est indiqué.

remarquer que l'amplitude de la réponse à la fréquence de forçage augmente peu avec le forçage. L'énergie est donc transférée à d'autres échelles notamment vers les grandes échelles.

A suffisamment haut forçage (en noir), le spectre à basse fréquence (de 4 à 16 Hz) est une loi de puissance $S_{\eta}^{inverse} \sim f^{-\nu}$ avec $\nu = 3.1 \pm 0.1$. Il s'agit de l'apparition de la cascade inverse d'ondes de gravité. L'exposant du spectre de la cascade inverse est trouvé proche du résultat théorique ($\nu_{theo} = -11/3 \approx -3.6$ [1]). La limite haute fréquence de la cascade inverse correspond au forçage et la limite basse fréquence est le mode de la boîte : la cascade inverse d'ondes de gravité est observée sur une gamme de fréquence proche d'une décade. Remarquons que cela correspond à une gamme de plus d'une décade dans le domaine spatial des nombre d'ondes k .

3 Conclusion

Le régime transitoire de la turbulence d'ondes capillaires en déclin est caractérisé : le spectre de l'amplitude des vagues décroît de façon auto-similaire en loi de puissance $S_{\eta} \sim f^{-\alpha}$ avec $\alpha = 3 \pm 0.2$ tout au long du déclin. L'exposant de ce spectre non stationnaire est proche de celui observé en régime stationnaire. La zone inertielle diminue au cours du temps à partir des hautes fréquences. L'évolution de la fréquence de coupure au cours du temps sera caractérisée prochainement.

L'observation d'une cascade inverse d'ondes de gravité a aussi été présentée. En effet, en excitant des ondes à une échelle de l'ordre de la longueur capillaire, des ondes à plus grandes échelles apparaissent par interaction non linéaire à quatre ondes. Le spectre de la cascade inverse suit une loi de puissance $S_{\eta}^{inv} \sim f^{-\nu}$ avec $\nu = 3.1 \pm 0.1$. Une étude plus détaillée de cette cascade inverse sera présentée dans [6].

Références

1. V. E. ZAKHAROV, V. S. LVOV & G. FALKOVITCH, *Kolmogorov spectra of turbulence*, Springer-Verlag (1992).
2. E. FALCON, Laboratory experiments on wave turbulence, *Discrete and continuous dynamical systems B*, **13** (4), 819-840 (2010).

3. E. FALCON, C. LAROCHE & S. FAUVE, Observation of gravity-capillary wave turbulence, *Physical Review Letters*, **98**, 094503 (2007).
4. M. YU. BRAZHNIKOV, G. V. KOLMAKOV, A. A. LEVCHENKO & L. P. MEZHOV-DEGLIN, Observation of capillary turbulence on the water surface in a wide range of frequencies, *Europhysics Letters*, **58**, 510-516 (2002).
5. C. FALCÓN, E. FALCON, U. BORTOLOZZO & S. FAUVE, Observation of gravity-capillary wave turbulence, *Europhysics Letters*, **86** 14002 (2009).
6. L. DEIKE, C. LAROCHE & E. FALCON, en préparation.
7. M. S. MOHAMED & J. LARUE, The decay power law in grid-generated turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, **219**, 195-214 (1990).
8. KOLMAKOV, G. V. AND LEVCHENKO, A. A. AND BRAZHNIKOV, M. YU., L. P. MEZHOV-DEGLIN, A. N. SILCHENKO & P. V. E. MCCLINTOCK, Quasiadiabatic decay of capillary turbulence on the charged surface of liquid hydrogen, *Physical Review Letters*, **93**, 074501 (2004).
9. B. MIQUEL & N. MORDANT, en préparation.
10. L. LANDAU & F. LIPSCHITZ, *Mécanique des fluides*, Edition Mir (1951).
11. Y. TOBA, Local balance in the air-sea boundary processes III. On the spectrum of wind waves, *Journal of the Oceanographical Society of Japan*, **29**, 209-220 (1973). — K. K. KAHMA, A study of the growth of the wave spectrum with fetch, *Journal of Physical Oceanography*, **11**, 1503-1515 (1981).
12. S. NAZARENKO, S. LUKASCHUK, S. MCLELLAND & P. DENISENKO, Statistics of surface gravity wave turbulence in the space and time domains, *Journal of Fluid Mechanics*, **642**, 395-420 (2010).
13. L. F. MCGOLDRICK, O. M. PHILLIPS, N. E. HUANG & T. H. HODGSON, Measurements of third-order resonant wave interactions, *Journal of Fluid Mechanics*, **25**, 437-456 (1966).
14. A. O. KOROTKEVICH, Simultaneous numerical simulation of direct and inverse cascades in wave turbulence, *Physical Review Letters*, **101**, 074504 (2008).
15. S. Y. ANNENKOV & V. I. SHRIRA, Direct numerical simulation of downshift and inverse cascade for water wave turbulence, *Physical Review Letters*, **96**, 204501 (2006).
16. A. O. GANSHIN, V. B. EFIMOV, G. V. KOLMAKOV, L. P. MEZHOV-DEGLIN & P. V. E. MCCLINTOCK, Observation of an inverse energy cascade in developed acoustic turbulence in superfluid helium, *Physical Review Letters*, **101**, 065303 (2008).
17. U. BORTOLOZZO, J. LAURIE, S. NAZARENKO & S. J. RESIDORI Optical wave turbulence and the condensation of light, *Journal of the Optical Society of America B*, **26**, 2280-2284 (2009).
18. J. MILES, Parametrically excited, progressive cross-waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **186**, 129-146 (1988) — J. J. MAHONY, Cross-waves. Part 1. Theory, *Journal of Fluid Mechanics*, **55**, 229-244 (1972) — B. J. S. BARNARD & W. G. PRITCHARD, Cross-waves. Part 2. Experiments, *Journal of Fluid Mechanics*, **55**, 245-255 (1972).

Instabilités centrifuges dans un écoulement de cavité : décomposition en modes dynamiques

Christelle Douay^{2,3}, Florimond Guéniat^{1,3}, Luc Pastur^{1,3}, François Lusseyran³, & Thierry Faure^{2,3}

¹ Université Paris-Sud 11, F-91405 Orsay Cedex

² Université Pierre & Marie Curie, 4 place Jussieu, F-75005 Paris, France

³ LIMSI-CNRS BP 133, F-91403 Orsay Cedex

christelle.douay@limsi.fr

Résumé. Les structures intra-cavitaires d'un écoulement de cavité ouverte sont identifiées, pour la première fois, par une analyse en modes dynamiques sur des champs de vitesse mesurés dans un plan transverse horizontal. L'organisation spatiale et la dynamique de ces structures est discutée.

Abstract. Structures inside a cavity flow are, for the first time, identified by performing a dynamic mode decomposition on PIV measurements in a top-view plane. Structure spatial organisation and dynamics are discussed.

1 Introduction

Nous cherchons à identifier les structures intra-cavitaires qui se forment dans un écoulement de cavité, à partir de mesures du champ de vitesse dans un plan horizontal situé à l'intérieur de la cavité. Les caractéristiques dynamiques de ces structures, révélées par les traceurs passifs utilisés pour l'ensemencement du fluide, sont noyées dans un champ de vitesse complexe, dont on mesure les trois composantes dans le plan. La composante perpendiculaire au plan est fortement bruitée et difficilement exploitable. Afin d'extraire ces structures, nous utilisons une technique de décomposition en modes dynamiques, récemment introduite par P. Schmid [7,8]. Nous présentons ici les modes dynamiques caractéristiques des structures intra-cavitaires qui résultent d'une instabilité centrifuge.

2 Dispositif expérimental

L'écoulement est engendré par une soufflerie basse vitesse et permet d'obtenir une couche limite laminaire en amont d'une cavité parallélépipédique de longueur $L = 75$ mm, profondeur H et envergure $S = 300$ mm (Fig. 1). La configuration étudiée ici est une cavité ouverte, c'est-à-dire sans réattachement de l'écoulement avant le bord aval, de rapport $L/H = 1.5$. La vitesse de l'écoulement extérieur à la couche limite vaut $U = 0.69$ m·s⁻¹ pour un nombre de Reynolds basé sur la profondeur de $Re_H = UH/\nu = 2300$. Une couche de cisaillement se développe entre la cavité et l'écoulement extérieur, instable vis-à-vis de modes de Kelvin-Helmholtz [4] (Fig. 2a). L'interaction de la couche cisailée avec le coin aval de la cavité conduit à des oscillations auto-entretenues de l'écoulement, qui se traduisent par des raies caractéristiques dans le spectre, ici $f \simeq 3.7$ Hz. La courbure induite par la recirculation intra-cavitaire, que l'on peut apercevoir sur la Fig. 2a), est responsable, sur une certaine plage des paramètres de contrôle U , L/H et S/H , du développement d'instabilités centrifuges. Dans le régime non-linéaire saturé, cela donne naissance à des structures de vorticité, toriques, contra-rotatives, du type Taylor-G rtler [1,2]. On peut apercevoir une coupe transverse de ces structures sur la Fig. 2b. La présence des bords latéraux, en $z/S = \pm 1/2$, engendre un pompage d'Eckman responsable d'une dérive des tourbillons de Taylor-G rtler vers les bords latéraux. On constate que le plan de séparation entre les tourbillons dérivant vers le bord gauche ou le bord droit, n'est pas précisément le pan médian de la cavité, mais qu'il est légèrement déporté, dans notre expérience en $z_c/S = 0.067$.

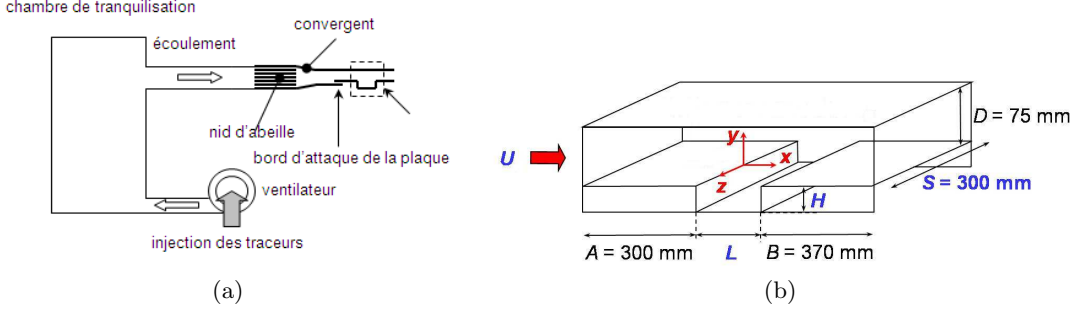


FIG. 1. Schéma de (a) la veine d'essais, (b) de la cavité.

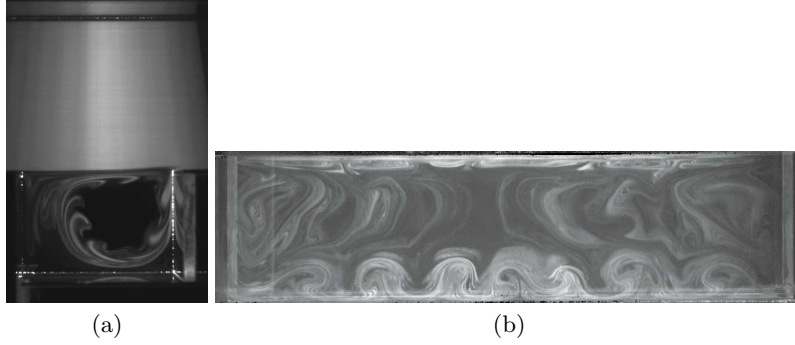


FIG. 2. Visualisation instantanée de l'écoulement réalisée avec de la fumée de spectacle, pour $L/H = 1.5$, $S/H = 6$ et un nombre de Reynolds Re_H typique de notre étude. (a) En vue de face dans un plan (x, y) , (b) en vue de dessus dans un plan (x, z) situé en $y/H = -0.3$ à l'intérieur de la cavité. On y distingue notamment la couche cisailée et la recirculation intra-cavitaire (figure de gauche), et une coupe des structures de Taylor-Görtler révélées par l'ensemencement (figure de droite).

Les mesures sont réalisées dans un plan horizontal (x, z) situé à l'intérieur de la cavité, dans la partie supérieure, à $y/H = -0.3$ sous plan affleurant. Deux caméras 10 bits de résolution 1032×732 pixels, permettent l'enregistrement d'une séquence d'images. Une nappe lumineuse, d'épaisseur 0.25 mm, est obtenue avec un laser YAG pulsé qui émet des impulsions de 250 mJ dont la longueur d'onde est 532 nm. La fréquence d'échantillonnage est de 5 Hz et la durée totale de l'enregistrement est d'environ 200 s. Le champ de vitesse est obtenu par velocimétrie par images de particules stéréoscopique, à l'aide d'un algorithme de flot optique par programmation dynamique orthogonale [5], et l'ensemble de mesure utilisé dans la suite est constitué des champs de fluctuations de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = u_z(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_z + u_x(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_x$ par rapport au champ moyen. La composante u_y , perpendiculaire au plan mesure, est très bruitée et n'est pas exploitée. La signature fréquentielle des structures intra-cavitaires se situe dans la gamme du Hertz, leur dynamique est donc résolue en temps.

3 Modes dynamiques intra-cavitaires

3.1 Décomposition en modes dynamiques

On considère l'ensemble des données, V_0^{N-1} , constitué des N premières réalisations du champ de vitesse fluctuant, et l'on suppose l'existence d'un opérateur d'évolution, A , tel que [7,8,6,3] :

$$V_0^{N-1} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}\} = \{\mathbf{u}_0, A\mathbf{u}_0, \dots, A\mathbf{u}_{N-2}\}, \quad (1)$$

les indices correspondant aux différents temps t_0, t_1, \dots, t_{N-1} de la mesure. L'opérateur A décrit ainsi l'évolution temporelle de l'observable \mathbf{u} , qui résulte d'un processus non-linéaire, l'écoulement étant supposé décrit par les équations de Navier-Stokes. Les fonctions propres ϕ_i de A , associées aux valeurs propres

λ_i , $A\phi_i = \lambda_i\phi_i$, sont caractéristiques de la dynamique temporelle du champ \mathbf{u} . La famille des $\{\phi_i\}$ est de dimension infinie et l'on suppose qu'elle forme une base pour décrire toute réalisation du champ de vitesse :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i \geq 1} \phi_i(t) \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (2)$$

$\boldsymbol{\alpha}_i$ étant la projection de \mathbf{u} sur la base des $\{\phi_i\}$. Les $\boldsymbol{\alpha}_i$ sont définis comme les modes dynamiques. On remarque encore, d'après l'équation (1), que la relation (2) peut se réécrire, par récurrence sur le temps :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i^{k-1} \phi_i(t_0) \boldsymbol{\alpha}_i. \quad (3)$$

La détermination des $(\phi_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ repose sur l'hypothèse que le champ \mathbf{u}_N peut s'écrire comme la combinaison linéaire des réalisations contenues dans V_0^{N-1} :

$$\mathbf{u}_N = c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_{N-1} \mathbf{u}_{N-1}, \quad (4)$$

En remarquant, d'après (1), que $AV_0^{N-1} = V_1^N$, il résulte de l'hypothèse (4) que l'on peut introduire une matrice C , dite matrice compagnon, telle que $AV_0^{N-1} = V_0^{N-1}C + R$, avec

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & \vdots & c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

et R une matrice résidu, qui tend vers zéro lorsque la condition (4) est strictement vérifiée. La matrice C est de dimension $N \times N$ et les c_j sont déterminés, d'après l'égalité (4), en minimisant la norme du vecteur différence $(\mathbf{u}_N - \sum_{j=1}^{N-1} c_j \mathbf{u}_j)$. Les opérateurs A et C étant similaires si le résidu R est nul, ils partagent les mêmes valeurs propres et leurs vecteurs propres, respectivement \mathbf{v}_j et $\boldsymbol{\alpha}_j$, sont liés par la relation $\boldsymbol{\alpha}_j \simeq V_0^{N-1} \mathbf{v}_j$. Il est donc possible de déterminer, empiriquement à partir de l'ensemble V_0^{N-1} , les fonctions propres $\{\phi_i\}$ de A , et d'écrire :

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{k-1} \phi_i(t_0) \boldsymbol{\alpha}_i. \quad (6)$$

L'ensemble des conditions initiales $\{\phi_i(t_0)\}$ est déterminée en projetant \mathbf{u}_0 sur les $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$.

3.2 Modes dynamiques et tourbillons de Taylor-Görtler

Pour des raisons de ressources mémoires limitées, les modes dynamiques ont été calculés sur une zone réduite du champ de cavité de 500×200 pixels (138×51 mm²), centrée sur z_c . Les modes associés aux composantes u_x et u_z du champ de vitesse ont été déterminés séparément.

Sur la Fig. 3, on voit que les valeurs propres de la décomposition se distribuent sur le cercle unité, ce qui indique que le régime dynamique évolue sur un attracteur [6]. Les spectres d'amplitude de la Fig. 4 représentent l'amplitude des modes dynamiques $\alpha_k(\mathbf{r})$, moyennée sur la grille spatiale, en fonction de la fréquence $f_k = \frac{\ln \lambda_k}{2i\pi \Delta t}$. Les spectres obtenus, selon que les modes sont déterminés sur u_x ou u_z , exhibent les trois mêmes pics principaux, à $f_1 = 0.13$ Hz (pic repéré par un cercle ouvert), $f_2 = 0.22$ Hz (pic repéré par un cercle plein) et $f_3 = 0.005$ Hz, avec des amplitudes relatives différentes et un spectre plus bruité pour u_z . Un petit pic à la fréquence $f_4 = 1.33$ Hz est également visible dans les spectres, qui correspond au repliement de la fréquence d'oscillation de la couche de mélange, détectée aux alentours de 3.7 Hz (la fréquence de Nyquist vaut 2.5 Hz).

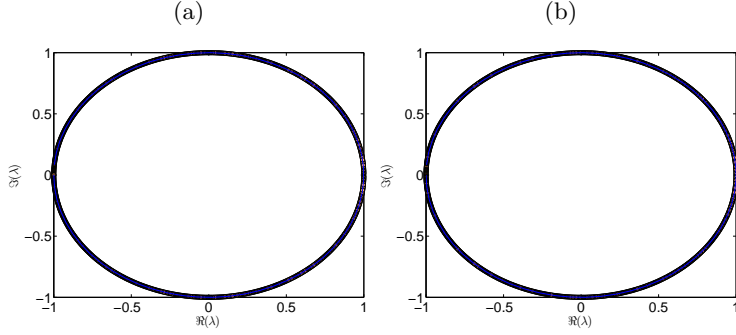


FIG. 3. Valeurs propres de la décomposition en modes dynamiques, distribuées sur le cercle unité, pour les ensembles de mesure (a) $\{u_x\}$, (b) $\{u_z\}$.

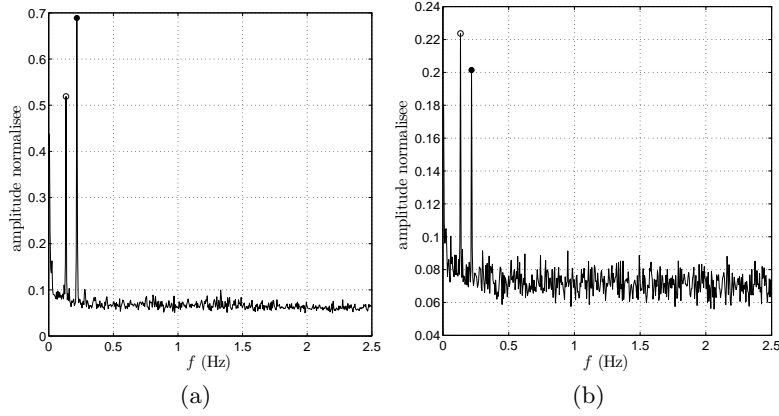


FIG. 4. Spectre d'amplitude normalisée obtenu par décomposition en modes dynamiques. L'amplitude des canaux fréquentiels est donnée par la norme \mathcal{L}^2 des modes dynamiques α_k pour les ensembles de mesure (a) $\{u_x\}$, (b) $\{u_z\}$.

Les modes dynamiques principaux, α_1 associé à f_1 et α_2 associé à f_2 , sont représentés sur la Fig. 5. Ils captent la dérive latérale des tourbillons de Taylor-Görtler (à gauche pour α_1 , à droite pour α_2). En effet, on peut voir que la partie imaginaire du mode est essentiellement une quadrature de phase de sa partie réelle, $\alpha_1(\mathbf{r}) \simeq \alpha_{1,r}(x, z) + i\alpha_{1,r}(x, z + \lambda_1/4)$, de sorte que, multipliée par le coefficient temporel $\phi_1(t) = e^{2i\pi f_1 t}$, la dynamique résultante :

$$\tilde{\mathbf{u}}_1(\mathbf{r}, t) = (\phi_1(t)\alpha_1(\mathbf{r}) + \text{c.c.})/2 = \alpha_{1,r}(x, z) \cos(\omega_1 t) - \alpha_{1,r}(x, z + \lambda_1/4) \sin(\omega_1 t),$$

est une onde progressive gauche. De façon analogue, le mode α_2 capte une dérive à droite. La distribution du champ de vitesse fait clairement apparaître des structures tourbillonnaires sur les parties hautes et basses de l'image (donc près des bords amont et aval), où se trouvent les tourbillons de Taylor-Görtler. L'amplitude du mode α_1 (respectivement α_2) va croissante (resp. décroissante) depuis le bord droit jusque vers le bord gauche de la zone d'étude, il y a donc une séparation spatiale des fréquences f_1 et f_2 liées chacune à une dérive gauche ou droite, avec un recouvrement autour de z_c .

Un autre mode d'amplitude élevée est associé à la fréquence $f_3 = 0.005$ Hz; il est représenté sur la Fig. 6. Il correspond à un mouvement oscillant suivant e_x , localisé près des bords amont et aval de la cavité. Ce mode d'oscillation a pu être observé sur des visualisations par fumée de spectacle des tourbillons de Taylor-Görtler; il est si faible dans la configuration présente qu'il n'est pas détectable dans les champs de vitesse autrement que par le filtrage opéré par la décomposition en modes dynamiques.

Le mode associé à la fréquence d'oscillation de la couche cisailée, $f_4 = 1.33$ Hz, est quant à lui représenté sur la Fig. 7. On constate un mouvement contrarotatif entre le bord amont et le bord aval, caractéristique de la contribution des tourbillons de Taylor-Görtler. On peut remarquer que dans la région \mathcal{D} , comprise entre $x/L = 0.25$ et 0.5 , et sur toute la longueur suivant z , le champ de vitesse est quasi-nul sur $\Re(\alpha_4)$, non-nul et essentiellement orienté suivant e_x pour $\Im(\alpha_4)$. La dynamique de cette région est donc du type $\tilde{\mathbf{u}}_4(\mathbf{r}_{\mathcal{D}}, t) = \phi_4(t)\alpha_4(\mathbf{r}_{\mathcal{D}}, t) \simeq u_0 \sin(2\pi f_4 t + \varphi)e_x$, c'est-à-dire un battement du champ de vitesse dû aux oscillations de la couche cisailée.

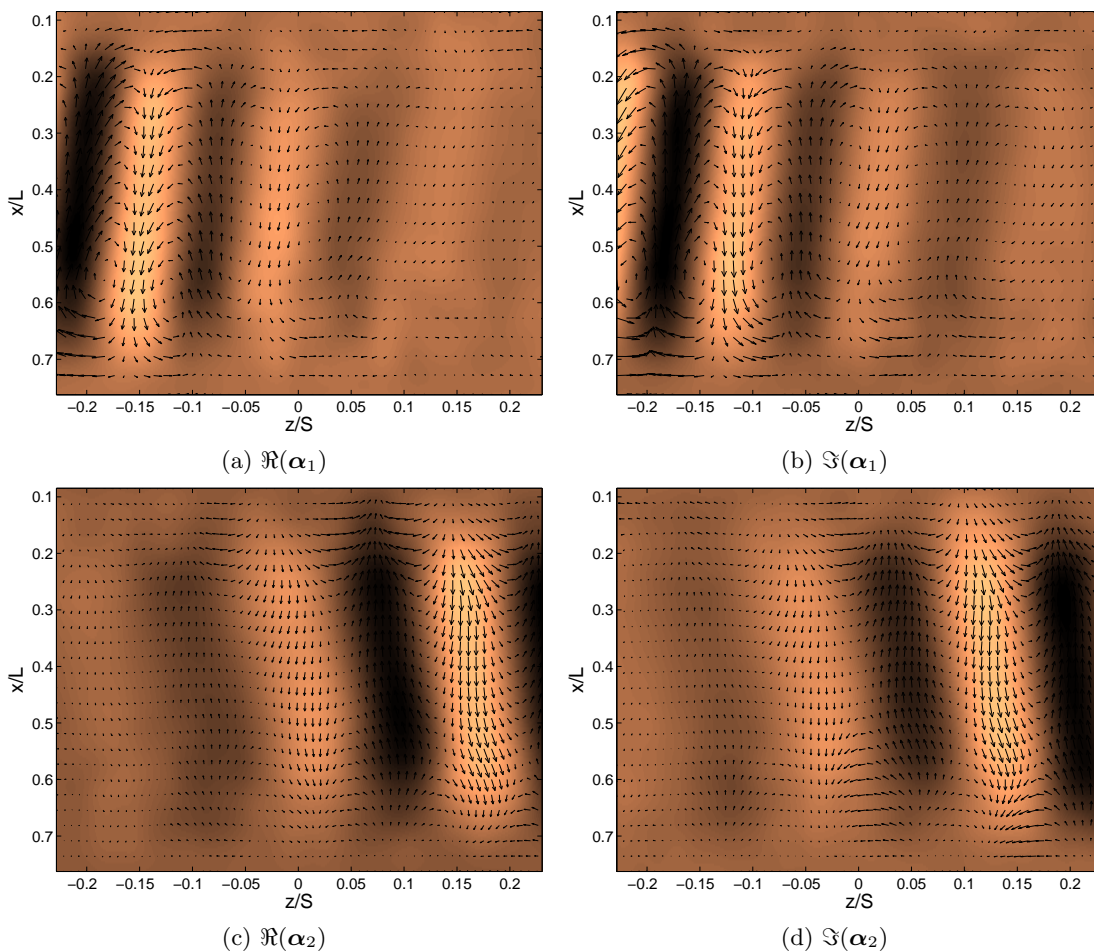


FIG. 5. Parties réelles et imaginaires des modes dynamiques α_1 , associé à $f_1 = 0.13$ Hz (pic repéré par un cercle ouvert sur la Fig. 3), et α_2 , associé à $f_2 = 0.22$ Hz (pic associé au cercle plein). Ces modes captent la dérive latérale des tourbillons de Taylor-Görtler, à gauche pour α_1 , à droite pour α_2 . Les vecteurs représentent la partie réelle du champ de vitesse (α_z, α_x) , l'échelle de couleur encode la partie réelle du champ $\alpha_k \cdot \mathbf{e}_x$.

4 Conclusion

La décomposition en modes dynamiques, sur les mesures des champs de vitesse fluctuant, a permis d'obtenir les fréquences principales de la dynamique intra-cavitaire et les structures spatiales associées. Ces basses fréquences sont difficiles à mesurer à partir des seuls champs mais bien captées par la décomposition. Nous avons fait la même étude dans des zones différentes du champ (partie gauche, partie droite, totalité du champ avec une décimation de la grille spatiale), les résultats sont les mêmes. Notamment, on constate que la partie latérale droite de la cavité garde une trace de la fréquence de dérive gauche et réciproquement. Ces résultats sont prometteurs car cette technique de décomposition par modes dynamiques permet de filtrer le champ brut et d'en extraire les structures importantes de la dynamique.

Références

1. T. FAURE, P. ADRIANOS, F. LUSSEYRAN & L. PASTUR, Visualizations of the flow inside an open cavity at medium range Reynolds numbers, *Experiments in Fluids*, **42**, 169-184 (2007).

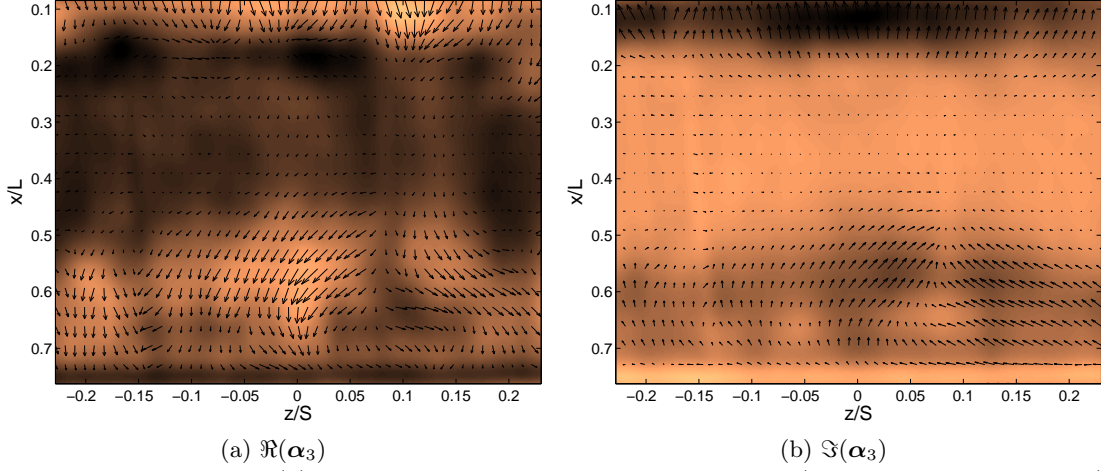


FIG. 6. Mode dynamique $\alpha_3(\mathbf{r}) = \alpha_{3,z}\mathbf{e}_z + \alpha_{3,x}\mathbf{e}_x$ associé à $f_3 = 0.005$ Hz (parties réelle et imaginaire). Les vecteurs représentent la partie réelle du champ vectoriel α_3 ; l'échelle de couleur encode la partie réelle de la projection du champ α_3 suivant \mathbf{e}_x : $\Re(\alpha_3 \cdot \mathbf{e}_x)$.

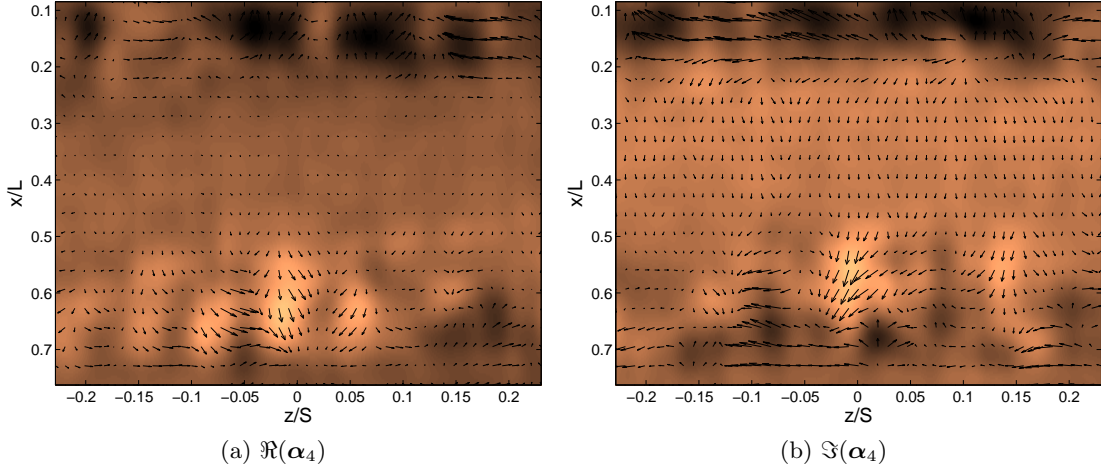


FIG. 7. Mode dynamique $\alpha_4(\mathbf{r})$ associé à la fréquence $f_4 = 1.33$ Hz, repliement de la fréquence des oscillations de la couche cisailée. Les vecteurs représentent $\Re(\alpha_4)$; l'échelle de couleur encode $\Re(\alpha_4 \cdot \mathbf{e}_x)$.

2. T. FAURE, L. PASTUR, F. LUSSEYRAN, Y. FRAIGNEAU & D. BISCH, Three-dimensional centrifugal instabilities development inside a parallelepipedic open cavity of various shape, *Experiments in Fluids*, **47**, 395-410 (2009).
3. F. GUENIAT, L.R. PASTUR, F. LUSSEYRAN & TH. M. FAURE, Opérateur de Koopman et identification de structures cohérentes : application à un écoulement de cavité, *Comptes-Rendus des Rencontres du Non-Linéaire*, **14**, 87-92 (2011).
4. P. HUERRE & M. ROSSI, Hydrodynamic instabilities in open flows, in *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*, pp. 81-294, Editors C. Godreche, P. Manneville, Cambridge University press (1998).
5. G. QUÉNOT, J. PAKLEZA & T.A. KOWALEWSKI, Particule image velocimetry with optical flow, *Experiments in Fluids*, **25**, 177-189 (1998).
6. C. W. ROWLEY, I. MEZIĆ, S. BAGHERI, P. SCHLATTER & D. S. HENNINGSON, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **641**, 115-127 (2009).
7. P. J. SCHMID & J. SESTERHENN, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, in *61st annual meeting of the APS division of fluid dynamics*, APS, San Antonio, Texas, USA (2008)
8. P. J. SCHMID, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *Journal of Fluid Mechanics*, **656**, 6-28 (2010).

Transition pointe-jet à l'interface huile/solution de polymères dans des systèmes microfluidiques

Aurélien Duboin¹, Florent Mallogi², Fabrice Monti¹, & Patrick Tabeling¹

¹ Microfluidique, MEMS et Nanostructures, UMR Gulliver CNRS-ESPCI 7083, 10 rue Vauquelin 75005 Paris, FRANCE

² Laboratoire Interdisciplinaire sur l'Organisation Nanométrique et Supramoléculaire, CEA Saclay, 91191 Gif sur Yvette Cedex, FRANCE

aurelien.duboin@espci.fr

Résumé. En introduisant de l'huile minérale (phase interne) et une solution de polymères (phase externe), dans une géométrie de *flow focusing*, nous avons observé des formes d'interfaces singulières. Dans certaines conditions d'écoulement, l'interface huile/solution de polymères subit une transition depuis une pointe stationnaire vers l'émission d'un jet d'huile dans le flux de polymères. Nous avons ainsi produit des jets micrométriques d'huile, éloignés des parois du système, et extrêmement stables (ils ne se brisent pas en petites gouttes). Nous avons étudié expérimentalement la nature de la transition pointe-jet, et montré que c'est une transition du premier ordre.

Abstract. By injecting mineral oil(inner phase) and a polymer solution (outer phase), in a microfluidic flow focusing geometry, we observed singular interface shapes. Under certain flow combination, the interface undergoes a transition from a steady state cusp, to the emission of a spout of oil in the polymer flow. We thus succeeded in producing micrometric jets of oil, which do not touch the walls, and are extremely stable (they do not break into droplets). The nature of the cusp-spout transition was experimentally studied, and found to be a first order one.

1 Introduction

Le *co-flow* de deux fluides non miscibles dans une géométrie de *flow focusing* permet de produire des bulles ou des gouttes, dont la taille est contrôlée par le rapport des débits des fluides, et selon plusieurs régimes comme le *jetting* ou le *dripping* [1]. Dans certaines conditions, grâce à des forces hydrodynamiques ou électrodynamiques [2] ou encore en présence de tensio-actifs [3], l'interface fluide-fluide forme un *tip-streaming* : l'interface développe une forme conique caractéristique, observée pour la première fois par Taylor [4], et la phase interne émet un jet fin qui peut dégénérer en très petites gouttelettes. Ces formes, en cône ou en pointe, représentent des défis pour la théorie, et elles ont donné lieu à de nombreuses études [5,6,7]. Très récemment, ces morphologies ont été exploitées pour mesurer la viscosité élongationnelle de solutions de polymères [8]. Ces pointes dégèrent en jet et jusqu'à présent, pour des questions de limite instrumentale, il n'a pas été possible de caractériser la transition pointe jet, notamment sa nature (sous ou supercritique). C'est précisément ce que nous sommes parvenus à faire, en mettant à profit l'excellent contrôle permis par l'environnement microfluidique. Dans cette présentation, nous décrivons une série d'expériences utilisant des solutions de polymères, produisant des pointes dans des jonctions microfluidiques. On a observé, notamment, que le jet produit au delà de la transition est stable sur des dizaines de milliers de fois son diamètre. Des jets très fins ont déjà été observés dans la littérature [9], mais toujours dans des conditions de stabilité limitées.

Nous analysons ici la dynamique de l'interface dans un écoulement bi-phasique dans un système microfluidique et une géométrie rectangulaire. La phase externe est un fluide complexe et la phase interne est une huile minérale, et subit une transition pointe-jet. Nous avons observé des lois d'échelles du même type que Cohen et Nagel, en approchant le point critique avec une précision accrue, et nous avons mesuré un saut discontinu du diamètre du jet autour de la transition.

Les expériences sont réalisées dans des systèmes microfluidiques présentant une géométrie de *flow focusing*, dont les canaux rectangulaires mesurent 50 μm de hauteur (canal principal large de 200 μm ,

canal de la constriction large de $50\ \mu\text{m}$). Les écoulements sont observés sur un microscope inversé Leica. Le microsystème est fabriqué en PolyDiMéthylSiloxane (PDMS) à partir d'un moule en silicone élaboré par photolithographie, puis rendu hydrophile par un traitement au plasma à oxygène, avant d'être fermé par une lamelle de verre. Les entrées du système sont connectées à une source de pression (Fluigent) par des tubes en PEEK (diamètre interne $125\ \mu\text{m}$, diamètre externe $510\ \mu\text{m}$), permettant de contrôler les écoulements avec une précision de 1 mbar.

Dans nos expériences, la phase interne, une huile minérale, est injectée par le canal central; tandis que la phase externe, une solution aqueuse de Polyoxyéthylène (PEO, $M_w = 8\ \text{MDa}$) est injectée par les canaux latéraux. Dans la plupart des régimes que nous considérons ici, la pression d'huile étant inférieure à la pression capillaire, l'interface huile/polymère localisée dans la partie centrale de la zone de convergence hydrodynamique, est fixe.

2 Étude autour de la singularité hydrodynamique

Nous nous sommes intéressés, dans un premier temps, à l'effet des pressions interne (P_{oil}) et externe (P_{PEO}) sur la dynamique de l'interface. Nous imposons P_{PEO} , et suivons l'évolution de l'interface à mesure que nous augmentons P_{oil} . La dynamique du système se révèle particulièrement riche, comme le montre la figure 1. À basses pressions d'huile et de POE, on observe une interface huile/POE de forme circulaire, dans la partie centrale de la zone de convergence (Fig. 1 a). Lorsqu'on augmente la pression externe, l'interface est déformée progressivement pour adopter la forme d'une pointe stationnaire (Fig. 1 b-c); après une plus forte augmentation, l'interface subit une transition : le fluide interne se trouve entraîné, et émet un jet circulaire à partir de la pointe (Fig. 1 d-e).

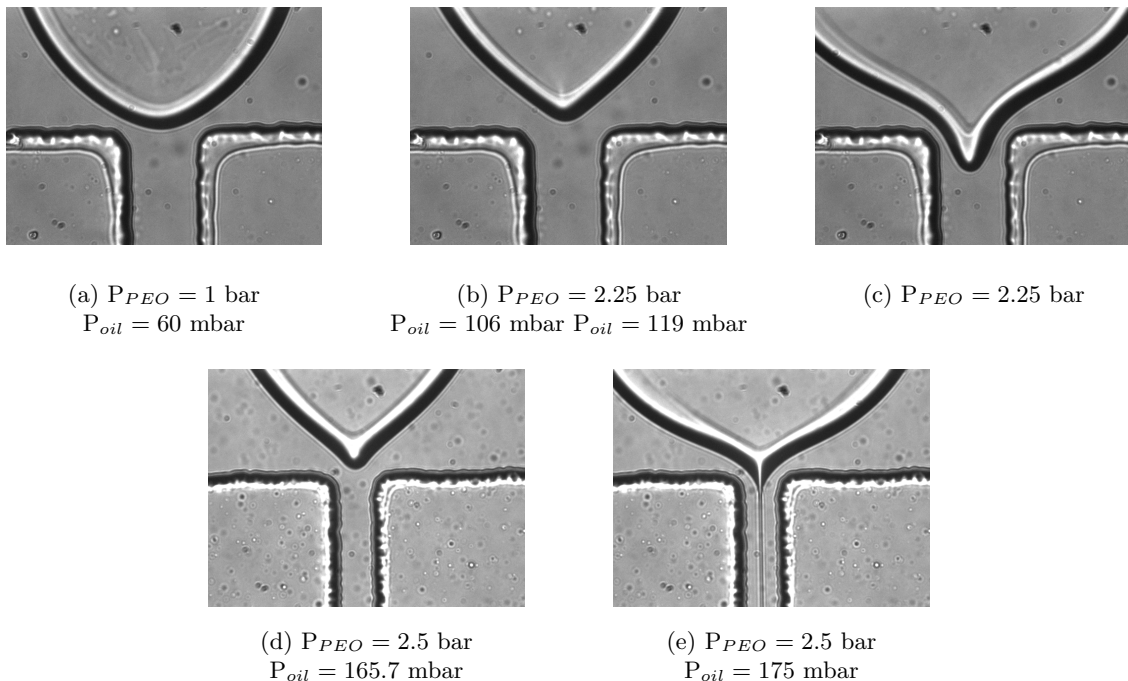
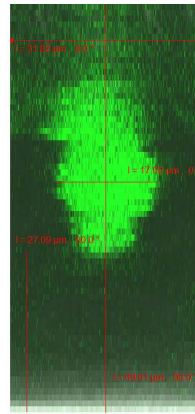
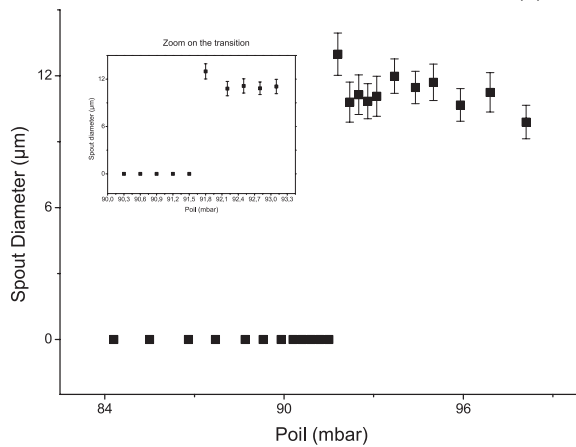


FIG. 1. Evolution de l'interface à pression externe fixée et observation de la transition pointe-jet. (a) À basses pressions externe et interne, l'interface est ronde. (b-c) À basse pression externe, quand on augmente P_{oil} l'interface forme une pointe stationnaire. (d-e) À plus haute pression externe, l'augmentation de P_{oil} induit une transition pointe-jet : un jet très fin est émis à la pointe.

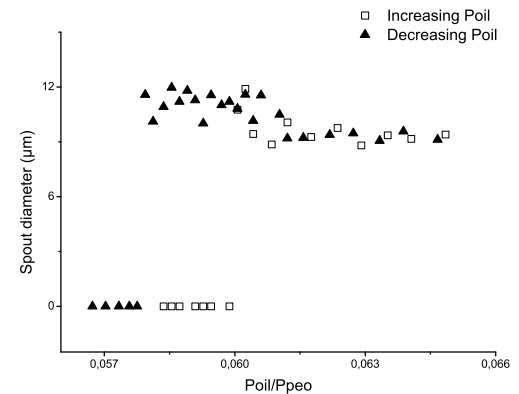
Nous avons suivi l'interface et reconstruit son profil à différentes pressions interne et externe. De ces profils, nous avons extrait deux variables caractéristiques de l'interface. Nous calculons la courbure à la pointe κ , à partir du coefficient du terme du second degré obtenu en effectuant une régression polynomiale du second degré localement à la pointe. La hauteur maximale h_{max} de la pointe est mesurée directement sur les images. En fixant P_{PEO} , nous obtenons l'évolution de κ and h_{max} , en fonction de P_{oil} : ces deux paramètres présentent un comportement en loi de puissance au voisinage du point critique. Les exposants de ces lois de puissance semblent être indépendants de la géométrie et de l'hydrodynamique (P_{PEO}), comme cela a déjà été décrit par Cohen [7]. Les comportements observés pour κ et h_{max} suggèrent que la forme de l'interface devrait montrer un comportement universel au voisinage du point critique. Pour explorer cette question, nous avons adimensionnalisé les variables de l'espace du profile, aux moyens des paramètres des lois de puissance déterminées pour κ et h_{max} , afin que la singularité se produise pour $H = 1$ en $R = 0$. Tous les profils, correspondant à différentes pressions interne et externe, convergent sur une même courbe maîtresse.



(a) Structure du jet



(b) Mesure du diamètre du jet



(c) Hystérésis

FIG. 2. (a) Image du jet obtenue au microscope confocal : les dimensions indiquées permettent de positionner les parois du canal. (b) montre la variation du diamètre du jet en fonction de P_{oil} ; la diamètre est nul avant la transition. L'encart graphique montre un zoom autour de la transition, approchée à 0,3 mbar près. (c) Diamètre du jet en fonction de P_{oil} , en augmentant P_{oil} (triangles), ou en diminuant P_{oil} (carrés). La transition présente clairement une hystérésis.

3 Nature de la transition pointe-jet

Enfin, nous avons étudié la transition pointe-jet, afin d'en préciser la nature. Pour clarifier la forme tridimensionnelle du jet, nous avons utilisé un microscope confocal, en utilisant des quantum dots solubilisés dans une huile fluorée comme traceur fluorescent. Nous avons effectué l'acquisition d'une pile d'images sur une ligne transversale à l'écoulement. Nous obtenons ainsi l'image reconstruite de la figure 2a : le jet est clairement sans contact avec les parois et présente une forme cylindrique.

À pression externe fixée, nous avons mesuré le diamètre du jet de part et d'autre de la transition, en augmentant P_{oil} avec une précision de 0,3 mbar. Nous avons noté un saut discontinu dans le diamètre du jet : le diamètre passe d'une valeur nulle à une valeur constante (Fig. 2b). Compte-tenu de la précision de la source de pression, la valeur de P_{oil} à laquelle se produit l'émission du jet est déterminée à 0,3 mbar près. La figure 2c montre que cette pression de transition est plus faible lorsqu'on approche la transition en diminuant P_{oil} qu'en l'augmentant. La transition pointe-jet présente donc une hystérésis. Le caractère discontinu de la transition et la présence d'une hystérésis permettent d'affirmer que la transition pointe-jet est une transition sous-critique du premier ordre. Enfin, nous avons montré qu'en faisant varier la géométrie (largeur de la zone de restriction), nous pouvons produire des jets aussi fins que 10 μm , stable sur une longueur atteignant quelques centimètres, soit plusieurs ordres de grandeurs fois son diamètre.

4 Conclusion

Pour conclure, nous avons étudié la dynamique de l'interface entre deux fluides non miscibles, et avons mis en évidence un nouveau phénomène, qui pourrait avoir des applications dans l'industrie pétrolière, en particulier dans le domaine de la récupération assistée du pétrole. Nous avons montré l'existence de pointes et leur nature singulière. De plus, nous avons décrit la formation d'un jet micrométrique, et apporté une preuve expérimentale du caractère sous critique de la transition pointe-jet. Enfin, les jets produits sont stables sur des longueurs encore jamais atteintes, dépassant de plusieurs ordres de grandeur leur diamètre.

Références

1. A. S. UTADA, A. FERNANDEZ-NIEVES, H. A. STONE & D. A. WEITZ, Dripping to jetting transitions in coflowing liquid streams, *Physical Review Letters*, **99** (9), 94502 (2007).
2. R. T. COLLINS, J. J. JONES, M. T. HARRIS & O. A. BASARAN, Electrohydrodynamic tip streaming and emission of charged drops from liquid cones, *Nature*, **4** (2), 149-154 (2007).
3. S. L. ANNA & H. C. MAYER, Microscale tipstreaming in a microfluidic flow focusing device, *Physics of Fluids*, **18** (12), 121512 (2006).
4. G. I. TAYLOR, Disintegration of water drops in an electric field, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **280**, 383-397 (1964).
5. W. W. ZHANG, Viscous entrainment from a nozzle : Singular Liquid Spouts, *Physical Review Letters*, **93** (18), 184502 (2004).
6. J. EGGERS, Air entrainment through free-surface cusps, *Physical Review Letters*, **86** (19), 4290-4293 (2001).
7. I. COHEN & S. R. NAGEL, Scaling at the selective withdrawal transition through a tube suspended above the fluid surface, *Physical Review Letters*, **88** (7), 074501 (2002).
8. D. ZHOU & J. J. FENG, Selective withdrawal of polymer solutions : experiments, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **165**, 829-838 (2010).
9. A. M. GAÑAN-CALVO, R. GONZALEZ-PRieto, P. RIESCO-CHUECA, M. A. HERRADA & M. FLORES-MOSQUERA, Focusing capillary jets close to the continuum limit, *Nature*, **3** (10), 737-742 (2007).

Stochastic evolution of a turbulent interface in a shear flow

Yohann Duguet¹ & Philipp Schlatter²

¹ LIMSI-CNRS, UPR 3251, Université Paris-Sud, 91403 Orsay CEDEX, France

² Linné Flow Centre, KTH Mechanics, Osquars Backe 18, Stockholm, SE-10044, Suède/Sweden
duguet@limsi.fr

Résumé. L'écoulement de Couette plan, confiné entre deux plaques parallèles qui cisailent le fluide, est un exemple classique où la transition vers la turbulence se produit de manière sous-critique, c'est-à-dire malgré la stabilité linéaire de l'écoulement de base. Ici nous nous intéressons à la compétition spatio-temporelle entre la phase turbulente (active) et la phase laminaire (absorbante). En particulier, des simulations numériques montrent que l'interface délimitant ces deux phases, lorsqu'elle est parallèle à l'écoulement moyen, se déplace d'une manière stochastique qui peut être modélisée comme une marche aléatoire continue en temps. L'analyse statistique suggère un processus de diffusion gaussien et permet de déterminer la vitesse moyenne de cette interface en fonction du nombre de Reynolds, ainsi que la valeur seuil au-delà de laquelle la turbulence contamine tout le domaine. Pour les nombres de Reynolds les plus bas, cette dynamique stochastique entre en compétition avec une dynamique de croissance déterministe des perturbations localisées. Cette dernière dynamique inattendue résulte de l'existence d'un régime, dit de *snaking*, où cohabitent de multiples solutions localisées et instables des équations de Navier-Stokes.

Abstract. Plane Couette flow, the flow sheared between two parallel counter-sliding plates, is a classical example where transition to turbulence proceeds in a subcritical way, i.e. despite the linear stability of the base state. We are here interested in the spatio-temporal competition between the (active) turbulent phase and the (absorbing) laminar one. In particular, numerical simulations show that the interface delimiting those two phases, when parallel to the mean flow, moves in a stochastic manner which can be modelled as a continuous-time random walk. Statistical analysis suggests a Gaussian diffusion process and allows one to derive the mean drift velocity of this interface as a function of the Reynolds number, as well as the threshold value above which turbulence contaminates the whole domain. For the lowest values of the Reynolds number, the stochastic dynamics competes with a deterministic growth regime of localised perturbations. The latter, rather unexpectedly, is related to the existence of a *snaking* regime where multiple unstable localised solutions of the Navier-Stokes equations co-exist.

1 Statistical analysis

In this study we are interested in determining numerically the velocity at which a laminar/turbulent interfaces moves through a shear flow. Because of its simplicity, we will consider the example of plane Couette flow, which has zero net flux. Plane Couette flow is the flow sheared between two parallel plates of velocities $\pm U$ in the streamwise direction x , separated by a gap $2h$ in the wall-normal direction y . The spanwise direction is noted z . The three-dimensional flow is governed by the incompressible Navier-Stokes equations with no-slip boundary conditions at both walls $y = \pm 1$. Velocities, time and space are non-dimensionalised by U , h and $\frac{h}{U}$, respectively. It is known that this flow admits a steady 1D solution $u(y) = \frac{Uy}{h}$ which is linearly stable for all Re , where $Re = \frac{Uh}{\nu}$ is the Reynolds number, with ν the kinematic viscosity of the fluid.

The spectral representation of the flow is based on Chebyshev polynomials in the y -direction, and a discrete Fourier decomposition in both x and z . This implies periodic boundary conditions in the in-plane directions, with the associated wavelengths noted respectively L_x and L_z . Time-stepping is achieved by a fourth-order Runge-Kutta integrator with adaptative variable timestep. The number of spectral modes is determined by the triplet $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z)$, with the extra use of a $\frac{3}{2}$ -dealiasing rule for the evaluation of the nonlinear terms. We perform well-resolved simulations in a domain $D1$ of size $(L_x, L_z) = (10.417, 250)$, using a resolution $\mathbf{N} = (32, 49, 1024)$. For the simulations at the lowest values of Re , the slow spreading

of localised perturbations made it possible to use a shorter domain $D2$ of size $(L_x, L_z) = (10.417, 125)$ with half the number of collocations points in the spanwise direction, i.e. $\mathbf{N} = (32, 49, 512)$. The short streamwise extent L_x is used as a numerical trick forcing potential laminar/turbulent interfaces to be orthogonal to the spanwise direction z , preventing the formation of a secondary large-scale flow around localised spots. Note that a very similar geometry has been used by Barkley & Tuckerman (Fig. 15 in [7]) in quenching experiments with $(L_x, L_z) = (10, 120)$. More recently, edge states and other finite-amplitude solutions were found in a similar geometry with $(4\pi, 16\pi)$ [6].

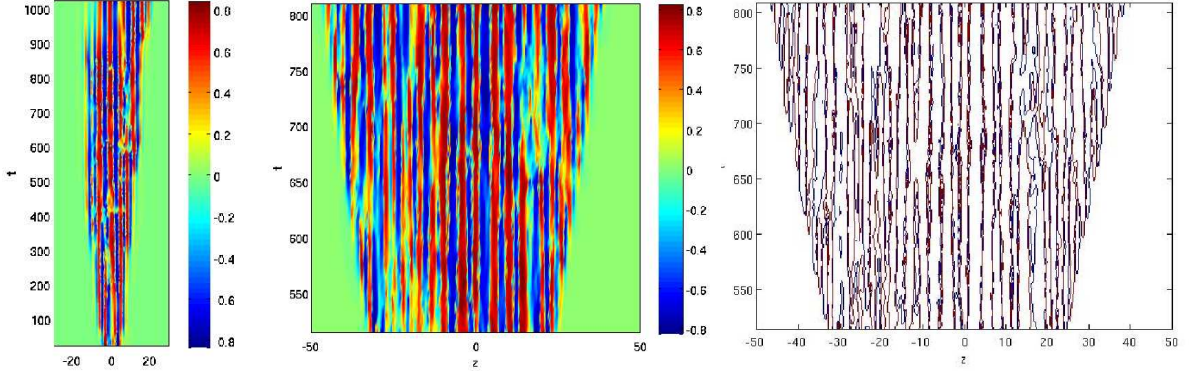


FIG. 1. Space-time (z, t) diagrams for $Re = 350$ (left) and $Re = 500$ (middle, right). Displayed are the quantity $Y(z, t)$ (left, middle) and the iso-contours $Y(z, t) = \pm 0.2$ (right)

The diagrams shown in Figure 1 and 5 corresponds to two realisations at $Re = 350$ and $Re = 500$. The visualised quantity corresponds here to

$$Y(z, t) = \{y | \langle u \rangle_x = 0\}, \quad (1)$$

the wall-normal coordinate of the $\langle u \rangle_x = 0$ iso-surface, where $\langle u \rangle_x$ is the streamwise velocity averaged over the wavelength L_x . This quantity has been chosen because it is zero in the laminar phase and departs away from zero in the presence of turbulent bursts. Taking $|Y| = 0.2$ in Eq. 1 as a criterion to locate the laminar/turbulent interface in absolute value has proven a robust choice.

The turbulent zone is here delimited by two asymmetric fronts. Each of the two fronts clearly moves from or towards the turbulent area in discrete steps, gaining or losing one streak (occasionally several streaks). The time interval between two successive events is not constant, requesting statistical description. The distance along which the front has progressed or retreated during one of these events is also not constant, firstly because streaks do not possess a uniquely defined spanwise wavelength, secondly because several streaks can be gained or lost at the same time. A convenient description of the motion of each front, well-adapted to a statistical analysis, is possible within the frame of continuous-time random walks (CTRW) [5]. Retreat and progress of a given interface are seen here as two competing and complementary events occurring suddenly on a distance Δz (the "jump length") after a time T ("the waiting time"). The CTRW process is here as asymmetric since the probabilities for the two events is not expected to be identical, statistically inducing a drift of the front in one direction or the other. If g refers to progress events and r to retreat events, four cumulative probability distributions are needed to characterise the whole process :

- $P_g(T > t)$ (resp. $P_r(T > t)$) : the probability that the next event be a *progress* (resp. *retreat*) event after a waiting time T being larger than a time t ;
- $P_g(\Delta z > L)$ (resp. $P_r(\Delta z > L)$) : the probability that the next event be a *progress* (resp. *retreat*) event with a jump length Δz being larger than a distance L .

Proper application of this formalism demands that Δz and T be treated as statistically independent variables, and that Δz and T be independent of time and space, i.e. that the statistical properties of

those two variables do not depend of the current position of the front. By convention we will consider all values of Δz positive, assuming that a positive drift corresponds to a g event and a negative drift to a r event. The various values of Δz and T are directly measured from diagrams such as Fig. 1 (right). They are gathered over a large number of independent realisations for each value of Re in the range [230 : 650], yielding the four cumulative probability distributions required. Fig. 2 clearly suggests that the cumulative distributions P_g and P_r for the waiting times are well fitted by exponential distributions. This corresponds to a memoryless process for the waiting times regardless of which event is considered ("g" or "r"). Exponential scaling also holds reasonably well for the cumulative distributions of the jump lengths, see Fig. 3. The implications are strong : as long as the exponential scaling holds, the motion of the front can be thought of as a Gaussian (normal) diffusion process.

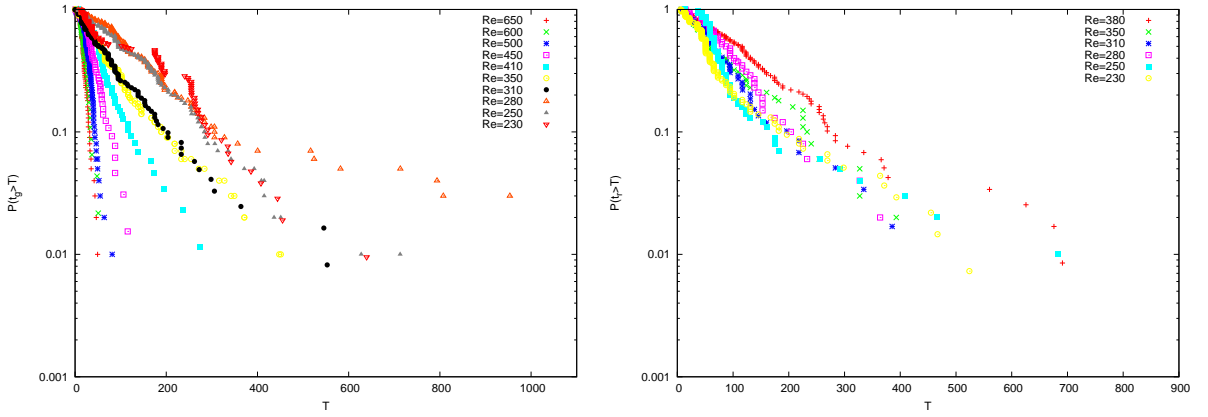


FIG. 2. Cumulative probability distributions for the waiting times $P_g(T > t)$ (top) and $P_r(T > t)$ (bottom) for various values of Re .

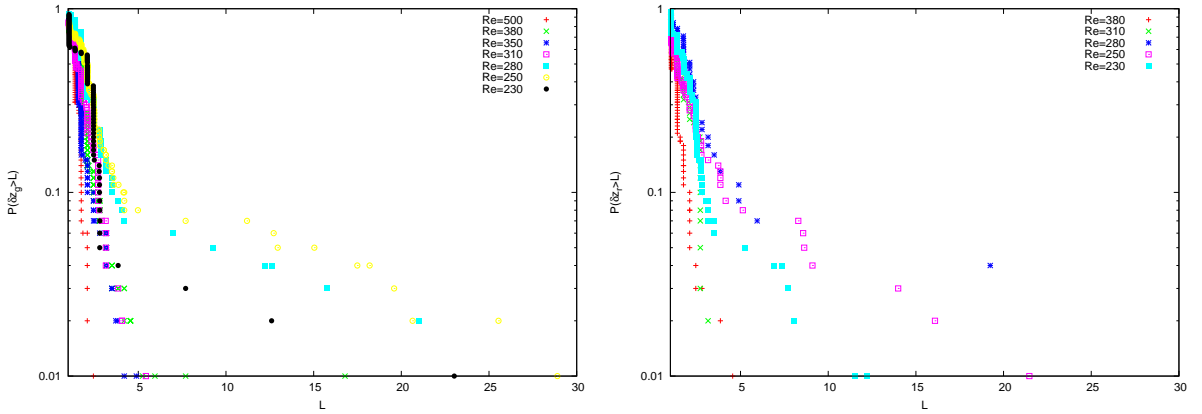


FIG. 3. Cumulative probability distributions for the waiting times $P_g(\Delta z > L)$ (top) and $P_g(\Delta z > L)$ (bottom) for various values of Re .

A comparison of the distributions corresponding to nearly all values of Re investigated is shown in Figure 2 for the waiting times and Figure 3 for the jump lengths. A clear Poissonian trend emerges for $P_g(T)$ and $P_g(\Delta z)$ for $Re \geq 300$ with a slope monotonously decreasing with Re . The cases $250 \leq Re \leq 290$ are less clearly amenable to an interpretation as a memory-less process, because of the presence of extreme events (very long waiting times and/or long jumps). The data is here insufficient to decide whether

the extreme events only produce unconverged statistics (still ruled by Poissonian dynamics) or if another tail is emerging with a different (possibly anomalous) scaling. For $Re = 230$ (see Fig. 2) and below (not shown), the global deviation from exponential is strong, suggesting a different process. Description of the retreat statistics $P_r(T)$ and $P_r(\Delta z)$ reveals the same trends, however their slopes increase in absolute value with increasing Re . Furthermore, the analysis is blurred at high Re by the rarity of retreat events compared to progress events : above $Re \geq 400$, the occurrence of retreat events would demand too much simulation time (or equivalently too many independent realisations) to produce converged statistics.

Interpolation of the slopes in Fig. 2 directly yields the average values. We exploit this property to compute the conditional averages $\langle T_g \rangle$ (resp. $\langle T_r \rangle$), i.e. the average waiting time given that the next event is a "g" event (resp. an "r" event), and equivalently the conditional averages $\langle \Delta z_g \rangle$ and $\langle \Delta z_r \rangle$. Error bars are computed by comparing undersampled distributions in a Bayesian way, constantly excluding events depicted as rare ones. As expected from Fig. 2, Fig. 4 (left) shows that the conditional average time $\langle T_g \rangle$ decreases monotonously with Re while $\langle T_r \rangle$ monotonously increases with it. The two averages thus safely cross at a given value of Re , $Re_{c1} = 320 \pm 10$. The interpretation is straightforward : for $Re > Re_{c1}$, the probability is higher than the next event shall be a progress event than a retreat event, regardless of the history of the front, while retreat events are favoured statistically for $Re < Re_{c1}$. The two average times coincide exactly only for $Re = Re_{c1}$. Note the closeness of Re_{c1} to the experimental thresholds $Re_g \approx 325$ in large domains. Strictly speaking, this does not mean that the front is statistically steady at $Re = Re_{c1}$ since the jump length distributions must also be included in the picture. Figure 4 (right) shows that $\langle \Delta z_g \rangle$ decreases slowly with Re . $\langle \Delta z_r \rangle$, in the range where data is available, also shows a decreasing behaviour. Rather than the expected high- Re trend, the most striking feature of Fig. 4 (right) is the tendency of both $\langle \Delta z_g \rangle$ and $\langle \Delta z_r \rangle$ to grow large at low Re , up to much larger values than the width of a streak. This confirms the observation that a large set of streaks can be either gained or lost brutally near the interface, consistently with an increase of the spanwise correlation length at low Re .

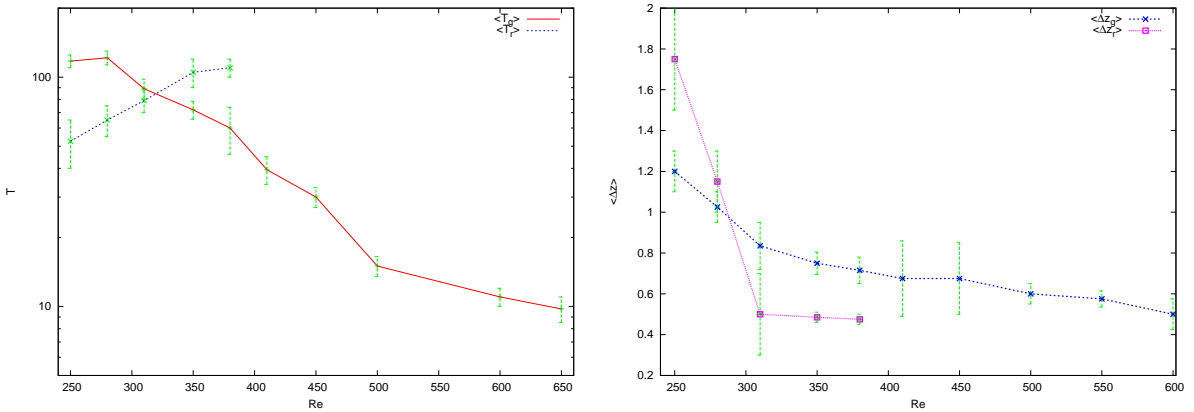


FIG. 4. Mean waiting times (left) and mean jump length (right) vs. Re .

2 Depinning transition

The results of the previous section point out that the assumption for Gaussianity breaks down for the lowest values of Re . From $Re \sim 280$ down to $Re = 217 \pm 1$, some unexpected non-trivial (not necessary "turbulent") dynamics is observed, characterised by phases of regular growth over a time much longer than predicted by low- Re extrapolation of the previous distributions (see Figure 5). These long growth phases are very reminiscent of the depinning transition predicted in the vicinity of a homoclinic snaking

region in extended one-dimensional systems parametrised by one governing parameter r (see Figure 14 in Ref. [1]). Homoclinic snaking is observed in ordinary differential equations where a non-trivial (“patterned”) steady state with a spatially periodic structure bifurcates subcritically from a trivial homogeneous (“laminar”) solution. The non-trivial branch then bifurcates into two branches which can be traced down the governing parameter and begin to intertwingle inside a narrow range $[r_1 : r_2]$, giving rise to a multiplicity of steady localised states pinned to the non-localised patterned state. Analysis in the case of the Swift-Hohenberg equation has shown that for $0 < \delta = r - r_2 \ll 1$, depinning of the fronts occurs, i.e. the fronts are no longer stationary yet drift so that the patterned state invades the whole domain, with a velocity scaling as $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ (see Figure 14 in Ref. [1]). Recently, Schneider et al. have considered the case of pCf with periodic boundary conditions in x and z with extension in the z direction, taking $(L_x, L_z) = (4\pi, 16\pi)$ [6]. This is qualitatively very similar to the quasi-1D geometry considered here. They have identified a snaking region in an interval $[Re_{s1} : Re_{s2}] \approx [170 : 175]$ containing a series of z -localised solutions, either steady or travelling slowly in the x -direction. More recently, these authors have investigated the L_z -dependence of the snaking interval, showing that Re_{s2} rapidly increases with decreasing L_z , suggesting the range $\approx 201 - 213$ for $L_z = 10.417 \approx 3.3\pi$ [4].

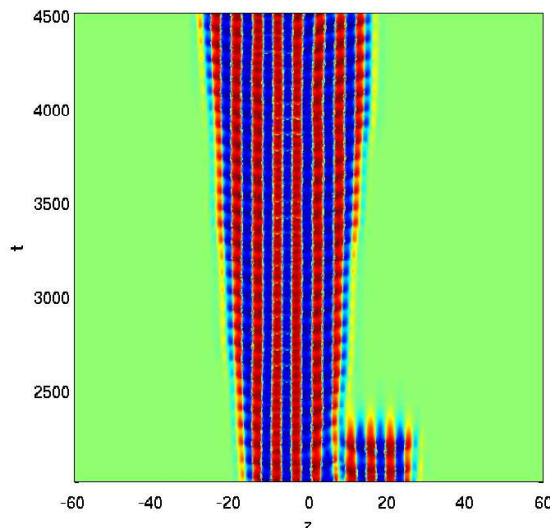


FIG. 5. Space-time (z, t) diagram for the quantity $Y(z, t)$; $Re=220$

In order to verify that the long phases of growth are related to the depinning transition, a set of simulations has been analysed for several values of Re between 190 and 280, all starting from the same turbulent state obtained in a previous run at $Re=250$. Since we are interested here in long growth phases rather than on retreat/progress events on a short time-scale, we have deliberately selected only growth events with a constant velocity on a time scale $\Delta T > 1000$. An interpolation is then performed directly from space-time diagrams such as the one in Fig. 5, yielding the front velocity $c = \frac{\Delta z}{\Delta T}$. We have checked that c scales like $O(\sqrt{Re - Re_{s2}})$, with Re_{s2} given by $\approx 217 \pm 1$ (see Figure 6). The match with available data is thus very satisfying, especially given the discrepancy in the values of L_x considered.

3 Conclusions

We have investigated the dynamics of a laminar-turbulent interface in plane Couette flow, in the special case where the interface is parallel to the mean flow direction. The motion appears as a stochastic process above $Re \geq 280$, with an average speed increasing from negative values at low Re to positive values

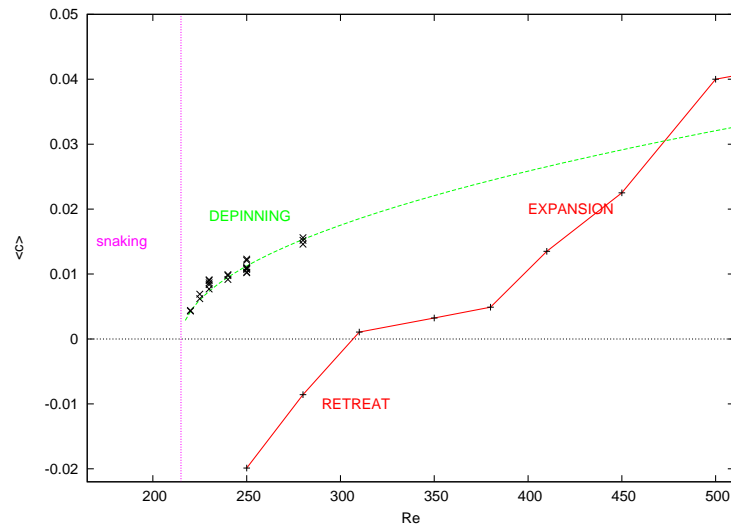


FIG. 6. Bifurcation diagram showing the competition between the deterministic depinning branch and the stochastic branch

at higher Re . Interestingly, the front velocity reaches a plateau for $Re \approx [320 : 410]$, which corresponds to the range of Re at which robust laminar/turbulent patterns are observed in experiments [3,7]. It is not excluded that the extra advection by the large-scale flow induced by turbulent fluctuations could stabilise the motion of the fronts and thus explain the robustness of the patterns. For lower values of Re , stochasticity is observed to compete with a deterministic dynamics, which we interpret as a depinning transition from the homoclinic snaking regime already identified using an other approach (as in Figure 6). Whether stochastic and deterministic branches bifurcate one from another or whether these are two disconnected phenomena remains to be investigated.

Références

1. J. BURKE & E. KNOBLOCH, Localized states in the generalized Swift-Hohenberg equation, *Physical Review E*, **73**, 056211 (2006).
2. O. DAUCHOT & F. DAVIAUD, Finite amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow, *Physics of Fluids*, **7**, 335-343 (1995).
3. Y. DUGUET, P. SCHLATTER & D. S. HENNINGSON, Formation of turbulent patterns near the onset of transition in plane Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **650**, 119-129 (2010).
4. J. F. GIBSON, *private communication* (2011).
5. E. W. MONTROLL & G. H. WEISS, Random walks on lattices, *Journal of Mathematical Physics*, **6**, 167 (1965).
6. T. M. SCHNEIDER, J. F. GIBSON & J. BURKE, Snakes and ladders : localized solutions of plane Couette flow, *Physical Review Letters*, **104**, 104501 (2010).
7. L. S. TUCKERMAN & D. BARKLEY, Turbulent-laminar patterns in plane Couette flow, *IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition and Finite Amplitude Solutions*, Eds. T. Mullin & R. Kerswell, pp. 107–127, Springer, Dordrecht (2005).

Instabilité micro-onde dans les paquets d'électrons relativistes sur anneaux de stockage

Clément Evain, Joanna Barros, Alexandre Louergue, Marie-Agnès Tordeux, Ryutaro Nagaoka, Marie Labat, Lodovico Cassinari, Gaëlle Creff, Laurent Manceron, Jean-Blaise Brubach, Pascale Roy, & Marie-Emmanuelle Couprie

Synchrotron SOLEIL, Saint Aubin, BP 34, 91 192 Gif-sur-Yvette, France
clement.evain@synchrotron-soleil.fr

Résumé. Dans les centres de rayonnement synchrotron, l'interaction d'un paquet d'électrons avec le rayonnement qu'il émet entraîne des comportements dynamiques complexes. En particulier, des instabilités spatio-temporelles apparaissent typiquement lorsque la charge dépasse une valeur seuil, ce qui représente une limitation fondamentale pour certains modes d'utilisation des anneaux de stockage. En parallèle ces effets sont également étudiés car ils permettent d'obtenir une émission de rayonnement cohérent TéraHertz. Des expériences menées à SOLEIL, en combinaison avec des simulations numériques, montrent que cette instabilité, appelée instabilité micro-onde, est due à la formation par intermittence de micro-structures dans les paquets d'électrons. Ces travaux indiquent une dynamique riche, faisant intervenir des processus d'amplification de structures, d'amortissement et de diffusion.

Abstract. In synchrotron radiation centers, interaction between an electron bunch with its emitted radiation leads to complex behaviour. In particular, spatio-temporal instabilities arise when the bunch charge exceed a threshold value, limiting some operation of the storage ring. Besides, these effects are studied as they permit to produce a strong coherent synchrotron radiation in the Terahertz range. Experiments at SOLEIL, in association with numerical simulations show that the so-called microbunching instability is due to irregular apparition of micro-structures in the electron bunch. These works point out a rich dynamics including structure amplification, damping and diffusion.

1 Introduction

Dans les anneaux de stockage (Fig. 1), des paquets formés de milliards d'électrons circulent à une vitesse relativiste pour produire un rayonnement synchrotron, utilisé par les lignes de lumière pour sonder la matière. Ce rayonnement est émis lorsque les électrons sont accélérés, principalement dans des aimants de courbure et dans des onduleurs (composés d'une alternance d'aimants nord/sud créant un champ magnétique périodique permanent, faisant prendre aux électrons une trajectoire sinusoïdale). Les centres de rayonnement de troisième génération comme SOLEIL sont caractérisés par des paquets de faibles dimensions et divergences transverses. Longitudinalement, le rayonnement est ordinairement incohérent puisque les émissions provenant des différents électrons d'un même paquet ne sont généralement pas en phase. Toutefois, il est possible d'obtenir un rayonnement cohérent dans le domaine TéraHertz en raccourcissant la longueur du paquet (typiquement jusqu'à 1 ps, contre la dizaine de ps en mode normal) en utilisant un mode de réglage particulier des champs magnétiques de l'anneau, appelé mode de « faible facteur de compression des moments » (ou mode *low- α* , α désignant le facteur de compression des moments). Dans ce mode, le rayonnement peut être émis de manière cohérente dans le domaine du TéraHertz puisque les longueurs d'onde associées sont plus longues que la taille du paquet, permettant de gagner plusieurs ordres de grandeur en puissance par rapport au rayonnement incohérent, rendant ce type de source très recherché [1,2]. Néanmoins, lorsque le nombre d'électrons dans un paquet dépasse une valeur seuil, une instabilité apparaît, rendant le rayonnement THz cohérent trop instable pour être utilisé [3]. Cette instabilité appelée instabilité micro-onde est observée depuis plusieurs années dans les anneaux de stockage [1,3,4,5]. Dans cet article, nous présentons les études faites au synchrotron SOLEIL sur cette instabilité.

Après une brève introduction du synchrotron SOLEIL, nous montrerons les caractéristiques du signal THz émis en dessous et au dessus du seuil d'instabilité, le rayonnement THz étant le principal diagnostic de l'instabilité micro-onde. Grâce à des simulations numériques, comparées aux données expérimentales, nous pourrions comprendre la formation et l'évolution de structures dans le paquet d'électrons.

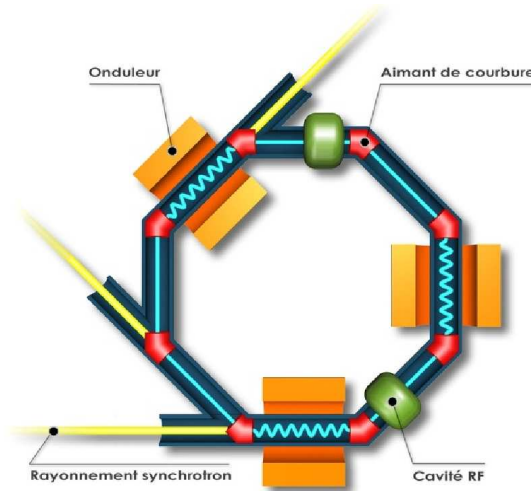


FIG. 1. Après leur accélération dans un accélérateur linéaire puis dans un « booster » (non affiché), les électrons ayant acquis leur énergie nominale circulent dans l'anneau de stockage. Ils sont déviés de leur trajectoire rectiligne par des aimants de courbure. Le rayonnement synchrotron est émis lorsque les électrons sont déviés, principalement dans les aimants de courbures et dans les onduleurs. À chaque tour d'anneau, les électrons sont accélérés par les cavités RF pour compenser l'énergie perdue par émission du rayonnement.

2 Présentation du synchrotron SOLEIL

Le synchrotron SOLEIL, situé à Saint-Aubin près de Paris, fonctionne depuis 2006. Les électrons circulant dans l'anneau fournissent actuellement un rayonnement pour 24 lignes dont 8 sur aimants de courbures (dont la ligne TéraHertz/infrarouge AILES) et 16 sur onduleurs, couvrant un domaine spectral s'étendant du TéraHertz aux rayons X-durs [6]. Le mode classique d'utilisation est un remplissage de l'anneau avec 416 paquets, totalisant une charge de 400 mA (500 mA après la validation des tests de radio-protection). En 2010, 4905 heures ont été réservées pour fournir du rayonnement aux lignes de lumière et 1200 heures pour l'étude et la modification du synchrotron. Le tableau ci-dessous donne quelques paramètres du synchrotron SOLEIL.

TAB.1. Paramètres du synchrotron SOLEIL.

Circonférence (m)	354
Énergie nominale E_0 (GeV)	2.75
Dimension transverse du paquet (en sections droites moyennes) σ_x (μm), σ_y (μm)	182, 8.11
Rayon R (m) et longueur L (m) des aimants de courbure	5.39, 1.05
Facteur de compression des moments nominal α_0	$4.3 \cdot 10^{-4}$
Longueur RMS des paquets en mode α_0 (ps)	13.8

3 Signal TéraHertz proche du seuil de l'instabilité micro-onde

Le rayonnement THz est le principal diagnostic de l'instabilité micro-onde, puisque lorsque qu'une structure apparaît dans le profil longitudinal du paquet, un rayonnement cohérent intense est émis. Le rayonnement THz a été enregistré sur la ligne TéraHertz/infrarouge AILES, utilisant un rayonnement synchrotron émis au niveau d'un aimant de courbure. En sortie de la ligne, au niveau de la station expérimentale, le signal THz est divisé en deux parties (Fig. 2) par une séparatrice de Mylar de 6 μm . La première partie est directement enregistrée par un bolomètre InSb refroidi à 4,2 K de résolution temporelle allant jusqu'à la microseconde (IR Labs), permettant de connaître l'évolution temporelle du signal THz. La seconde partie passe à travers un interféromètre de Michelson (Bruker IFS 125) avant d'être enregistrée par un autre bolomètre refroidi à 4,2 K, fournissant les informations spectrales.

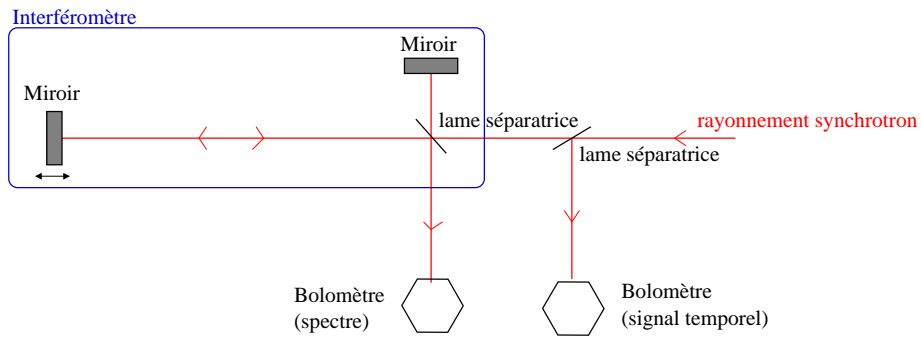


FIG. 2. Schéma du dispositif expérimental de la ligne de lumière THz/IR AILES. Le signal provenant de l'émission des électrons au niveau d'un aimant de courbure est séparé en deux par une lame séparatrice. La première partie du signal est directement enregistrée par un bolomètre et la deuxième passe par un interféromètre avant d'être enregistrée par un deuxième bolomètre.

La figure 3 présente l'évolution temporelle et spectrale typique du rayonnement THz lorsque le nombre d'électrons (ou le courant I , proportionnel au nombre d'électrons) dans un paquet est augmenté. Les expériences ont été effectuées avec un seul paquet dans l'anneau en mode $\alpha_0/10$. Pour un courant suffisamment faible ($I = 0.15$ mA), le signal temporel THz est stable (Fig. 3a) et le signal observé sur le spectre est très faible, signature d'un rayonnement incohérent (Fig. 3d). Pour un courant plus élevé ($I = 0.20$ mA), le signal temporel THz reste relativement stable (Fig. 3b), et l'augmentation de certaines composantes spectrales indique qu'une partie du rayonnement est cohérent (Fig. 3d). Enfin, pour un courant légèrement plus élevé ($I = 0.35$ mA), le signal temporel devient fort instable (Fig. 3c) et le spectre associé très bruyant (Fig. 3d).

4 Observation des micro-structures

Le rayonnement THz cohérent est un diagnostic important pour comprendre ces instabilités puisqu'il indique la présence de modulation dans le paquet d'électrons. Toutefois une observation directe des électrons n'est pas possible expérimentalement. Pour comprendre plus précisément le comportement des électrons lors de l'instabilité, nous avons réalisé des simulations numériques.

La dynamique des électrons est décrite par un code dit "macro-particulaires". Chaque macro-particule représente plusieurs électrons. Le type de dynamique étudié est bien décrit par la dynamique longitudinale [7], et chaque macro-particule est définie par deux coordonnées : sa position longitudinale z et son énergie associée p . La position (z,p) de chaque macro-particule est calculée à chaque tour d'anneau. À chaque tour, une macro-particule perd de l'énergie puisqu'elle a émis un rayonnement synchrotron. Ce rayonnement est émis de manière stochastique du fait des propriétés quantiques d'émission, ce qui induit

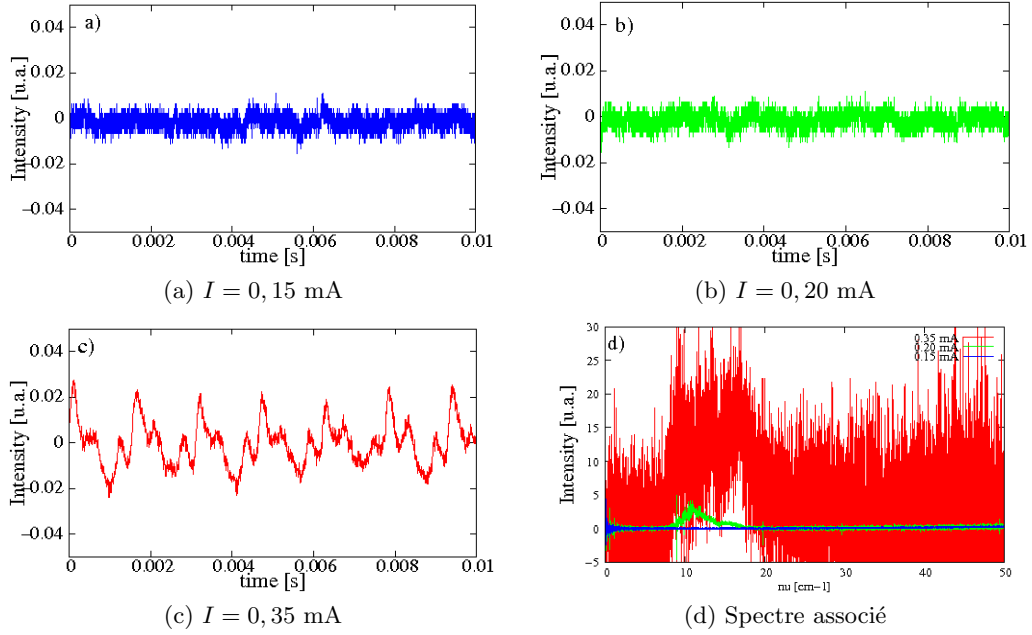


FIG. 3. Signal THz enregistré en mode *low-alpha* ($\alpha = \alpha_0/10$ avec α_0 le facteur de compression des moments nominal). Séries temporelles pour différents courants (a-c) et spectre associé (d) avec une résolution de $0,004 \text{ cm}^{-1}$.

de la diffusion en énergie, qui atténue les structures qui peuvent se former dans le paquet. À chaque tour, la macro-particule est aussi accélérée lors de son passage dans les cavités RF, pour compenser les pertes d'énergies dues au rayonnement. La position longitudinale d'une macroparticule change aussi en fonction de son énergie, puisque le rayon de courbure de la trajectoire des électrons dans l'anneau dépend de l'énergie des électrons. En ne prenant en compte que ces éléments, la dynamique du paquet des électrons est toujours stable et le paquet d'électrons composé de l'ensemble des macro-particules a une forme gaussienne dans les deux directions de l'espace des phases (z, p).

L'élément qui déclenche l'instabilité provient d'effets collectifs, en particulier de l'interaction des électrons avec leur propre rayonnement. Par exemple dans un aimant de courbure, où l'émission par un électron situé à l'arrière du paquet peut interagir avec un électron situé à l'avant du paquet (Fig. 4). L'interaction entre le rayonnement synchrotron et les électrons dans un aimants de courbure a été calculée d'après [8].

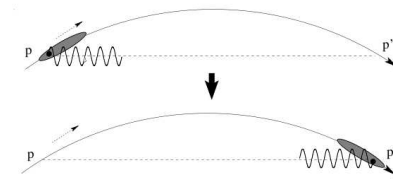


FIG. 4. Schéma de l'interaction du paquet d'électrons avec le rayonnement qu'il émet dans un aimant de courbure. Les électrons de l'arrière du paquet agissent sur ceux du début. D'après [9].

Les simulations numériques montrent que durant l'émission de bouffées de rayonnement THz cohérent, il se forme et se propage dans le profil longitudinal $\rho(z)$ du paquet d'électrons une structure (Fig. 5a). Un point intéressant est qu'une signature de l'évolution de ces structures se retrouve dans le rayonnement THz cohérent (Fig. 5b), et permet de comparer les résultats numériques aux résultats expérimentaux (Fig. 5c). Cette signature est une composante fréquentielle du signal THz cohérent, que l'on retrouve à

la fois numériquement et expérimentalement, avec toutefois des fréquences un peu différentes : autour de 20 kHz dans les simulations numériques contre 35 kHz expérimentalement. Le signal THz évolue aussi à une échelle plus lente, sous forme de bouffées (*bursts*) dont la période caractéristique est de l'ordre de la milliseconde (Figs 5b et 5c) [3,4,7].

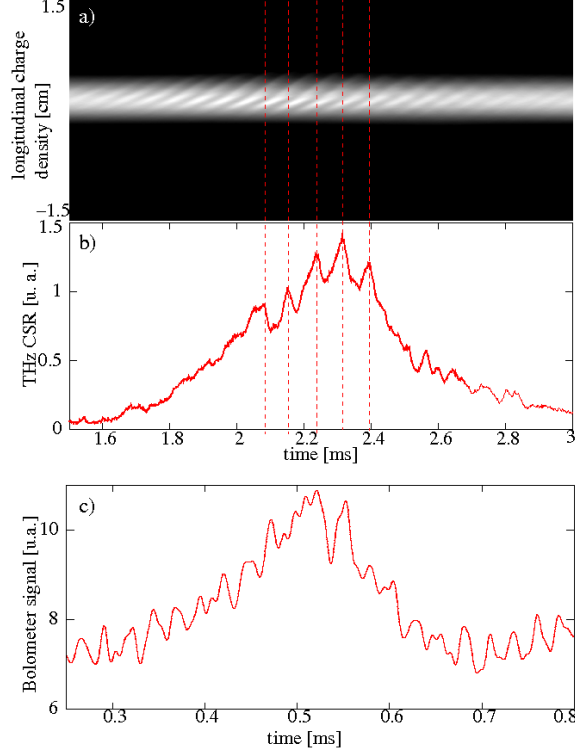


FIG. 5. a) Profil longitudinal de charge $\rho(z)$ du paquet d'électrons en fonction du temps en mode $\alpha_0/10$ avec un courant de 0.55 mA. b) Signal THz cohérent associé entre 5 cm^{-1} et 80 cm^{-1} . Durant une bouffée de rayonnement cohérent des structures se forment dans le profil longitudinal du paquet d'électrons. Une signature de la formation de ces structures se retrouve dans le signal THz cohérent émis, sous la forme d'une modulation à une fréquence autour de la dizaine de kHz. c) Signal THz expérimental en mode $\alpha_0/10$ avec un courant de 0.3 mA. On observe aussi une modulation du signal THz. Les fréquences supérieures à 100 kHz du signal THz expérimental ont été filtrées.

Finalement, nous avons cherché à observer expérimentalement l'apparition de cette fréquence autour de 35 kHz, signature de structures dans le paquet d'électrons. L'augmentation progressive du nombre d'électrons dans le paquet conduit à l'apparition de ces structures. Pour un courant $I < 1.4 \text{ mA}$, il n'y a pas de composante significative du signal THz à une fréquence autour de 35 kHz (Fig. 6a). Par contre, une telle fréquence apparaît pour un courant $I > 2.27 \text{ mA}$ (Fig. 6b). À l'apparition des micro-structures, le signal THz n'a quasiment pas de composante à basse fréquences, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de bouffées de rayonnement cohérent (Figs 5b et 5c), dont les fréquences caractéristiques sont de l'ordre de la milliseconde. Les micro-structures apparaissent donc avant les bouffées et sont à l'origine de celles-ci.

5 Conclusion

Dans un anneau de stockage, l'interaction d'un paquet d'électrons avec le rayonnement qu'il émet entraîne une instabilité lorsque le nombre d'électrons dans le paquet dépasse une valeur critique. Le principal diagnostic de l'instabilité est un rayonnement TéraHertz cohérent instable, caractéristique de

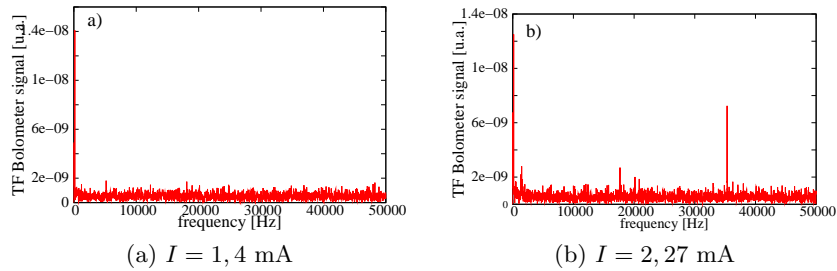


FIG. 6. Norme de la transformée de Fourier du signal expérimental THz, enregistré avec un courant de 1,4 mA (a) et 2,27 mA (b) en mode low- α ($\alpha = \alpha_0/10$).

la présence de modulation dans le paquet d'électrons. L'espace des phases du paquet d'électrons n'étant pas directement observable expérimentalement, des simulations numériques permettent d'observer que lors de l'instabilité, appelée instabilité micro-onde, il se forme et se propage une structure dans le profil longitudinal de charge du paquet d'électrons. Le comportement observé sur les simulations numériques est confirmé par une signature dans le signal THz cohérent, que l'on retrouve sur les résultats numériques et expérimentaux, et qui consiste en la présence d'une fréquence autour de la dizaine de kHz. La mise en évidence de cette fréquence nous a permis de connaître le seuil d'apparition des instabilités qui est lié à l'apparition de cette fréquence. Ces observations seront utiles pour modéliser finement l'interaction électrons/rayonnement synchrotron et tenter de contrôler cette instabilité.

Nous remercions S. Bielawski et C. Szwarz pour les fructueuses discussions. Nous remercions aussi l'ANR DYNACO.

Références

1. M. ABO-BAKR, J. FEIKES, K. HOLLDAK, G. WÜSTEFELD & H.-W. HÜBERS, Steady-State Far-Infrared Coherent Synchrotron Radiation detected at BESSY II, *Physics Review Letters*, **88**, 254801 (2002).
2. F. SANNIBALE, J. M. BYRD, Á. LOFTSDÓTTIR & M. VENTURINI, A model describing stable coherent synchrotron radiation in storage rings, *Physics Review Letters*, **93**, 094801 (2004).
3. J. M. BYRD, W. P. LEEMANS, A. LOFTSDOTTIR, B. MARCELIS, M. C. MARTIN, W. R. MCKINNEY, F. SANNIBALE, T. SCARVIE & C. STEIER, Observation of broadband self-amplified spontaneous coherent Terahertz synchrotron radiation in a storage ring, *Physics Review Letters*, **89**, 224801 (2002).
4. G. L. CARR, S. L. KRAMER, J. B. MURPHY, R. P. S. M. LOBOB & D. B. TANNER, Observation of coherent synchrotron radiation from the NSLS VUV ring, *Nuclear Instruments & Methods in Physics Research A*, **463**, 387-392 (2001).
5. U. ARP, G. T. FRASER, A. R. HIGHT WALKER & T. B. LUCATORTO, Spontaneous coherent microwave emission and the sawtooth instability in a compact storage ring, *Physical Review Special Topics — Accelerators & Beams*, **4**, 054401 (2001).
6. J.M. FILHOL, A. NADJI, J. C. BESSON, P. BRUNELLE, M. E. COUPRIE, J. C. DENARD, C. HERBEAUX, J. F. LAMARRE, P. LEBASQUE, M. P. LEVEL, P. MARCHAND & R. NAGAOKA, Operation and performance upgrade of the SOLEIL storage ring, *Proceedings of the 1st International Particle Accelerator Conference*, (Kyoto, Japan), pp. 2493-2495 (2010).
7. M. VENTURINI & R. WARNOCK, Bursts of coherent synchrotron radiation in electron storage rings : A dynamical model, *Physical Review Letters*, **89**, 224802 (2002).
8. J. B. MURPHY, S. KRINSKY & S. R. GLUCKSTERN, Longitudinal wakefield for an electron moving on a circular orbit, *Particle Accelerators*, **57**, 9 (1997).
9. T. AGOH, *Dynamics of coherent synchrotron radiation by paraxial approximation*, Ph'D Thesis, Université de Tokyo (2004).

Etude expérimentale de l'écoulement de Couette-Taylor avec modulation de fréquence

Martial Gassa Feugaing, Olivier Crumeyrolle & Innocent Mutabazi

LOMC, FRE 3102, CNRS-Université du Havre, B.P. 540, 76058 Le Havre Cedex
 gassam@univ-lehavre.fr

Résumé. Nous avons revisité l'étude de l'écoulement de Couette-Taylor avec modulation de fréquence de rotation du cylindre intérieur $\Omega(t) = \Omega_0 [1 + \epsilon \cos(2\pi ft)]$. Pour de grandes amplitudes de modulation, l'effet de déstabilisation induit par la modulation est indépendant de la fréquence de modulation. A partir de l'analyse spectrale, nous montrons qu'il y'a synchronisation entre la fréquence des motifs dans l'écoulement et la fréquence de modulation. Le nombre d'onde axial du motif diminue à la fois avec l'augmentation du nombre de Taylor et de la fréquence de modulation.

Abstract. We experimentally characterize the parametric excitation of the Couette-Taylor system with a stationary outer cylinder and sinusoidally modulated rotating inner cylinder $\Omega(t) = \Omega_0 [1 + \epsilon \cos(2\pi ft)]$. In the range of high modulation amplitude the destabilisation effect induced by the modulation is independent of the modulation frequency. From the spectral analysis of the space-time diagrams we show that the pattern frequency does not depend on the Taylor number. It is determined by the modulation frequency. The vortex size increases with both increasing values of the Taylor number and of the modulation frequency.

1 Introduction

L'excitation paramétrique dans des systèmes hydrodynamiques fait l'objet de plusieurs études [4], à cause de l'occurrence d'écoulements modulés dans la nature et dans les applications technologiques telles : l'alternance du réchauffement et du refroidissement des atmosphères planétaires, la stabilité du flux périodique sanguin dans l'aorte [12] ou la formation des gouttelettes à partir d'un jet forcé. Les expériences pionnières de Donnelly [5] ont suscité de nombreuses études théoriques [9,10,11], numériques [1,2,8] et expérimentales [14]. Ces travaux montrent que la modulation déstabilise l'écoulement mais révèlent un désaccord sur le fait qu'une faible fréquence de modulation produise un grand ou un petit effet déstabilisant. Dans le but de résoudre ce désaccord, Barenghi [2] a employé la théorie de Floquet pour examiner la transition de l'écoulement azimutal vers les vortex de Taylor axisymétriques, et un code spectral pour étudier le développement non-linéaire de ces vortex. Les résultats numériques montrent que les rouleaux modulés dans le temps présentent une réponse subharmonique. Barenghi & Jones [1] à partir du modèle d'amplitude développé par [9,10] ont montré que la présence des imperfections expérimentales peut substantiellement modifier la dynamique en dessous d'une fréquence critique. Toutefois, peu d'études expérimentales se sont intéressées à l'effet de la modulation temporelle aux états supérieurs. Nous décrivons les différents motifs observés en fonction des paramètres de contrôle et déduisons leurs propriétés spatiale et temporelle. Nous apportons des données quantitatives permettant une meilleure compréhension de l'effet déstabilisant de la modulation.

2 Matériels et méthodes

Un schéma du dispositif expérimental utilisé est présenté en figure 1. La cellule de Couette horizontale se compose d'une paire de cylindres coaxiaux qui peuvent tourner indépendamment. Le cylindre intérieur de rayon $a = 44.60$ mm est en aluminium anodisé noir et le cylindre extérieur est en verre transparent pour faciliter la visualisation. La largeur de l'entrefer entre les deux cylindres contenant le liquide étudié

est $d = 6.20$ mm sur une longueur utile $L = 601$ mm. Les paramètres géométriques adimensionnels du système sont le gap $\delta = d/a = 0.139$, le rapport des rayons $\eta = 1/(1 + \delta) = 0.878$ et le rapport d'aspect $\Gamma = L/d = 97$. Nous employons une solution aqueuse avec 30% de glycérol, de viscosité cinématique $\nu = 0.020 \pm 0.001$ cm²/s à 25°C, la température ambiante fixée et contrôlée par un système d'air conditionné. Les fluctuations de température n'excèdent pas $\pm 1^\circ\text{C}$ au cours d'une manipulation. Le cylindre extérieur est fixe et l'écoulement est généré par la mise en rotation du cylindre intérieur avec une vitesse de rotation sinusoidalement modulée dans le temps autour d'une valeur moyenne non nulle de la forme $\Omega(t) = \Omega_0 [1 + \epsilon \cos(2\pi ft)]$. La vitesse de rotation constante est Ω_0 en rad/s, f en Hz est la fréquence de la modulation et $\epsilon = \Delta\Omega/\Omega_0$ est l'amplitude relative de modulation où $\Delta\Omega$ représente l'amplitude de la modulation en rad/s. L'écoulement dans le système peut être décrit par trois paramètres physiques adimensionnés : le nombre de Taylor $Ta = (\Omega_0 ad/\nu) (\delta)^{1/2}$, la fréquence de modulation $\sigma = 2\pi f d^2/\nu$ définit en privilégiant le temps de diffusion visqueuse et l'amplitude relative de modulation. La rotation du cylindre intérieur à la vitesse $\Omega(t)$ se fait dans une direction fixée grâce à un servomoteur piloté automatiquement par un code sur un ordinateur de contrôle. Aussi le cylindre intérieur ne peut faire marche arrière sur une période, et dans le cas où l'amplitude relative de modulation dépasse l'unité, la modulation est écrêtée et le cylindre intérieur effectue des phases successives de rotation et d'arrêt.

L'écoulement estensemencé de 2% de kalliroscope en suspension. Une caméra CCD de 1390x1040 pixels enregistre la visualisation d'une coupe axiale de l'écoulement obtenue sur toute la longueur de la cellule, sous éclairage au xénon et avec une résolution spatiale de 2.2 pixels/mm. Des images de 1380x260 pixels sont capturées à raison de 25 images par seconde. A l'aide du programme d'extraction décrit en détail dans [3], une étude spectrale des motifs est faite.

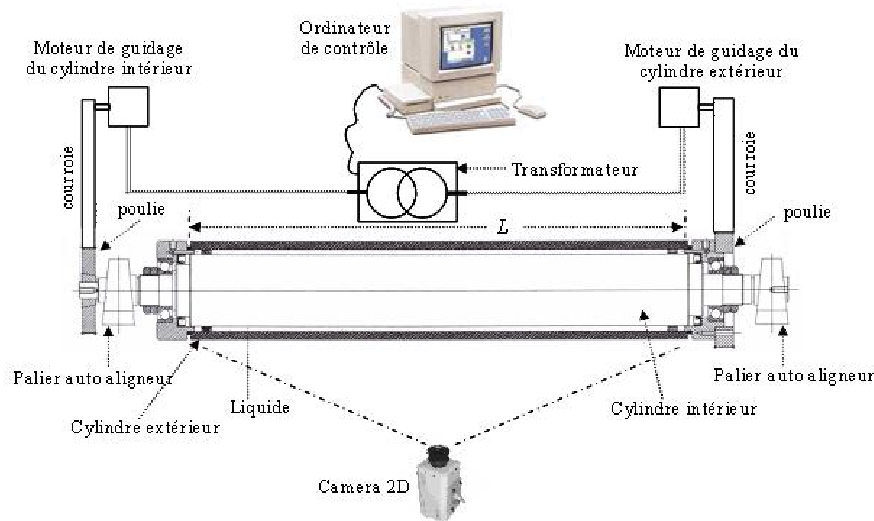


FIG. 1. Schéma du dispositif expérimental

3 Protocole expérimental

Nous caractérisons expérimentalement l'excitation paramétrique de l'écoulement de Couette. Le nombre de Taylor au seuil de la première instabilité dans la configuration sans modulation est bien connu analytiquement [7], y compris sa dépendance avec le gap et le rapport des rayons. Dans cette optique, au départ de chaque manipulation, nous validons tout d'abord le seuil de la première instabilité de l'écoulement non modulé. L'écoulement modulé a été étudié pour des valeurs de l'amplitude relative de modulation

comprises entre 0.10 et 10. Les valeurs de σ varient de 4 à 192, bien au-delà des valeurs expérimentales et numériques disponibles dans la littérature [1,8,14].

4 Résultats

4.1 $\sigma \geq 16.98$

Dans le régime de hautes fréquences, la nature et l'ordre d'apparition des instabilités sont les mêmes pour toutes les valeurs de l'amplitude relative de modulation balayées. Nous illustrons à l'aide des diagrammes spatio-temporels de la figure 2, la dynamique de l'écoulement à la fréquence de modulation $\sigma = 25.18$. La première instabilité (Fig. 2a) se manifeste par des rouleaux de Taylor stationnaires et axisymétriques (TVF). Ils apparaissent sur chaque période et ne déclinent pas d'une période à une autre. Lorsqu'on augmente le nombre de Taylor, La seconde instabilité (fig. 2b), se produit sous la forme de rouleaux de Taylor oscillant (WVF) dans l'écoulement modulé. En augmentant toujours le nombre de Taylor, on bifurque vers un écoulement de rouleaux de Taylor ondulés et modulés avec dislocation (MWVF + D). Au seuil et juste au-dessus, les dislocations apparaissent à la même position et à intervalles de temps réguliers (fig. 2c). En augmentant le nombre de Taylor, elles perdent leur périodicité spatiale et temporelle (fig. 2d) et apparaissent en majorité dans la partie centrale du système. Pour des nombres de Taylor encore plus élevés, les dislocations disparaissent totalement pour laisser apparaître des MWVF sujets à une forte oscillation et dont la taille des rouleaux est non-stationnaires (fig. 2e). Le détail de ce motif en figure 2f révèle la présence de structures de plus petites échelles encastrées à l'intérieur des principales.

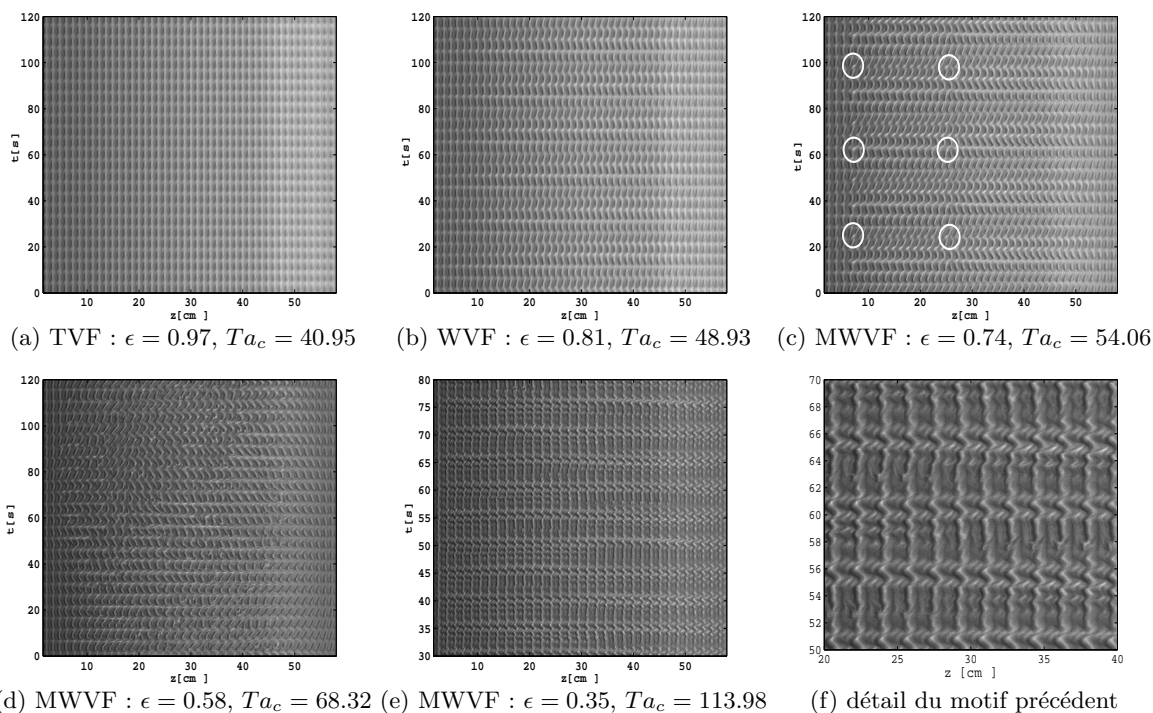


FIG. 2. Diagrammes spatio-temporels des motifs à $\sigma = 25.48$. (c) Dislocations périodiques ; quelques défauts ont été encerclés. (d) Dislocations aperiodiques.

4.2 $\sigma < 16.98$

Aux basses fréquences de modulation, l'écoulement de base modulé bifurque vers un écoulement secondaire de rouleaux de Taylor avec dislocations (TVF + D). Sur toute la longueur du gap, le motif apparaît sur une période, au maximum d'amplitude $Ta_{max} = Ta_c(1 + \epsilon)$, puis décline peu à peu jusqu'à disparaître entièrement entre deux périodes consécutives. Ce comportement se manifeste sur les diagrammes spatio-temporels par la coexistence des zones occupées par le motif séparées par des zones laminaires. Donnelly [6] a observé de telles structures dans ses expériences à faible fréquence. Il les appela "vortex transitoires". Nous illustrons cette dynamique à la fréquence de modulation $\sigma = 4.25$ sur les figures 3a et 3b qui correspondent respectivement aux diagrammes spatio-temporels du motif au seuil pour une faible amplitude relative de modulation $\epsilon = 0.83$ et pour une forte amplitude relative de modulation $\epsilon = 5.02$. Ces rouleaux non axisymétriques deviennent plus énergétiques lorsque le nombre de Taylor augmente au-delà du seuil (Fig. 3c). La nature et l'ordre des instabilités suivantes dépendent à la fois de la fréquence de modulation et de la valeur de l'amplitude de modulation.

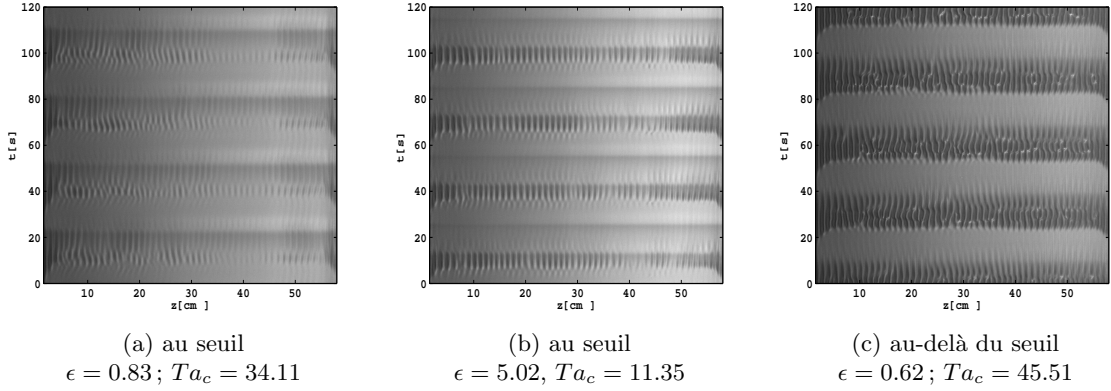


FIG. 3. Diagrammes Spatio-temporels des (TVF + D) à $\sigma = 4.25$.

4.3 Effet de la modulation dans le système de Couette - Taylor

Le seuil de l'écoulement sans modulation a été validé. Le nombre de Taylor critique correspondant à l'apparition des rouleaux de Taylor (TVF) stationnaires et axisymétriques est de $Ta_c(\epsilon = 0) = 44.37$ et le nombre axial critique calculé est $q_c = 3.12$. La modulation de fréquence diminue le seuil d'apparition de la première instabilité. La figure 4 présente l'évolution du nombre de Taylor critique $Ta_c(\epsilon, \sigma)$ en fonction de la fréquence de modulation. $Ta_c(\epsilon, \sigma)$ diminue avec l'augmentation de ϵ [8,11] mais augmente avec la fréquence de modulation jusqu'à une valeur plateau [13]. La déstabilisation induite par la modulation est mesurée par le paramètre $\Delta(\epsilon, \sigma) = [Ta_c(\epsilon, \sigma) - Ta_c(\epsilon = 0)]/Ta_c(\epsilon = 0) < 0$. La figure 5 montre l'évolution de $\Delta(\epsilon, \sigma)$ en fonction de l'amplitude relative de modulation pour différentes valeurs de la fréquence de modulation. $\Delta(\epsilon, \sigma)$ diminue puis stagne pour de grandes valeurs de la fréquence de modulation. Nous constatons que pour des valeurs de $\sigma > 60$, la déstabilisation ne dépend que de l'amplitude relative de modulation. Nous apportons ainsi une confirmation expérimentale aux résultats et prédictions numériques de Ganske *et al* [8].

4.4 Caractéristiques des motifs

De l'analyse spectrale, il ressort que la fréquence des motifs ne dépend ni du nombre de Taylor, ni de l'amplitude de la modulation; elle est synchronisée à la fréquence de modulation. La figure 6a mesure la

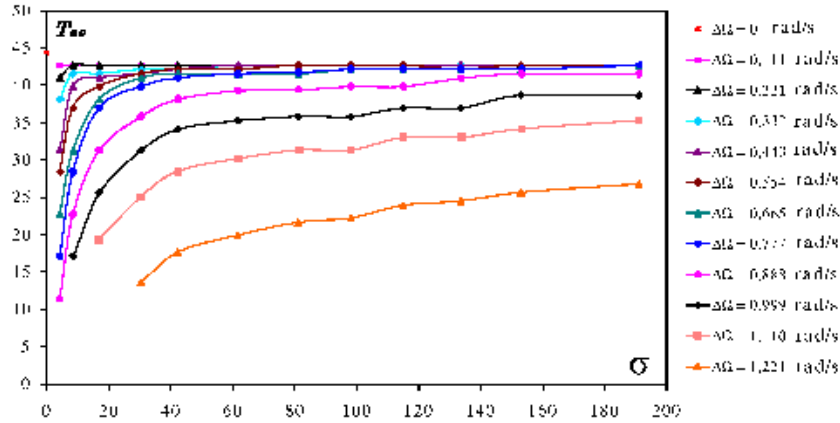


FIG. 4. Variation du nombre de Taylor critique en fonction de la fréquence de modulation, pour différentes valeurs de l'amplitude de la modulation.

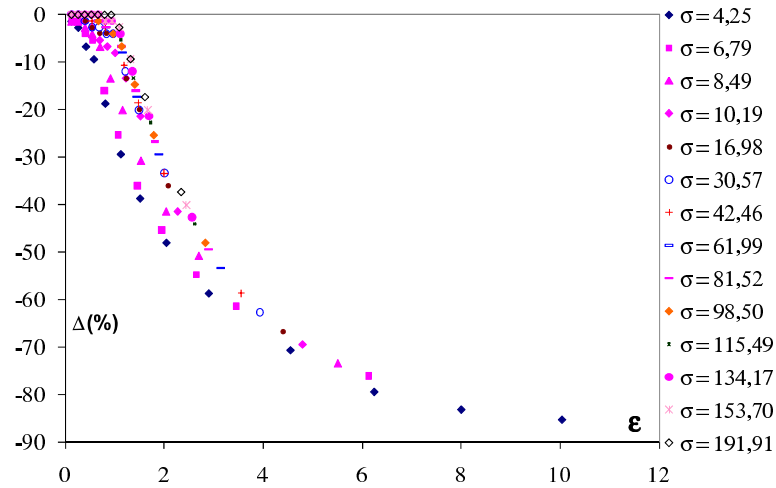


FIG. 5. Paramètre de déstabilisation $\Delta(\epsilon, \sigma)$ en fonction de l'amplitude relative de modulation pour différentes valeurs de la fréquence de modulation.

valeur du rapport de la fréquence du motif σ_p par la fréquence de modulation σ en fonction du nombre de Taylor pour la valeur de l'amplitude de la modulation $\Delta\Omega = 1.110$ rad/s. La figure 6b représente la variation du nombre d'onde axial q en fonction du nombre de Taylor à $\Delta\Omega = 1.110$ rad/s. On constate que le nombre d'onde axial du motif diminue à la fois avec l'augmentation du nombre de Taylor et l'augmentation de la fréquence de modulation.

5 Conclusion

Nous avons mené une étude systématique de la réponse à un forçage périodique dans le temps de l'écoulement de Couette-Taylor d'une solution aqueuse avec 30% de glycérol. La visualisation de l'écoulement à permis de recenser différents états en fonction des paramètres de contrôle. Aux faibles fréquences de modulation ($\sigma < 16.98$), la nature de l'instabilité primaire est différente de celle observée aux grandes fréquences de modulation. Nos expériences montrent que pour de grandes valeurs de l'amplitude de modulation, l'effet de déstabilisation induit par la modulation ne dépend plus de la fréquence de modulation ; le nombre de Taylor critique croît de façon monotone et atteint une valeur plateau. L'étude spectrale révèle une synchronisation entre la fréquence des motifs et la fréquence de modulation. La

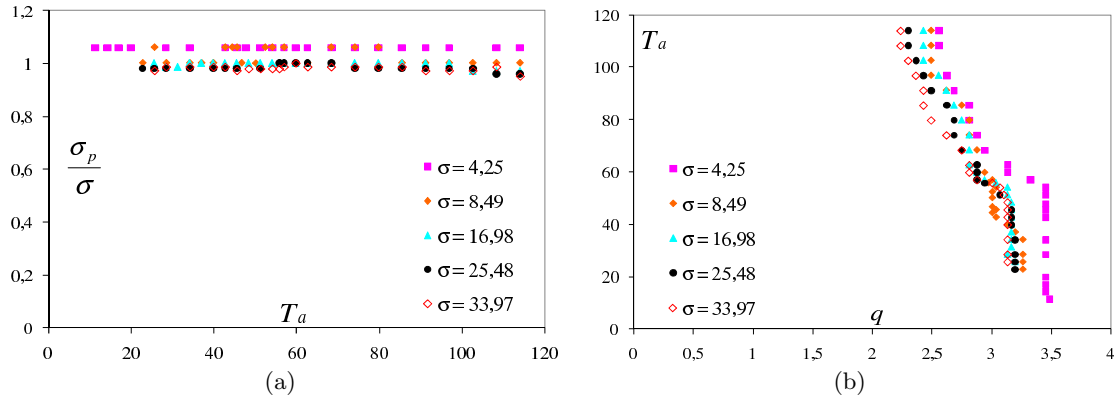


FIG. 6. A $\Delta\Omega = 1.110$ rad/s et pour $\sigma = 4.25, 8.49, 16.98, 25.48, 33.97$. a) Fréquence des motifs en fonction du nombre de Taylor; b) Nombre d'onde axial.

taille des rouleaux augmentent à la fois avec l'augmentation du nombre de Taylor et de la fréquence de modulation.

Références

1. C. F. BARENGHI & C.A. JONES, Modulated Taylor-Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **208**, 127-160 (1989).
2. C. F. BARENGHI, Computations of transitions and Taylor vortices in temporally modulated Taylor-Couette flow, *Journal Of Computational Physics*, **95**, 175-194 (1991).
3. O. CRUMEYROLLE, *Etude expérimentale des liquides viscoélastiques dans le système de Couette-Taylor*, Thèse de doctorat, Université du Havre (2002).
4. S. H. DAVIS, The stability of time-periodic flows, *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, **8**, 57-74 (1976).
5. R.J. DONNELLY, F. REIF & H. SUHL, Enhancement of hydrodynamic stability by modulation, *Physical Review Letters*, **9**, 363-365 (1962).
6. R.J. DONNELLY, Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinder. III. Enhancement of stability by modulation, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **281**, 130-139 (1964).
7. P. G. DRAZIN & W. H. REID, *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, (1981).
8. A. GANSKE, T. GEBHARDT & S. GROSSMANN, Taylor-Couette flow with modulated inner cylinder velocity, *Physics Letters A*, **192**, 75-78 (1994).
9. P. HALL, The stability of unsteady cylinder flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **67** (1), 29-63 (1975)
10. P. HALL, On the nonlinear stability of slowly varying time-dependent viscous flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **67** (1), 357-368 (1983)
11. P.J. RILEY & R.L. LAURENCE, linear stability of modulated circular Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **75** (4), 625-646 (1976)
12. R. SKALAK, N. ÖZKAYA & T. SKALAK, Biofluid Mechanics, *Annual Reviews Fluid Mechanics*, **21**, 167 (1989)
13. T.J. WALSH, W.T. WAGNER & R.J. DONNELLY, Stability of modulated flow, *Physical Review Letters*, **58**, 2543-2546 (1987).
14. T.J. WALSH & R.J. DONNELLY, Stability of modulated Couette flow, *Physical Review Letters*, **58**, 2543-2546 (1988).

Des mouvements récurrents de Birkhoff aux régimes quasi-périodiques

Jean-Marc Ginoux¹ & Christophe Letellier²

¹ Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586), 175, rue du Chevaleret, F-75013 Paris, France

² CORIA UMR 6614, Université de Rouen, Av. de l'Université, B.P. 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France

jmginoux@orange.fr

Résumé. Les régimes quasi-périodiques — cas particulier des mouvements récurrents de Birkhoff — sont souvent observés tant dans les systèmes conservatifs que les systèmes dissipatifs. Leur découverte s'est réalisée dans le cadre des techniques d'approximation des solutions par des séries, une approche naturellement employée en mécanique céleste. A travers différents développements autour de ces régimes quasi-périodiques, nous montrons que non seulement une école française s'est développée dans le sillage des travaux de Henri Poincaré, mais encore qu'un pont entre, d'une part, les mathématiques et la mécanique céleste (cas des systèmes conservatifs) et, d'autre part, la radiotechnique (cas des systèmes dissipatifs) a été établie notamment par Hervé Fabre, Nikolai Krylov et Nikolai Bogolyobov. L'étude des régimes périodiques se situe à l'interface entre dynamiques conservatives et dissipatives, et conduisent respectivement au théorème KAM et au chaos.

Abstract. Quasi-periodic regimes — belonging to a sub-class of Birkhoff's recurrent movements — are commonly observed in conservative systems as well as in dissipative systems. Their discovery occurred when devopping some techniques to approximate solutions by series, an approach traditionally used in celestial mechanics. Tracking some developments about quasi-periodic solution, we show that a French school inherited from Henri Poincaré and a bridge emerged between, in one hand, in mathematics and in celestial mechanics (conservative systems) and, in the other hand, in radiotechnics (dissipative systems), an opportunity quite rarely encountered. Such a bridge was for instance, established by Hervé Fabre, Nikolai Krylov and Nikolai Bogolyobov. Quasi-periodic regimes were investigated at the interface between conservative and dissipative dynamics and lead to the KAM theorem and chaos, respectively.

1 Les mouvements récurrents de Birkhoff

En 1912, George Birkhoff, souhaitant étendre la classe des mouvements périodiques, introduit les *mouvements récurrents* [1] qui se répartissent en deux classes selon les propriétés des fonctions qui les décrivent

- la classe des solutions représentées par des « fonctions continues et périodiques des variables », soit les mouvements périodiques et quasi-périodiques ;
- la classe des solutions qui ne sont pas définies par des équations différentielles analytiques ; soient des mouvements récurrents « qui ne sont ni périodiques, ni dans le voisinage d'aucun mouvement périodique¹, et qui sont d'une nature particulière telle que la désignation de mouvements récurrents *discontinus* leur semble appropriée » [1].

Bien que cela ne soit pas mentionné dans son texte, Birkhoff considère exclusivement les systèmes conservatifs, ce qui justifie la propriété selon laquelle les mouvements récurrents discontinus ne s'inscrivent pas dans le voisinage d'un mouvement périodique. Comme Poincaré l'avait fait dans son mémoire sur le problème des trois corps [2], Birkhoff introduit la notion d'orbites doublement asymptotiques en y substituant la terminologie de « limite oméga » ($t \rightarrow \infty$) et de « limite alpha » ($t \rightarrow -\infty$) [1]. Il est

1. Cette propriété semble ici exclure les comportements chaotiques qui se développent au voisinage d'orbites périodiques instables.

à noter que la présence d'orbites doublement asymptotiques est une spécificité des systèmes conservatifs, puisqu'ils sont invariants par renversement du temps ($t \mapsto -t$).

Lorsque la dimension de l'espace est $n = 1$, seul le point fixe est possible. Pour $n = 2$, le mouvement récurrent ne peut être qu'une courbe fermée (un cycle limite dans le cas dissipatif) ou asymptotique à une courbe fermée. Pour $n \geq 3$, certains des mouvements récurrents peuvent se ramener à des combinaisons de mouvement de période $2\pi k_i$ avec k_i ($i \in [1, n - 1]$) réels, positifs et incommensurables. Birkhoff précise cependant qu'en aucun cas « cette classification épuise tous les possibles ». Ces mouvements récurrents se caractérisant par « des points-limites [qui] remplissent un continu d'un certain nombre de dimensions ». De plus, « tous les mouvements récurrents ne possédant pas cette propriété peuvent être appelés *discontinus* ». Birkhoff établit le lien avec l'intégrabilité puisque « dans les problèmes de Dynamique complètement intégrable, c'est seulement le premier type [continu] qui se rencontre ». La lecture *a posteriori* de cette remarque conduirait à penser que Birkhoff désigne ici les comportements chaotiques : le problème réside vraisemblablement dans la sensibilité aux conditions initiales qui, pour Birkhoff, masquerait l'existence d'orbites périodiques instables au voisinage de ces mouvements discontinus : pour Birkhoff, les mouvements récurrents ne peuvent être sensibles aux conditions initiales. Ceci est confirmé par la remarque « qu'il existe un mouvement [...] dont les points limites alpha et oméga constituent tout l'intérieur et la surface d'un tore. Un tel mouvement [...] ne peut être récurrent au sens défini ci-dessus ».

2 Les fonctions quasi-périodiques

L'étude des fonctions quasi-périodiques remonte à la thèse de Piers Bohl (1865-1921) [3] mais ce n'est qu'Ernest Esclangon (1876-1954) qui introduit le terme de quasi-périodique [4] :

« La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit quasi-périodique continue est que, pour chaque valeur de x , on puisse, étant donné ϵ positif, trouver un nombre positif δ de façon que l'on ait

$$|f(x+h) - f(x)| < \epsilon,$$

chaque fois que les quantités

$$\frac{h}{a_1}, \frac{h}{a_2}, \dots, \frac{h}{a_n}$$

diffèrent de nombres entiers de moins de δ en valeur absolue. »

« Par exemple, il en précise les spécificités comme suit [4] :

Une fonction périodique $f(x)$ possède la propriété suivante : étant donné un intervalle quelconque (α, \dots, β) et un nombre ϵ aussi petit que l'on veut, on peut déterminer une infinité d'intervalles $(\alpha + h, \dots, \beta + h)$, aussi éloignés que l'on veut du premier, dans chacun desquels la fonction considérée reprend la même série de valeurs à moins de ϵ près : d'où le nom de quasi-périodicité donné à cette propriété. »

En 1919, Esclangon [5] relève que le problème des fonctions quasi-périodiques avait été implicitement traité par Poincaré à l'aide d'une équation qui peut se ramener à

$$\ddot{x} + x \left(1 + \mu \sum_{i=1}^n A_i \sin(\alpha_i t + \beta_i) \right) = 0$$

où « les α_i ne sont pas *commensurables* entre eux ; sans quoi la fonction serait périodique » [6].

En 1925, Harold Bohr (1887-1951) étend la classe des fonctions quasi-périodiques aux fonctions *presque périodiques* [7]. Ces dernières diffèrent des fonctions quasi-périodiques, qui en sont une sous-classe, dans la mesure où [8] :

1. « les fréquences sont des combinaisons linéaires avec des coefficients entiers de seulement un nombre fini de fréquences $\omega_1, \dots, \omega_s$, tandis que dans la théorie de Bohr, tout ensemble dénombrable de nombres réels est admis pour les fréquences ;

2. les coefficients [de Fourier] a_k sont exponentiellement décroissants avec $|k|$, rendant $f(t)$ tout comme $F(\theta)$ analytiques et réelles, tandis que les fonctions presque périodiques de Bohr sont plutôt bornées et continues. »

Comme le remarquent Siegel et Moser, les fonctions « quasi-périodiques sont bien adaptées à la mécanique céleste », comme nous le verrons.

Un développement important de la théorie des fonctions quasi-périodiques est donnée en 1932 par Arnaud Denjoy (1884-1974) : il considère l'équation

$$\frac{d\theta}{d\Phi} = A(\Phi, \theta)$$

pour laquelle il montre que « quand $A(\Phi, \theta)$ est holomorphe (hypothèse de Poincaré), et si α est irrationnel, toutes les caractéristiques passent indéfiniment au voisinage de tout point du tore » [9]. Ce résultat avait été présenté par Poincaré sous la forme d'une conjecture en 1885 [10]. Ce théorème important se retrouve dans de nombreux travaux — parfois sous le nom de théorie de Poincaré-Denjoy — dont les contributions de Carl Siegel (1896-1981) [11] et Vladimir Arnold (1937-2010) [12].

En 1937, Hervé Fabre (1905-1995) dans le cadre d'une étude sur le déplacement des nœuds et des apsides dans les systèmes planétaires établit le lien entre les mouvements récurrents de Birkhoff et les mouvements quasi-périodiques, dans la mesure où « tout mouvement quasi-périodique est récurrent » [13]. Il précise par ailleurs qu'« il en est d'autres [des orbites récurrentes] qui ne sont pas quasi-périodiques, et dont on ne peut pas dire si elles sont, ou non, plus générales que les premières ». Il semble bien que Fabre ait été confronté à des trajectoires chaotiques dont il n'arrive pas à définir les propriétés, les techniques analytiques qu'il employait alors échouant pour ce type de solutions. Un autre aspect remarquable de la contribution de Fabre est qu'il établit un pont avec les travaux de Krylov et Bogolyobov dans un contexte fort éloigné de la mécanique céleste, celui de la radiotechnique que nous détaillerons dans ce qui suit. A l'aide des travaux des deux russes, Fabre parvient à démontrer la nature quasi-périodique des mouvements récurrents de son système planétaire par rapport à la longitude et au temps.

3 Oscillations quasi-périodiques en radiotechnique

Les oscillations non linéaires dans le domaine de la radiotechnique ont été traitées dès 1908 par Henri Poincaré (1854-1912) [14,15]. Par la suite, de nombreux travaux ont été réalisés, que ce soit par Georg Duffing (1861-1844) [16] ou par Balthazar van der Pol (1889-1959) [17]. Selon Nikolak Krylov (1879-1955) et Nikolai Bogolyobov (1909-1992) [18],

Toutes ces recherches, si importantes qu'elles soient, ont été élaborées cependant à l'aide de méthodes insuffisamment rigoureuses du point de vue mathématique et il est à remarquer que les premières méthodes rigoureuses en radiotechnique ont été introduites en France, il semble, par MM. Liénard et Cartan, et en URSS par les représentants de l'école Mandelstam-Papalexi. Les savants allemands de l'Ecole Barkhausen-Möller se sont occupés avec succès d'une théorie approximative, qu'on pourrait appeler la théorie quasi-linéaire, utilisée généralement dans les calculs d'ingénieur, mais qui ne semble pas dans la plupart des cas adéquate à supplanter la théorie plus rigoureuse, — justement celle des oscillations non linéaires. »

Dès leur première contribution, Krylov et Bogolyobov se concentrent sur les oscillations quasi-périodiques, faisant référence à Bohl et Poincaré. Ils partent de l'équation non linéaire [19]

$$\frac{d^2}{dt^2}I(t) + \omega^2 I(t) = \epsilon f\left(\frac{dI}{dt}\right) + E \sin \alpha t$$

« intervenant dans le problème classique de radiotechnique », soit, en fait, l'équation écrite par van der Pol [17]. Lorsque la caractéristique du circuit est celle proposée par van der Pol

$$f(V) = \omega \left[V + \frac{1}{2}AV^2 - \frac{\gamma^2 V^3}{3} \right],$$

ils proposent notamment une condition de stabilité des oscillations quasi-périodiques qui s'énonce [19]

$$\left(\frac{E\alpha\gamma}{\omega^2 - \alpha^2}\right)^2 < 2.$$

Comme ils le remarquent eux-mêmes, Aleksandr Andronov (1901-1952) et Aleksandr Vitt (1902-1937), étudiant l'équation

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu(1 - x^2)\dot{x} + \lambda \sin t,$$

avaient obtenu la condition [20]

$$2 < \frac{\lambda^2}{(\omega^2 - 1)^2},$$

soit une condition équivalente. Par la suite, s'appuyant sur les travaux de Poincaré [10], Denjoy [9] et Birkhoff [1], ils introduisent le nombre de rotation ρ comme une fonction continue, notamment de ϵ . Remarquant que les solutions dégénèrent en des solutions périodiques chaque fois que le nombre de rotation ρ devient rationnel, et étant donnée la continuité de $\rho = \rho(\epsilon)$, ils en déduisent « que l'ensemble des valeurs de ϵ pour lesquelles les solutions quasi-périodiques deviennent simplement périodiques est partout dense, et [...] que cet ensemble consiste en général en intervalles (zones de synchronisation), dans chacun desquels ρ reste constant » [21]. Ce sont ces résultats qui ont influencé Fabre. Il doit être noté que Mary L. Cartwright (1900-1998), dans son étude du rôle de la phase dans les transitions des mouvements quasi-périodiques aux mouvements périodiques [22] solution de l'équation

$$\ddot{v} + \omega^2 v = (\alpha + \beta v - \gamma v^2)\dot{v} + E\omega_1^2 \sin \omega_1 t,$$

ne fait pas mention des travaux de Krylov & Bogolyobov.

4 Première évidence numérique de régime quasi-périodique

En 1960, Chihiro Hayashi étudie avec deux de ses collègues le système gouverné par l'équation de van der Pol [17] à laquelle est ajouté un terme d'excitation périodique, soit [23]

$$\ddot{v} - \mu(1 - \beta v - \gamma v^2)\dot{v} + v = B \cos \nu t. \quad (1)$$

Hayashi et ses collègues remarquent que « la fréquence de l'oscillation auto-excitée tombe en synchronisation avec la fréquence de forçage, pourvu que ces deux fréquences ne soient pas trop différentes. Si leur différence est suffisamment grande, on peut s'attendre à l'apparition d'oscillations de battement (beat oscillation) ». Dans la réédition de sa thèse, Ueda mentionne qu'il avait hésité sur la terminologie, entre *battement* et *quasi-périodique* [24] : on verra dans ce qui suit qu'il s'agit bien de régimes quasi-périodiques. Hayashi et ses collègues montrent, entre autres, des oscillations quasi-périodiques (Fig. 1).

C'est dans cette approche que Yoshisuke Ueda développe sa thèse : certaines des figures de sa thèse sont d'ailleurs issues directement des travaux antérieurs de Hayashi [23]. Dans sa thèse dirigée par Hayashi, Ueda introduit l'équation

$$\ddot{v} - \mu(1 - \gamma v^2)\dot{v} + v^3 = B \cos \nu t \quad (2)$$

de type « mixte van der Pol/Duffing pour étudier « les transitions entre les oscillations entraînées et les oscillations presque périodiques » [24]. Il est probable que Ueda ait été amené à proposer une équation mixte en raison de certaines difficultés à obtenir les oscillations quasi-périodiques recherchées comme solution des équations de Duffing ou de van der Pol. Parmi les contributions que nous avons déjà rencontrées, Ueda cite Duffing [16], Andronov et Vitt [25], Cartwright [22], van der Pol [17], Poincaré [10] et le livre de Krylov & Bogolyobov [26]. Toutefois, toutes les simulations sur ordinateurs analogiques concernent des cycles limites, c'est-à-dire des solutions périodiques. Ce n'est qu'en 1970, avec Chihiro Hayashi, Norio Akamatsu & Hidekiyo Itakeura, que Ueda propose la représentation d'une solution qu'il qualifie de presque-périodique (Fig. 2) [28]. Dans cet article, il est fait référence à Bohl [27], Denjoy [9], Bohr [7], travaux qui ne figuraient pas dans sa thèse de 1965. En fait, la solution obtenue par Ueda est une solution quasi-périodique comme le révèle la section de Poincaré (Fig. 2). Ce n'est qu'en 1978, que Ueda publia une solution chaotique, à quelques bifurcations de cette solution quasi-périodique.

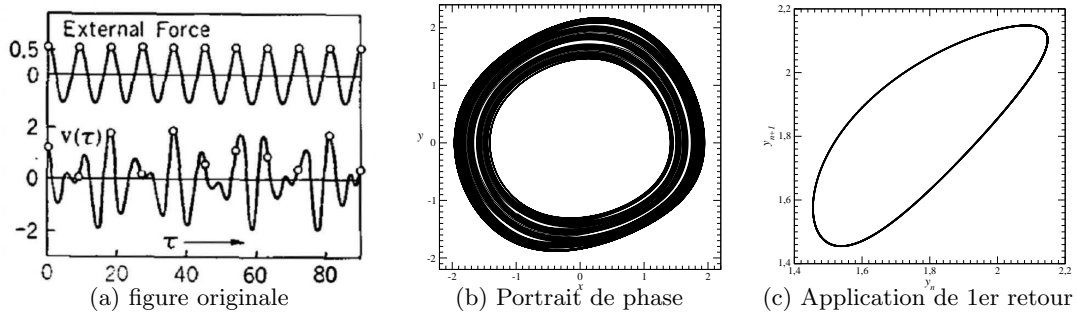


FIG. 1. Oscillations de battement (quasi-périodiques) solutions de l'équation (1) obtenus à l'aide d'un ordinateur analogique. Paramètres utilisés : $\mu = 0.15$, $\beta = \frac{4}{3}$, et $\gamma = \frac{4}{3}$. B et ν sont variés mais ne sont pas précisés. Nous avons utilisé $B = 0.1$ et $\nu = 1.1$ pour les figures (b) et (c).

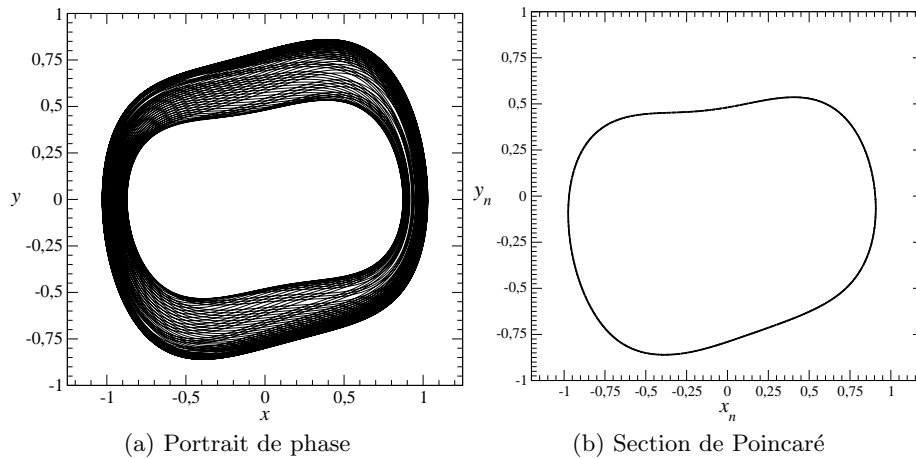


FIG. 2. Solution presque- (quasi-) périodique de l'équation (2) obtenue par Ueda et ses collègues. Seule la section de Poincaré (avec 56 points) étaient représentée dans l'article de 1970. Valeurs des paramètres utilisés par Ueda et pour la simulation de cette figure : $\mu = 0.2$, $\gamma = 4$, $B = 0.1$ et $\nu = 1.1$.

5 Conclusion

Le traitement des solutions quasi-périodiques émerge dans le double contexte des mathématiques avec Bohl, Poincaré, Esclangon et Birkhoff. Cet axe de recherche conduit directement au théorème KAM, en passant par les travaux de simulations sur ordinateur de Michel Hénon et Carl Heiles. De manière complémentaire, puisque traitant de systèmes dissipatifs et non plus conservatifs, de la radiotechnique émerge des études plutôt théorique sur des équations du type Duffing ou van der Pol, voire mixte. Les travaux successifs sur les solutions quasi-périodiques montrent deux choses inattendues : l'existence, d'une part d'une école dans le sillage de Poincaré, tant en France qu'à l'étranger et, d'autre part, d'un pont entre les systèmes conservatifs (mathématiques, mécanique céleste) et systèmes dissipatifs (radiotechnique, puis de nombreux domaines appliqués).

Références

1. G. D. BIRKHOFF, Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **40**, 305-323 (1912).
2. H. POINCARÉ, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Mathematica*, **13**, 1-270 (1890).

3. P. BOHL, *Über die Darstellung von Funktionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variablen proportionalen Argumenten* (De la représentation des fonctions à une variable par des séries trigonométriques à plusieurs arguments proportionnels à la variable), Thèse de doctorat, (1893).
4. E. ESCLANGON, *Les fonctions quasi-périodiques*, Thèse de la faculté des Sciences de Paris, Gauthier-Villars (1904).
5. E. ESCLANGON, Nouvelles recherches sur les fonctions quasi-périodiques, *Annales de l'observatoire de Bordeaux*, Gauthier-Villars, Paris (1919).
6. H. POINCARÉ, *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, **2**, xvii, p. 277, Gauthier-Villars, (1893).
7. H. BOHR, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, *Acta Mathematica*, **45**, 29-127 (1925) — **47** 101-214 (1926) — **47**, 237-281 (1926).
8. C. L. SIEGEL & J. K. MOSER, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag (1971).
9. A. DENJOY, Sur les caractéristiques à la surface du tore, *Comptes-Rendus de l'Académie des sciences*, **194**, 830-833 (1932).
10. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 4^e série, **1**, 167-244, (1885).
11. C. L. SIEGEL, Note on differential equations on the torus, *Annals of Mathematics*, **46** (3), 423-428 (1945),
12. V. I. ARNOLD, Small denominators and problems of the stability of motion in classical and celestial mechanics (in Russian), *Usp. Mat. Nauk.*, **18**, 91-192 (1963).
13. H. FABRE, Sur les orbites absolues de Gylden, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, **205**, 1214-1216 (1937).
14. H. POINCARÉ, Sur la télégraphie sans fil, *La Lumière Électrique*, 2^e série, **4** 259-266 — 291-297 — 323-327 — 355-359 — 387-393 (1908).
15. M. M. GINOUX & L. PETITGIRARD, Poincaré's forgotten conferences on wireless telegraphy, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **20** (11), 3617-3626 (2010).
16. G. DUFFING, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eingefrequenz und ihre technische Bedeutung* Vieweg, Branschweig (1918).
17. B. VAN DER POL, Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance, *Philosophical Magazine*, **7** (3), 65-80 (1927).
18. N. KRYLOV & N. BOGOLYBOV, Problèmes fondamentaux de la mécanique non-linéaire, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, **44**, 9-19 (1933).
19. N. KRYLOV & N. BOGOLYBOV, Sur le phénomène de l'entraînement en radiotechnique, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, **194**, 1064-1066 (1932).
20. A. A. ANDRONOV & A. VITT, Théorie Mathématique de l'entraînement (en Russe), *Journal de Physique Technique de l'URSS*, **7** (4), 3-20 (1930).
21. N. KRYLOV & N. BOGOLYBOV, Sur les solutions quasi périodiques des équations de la mécanique non-linéaire, *Comptes-Rendus l'Académie des Sciences*, **199**, 1592-1593 (1934).
22. M. L. CARTWRIGHT, Forced oscillations in nearly sinusoidal systems, *Journal of the Institute of Electrical Engineering* (London), **95** (3), 88-96 (1948).
23. C. HAYASHI, H. SHIBAYAMA & Y. NISHIKAWA, Frequency entrainment in a self-oscillatory system with external force, *IRE Transactions on Circuit Theory*, **7** (4), 413-422, 1960.
24. Y. UEDA, *Some problems in the theory of nonlinear oscillations* (in Japanese), Thèse de doctorat de l'Université de Tokyo, (1965) — Traduite en anglais in *The road to chaos*, Aerial Press (1992).
25. A. A. ANDRONOV & A. VITT, Zur theorie des Mitnehmens von van der Pol, *Archiv für Elektrotechnik*, **24**, 99-110 (1930).
26. N. KRYLOV & N. BOGOLYBOV, Introduction to nonlinear mechanics, *Annals of Mathematical Studies*, **11**, Princeton University Press (1947).
27. P. BOHL, Über die hisichtlich der unabhängigen und abhängigen variablen periodische differentialgleichung erster ordnung, *Acta Mathematica*, **40**, 321-336 (1916).
28. C. HAYASHI, Y. UEDA, N. AKAMATSU & H. ITAKURA, On the behavior of self-oscillatory systems with external force, *Transactions of the Institute of Electronics and Communications Engineers of Japan A*, **53** (3), 150-158 (1970).

La première rencontre du non-linéaire : Paris, 28-30 Janvier 1933

Jean-Marc Ginoux¹ & Loïc Petitgirard²

¹ UPMC, Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586), 175, rue du Chevaleret, F-75013 Paris, France

² Conservatoire National des Arts et Métiers, Case 600, 292 rue Saint Martin, 75141 Paris Cedex 3
jmginoux@orange.fr

Résumé. Du 28 au 30 janvier 1933 se tenait à l'Institut Henri Poincaré (Paris) la toute première conférence internationale de non-linéaire organisée à l'initiative du physicien hollandais Balthazar Van der Pol et du mathématicien russe Nikolai Dimitrievitch Papaleksi. La découverte de cet événement « oublié » et dont pratiquement aucune trace ne subsiste a pu être réalisée grâce au compte-rendu rédigé par Papaleksi à son retour en U.R.S.S. Ce document a ainsi permis de révéler d'une part la liste des participants parmi lesquels se trouvaient Alfred Liénard, Elie et Henri Cartan, Henri Abraham, Eugène Bloch, Léon Brillouin, Yves Rocard, ... et, d'autre part le contenu des exposés et des discussions. L'analyse des minutes de cette conférence présentée ici pour la première fois lève le voile sur le rôle et l'implication de la communauté scientifique française dans l'élaboration et le développement de la théorie des oscillations non linéaires.

Abstract. From 28 to 30 January 1933 was held at the Institut Henri Poincaré (Paris) the first international conference of non-linear organized at the initiative of the Dutch physicist Balthasar van der Pol and the Russian mathematician Nikolai Dmitrievich Papaleksi. The discovery of this event "forgotten" and that virtually no trace remains was made possible thanks to the report prepared by Papaleksi at his return to USSR. This paper has revealed on the one hand the location, the list of participants including Alfred Liénard, Elie and Henri Cartan, Henri Abraham, Eugene Bloch, Léon Brillouin, Yves Rocard, ... and, on the other hand, the content of presentations and discussions. The analysis of the minutes of this lecture here the first time highlights the role and involvement of the French scientific community in the elaboration and development of the theory of nonlinear oscillations.

1 Introduction

Dans un célèbre article intitulé « The nonlinear theory of electric oscillations », publié en 1934 dans les *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* Balthazar Van der Pol termine son introduction par cette phrase [1] :

« Although the first researches in connection with our subject date back to 1920 and although the development of this theory has gradually continued ever since, recent years have shown a considerable increase of activity in this field by many research workers scattered all over the world, and a special international conference dedicated solely to the problems arising in the nonlinear oscillation theory was recently held in Paris, on January 28-30, 1933. »

Célébrant le centenaire de la naissance de Papaleksi en 1981, le russe Vladimir Vasil'evich Migulin raconte que lors de la première Conférence internationale sur les oscillations non linéaires qui eut lieu en janvier 1933 à Paris, Nikolai Dimitrievich Papaleksi présenta deux articles sur les recherches menées en U.R.S.S. dans ce domaine. Vingt-cinq ans plus tard, l'académicien russe Evgeny L'vovich Feinberg écrit dans un hommage à Papaleksi [2] :

« It is not surprising that, when the first international conference on nonlinear oscillations was convened in Paris in 1932 (among its participants were such pioneers in this field as B. Van der Pol, L. Brillouin, and others), it was Papaleksi who represented the Moscow school of Mandel'shtam and Papaleksi, their closest disciples and colleagues Andronov, A. A. Vitt, Khaikin, and others, reporting on its achievements. »

À l'exception de ces trois références, cette conférence n'apparaît pas dans la littérature. On n'y trouve aucun élément concernant le lieu où elle est censée s'être déroulée à Paris, la liste des participants, le programme ou le compte-rendu. Aussi, paraissait-il légitime de se demander si cet événement avait réellement eut lieu, c'est-à-dire s'il avait dépassé le stade d'un « vague projet » énoncé en différentes circonstances mais qui n'aurait pu, pour des raisons indéterminées, voir le jour. De plus, cette conférence internationale n'est mentionnée ni dans les revues scientifiques françaises, telles que les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* ou la *Revue générale des sciences pures et appliquées*, ni dans les journaux comme *Le Figaro*¹. De plus, alors que Van der Pol [1] et Migulin [3] parlent d'une conférence tenue en 1933, Feinberg [2] affirme que cette première conférence sur les oscillations non linéaires a été décidée en 1932. S'agit-il de la même conférence ? Enfin, Migulin et Feinberg affirment que Van der Pol, Brillouin et Papaleksi étaient présents. Des recherches approfondies dans la biographie et la bibliographie des deux premiers n'ont pas permis de trouver une trace de cette conférence. Nous avons cependant pu retrouver une publication de Papaleksi relatant cet événement². Dans un article publié en 1934 dans la revue *Zeitschrift für Technische Physik* et intitulé « Международная нелинейным конференция », c'est-à-dire, « Conférence internationale du non linéaire », Papaleksi [4] présente en détail les minutes de cette réunion dans avec force détails. La traduction de cet article nous permet de décrire le déroulement de cette première conférence internationale sur les oscillations non linéaires, de même que l'idée d'origine. Après avoir retrouvé la référence de cette conférence, nous avons pu mettre en évidence d'autres sources y faisant allusion [5,6]. Dans la biographie d'Aleksandr' Adol'fovich Witt, Bendrikov et Sidorova écrivent [7] :

« En Janvier 1933, se tenait à Paris la conférence internationale de non linéaire, à laquelle participaient : Van der Pol (Pays-Bas), Liénard, Cartan, Esclangon, Abraham, L. Brillouin, Le Corbeiller (France), et d'autres éminents mathématiciens et les physiciens de différents pays³. Les représentants de l'Union soviétique invités à la conférence étaient Mandel'shtam, N. M. Kryloff, N. Papaleksi, A. A. Andronov et A. A. Witt. Toutefois, le seul à prendre part à la conférence a été Papaleksi. »

Cependant, aucun des Français présents à cette réunion ne semblent pourtant y avoir fait allusion dans leurs publications. Le peu d'impact de cette conférence internationale, la toute première à s'intéresser spécifiquement aux oscillations non linéaires, tenue en France et où les scientifiques français forment la majorité des personnes présentes, est donc source d'interrogations.

2 Le lieu : l'Institut Henri Poincaré

Comme le raconte Papaleksi [4] « La conférence a eu lieu à l'Institut de Recherche Henri Poincaré le 28, 29 et le 30 janvier 1933 ». Malheureusement, des recherches menées à l'Institut Henri Poincaré n'ont pas permis de retrouver trace de cette conférence, même si on sait par ailleurs que Nicolas Kryloff et Nicolas Bogoliouboff y ont été invités plus tard, en 1935⁴. Selon Papaleksi, le 30 janvier 1933 a été consacré à la visite du laboratoire d'Abraham à l'École Normale Supérieure, où la conférence s'est achevée. Des investigations ont été également entreprises au sein de cette école avec l'aimable concours de M^{me} Françoise Dauphagne (responsable des fonds patrimoniaux, bibliothèque de lettres, École normale supérieure de Paris) mais sans aucun résultat.

3 La liste des participants

Concernant les participants, cette conférence était censée rassembler des mathématiciens et des physiciens de renommée internationale comme le rappelle Papaleksi [4] :

1. Alors que ce fut le cas pour le Congrès international d'Électricité tenue à Paris en Juillet 1932.
2. Ces recherches ont pu aboutir grâce à la perspicacité de M^{lle} Gaelle Chapdelaine.
3. Bendrikov et Sidorova renvoient à Papaleksi [4].
4. Ces recherches ont été grandement facilitées par M^{me} Brigitte Yvon-Deyme et M. Dominique Dartron.



FIG. 1. Institut Henri Poincaré, d'après Mosseri [8].

« Beaucoup de personnes de différents pays qui travaillent déjà dans ce domaine et dont la collaboration était souhaitée ont été invités à participer à cette conférence. Parmi eux on peut citer le professeur Volterra, qui a fait appel à l'analyse mathématique pour répondre aux questions des fluctuations des espèces animales dans la lutte pour l'existence, des mathématiciens connus comme Hadamard, Cartan, Esclangon ainsi que l'initiateur de cette conférence Van der Pol. Du côté de l'U.R.S.S. les académiciens L. I. Mandelstam, N. M. Kryloff et N. D. Papaleksi, auteur de cet article, avaient été invités ainsi que de jeunes étudiants de l'académie de Mandelstam : Andronov et Vitt. »

Ce qui apparaît comme les plus grands spécialistes mondiaux dans le domaine des oscillations non linéaires ont donc été invités à l'initiative de Van der Pol, dont le rôle fédérateur va être mis en lumière. Malheureusement, en raison de l'épidémie de grippe qui sévissait à cette époque en Europe, une grande partie des personnes invitées n'est pas venue. Cette conférence a finalement eu lieu en présence de :

- Balthazar Van der Pol (Pays-Bas),
- Alfred Liénard (1869-1958), Élie Cartan (1869-1951) et Henri Cartan (1904-2008), Ernest Esclangon (1876-1954), Henri Abraham (1868-1943), Léon Brillouin (1889-1969), Philippe Le Corbeiller (1891-1980), Yves Rocard (1903-1992) et Camille Gutton (1872-1963) (France),
- Charles Manneback (Belgique) et
- Nikolai Papaleksi (URSS).

Selon Papaleksi, ce serait Van der Pol lui-même qui aurait choisi les participants [4] :

« Le but de cette Conférence Internationale sur les oscillations non linéaires (qui est l'objet de cet article et qui a été convoquée à l'initiative de l'un des pionniers de cette branche, le prof. Van der Pol) était de réunir les personnes de différents pays qui travaillaient dans ce domaine et de leur donner l'occasion de discuter et d'échanger leurs avis sur les problèmes des oscillations non linéaires, d'établir une terminologie commune et définir au moins partiellement la direction de recherches futures. »

Même réduite cette liste comporte la majorité des membres de la communauté scientifique française fortement impliqués dans le domaine des oscillations non linéaires. Le belge Charles Manneback (1894-1975), quant à lui, était spécialiste du domaine en électromagnétisme et électrodynamique⁵. Dans leur « Notice sur Charles Manneback », Marc de Hemptine et Maurice A. Biot mentionne un séjour à l'I.H.P.

« Ses qualités pédagogiques fort appréciées à l'étranger lui valurent de nombreuses invitations tant en Europe qu'en Amérique, ainsi citons, entre autres en 1932-1933 une invitation pour une série de leçons à l'Institut Poincaré⁶. »

Dans la première partie de son article Papaleksi [4] souligne alors l'importance des processus d'oscillations non linéaires dans des domaines scientifiques théoriques et appliqués comme la physique, la mécanique, l'acoustique, la biologie et la radiotechnique. Puis, il rappelle qu'une première conférence de ce genre avait eu lieu à Moscou en novembre 1931 et dissipe ainsi toute confusion entre la « Première Conférence de l'Union Soviétique sur les Oscillations » (I.C.N.O.) et cette « Conférence Internationale sur les Oscillations Non linéaires ». Néanmoins, il est important de préciser que ni la Conférence de Moscou ni celle de Paris ne peuvent être considérées comme « Internationale » puisque la première s'est tenue à Moscou et n'a réuni que des membres de la communauté scientifique soviétique et la seconde qui a eu lieu à Paris n'a pu, à cause d'une épidémie de grippe, compter parmi ses invités qu'une majorité de scientifiques français, un belge, un hollandais et un russe.

4 Le déroulement de la conférence

L'article de Papaleksi [4] fait le compte-rendu détaillé des discussions et des débats qui ont eu lieu durant cette conférence. En tant qu'organisateur, Van der Pol a prononcé une allocution d'ouverture dans laquelle il déplorait que bon nombre de participants soient absents à cause d'une épidémie de grippe qui sévissait alors en Europe. Le premier intervenant a été Philippe Le Corbeiller.

D'après Papaleksi [4], Le Corbeiller a présenté différents types de systèmes auto-oscillants (auto-entretenus) comme l'exemple « métaphorique » du *Vase de Tantale* qu'il a introduit lors de son exposé au C.N.A.M. et comme celui de la lampe néon [9] pour illustrer le *phénomène de relaxation*. Il ajoute que Le Corbeiller a également inclus dans cette liste d'oscillateurs à relaxation les « fluctuations des espèces animales dans la lutte pour l'existence de Volterra » [4]. Ceci est assez surprenant car le modèle prédateur-proie de Volterra dans sa conception initiale du moins n'est pas le siège d'oscillations de relaxation (voir supra p. 138). Aussi, il semble peu probable que Le Corbeiller ait mentionné les travaux de Volterra. En revanche, Papaleksi fait très explicitement référence à l'ouvrage intitulé « Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour l'existence » de Volterra qui était censé être invité et reprend ainsi l'exemple proposé par Andronov [10] dans sa note aux *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*. Il précise ensuite que Le Corbeiller a passé en revue les différents problèmes rencontrés dans l'étude théorique des oscillations auto-entretenues comme la condition d'existence d'un régime d'amplitude stationnaire et qu'il a aussi rappelé la valeur de la période ainsi que la forme des *oscillations de relaxation*. Il raconte que Le Corbeiller a fait un résumé historique (probablement à l'image de son exposé au C.N.A.M.) [4] :

« Après avoir rappelé que les méthodes linéaires ne peuvent plus désormais être employées pour analyser ces problèmes il a fait un petit résumé historique de l'évolution de la théorie non linéaire mathématique. Il a alors décrit brièvement les principaux travaux de Van der Pol concernant les oscillations des systèmes de type de Thomson, puis il s'est concentré sur les travaux de Cartan et Liénard et a mentionné le lien entre l'analyse graphique de Van der Pol, la construction géométrique de M. Liénard et la théorie des cycles limites de Poincaré dont l'importance pour les problèmes d'oscillations a été indiquée par nos jeunes scientifiques : A. Andronov et A. Witt. Passant aux oscillations de relaxation, le conférencier a mentionné le rôle qu'ont joué les recherches de Van der Pol dans ce domaine et a indiqué l'approfondissement de la théorie de ces oscillations qui a été fait par les scientifiques de l'U.R.S.S. »

5. Domaine que l'on appelle aujourd'hui la *Mécanique Quantique*.

6. Voir *Annuaire de l'Académie Royale de Belgique* (1978), p. 14.

À partir de janvier 1933, les membres les plus représentatifs de la communauté scientifique française travaillant ou ayant travaillé dans le domaine des oscillations non linéaires ne pouvaient donc plus ignorer la correspondance établie par Andronov entre la solution périodique d'un oscillateur de type Van der Pol et la théorie des cycles limites de Poincaré. Des Cartan, Liénard, Abraham et Gutton, aucun n'a fait usage de ce résultat. Pour certains d'entre eux, ce type de recherches n'était plus au centre de leur préoccupations : c'est le cas de Élie et Henri Cartan par exemple. À part Henri Cartan, Brillouin, Le Corbeiller et Rocard tous les autres savants français présents n'étaient plus tout jeunes en 1933 (Liénard (64 ans), Élie Cartan (64 ans), Esclangon (57 ans), Abraham (65 ans), Gutton (61 ans)). Papaleksi explique ensuite [4] :

« Dans la suite de son exposé, Le Corbeiller s'est intéressé au domaine des oscillations quasi-périodiques. Il a fait un résumé du travail de Van der Pol sur le traitement du problème du forçage périodique des systèmes auto-oscillants et s'est arrêté sur les phénomènes de synchronisation forcée (ou « Mitnehmen ») et a souligné l'importance de ces phénomènes du point de vue fondamental et expérimental. En notant l'importance d'une analyse rigoureuse des phénomènes de synchronisation qui a été faite par A. Andronov et A. Witt, il a terminé son discours en rappelant que de nouvelles recherches faites dans le domaine du forçage périodique sur les systèmes non linéaires et des phénomènes des résonances « fractionnaires » devaient être présentées dans le discours du représentant de l'U.R.S.S. »

Pour sa part, Van der Pol présente le résumé historique de ses travaux sans les détailler en indiquant simplement que les références se trouvaient dans le volume spécial du *Zeitschrift für Technische Physik* de l'U.R.S.S, vol. 4, n° 1. La discussion qui a suivi son exposé a eu pour objet le phénomène de synchronisation forcée. D'après Papaleksi [4] l'exposé de Liénard qui a suivi rappelle les principaux résultats de son « Étude sur les oscillations entretenues » [11]. Puis, il ajoute [4] :

« En partant de sa méthode graphique pour la construction des courbes intégrales des équations différentielles, il a déduit les conditions que doit satisfaire la caractéristique non linéaire du système pour qu'il y ait des oscillations périodiques, c'est-à-dire pour que la courbe intégrale soit une courbe fermée, *i.e.* un cycle limite. »

Au regard de ce qui a été présenté concernant Liénard cette affirmation doit être considérée avec beaucoup de réserve. En effet, il faut garder à l'esprit que le narrateur possède une excellente connaissance des travaux d'Andronov [12,10] et que son « compte-rendu » est également destiné aux membres de l'Académie auprès desquels il doit justifier sa présence en France à cette conférence et montrer le niveau de diffusion des travaux soviétiques en Europe.

Le dimanche 29 janvier 1933, l'astronome Ernest Esclangon (dont il sera beaucoup question dans la Partie III de ce mémoire) présente ses travaux sur les fonctions quasi périodiques et souligne leur importance en particulier pour le traitement des données statistiques. Papaleksi explique alors :

« Pendant les discussions qui ont eu lieu après le discours, les chercheurs ont évoqué la possibilité d'observer des états d'oscillations quasi-périodiques dans les systèmes oscillants non linéaires conservatifs et non conservatifs. »

Le lundi 30 janvier est consacré la visite du laboratoire d'Abraham à l'École Normale Supérieure⁷ [4]. Les différentes expériences dont Abraham a parlé durant son exposé sont ainsi présentées ainsi que les travaux réalisés en collaboration avec Eugène Bloch, notamment l'étalonnage de la fréquence d'un oscillateur à lampe stabilisé par un quartz. Après cette visite, Van der Pol prononce un discours de clôture, rappelant que malgré l'absence de beaucoup de personnalités scientifiques dans ce domaine, cette conférence a atteint son but principal qui était de réunir des physiciens de différents pays travaillant dans le domaine des oscillations non linéaires et des mathématiciens. Puis, il ajoute [4] :

« Puisque cette première expérience a été réussie il faut espérer que de telles rencontres vont se répéter régulièrement. Les principaux exposés de la Conférence devraient être publiés⁸ dans la collection « Actualités Scientifiques et Industrielles » (édition Hermann, Paris). »

7. Voir *Les trois physiciens Henri Abraham, Eugène Bloch, Georges Bruhat*, éd. Rue d'Ulm 2009.

8. Cette publication n'a bien entendu pas eu lieu.

5 Conclusion

Du fait des nombreux absents cette conférence n'a pas eu la résonance internationale souhaité par ses organisateurs. Elle n'a pas non plus conduit à la constitution d'une sorte de « communauté du non linéaire » que Van der Pol et d'autres comme Le Corbeiller appellent de leurs vœux. En effet, l'absence des mathématiciens Hadamard et Volterra, probablement les plus à même d'apprécier les travaux de Poincaré a certainement été très préjudiciable tout comme celle de Mandel'shtam et de ses « étudiants » Andronov et Witt ainsi que celle de Kryloff et Bogoliouboff⁹ et ce malgré que Papalexi ait, semble-t-il, assez fidèlement résumé leurs travaux.

Ainsi, cette première « rencontre de non-linéaire » entre physiciens et mathématiciens ne paraît avoir eu d'impact sur la communauté scientifique française. Parmi ceux qui poursuivront leur travail dans ce domaine, comme Le Corbeiller et Rocard notamment, aucune forme de collaboration avec des membres de la communauté scientifique soviétique (ni avec Van der Pol d'ailleurs) ne semble se dessiner. Leurs travaux dans ce domaine ne semblent pas avoir été influencés d'une manière significative par les différents exposés notamment celui de Papalexi ou par les discussions qui s'en sont suivies.

Références

1. B. VAN DER POL, The nonlinear theory of electric oscillations, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, **22**, 1051-1086 (1934).
2. E. L. FEINBERG, The Development of Radio in Russia, *Herald of the Russian Academy of Sciences*, **76**, 64-70 (2006).
3. V. V. MIGULIN, N. D. Papaleksi (100th anniversary of his birth), *Soviet Physics Uspekhi*, **24**, 614-618 (1981).
4. N. D. PAPALESKI, Международная нелинейная конференция, [Conférence internationale de non-linéaire], *Zeitschrift für Technische Physik*, **4**, 209-213 (1934).
5. А. А. ANDRONOV, Андронов Александр Александрович : Автобиография Аан Ссср, Ф. 411, Ох. 25, Д. 12, Л. 3-6. Подлинник. [Aleksandr Aleksandrovich Andronov : Autobiographie U.R.S.S. AAN, folio 411, 25, 12, p. 3-6] (1943).
6. Полное собрание трудов, [Œuvres complètes], *Izvestiia Akademii Nauk SSSR*, **1-3** (S. M. Rytov éditeur) — **4** (M. A. Leontovich éditeur), Moscou (1955).
7. G. A. BENDRIKOV & G. A. SIDOROVA, Aleksandr Adolfovich Witt, Источник : Г. А. Бендриков, Г. А. Сидорова. Александр Адольфович Витт, История и методология естественных наук. БЫП., *Fizika. Izd-vo MGU*, **26**, 150-168, (1981).
8. R. MOSSERI, *Léon Brillouin, 1889-1969 : à la croisée des ondes*, Belin (1999).
9. PH. LE CORBEILLER, *Les systèmes auto-entretenus et les oscillations de relaxation*, Hermann — (*Actualités Scientifiques et Industrielles*, **144**) (1931).
10. А. А. ANDRONOV, Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, **189**, 559-561 (1929).
11. А. LIÉNARD, Étude des oscillations entretenues, *Revue générale de l'Electricité*, **23**, 901-912 et 946-954 (1928).
12. А. А. ANDRONOV, Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний in *IVs'ezd ruskikh fizikov* (5-16.08, p. 23-24). Moscow : N.-Novgorod, Kazan, Saratov ; [Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations. Ce rapport a été lu lors du IV^e congrès des physiciens russes à Moscou du 5 au 16 août 1928, p. 23-24] (1928).

9. Rappelons à ce propos que quinze jours avant cette conférence Kryloff et Bogoliouboff [1933] publient dans la *R.G.S.P.A.* un article intitulé : « Problèmes fondamentaux de la Mécanique Non linéaire ». Néanmoins, il n'a pas été possible d'établir de lien entre ces deux événements.

Opérateur de Koopman et identification de structures cohérentes : application à un écoulement de cavité

Florimond Guéniat^{1,3}, Luc Pastur^{1,3}, François Lusseyran³, & Thierry Faure^{2,3}

¹ Université Paris-Sud 11, F-91405 Orsay Cedex

² Université Pierre & Marie Curie, 4 place Jussieu, F-75005 Paris, France

³ LIMSI-CNRS BP 133, F-91403 Orsay Cedex

florimond.gueniat@limsi.fr

Résumé. On présente la technique de décomposition en modes dynamiques récemment introduite en mécanique des fluides pour extraire les structures spatiales pertinentes vis-à-vis de la dynamique d'un écoulement. La méthode est illustrée sur un écoulement de cavité.

Abstract. Dynamic mode decomposition (DMD) has been recently introduced in the field of fluid mechanics. It is aimed at extracting spatial structures expected to be relevant with respect to the fluid flow dynamics. DMD is applied to a cavity flow for the sake of illustration.

1 Introduction

Un système physique ouvert possède, potentiellement, un nombre infini de degrés de liberté. Néanmoins, les écoulements sont le plus souvent organisés autour de structures cohérentes qui jouent un rôle décisif dans la dynamique. On peut par exemple penser aux grandes structures tourbillonnaires des allées de von Karman, que l'on observe aussi bien dans des expériences de laboratoire que dans le sillage de structures à grande échelle telles que des navires ou des îles, pour lesquels les nombres de Reynolds sont très grands et la turbulence pleinement développée sur la gamme des échelles inertielles. Ces structures invitent à chercher des moyens de réduction de la dimension effective des écoulements considérés. Une idée classique consiste à rechercher une base vectorielle, constituée de modes, capable de décrire les réalisations \mathbf{u} du champ mesuré. Ce champ exhibe une structure dans l'espace, \mathbf{r} , et évolue dans le temps, t . Dans l'hypothèse de séparation des variables d'espace et de temps, on cherche alors à écrire \mathbf{u} sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i \geq 1} a_i(t) \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}), \quad (1)$$

la base des $\{\boldsymbol{\psi}_i\}$ (ou des $\{a_i\}$) étant a priori de dimension infinie, discrète ou continue. Dans l'optique d'une réduction de modèle et, plus généralement, dans les méthodes de type Galerkin, on se restreint à un ensemble fini de modes :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i \in \mathcal{S}} a_i(t) \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}),$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ est une approximation du champ \mathbf{u} et \mathcal{S} un ensemble de dimension finie. Lorsque les conditions aux limites sont homogènes, une base naturelle est donnée par les modes de Fourier. Dans des problèmes aux conditions aux limites plus complexes, on peut recourir à des méthodes empiriques de décomposition suivant les axes principaux de l'ensemble des données (modes POD) [3], ou rechercher des champs solutions des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un état de base stationnaire (modes globaux) [11]. Récemment, Schmid [9,10] et Rowley [8] ont proposé une nouvelle méthode de décomposition, basée sur l'hypothèse de l'existence d'un opérateur d'évolution [6], permettant théoriquement d'extraire directement les informations de la dynamique (non-linéaire) de l'écoulement en régime permanent instationnaire [4].

Dans cette contribution, nous présentons la méthode en détail et l'illustrons sur un écoulement de cavité cisailé.

2 Décomposition en modes dynamiques

2.1 Opérateur d'évolution

On considère un système dynamique évoluant sur une variété Ω de dimension N , X un point de Ω représentant l'état du système, et ϕ_t le flot de Ω dans Ω qui fait passer le système de l'état $X(t_0)$ au temps t_0 à l'état $X(t_0 + t)$ au temps $t_0 + t$:

$$X(t_0 + t) = \phi_t(X(t_0)). \quad (2)$$

On réalise alors une mesure $h(X)$ sur l'état du système, à des intervalles de temps Δt réguliers. La fonction h de Ω dans \mathbb{C} est élément d'un espace de Hilbert \mathcal{H} dont la métrique sera définie par un produit scalaire interne. On introduit alors un opérateur d'évolution, l'opérateur de *Koopman* U_t , agissant dans \mathcal{H} , tel que [6]

$$U_t h(X) = h(\phi_t X). \quad (3)$$

Ainsi, $U_t h$ a en X la valeur que h aura au point $\phi_t X$ vers lequel X aura été transporté après le temps t . L'opérateur U_t , linéaire, décrit l'évolution temporelle d'une observable dont la série,

$$V_0^{N-1} = \{h(t_0), h(t_0 + \Delta t), h(t_0 + 2\Delta t), \dots, h(t_0 + (N-1)\Delta t)\}, \quad (4)$$

est produite par la dynamique (non-linéaire) sous-jacente du flot. On a noté ici $h(t_k) \equiv h(X(t_k))$. De la définition (3) on peut récrire (4) sous la forme

$$V_0^{N-1} = \{h(t_0), U_{\Delta t} h(t_0), U_{2\Delta t} h(t_0), \dots, U_{(N-1)\Delta t} h(t_0)\}, \quad (5)$$

avec $U_{k\Delta t} = U_{\Delta t}^k$, de sorte que V_0^{N-1} est un sous-espace de Krylov d'ordre N . Dans la suite il sera implicitement fait référence au temps Δt d'échantillonnage des données et nous noterons $U_{\Delta t} \equiv U$ et $X_k = X(t_0 + k\Delta t)$. Supposons l'opérateur U diagonalisable, et que ses vecteurs propres forment une base de \mathcal{H} , et notons ϕ_i un vecteur propre de U associé à la valeur propre λ_i :

$$U\phi_i = \lambda_i\phi_i.$$

La famille des $\{\phi_i\}$ est de dimension infinie et toute mesure $h(t_k)$ de l'état du système peut se décomposer sur cette base :

$$h(X_k) = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \phi_i(X_k), \quad (6)$$

où α_i est la projection de h sur la base des $\{\phi_i\}$. Notons que la base n'est pas orthogonale a priori et que la projection est donc non-normale a priori. Les α_i sont les coefficients de Koopman. La généralisation à une observable h non scalaire, par exemple deux composantes du champ de vitesse mesurées dans un plan par des techniques de vélocimétrie par images de particules, est immédiate ; le coefficient α_i , complexe a priori, pourra avoir autant de composantes que h .

2.2 Évolution sur un attracteur

On peut remarquer une importante propriété des fonctions de Koopman :

$$h(X_{k+1}) = Uh(X_k) = U\left(\sum_{i \geq 1} \phi_i(X_k)\alpha_i\right) = \sum_{i \geq 1} U\phi_i(X_k)\alpha_i = \sum_{i \geq 1} \lambda_i\phi_i(X_k)\alpha_i.$$

Par récurrence, on obtient donc :

$$h(X_{k+1}) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i^k \phi_i(X_0)\alpha_i. \quad (7)$$

Le résultat remarquable est que, si un opérateur d'évolution tel que U existe, c'est-à-dire si la dynamique (non-linéaire) sous-jacente est déterministe, alors toute valeur prise par h peut se déduire de la

connaissance de la projection de la condition initiale $h(X_0)$ sur la base des $\phi_i(X_0)$, et des valeurs propres λ_i . D'autre part, si la dynamique du système évolue sur un attracteur non dégénéré, *i.e.* si l'image de la variété Ω est Ω , alors U est un opérateur unitaire [6], le théorème spectral assurant que les valeurs propres sont sur le cercle unité, ses vecteurs propres ϕ_i étant orthogonaux, et $(Uf, Ug) = (f, g)$. L'opérateur U est alors un automorphisme de la variété, et la décomposition de l'équation (6) est complète.

2.3 Estimation des modes propres de l'opérateur

Il existe diverses manières d'estimer les valeurs et vecteurs propres de l'opérateur U et nous ne présenterons ici que la méthode dite de la matrice compagnon. De plus amples détails peuvent être trouvés dans [10]. Considérons, puisqu'il en sera question plus loin, le cas particulier où la mesure h est celle d'un champ de vitesse, dont on extrait les deux composantes $u_x(x, y, t)$ et $u_y(x, y, t)$ du champ de fluctuations $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ par rapport au champ moyen, dans un plan (x, y) vertical, réalisée à intervalles de temps réguliers et suffisamment petits pour que toutes les échelles (temporelles) de la dynamique soient résolues. L'espace de Krylov (4) s'écrit

$$V_0^{N-1} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}\},$$

les indices correspondants aux différents temps t_0, t_1, \dots, t_{N-1} de la mesure et $\mathbf{u}_k \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k)$. L'hypothèse sur laquelle repose la méthode de la matrice compagnon est que les N premières mesures — où $N < M$, M étant la dimension de l'observable — contenues dans V_0^{N-1} , suffisent à décrire n'importe quelle réalisation ultérieure du champ \mathbf{u} , et notamment le N -ème :

$$\mathbf{u}_N = c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_{N-1} \mathbf{u}_{N-1},$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{u}_N = V_0^{N-1} \mathbf{c}, \quad (8)$$

avec $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})^\dagger$, \dagger représentant l'opérateur de transposition hermitienne. En remarquant par ailleurs, d'après (5), que :

$$UV_0^{N-1} = V_1^N,$$

il résulte de l'hypothèse (8) que l'on peut introduire une matrice C , dite matrice compagnon, telle que :

$$UV_0^{N-1} = V_0^{N-1} C + \mathbf{r}^\dagger \mathbf{e}_N, \quad (9)$$

avec

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$\mathbf{e}_N = (0, 0, \dots, 1)^\dagger \in \mathbb{R}^{N+1}$ et \mathbf{r} un vecteur résidu, orthogonal au sous-espace de Krylov V_0^{N-1} , qui tend vers zéro lorsque la condition (8) est strictement vérifiée.

La matrice C est de dimension $N \times N$. Ses éléments inconnus, les c_j , peuvent être déterminés, d'après l'égalité (8), en minimisant la norme :

$$\mathbf{c}_{opt} = \min_{\mathbf{c}} \left\| \mathbf{u}_N - \sum_{j=1}^{N-1} c_j \mathbf{u}_j \right\|_2.$$

Il est aisé de calculer les valeurs et vecteurs propres de C ; or ces derniers sont liés à celles et ceux de l'opérateur U , C et U étant similaires. En effet, soit \mathbf{v}_j un vecteur propre de C associé à la valeur propre σ_j , alors :

$$V_0^{N-1} C \mathbf{v}_j = V_0^{N-1} (\sigma_j \mathbf{v}_j) = \sigma_j (V_0^{N-1} \mathbf{v}_j).$$

Or, d'après (9), $V_0^{N-1}C\mathbf{v}_j = UV_0^{N-1}\mathbf{v}_j$ si le résidu est nul, d'où :

$$U(V_0^{N-1}\mathbf{v}_j) = \sigma_j(V_0^{N-1}\mathbf{v}_j),$$

de sorte que $\sigma_j \equiv \lambda_j$ est valeur propre de U associée au mode $V_0^{N-1}\mathbf{v}_j \equiv \boldsymbol{\alpha}_j$. Il est donc possible de déterminer, empiriquement à partir de l'ensemble V_0^{N-1} , N éléments de la base des $\{\phi_i\}$:

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{k-1} \phi_i(X_0) \boldsymbol{\alpha}_i. \quad (11)$$

L'ensemble des conditions initiales $\{\phi_i(X_0)\}$ est déterminée en projetant \mathbf{u}_0 sur les $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$. La relation (8) conduit aux mêmes limites qu'en Fourier, à savoir que la plus petite fréquence résolue dans le système est $f_{\min} = 1/T$, où $T = N\Delta t$ est le temps total d'observation imposé par V_0^{N-1} . De la même façon, la plus haute fréquence résolue est $f_{\max} = 1/\Delta t$. Il en résulte aussi que les modes propres ϕ_k de U sont des modes de Fourier $e^{i\omega_k t}$ si la dynamique est périodique [8]. De plus, il faudrait faire tendre N vers l'infini pour que la condition (8) soit vérifiée si la dynamique du système évoluait sur un attracteur chaotique. Dans la plupart des cas réels, où la dynamique est chaotique et T est fini, le résidu \mathbf{r} dans (9) n'est pas nul, et $\tilde{\mathbf{u}}_k$ dans (11) n'est qu'une représentation approchée de la réalisation \mathbf{u}_k du champ de vitesse fluctuant. Remarquons enfin qu'à aucun moment l'état X du système ni l'opérateur d'évolution U ne sont déterminés.

3 Application à un écoulement de cavité

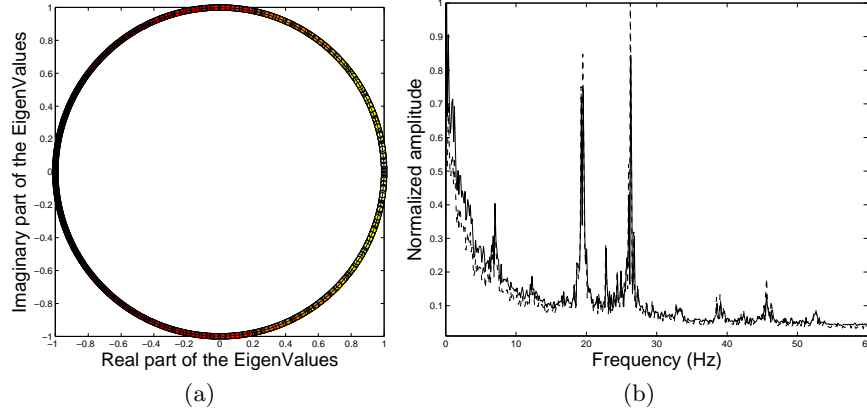


FIG. 1. Décomposition en modes dynamiques : (a) valeurs propres de l'opérateur, qui se distribuent sur le cercle unité en régime permanent. Les niveaux de gris traduisent l'amplitude, au sens de la norme \mathcal{L}^2 , du mode dynamique associé (blanc pour les plus énergétiques). (b) Comparaison des spectres de puissance obtenus par analyse de Fourier (trait plein) ou par décomposition en modes dynamiques (pointillés). L'analyse de Fourier est faite sur les champs de fluctuation de la vitesse, en moyennant les spectres de puissance obtenus en chacun des points de la grille spatiale. Le spectre de Koopman est obtenu en reportant, pour chaque canal fréquentiel, l'amplitude du mode dynamique associé.

L'écoulement considéré est un écoulement de cavité, décrit dans [1]. Le rapport de forme de la cavité, rapport de sa longueur $L = 100$ mm sur sa hauteur H , vaut $L/H = 2$. La vitesse incidente est $U = 1.9$ m/s, correspondant à un nombre de Reynolds, basé sur L , de l'ordre de $Re_L = UL/\nu_{air} = 12700$. La couche cisailée, qui sépare l'intérieur de l'extérieur de la cavité, est instable vis-à-vis de modes de Kelvin-Helmholtz [5]. D'autre part, la présence du coin aval conduit à une sélection des modes d'oscillation de

la couche cisailée et il en résulte, dans le régime considéré, l'apparition d'oscillations auto-entretenues, qui se traduisent par un spectre de puissance très piqué autour de quelques fréquences caractéristiques (cf spectre de la Fig. 1b en trait plein). Dans le régime permanent, les valeurs propres λ_k de l'analyse de Koopman sont sur le cercle unité, comme on peut le voir sur la Fig. 1a; on peut donc les écrire sous la forme $\lambda_k = \exp(i\omega_k \Delta t)$ et identifier $f_k = \omega_k/2\pi$ à une fréquence de Fourier (temporelle). On compose ainsi un spectre en affectant, à chaque canal de fréquence $f_k \pm \delta f_k/2$, l'amplitude, au sens de la norme \mathcal{L}^2 , du mode dynamique α_k qui lui est associé. On obtient le spectre de la Fig. 1b (trait pointillé), qui tend vers le spectre de Fourier de l'écoulement (en trait plein).

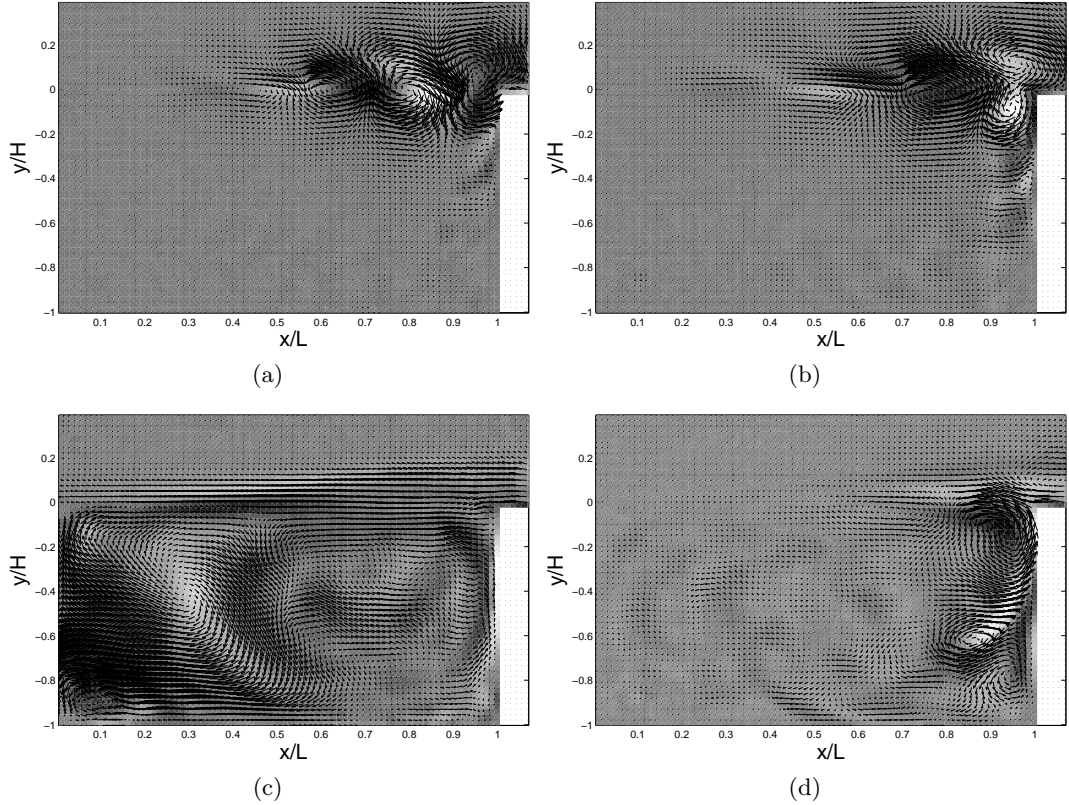


FIG. 2. Modes dynamiques α_k associés aux fréquences (a) $f_k = 19,6$ Hz, (b) $f_k = 26,4$ Hz, correspondant à des structures de la couche cisailée, et (c) $f_k = 0,5$ Hz, (d) $f_k = 7,1$ Hz, associées à des structures intra-cavitaires. Le champ de vecteur représente la partie réelle de $\alpha_k = \alpha_{k,x}e_x + \alpha_{k,y}e_y$. L'échelle de couleur encode la champ de vorticité.

Les structures spatiales α_k , associées aux fréquences f_k les plus piquées du spectre, sont présentées sur la Fig. 2. Comme on s'y attend, les structures associées aux fréquences les plus élevées et énergétiques du spectre, sont associées à des modes de la couche cisailée (figures du haut). Les basses fréquences sont quant à elles associées à des structures intra-cavitaires, comme le révèlent les figures du bas.

4 Discussion et conclusion

La décomposition en mode dynamique, récemment proposée par P. Schmid [9,10], introduit, dans le domaine de la mécanique des fluides, les concepts de l'analyse de Koopman initialement développée, dans les années 30, dans le contexte des systèmes dynamiques hamiltoniens [6,8]. Cette analyse se révèle

extrêmement prometteuse pour l'identification de structures cohérentes d'un écoulement fluide, pertinentes vis-à-vis de sa dynamique temporelle. Dans le cas d'un régime permanent, lorsque la dynamique du système évolue sur un attracteur, les modes de Koopman tendent (au sens de la limite) vers les structures spatiales associées aux fréquences de Fourier temporelles [1,8].

En mécanique des fluides, il est fréquent de vouloir rechercher une décomposition du type de celle de l'équation (1), notamment pour réduire la complexité de la représentation du champ de vitesse. Les structures spatiales, $\psi_i(\mathbf{r})$, sont souvent obtenues par une décomposition de type Karhunen-Loève, ou décomposition orthogonale propre (acronyme anglo-saxon consacré : POD) [2] : la base (orthogonale) des modes spatiaux est construite, empiriquement, à partir de l'ensemble des mesures V_0^{N-1} , par identification des composantes principales de la matrice V_0^{N-1} [3]. Néanmoins, dans les régimes tels que celui représenté par le spectre de la Fig. 1b, où deux fréquences caractéristiques de la couche cisailée, $f_1 = 19$ Hz et $f_2 = 26$ Hz, sont en compétition et apparaissent alternativement, au cours du temps, dans les spectres instantanés de puissance, la POD identifie un unique mode moyen, à la fréquence $f_m \simeq (f_1 + f_2)/2$, et une seule structure spatiale associée, $\psi_m(\mathbf{r}) \simeq (\psi_1(\mathbf{r}) + \psi_2(\mathbf{r}))/2$. Identifier les structures spatiales associées à chacune des fréquences f_1 et f_2 suppose, dans ce cas, de réaliser une POD conditionnelle selon qu'un mode ou l'autre d'oscillation est présent dans la couche cisailée [7]. La décomposition en modes dynamiques que nous avons présentée ici parvient quant à elle à identifier les structures spatiales associées à chacune des fréquences importantes du spectre de puissance : on dispose ainsi d'un moyen empirique efficace pour extraire le *squelette* du champ de vitesse, en identifiant les structures caractéristiques autour desquelles s'organise l'écoulement.

Références

1. J. BASLEY, L. R. PASTUR, F. LUSSEYRAN, T. M. FAURE & N. DELPRAT, Experimental investigation of global structures in an incompressible cavity flow using time-resolved PIV, *Experiments in Fluids* available online (2010).
2. G. BERKOOZ, P. HOLMES & J.L. LUMLEY, The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows, *Annual Review of Fluid Mechanics* **25**, 539-575 (1993).
3. L. CORDIER & M. BERGMANN, Proper Orthogonal Decomposition : an overview, *Lecture series 2002-04 and 2003-04 on post-processing of experimental and numerical data*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 46 pages.
4. C. DOUAY, F. GUENIAT, T. FAURE, L. PASTUR & F. LUSSEYRAN, Instabilités centrifuges dans un écoulement de cavité : décomposition en modes dynamiques, *Compte-rendu des Rencontres du Non-Linéaire*, **14**, 47-52 (2011).
5. P. HUERRE & M. ROSSI, Hydrodynamic instabilities in open flows, in *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*, pp. 81-294, Editors C. Godreche, P. Manneville, Cambridge University press (1998).
6. B.O. KOOPMAN, Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **17**, 315-318 (1931).
7. R. PETHIEU, L. R. PASTUR, F. LUSSEYRAN & TH. M. FAURE, Caractérisation expérimentale de la compétition non-linéaire de modes de Kelvin-Helmholtz dans un écoulement en cavité, *Comptes-Rendus des Rencontres du Non-Linéaire*, **10**, 143-148 (2007).
8. C. W. ROWLEY, I. MEZIĆ, S. BAGHERI, P. SCHLATTER & D. S. HENNINGSON, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **641**, 115-127 (2009).
9. P. J. SCHMID & J. SESTERHENN, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, in *61st annual meeting of the APS division of fluid dynamics*, APS, San Antonio, Texas, USA (2008).
10. P. J. SCHMID, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *Journal of Fluid Mechanics*, **656**, 6-28 (2010).
11. Voir par exemple l'Habilitation de D. SIPP, *Dynamique et contrôle des instationnarités en aérodynamique* (2009), et les références incluses.

Un équivalent particulaire de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky

François James¹, Phung Thanh-Tam^{1,2}, & Pascal Brault²

¹ MAPMO, CNRS & Université d'Orléans, BP 6759, 45067 Orléans Cedex 2

² GREMI, CNRS & Université d'Orléans, BP 6744, 45067 Orléans Cedex 2

francois.james@univ-orleans.fr

Résumé. L'équation de Kuramoto-Sivashinsky est couramment utilisée dans divers modèles de croissance d'interface. En dimension 1 d'espace, elle prend la forme suivante : $\partial_t h + \frac{|\partial_x h|^2}{2} = -\partial_{xx} h - \partial_{xxxx} h$ où h est la hauteur de l'interface. Il est loisible d'interpréter le gradient en espace de la solution, $u = -\partial_x h$, comme un champ de vitesse, et de suivre une population de particules qui évoluent en suivant ce champ. On constate alors clairement une dynamique comportant une partie « particules collantes », couplée à des oscillations. L'enjeu est ici de proposer un système de particules dont les trajectoires sont analogues, et qui, moyennant certains scalings, redonne l'équation précédente à la limite. Un tel système peut s'obtenir à l'aide d'une force dépendant des vitesses des particules, et non de leurs positions.

Abstract. The Kuramoto-Sivashinsky equation is commonly used in various models of interface growth. In a one-dimensional space, it takes the form $\partial_t h + \frac{|\partial_x h|^2}{2} = -\partial_{xx} h - \partial_{xxxx} h$ where h is the height of the interface. It is possible to interpret the spatial gradient of the solution, $u = -\partial_x h$, as a velocity field, and to track the particles population governed by this field. We thus clearly observed a dynamical component designated by the “gluing particles”, which is coupled to some oscillations. The aim is here to propose a system of particles producing similar trajectories and which, averaging some scalings, return in the limit the previous equation. Such a system can be obtained using a force depending on the particle velocity, and not on their positions.

1 Introduction

L'équation de Kuramoto-Sivashinsky est couramment utilisée dans divers modèles de croissance d'interfaces telles que les fronts de flammes [2,3], la croissance de couche minces, l'érosion/gravure de surface [4]. En dimension 1 d'espace, elle prend la forme suivante, où h est la hauteur de l'interface :

$$\partial_t h + \frac{|\partial_x h|^2}{2} = -\partial_{xx} h - \partial_{xxxx} h. \quad (1)$$

Une des propriétés caractéristiques de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky est de générer une structure quasi-périodique [4].

Il est intéressant et utile de connecter cette équation différentielle avec une approche particulaire afin de tenter de comprendre les mécanismes élémentaires intervenant dans les phénomènes physiques proposés ci-dessus. Une approche consiste à interpréter le gradient en espace de la solution de l'équation (1), $u = -\partial_x h$, comme un champ de vitesse, et de suivre une population de particules qui évoluent en suivant ce champ, qui vérifie l'équation de Burgers modifiée

$$\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = -\partial_{xx} u - \partial_{xxxx} u. \quad (2)$$

On constate alors clairement [7] que la dynamique comporte une partie “particules collantes”.

2 L'équivalent particulaire

La référence [5] propose un système de particules en interaction avec un potentiel harmonique limité aux premiers voisins :

$$\dot{x}_i = u_i, \quad \dot{u}_i = (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}), \quad (3)$$

avec des règles de collision sans préservation de la masse, mais aussi de création de particules lorsqu'une certaine distance critique entre deux particules est atteinte. Cette longueur serait reliée à la quasi-période de (1). Même si un certain nombre de caractéristiques de l'équation macroscopique sont reproduites par ce modèle, le fait qu'il semble impossible d'en dériver une équation aux dérivées partielles (en particulier le terme d'ordre 4 de (1)) n'est pas satisfaisant. De plus, travailler avec un potentiel harmonique de ce type conduit plutôt à une équation de type ondes sur la fonction X définie par le scaling

$$\epsilon x_i(t) = X(\epsilon t, \epsilon i)$$

lorsque ϵ tend vers 0. Le paramètre ϵ est ici l'inverse du nombre de particules.

Afin de récupérer les structures quasi-périodiques sans introduire artificiellement une longueur, nous partons de la remarque suivante, basée sur des simulations Monte-Carlo dans un contexte différent [6]. Il est montré dans cette référence que si l'on prend en compte des interactions aux seconds voisins, on peut générer des structures quasi-périodiques. Compte tenu également de la remarque précédente, nous remplaçons le potentiel harmonique par des forces dépendent des vitesses et non plus des positions. Notre prototype de système de particules en interaction sera donc le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = \alpha(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) + \beta(v_{i-2} - 2v_i + v_{i+2}), \end{cases} \quad (4)$$

avec la dynamique sous-jacente des particules collantes : lorsque 2 particules collisionnent, elles créent une particule unique, dont la masse est la somme des deux précédentes, et la vitesse calculée de façon à préserver la quantité de mouvement. Il est classique (voir par exemple [1]) que la dynamique des particules collantes ($\alpha = \beta = 0$ ici) donne des solutions du système des gaz sans pression, où ρ est la densité, et u la vitesse du gaz

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Ce système se ramène à l'équation de Burgers lorsque les solutions sont régulières, et permet donc de retrouver la première partie de l'équation (2).

Si $\alpha > 0$ on a affaire à une attraction au plus proche voisin, et la différence finie correspondante donne formellement une dérivée seconde en espace, qui s'interprète comme une viscosité. Autrement dit, elle pourrait être cohérente avec un système d'Euler sans pression avec viscosité. L'interaction au second voisin peut se récrire de manière à faire apparaître une différence finie approchant une dérivée quatrième. Le système devient alors

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = (\alpha + 4\beta)(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) + \beta(v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2}). \end{cases} \quad (6)$$

Toujours formellement, pour être cohérent avec l'équation (1), il faut un coefficient négatif sur la dérivée quatrième, soit $\beta < 0$, autrement dit une répulsion au deuxième voisin, et un coefficient négatif également pour la dérivée seconde, soit $\alpha + 4\beta < 0$. On note que tout $\alpha > 0$ convient, donc répulsif au premier voisin, mais on peut également choisir une attraction (donc compatible avec une viscosité) "pas trop forte", au sens où $0 < \alpha < -4\beta$. Les valeurs des coefficients de (1), c'est-à-dire -1 et -1 , sont obtenues avec $\beta = -1$, et $\alpha = 3$. Avec cette interprétation, (1) pourrait donc bien s'interpréter comme conséquence d'une attraction au premier voisin, et répulsion au second.

3 La dynamique

Ce modèle pour l'heure montre des trajectoires qualitativement compatibles avec les simulations de [7] (voir figure 1, obtenue avec un petit nombre de particules). Il permet aussi, partant d'un ensemble de particules de vitesses aléatoires uniformes centrées autour de 0, de montrer que le spectre des vitesses tend à se concentrer, donc d'obtenir une organisation plus ou moins périodique. Le réglage des paramètres reste cependant difficile, entre nombre de particules, temps de simulation et valeurs des constantes. Ainsi, pour obtenir la figure 2 (où l'échelle en temps et espace n'est pas la même que pour la figure 1), on part de 11000 particules, au temps $t = 10$ il n'en reste plus que 181.

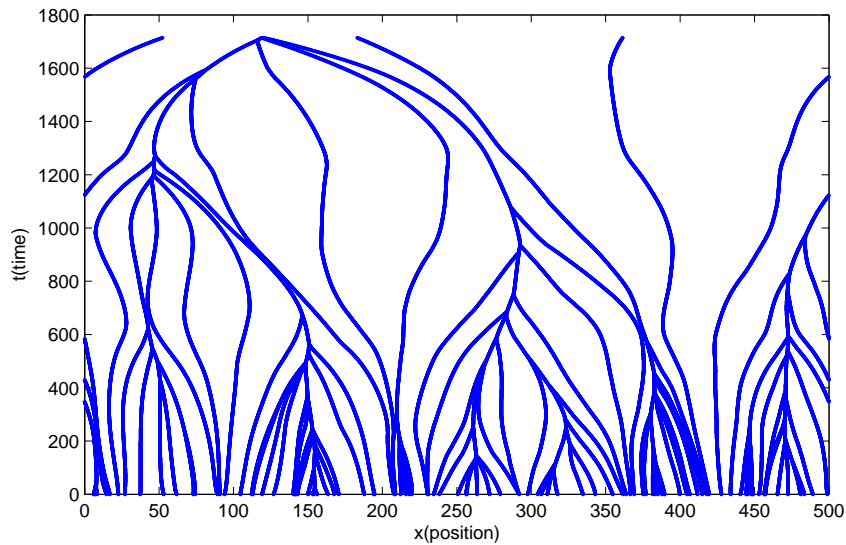


FIG. 1. Trajectoires des particules avec le modèle (4).

4 Conclusion

Le modèle doit donc se trouver une base physique, permettant de comprendre clairement la signification et le rôle des termes de dérivées spatiales des vitesses par rapport à la dynamique des interfaces. Il convient également de bien comprendre le scaling permettant de passer à la limite lorsque le nombre de particules tend vers ∞ .

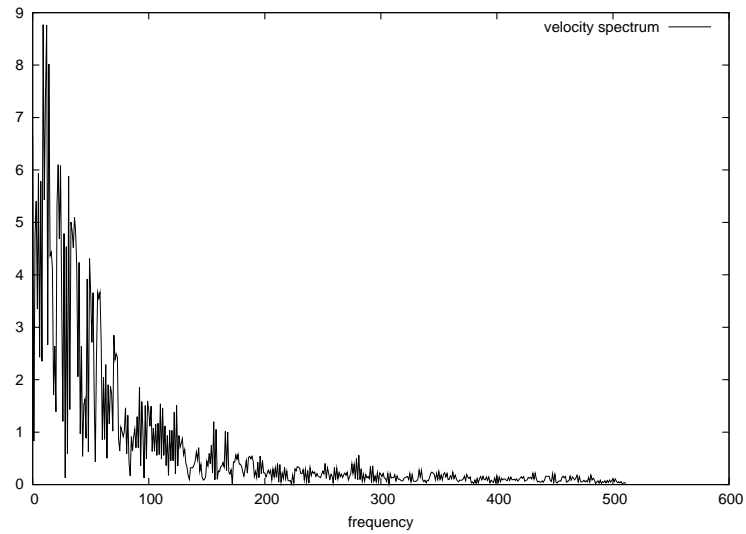


FIG. 2. Spectre des vitesses.

Références

1. F. BOUCHUT, On zero-pressure gas dynamics, in *Advances in Kinetic Theory and Computing, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, **22**, pp. 171-190, World Scientific (1994).
2. Y. KURAMOTO & T. TSUZUKI, On the dormation of dissipative structures in reaction-diffusion systems, *Progress in Theoretical Physics*, **54**, 687-699 (1975).
3. G. I. SIVASHINSKY, Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames, *Annual Review in Fluid Mechanics*, **15**, 179-199 (1983).
4. S. PARK, B. KAHNG, H. JEONG & A.-L. BARABÁSI, Dynamics of ripple formation in sputter erosion : Nonlinear phenomena, *Physical Review Letters*, **83**, 3486-3489 (1999).
5. M. ROST & J. KRUG, A particle model for Kuramoto-Sivashinsky equation, *Physica D*, **88**, 1-13 (1995).
6. E. S. HOOD, B. H. TOBY & W. H. WEINBERG, Precursor-mediated molecular chemisorption and thermal desorption : The interrelationships among energetics, kinetics, and adsorbate lattice structure, *Physical Review Letters*, **55**, 2437-2440 (1985).
7. T. BORH & A. PIKOVSKY, Anomalous diffusion in the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Physical Review Letters*, **70**, 2892-2895 (1993).

Nouvelles vagues solitaires à la surface de l'eau

Alphonse Leroux¹, Didier Clamond² & Jean Rajchenbach¹

¹ Laboratoire de Physique de la Matière Condensée (CNRS-UMR 6622),

² Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné (CNRS-UMR 6621)

Université de Nice — Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2

Jean.Rajchenbach@unice.fr

Résumé. Grâce à l'excitation paramétrique d'ondes de surfaces dans une cellule de Hele-Shaw, nous mettons en évidence deux nouveaux types de vagues solitaires. Il s'agit de vagues stationnaires très localisées, l'une étant de symétrie paire, l'autre de symétrie impaire. Elles diffèrent du 'clapotis' localisé mis en évidence en canal étroit par Wu *et coll.* [1], ou de l'oscillon qui apparaît lorsque l'excitation paramétrique est composée de deux fréquences [2]. De plus, à notre connaissance, aucune vague solitaire impaire n'avait été mis en évidence jusqu'à ce jour à la surface de l'eau.

Abstract. By means of the parametric excitation of water waves in a Hele-Shaw cell, we report the existence of two new types of highly localized, standing surface waves of large amplitude. They are respectively of odd and even symmetries. Both solitary waves oscillate subharmonically with the forcing frequency. They are highly nonlinear, and differ strongly from the other types of localized patterns, previously evidenced by Wu *et al.* [1] and by Arbell *et al.* [2]. Moreover, to our knowledge, such a solitary waves of odd symmetry has never been reported hitherto.

1 Introduction

Lorsqu'on vibre verticalement un récipient contenant une couche de liquide, il apparaît à la surface de celui-ci des ondes de surface [3]. Le seuil d'apparition pour ces 'vagues de Faraday' est contrôlé par le fait que l'énergie injectée par le forçage doit être supérieure à la dissipation visqueuse. Cette instabilité a été amplement explorée dans le passé, car elle constitue un moyen privilégié d'étudier l'apparition de structures spatiales résultant du couplage non-linéaire entre vagues de différentes longueurs d'onde [4]. Suivant l'amplitude et la fréquence du forçage, la viscosité du fluide ou la profondeur de la nappe, des motifs très variés ont été identifiés sur la surface libre, tels des bandes, des carrés, des hexagones [5,6,7], ou même des motifs quasi-cristallins (avec la perte de l'invariance par translation) [8,9]. La description théorique standard utilisée pour expliquer l'apparition de ces motifs repose sur l'écriture d'une équation aux amplitudes qui présente les propriétés d'invariance et de symétrie requises [5,10-15]. En particulier, il est admis que le premier terme non-linéaire pertinent est d'ordre cubique, car l'instabilité de Faraday étant de type paramétrique, les vagues de surface oscillent subharmoniquement par rapport à la fréquence de forçage.

Dans cette communication, nous décrivons l'existence de deux nouveaux types de vagues solitaires, que nous avons mises en évidence grâce à un montage de type 'Faraday'. Il s'agit de vagues stationnaires, très localisées, l'une étant de symétrie paire, l'autre impaire. Nous les avons observées en faisant vibrer verticalement une cellule de Hele-Shaw (c'est à dire une cellule quasi-bidimensionnelle), partiellement remplie d'eau. Le profil de la vague paire (bidimensionnelle) offre des ressemblances avec le profil de l'oscillon axisymétrique (tridimensionnelle) mis en évidence par Arbell *et coll.* [2]. Néanmoins, il faut rappeler que tant les solutions de l'équation des vagues que leur stabilité dépendent crucialement de la dimensionnalité de l'espace - il ne s'agit donc pas de la même solution. Rappelons aussi que le forçage de l'oscillon de Arbell *et coll.* [2] est constitué de deux fréquences commensurables $m\Omega$ et $n\Omega$, avec m et n premiers entre eux ; dans le cas présent, le forçage est purement sinusoïdal. Concernant la vague impaire, aucune vague solitaire présentant telle symétrie n'avait été observée jusqu'à ce jour, à notre connaissance,

2 Montage expérimental

Le système que nous étudions est constitué par une couche de fluide de 5 cm d'épaisseur confinée dans cellule de Hele-Shaw (de 30 cm de longueur). L'intervalle séparant les parois frontales de la cellule est de 1 mm. Le liquide est de l'eau additionnée d'agent mouillant « Photo-Flo », et la température est régulée avec une précision de 0.1° C. Les parois de la cellule ont été traitées à l'acide persulfurique, afin d'augmenter leur mouillabilité. La cellule de Hele-Shaw est ensuite vibrée verticalement. Le mouvement peut être considéré comme sinusoïdal avec une très bonne précision. L'amplitude des vibrations peut atteindre 2 cm, et la zone explorée pour les fréquences de forçage s'étend de 6 à 20 Hz. Les déformations de la surface libre sont filmées à l'aide d'une caméra rapide (250 im/s).

La configuration de Hele Shaw utilisée présente deux avantages. Premièrement, comme nous allons le voir par la suite, elle augmente considérablement le domaine d'existence de ces ondes de surface très localisées. Deuxièmement, elle permet une formulation potentielle du champ de vitesse qui tient compte de la dissipation visqueuse.

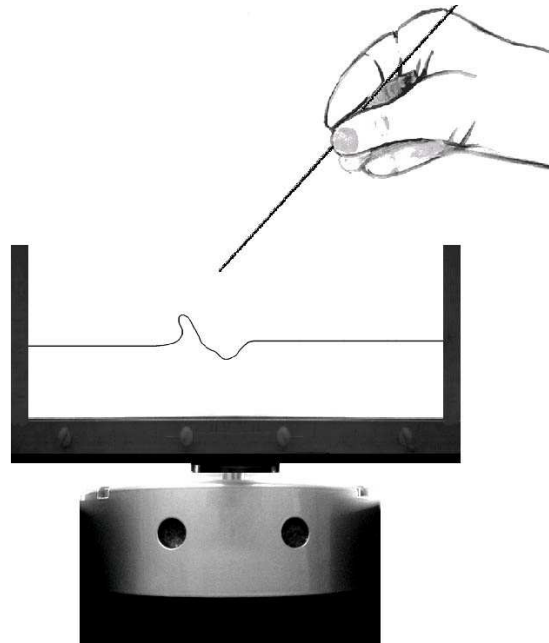


FIG. 1. Schéma du dispositif expérimental. La cellule de Hele-Shaw subit des oscillations verticales. On augmente l'amplitude de ces oscillations depuis le repos jusqu'à atteindre la région de bistabilité. Ensuite, la surface libre verticale est perturbée localement au moyen d'un bâtonnet. Il apparaît alors une onde stationnaire très localisée, qui peut être soit de symétrie paire ou soit de symétrie impaire.

3 Observations expérimentales

Tout d'abord, il est important d'insister que dans cette configuration de Hele-Shaw, l'apparition ou la disparition des ondes de surface périodiques dans l'espace témoigne d'une hystérésis notable. Pour fixer les idées, nous allons décrire le protocole expérimental suivant. Nous choisissons une fréquence d'excitation de 10 Hz, par exemple. Ensuite, nous augmentons progressivement l'amplitude de la vibration jusqu'à l'apparition de vagues périodiques dans l'espace. Ces vagues apparaissent avec une amplitude finie, pour une accélération-seuil adimensionnée égale à F_{\uparrow} ($F_{\uparrow} = 2.24$ à 10 Hz), où F est exprimé en unité de g .

Ensuite, nous diminuons l'amplitude de vibration jusqu'à ce que les vagues périodiques disparaissent. On note alors une autre accélération seuil adimensionnée F_{\downarrow} ($F_{\downarrow} = 1.13$ à 10 Hz). Une fois ces deux seuils mesurés, nous partons de l'état de surface libre plate ($F = 0$), et nous augmentons l'amplitude du forçage jusqu'à atteindre la région hystérétique ($F_{\downarrow} < F < F_{\uparrow}$). Etant donné ce mode de préparation, la surface libre reste plate. C'est alors que nous perturbons localement la surface libre avec un bâtonnet, que nous ôtons rapidement. Nous observons alors un mode de vibration de la surface libre très localisé, qui oscille subharmoniquement (à 5 Hz) et qui peut être de symétrie soit paire, soit impaire (Fig. 2). La symétrie de cette vague solitaire ne peut pas être contrôlée, et il ne peut être exclu que le motif pair résulte de l'accrochage de deux ondes solitaires impaires.

Sur la figure 3 sont reportées les évolutions temporelles des ondes solitaires paires et impaires. Dans les deux cas on note une tendance au déferlement, probablement inhibée par des effets de tension superficielle.

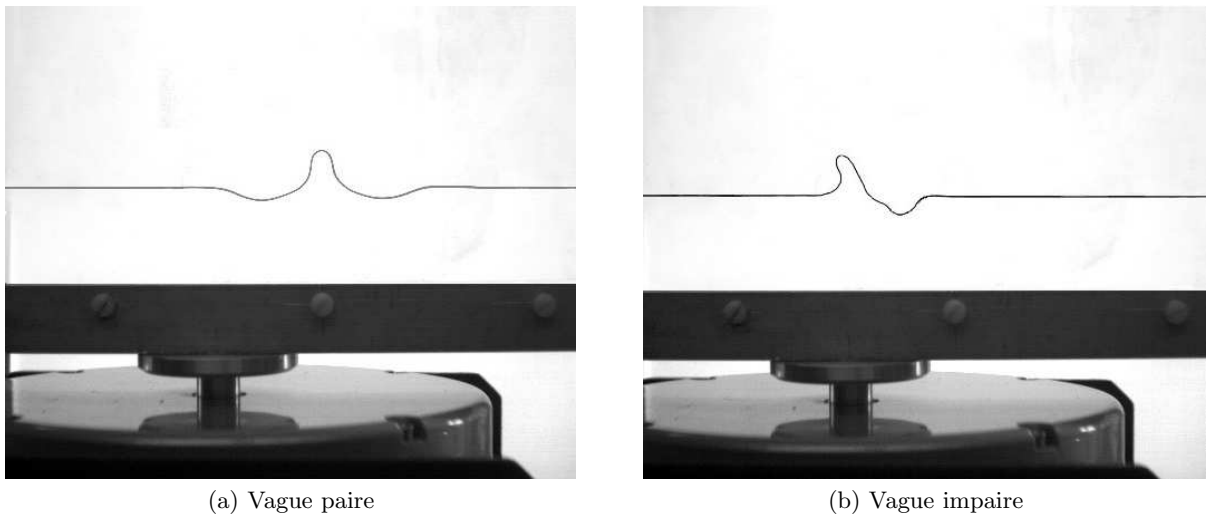


FIG. 2. Photographies des deux vagues solitaires stationnaires.

4 équations modèles

Plusieurs types d'équations aux amplitudes, telle que l'équation de Schrödinger Non-Linéaire supplémentée d'un terme de forçage et d'un terme de dissipation [16,17] ou l'équation de Swift–Hohenberg à coefficients complexes [18,19] ont été proposés pour décrire des ondes stationnaires localisées. De ces modélisations théoriques il ressort que l'ingrédient indispensable pour obtenir une telle localisation est l'existence d'une hystérésis. A ce propos il nous apparaît important de souligner que les équations aux amplitudes sont bien adaptées pour décrire des ondes sinusoidales de faibles amplitudes, celles-ci variant lentement dans l'espace. Elles sont donc pertinentes pour décrire des solitons- enveloppes. Par contre, dans le cas présent, l'extension spatiale totale des 'breathers' observés se limite à quelques tailles d'arche. Il ne s'agit donc pas de solitons-enveloppes, et l'équation de Schrödinger Non-Linéaire apparaît ici inadaptée. Néanmoins, l'écriture d'une équation aux amplitudes présente ici l'intérêt de prédire les paramètres de l'hystérésis observée pour l'apparition ou la disparition des ondes de surface stationnaires et spatialement périodiques.

En géométrie de Hele-Shaw, il est pratique d'introduire la vitesse \bar{u} des particules de fluide moyennée dans l'épaisseur qui sépare les parois frontales (d'une manière générale, nous noterons avec une sur-barre les paramètres moyennés sur cette intervalle). Rappelons que cette distance ℓ est très petite comparée à

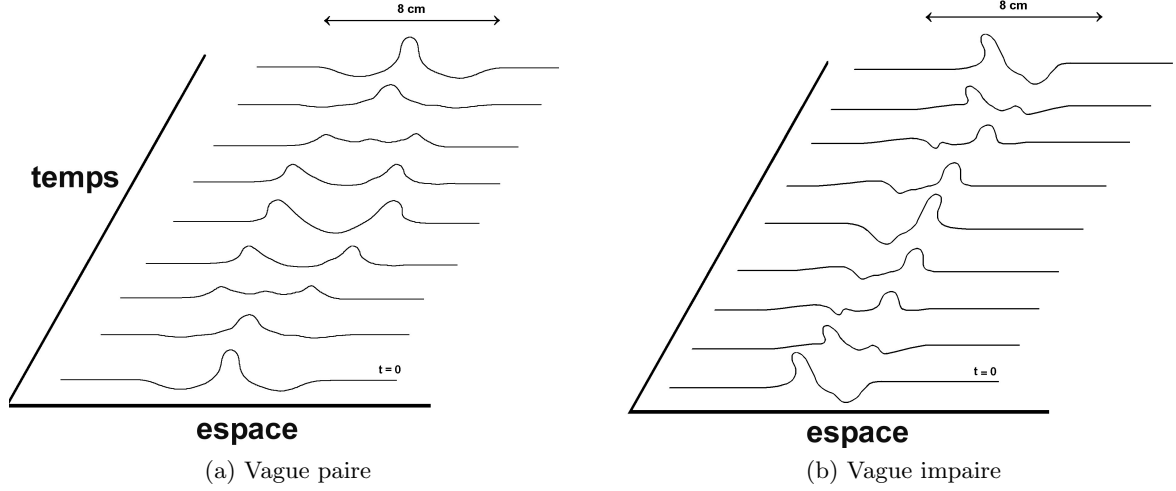


FIG. 3. Evolution temporelle des profils des vagues solitaires stationnaires durant une période complète de leurs oscillations.

la profondeur h de la couche de fluide, à la longueur d'onde typique des vagues spatialement étendues, et à la longueur totale de la cellule. La moyenne $\bar{\mathbf{u}}$ est calculée en supposant que le profil de vitesse est parabolique dans l'intervalle ℓ (profil de Poiseuille). On en déduit aisément l'équation de Navier-Stokes écrite à deux dimensions pour le champ de vitesse moyennée $\bar{\mathbf{u}}$

$$\bar{\mathbf{u}}_t + \frac{6}{5}(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\rho^{-1} \nabla \bar{P} - \tilde{\mathbf{g}} - \gamma \bar{\mathbf{u}}, \quad (1)$$

où $\gamma = 12\nu/\ell^2$ est la « viscosité externe de Rayleigh », et $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}[1 - F \cos(\Omega t)]$ est l'accélération de la pesanteur ressentie par le liquide dans le référentiel lié à la cuve

Dans l'équation (1), le terme habituel de diffusion visqueuse $\nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}}$ apparaît négligeable comparé à $\gamma \bar{\mathbf{u}}$. En effet, l'essentiel de la dissipation visqueuse se produit dans la direction normale aux parois, et pour les longueurs d'onde étudiées, le temps d'atténuation γ^{-1} est environ 120 fois plus faible que le temps de diffusion visqueuse $(\nu k^2)^{-1}$ associé au terme $\nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}}$. On peut aussi remarquer que pour cette gamme de fréquence où apparaissent ces 'breathers', le temps d'atténuation $\gamma^{-1} \simeq 0.08$ s imposé par la géométrie de Hele-Shaw se compare à la fréquence de forçage paramétrique $\Omega/2\pi$ (typiquement 0.1 s). Ceci signifie que toute vorticité initiale aura disparu au bout d'un temps γ^{-1} . On peut donc légitimement supposer l'écoulement irrotationnel en régime permanent, et considérer que le champ de vitesse $\bar{\mathbf{u}}$ dérive d'un potentiel ϕ dans l'approximation d'incompressibilité. On peut alors intégrer l'équation (1) et la récrire sous la forme d'une équation de Bernouilli dynamique :

$$\phi_t + \frac{3}{5}(\nabla \phi)^2 + \gamma \phi + \tilde{g} \eta = 0 \quad \text{pour } y = \eta, \quad (2)$$

Les autres équations qui ferment le problème consistent en l'équation de Laplace pour le potentiel des vitesses, et les conditions aux limites à la surface libre du liquide et au fond de la cellule

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad \text{pour } -h \leq y \leq \eta, \quad (3)$$

$$\phi_y = 0 \quad \text{pour } y = -h, \quad (4)$$

$$\eta_t + \eta_x \phi_x - \phi_y = 0 \quad \text{pour } y = \eta, \quad (5)$$

dans lesquelles x et y sont respectivement les variables d'espaces horizontale et verticale, t est le temps, et où $y = \eta(x, t)$, $y = 0$ et $y = -h$ sont les ordonnées de la surface libre, de la surface libre au repos, et du fond (supposé plat). Nous ajoutons de plus la condition de pression nulle au niveau de la surface libre. Les effets capillaires sont négligés dans l'équation (2), car la longueur capillaire de l'eau ($\ell_c = 2.7$

mm) est ici négligeable par rapport aux longueurs d'onde des vagues excitées.

Tout d'abord, nous traitons le système d'équations (2-5) dans le cadre d'une approximation linéaire. Nous trouvons que la transformée de Fourier $\zeta(k, t)$ de la surface libre obéit à une équation de Mathieu amortie

$$\zeta_{tt} + \left[\omega_0^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 - \omega_0^2 F \cos(\Omega t) \right] \zeta = 0, \quad (6)$$

où $\omega_0^2 = gk \tanh(kh)$. Il est bien connu qu'une telle équation présente des résonances aux voisinages de $n\Omega = 2\omega_0$, n étant un entier [20]. L'équation de Mathieu a été primitivement établie par Benjamin et Ursell [21] dans le cas inviscide ($\gamma = 0$). Ultérieurement, le terme de dissipation a été rajouté de manière euristique. Dans le cas présent, le terme de dissipation est directement dérivé des équations exactes, ce qui permet la configuration de Hele-Shaw.

Il convient ensuite d'étudier les effets non-linéaires. Afin d'alléger les calculs, nous nous plaçons dans la limite de profondeur h infinie, et nous considérons un seul nombre d'onde k pour l'onde stationnaire de surface. Nous résolvons l'ensemble d'équations (2-5) via une méthode perturbative utilisant un développement multi-échelle [22]. Après quelques calculs, on obtient une équation approchée pour la surface libre écrite sous la forme $\eta(x, t) = \text{Re}\{A(t) e^{i\frac{\Omega}{2}t - i\frac{x}{4}}\} \cos(kx) + O(A^2)$, où l'amplitude $A(t)$ satisfait l'équation

$$A_t = (-\alpha_1 + i\alpha_2) A + \alpha_3 A^* - i\alpha_4 |A|^2 A, \quad (7)$$

et où l'astérisque dénote le complexe conjugué et où les α_n sont réels. On trouve $\alpha_1 = \gamma/2$, $\alpha_2 = \omega_0 - \Omega/2$, $\alpha_3 = \omega_0 F/4$ and $\alpha_4 = \omega_0 k^2/10$ avec $\omega_0^2 = gk$. Dans l'équation (7), le coefficient α_1 est relié à la dissipation visqueuse, le coefficient α_2 correspond au décalage entre la fréquence naturelle du k dans la limite des amplitudes infinitésimales et la demi-fréquence du forçage, le terme en A^* est lié à l'amplitude du forçage paramétrique, et le dernier terme correspond au phénomène non linéaire de décalage en fréquence du mode k avec l'amplitude de ce mode. L'analyse de stabilité linéaire et non-linéaire d'une équation de cette forme a été développée dans le passé par Meron [23]. Pour $\Omega > 2\omega_0$, l'instabilité conduisant à la formation d'une onde de surface est de type 'Hopf supercritique', tandis qu'elle devient sous-critique lorsque $\Omega < 2\omega_0$. Le résultat remarquable est qu'il existe un domaine de bistabilité défini pour le domaine $\Omega < 2\omega_0$, $2\gamma/\omega_0 < F < (4/\omega_0) \{[\omega_0 - (\Omega/2)]^2 + (\gamma^2/4)\}^{1/2}$ pour lequel les deux solutions (celle à surface plate ou bien celle correspondant à une vague de surface d'amplitude non-nulle vibrant avec la fréquence $\Omega/4\pi$) sont simultanément stables. Comme il a été suggéré dans le passé [24-26], on peut interpréter ces ondes localisées dans l'espace comme résultant de la coexistence spatiale de ces deux solutions. Par conséquent, le phénomène d'hystérésis (qui est relié à la dissipation) apparaît ici comme une condition nécessaire pour la localisation de ces vagues dissipatives et forcées. Des mécanismes très analogues ont été mis en évidence dans de nombreux autres domaines, tels l'optique non-linéaire [27], la chimie [28] ou la biologie [29].

Remerciements. Nous remercions A. Pumir pour de chaleureuses discussions.

Cette recherche a été financée partiellement par le CNRS et la région PACA

Références

1. J. WU, R. KEOLIAN & I. RUDNICK, Observation of a nonpropagating hydrodynamic soliton, *Physical Review Letters*, **52**, 1421-1424 (1984).
2. H. ARBELL & J. FINEBERG, Temporally harmonic oscillons in newtonian fluids, *Physical Review Letters*, **85**, 756-759 (2000).

3. M. FARADAY, On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **121**, 299-340 (1831).
4. J. MILES & D. HENDERSON, Parametrically forced surface waves, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **22**, 143-165 (1990).
5. M. C. CROSS & P. C. HOHENBERG, Pattern formation outside of equilibrium, *Reviews of Modern Physics*, **65**, 851-1112 (1993).
6. A. KUDROLLI & J. P. GOLLUB, Patterns and spatiotemporal chaos in parametrically forced surface waves : a systematic survey at large aspect ratio, *Physica D*, **97**, 133-154 (1996).
7. S. DOUADY & S. FAUVE, Pattern selection in Faraday instability, *Europhysics Letters*, **6**, 221-226 (1988).
8. B. CHRISTIANSEN, P. ALSTRØM & M. T. LEVINSEN, Ordered capillary-wave states : Quasicrystals, hexagons, and radial waves, *Physical Review Letters*, **68**, 2157-2160 (1992).
9. W. S. EDWARDS & S. FAUVE, Parametrically excited quasicrystalline surface waves *Physical Review E*, **47**, R788-R791 (1993).
10. J. MILES, Parametrically excited solitary waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **148**, 451-460 (1984).
11. F. SIMONELLI & J. P. GOLLUB, Surface wave mode interactions : effects of symmetry and degeneracy, *Journal of Fluid Mechanics*, **199**, 471-494 (1989).
12. S. T. MILNER, Square patterns and secondary instabilities in driven capillary waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **225**, 81-100 (1991).
13. K. KUMAR & L. S. TUCKERMAN, Parametric instability of the interface between two fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, **279**, 49-68 (1994).
14. S. FAUVE, Parametric Instabilities, in *Dynamics of Nonlinear and Disordered Systems*, G. Martinez-Meckler & T.H. Seligman, Eds., World Scientific, Singapore (1995).
15. P. CHEN & J. VINĀLS, Amplitude equation and pattern selection in Faraday waves, *Physical Review E*, **60**, 559-570 (1999).
16. M. UMEKI, Parametric dissipative nonlinear Schrödinger equation, *Journal of the Physical Society of Japan*, **60**, 146-167 (1991).
17. I. V. BARASHENKOV, E.V. ZEMLYANAYA & M. BAER, Traveling solitons in the parametrically driven nonlinear Schrödinger equation, *Physical Review E*, **64**, 016603 (2001).
18. H. SAKAGUCHI & H. R. BRAND, Stable localized squares in pattern-forming nonequilibrium systems, *Europhysics Letters*, **38**, 341 (1997) — Localized patterns for the quintic complex Swift-Hohenberg equation, *Physica D*, **117**, 95-105 (1998).
19. C. CRAWFORD & H. RIECKE, Oscillon-type structures and their interaction in a Swift-Hohenberg model, *Physica D*, **129**, 83-92 (1999).
20. M. ABRAMOWITZ & I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover (1970).
21. T. B. BENJAMIN & F. URSELL, The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **225**, 505-515 (1954).
22. A. H. NAYFEH, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons, New York (1981).
23. E. MERON, Parametric excitation of multimode dissipative systems, *Physical Review A*, **35**, 4892-4895 (1987).
24. Y. POMEAU, Front motion, metastability and subcritical bifurcations in hydrodynamics, *Physica D*, **23**, 3-11 (1986).
25. S. FAUVE & O. THUAL, Ordered capillary-wave states : Quasicrystals, hexagons, and radial waves, *Physical Review Letters*, **64**, 282-284 (1990).
26. C. ELPHICK & E. MERON, Comment on "Solitary waves generated by subcritical instabilities in dissipative systems", *Physical Review Letters*, **65**, 2476 (1990).
27. M. BRAMBILLA, L. A. LUGIATO & M. STEFANI, Formation and control of localized structures in nonlinear optical systems, *Chaos*, **6**, 368-372 (1996).
28. K. J. LEE, W.D. MCCORMICK, Q. OUYANG & H. SWINNEY, Pattern formation by interacting chemical fronts, *Science*, **261**, 192-194 (1993).
29. N. AKHMEDIEV & A. ANKIEWICZ, *Dissipative Solitons*, Springer, Berlin, Heidelberg (2005).

Modélisation par approche globale de la dynamique du blé pluvial observée par télédétection spatiale en zone semi-aride

Sylvain Mangiarotti¹, Laurent Drapeau¹, Raphael Coudret¹, & Lionel Jarlan^{1,2}

¹ CESBIO, UMR 5126 — UPS/CNRS/CNES/IRD, 18 avenue Edouard Belin, 31401 Toulouse, France

² Université Cadi Ayyad, Marrakech, Maroc

sylvain.mangiarotti@cesbio.cnes.fr

Résumé. Les mesures de télédétection spatiale basse résolution, qui offrent une bonne couverture temporelle pour l'étude des couverts végétaux à développement annuel en zones semi-arides sont utilisées ici pour tenter une modélisation de la dynamique du blé pluvial par approche globale. Un modèle tridimensionnel obtenu par cette approche est présenté et analysé.

Abstract. Remote sensing is a powerful tool for monitoring vegetation in semi-arid region. Low resolution data from satellite remote sensor, that offer a long time span, is used in the present work to model the dynamics of rainfed wheat with a global approach. A three-dimensional model obtained by this approach is presented and analysed.

1 Introduction

Comme sur l'ensemble du pourtour Sud de la Méditerranée, la production céréalière du Maroc est très largement issue de l'agriculture pluviale. La plupart des modèles utilisés à ce jour pour en modéliser la dynamique font appel à un forçage météorologique limitant toute utilisation en mode prévisionnel au regard de la faible qualité des prévisions climatiques saisonnières. Les travaux de Balaghi *et al* [2] ont montré qu'il était possible, par des approches multi-régresseurs, d'obtenir des estimations de rendements en cours de saison, en se basant à la fois sur des mesures météorologiques locales (température, précipitation) et sur une estimation spatialisée de la vigueur du couvert végétal à travers l'indice de végétation NDVI mesuré par satellite.

Plus récemment, les travaux de Jarlan *et al* [4] ont montré que l'ajout d'une information sur la dynamique atmosphérique et océanique à grande échelle tel que l'indice climatique NAO (Oscillation Nord Atlantique) qui procure une information au cours du temps sur l'état du système climatologique régional, pourrait permettre une prévision plus précoce de l'activité du couvert végétal. Parallèlement, l'analyse nonlinéaire de dynamique de la végétation en zone semi-aride sahélienne a révélé des dynamiques de petite dimension [5]. Bien qu'appliqué à un contexte climatique différent, ce travail encourage l'exploration de la piste déterministe des systèmes dynamiques instables de petites dimensions. Contrairement aux approches mécanistes, l'approche globale ne vise pas à modéliser les différentes composantes du système et leurs interactions, mais à obtenir un modèle du comportement du système dans sa globalité. Cette approche a été appliquée avec succès à un certain nombre de cas synthétiques et expérimentaux [6].

Son applicabilité n'a toutefois rien de systématique et dépend en particulier de la dynamique du milieu à l'étude qui doit présenter une composante déterministe et de l'observabilité du système au travers de la variable mesurée. A ce jour, la modélisation globale n'a pu être appliquée qu'à peu de milieux naturels ou environnementaux, tels le cycle des taches solaires [7], ou la population de Lynx du Canada [8].

Nous proposons dans ce travail d'explorer la piste déterministe des systèmes dynamiques instables de petites dimensions pour l'analyse de la dynamique du blé pluvial sur la province de Settat au Maroc

2 Données et prétraitements

Les indices de la végétation issus de la télédétection spatiale tirent parti du contraste de réflectance des surfaces terrestres naturelles dans le rouge et l'infrarouge, pour nous renseigner sur l'activité pho-

tosynthétique. Ils constituent une information unique pour le suivi du cycle de la végétation en zone semi-aride et sont utilisés ici comme variable d'observation du blé pluvial sur la province de Settat (Maroc) afin de remonter à la dynamique du couvert végétal.

Les indices de végétation NDVI utilisés pour cette étude proviennent du jeu de données GIMMS (Global Inventory Modelling and Mapping Study [9]). Ces données ont une couverture globale sur une période allant de 1982 à nos jours avec une résolution initiale de $8 \times 8 \text{ km}^2$. Les données sont synthétisées sur 10 jours par sélection des valeurs maximales afin de réduire les effets de perturbation atmosphérique et d'angle de visée. D'autres corrections sont également appliquées (prise en compte de la dégradation des capteurs et de perturbations associées aux aérosols).

La présente étude concerne la province de Settat au Maroc où le blé pluvial est la culture dominante. Une série temporelle d'indice de la végétation a été produite sur l'ensemble de la province par un simple calcul de moyenne, après avoir sélectionné les zones emblavées grâce à une carte d'occupation du sol (GLC2000 [3]). Une série temporelle unique représentant une surface de 9750 km^2 est ainsi obtenue. Le niveau d'erreur associé à ces données peut être estimé entre 10% et 15%. Un filtrage de type Savitzky-Golay a été appliqué avec une fenêtre de 9 décades ainsi qu'un ré-échantillonnage journalier, afin de faciliter la mise en place d'un modèle global [6]. La série temporelle résultant de ce prétraitement montre un cycle saisonnier très marqué associé à la croissance et à la sénescence du blé Fig. 1.

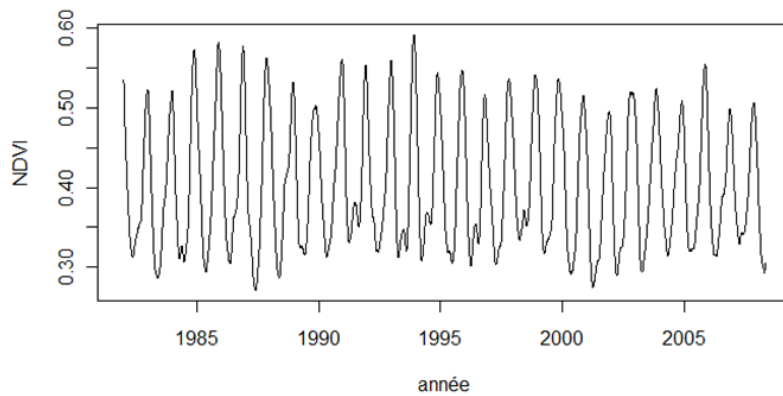


FIG. 1. Série temporelle $x(t)$ d'indice de la végétation NDVI agrégé (province de Settat, Maroc).

3 Modélisation globale : approche, outils et démarche

L'objet du présent travail est d'obtenir un jeu d'équation différentielle ordinaire capable de reproduire la dynamique du blé pluvial, telle qu'observée par télédétection spatiale, via les indices de la végétation NDVI. La formulation du modèle est tirée de Gouesbet [10] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = X_3 \\ \dots \\ \dot{X}_n = P(x_1, X_2, \dots, X_n) \end{cases} \quad (1)$$

dans sa formulation polynomiale. $P(x_1, X_2, \dots, X_n)$ est donc un polynôme à identifier, x_1 est la série temporelle initiale des indices NDVI agrégés, et $X_2 \dots X_n$ sont les dérivées successives de x_1 .

D'un point de vue pratique, le problème tient à l'identification de la structure et du paramétrage de ce polynôme. Deux algorithmes complémentaires, PoMoS & GloMo, ont été développés à cet effet. PoMoS

(pour Polynomial Model Search) est un module d'identification de termes par une méthode d'optimisation où les critères d'optimalité utilisés sont de type AIC [1], visant à concilier parcimonie du modèle (minimisation du nombre de paramètres) et adéquation entre simulation et observation (minimisation de l'erreur). Le second module, GloMo (pour Global Modelling) est destiné à identifier le paramétrage du polynôme. L'approche utilisée est basée sur une procédure de type Gramm-Schmidt, de bonne robustesse en contexte bruité [11]. Chacun des algorithmes a fait l'objet d'un dépôt [12] au Comprehensive R Archive Network.

4 Résultats et discussions

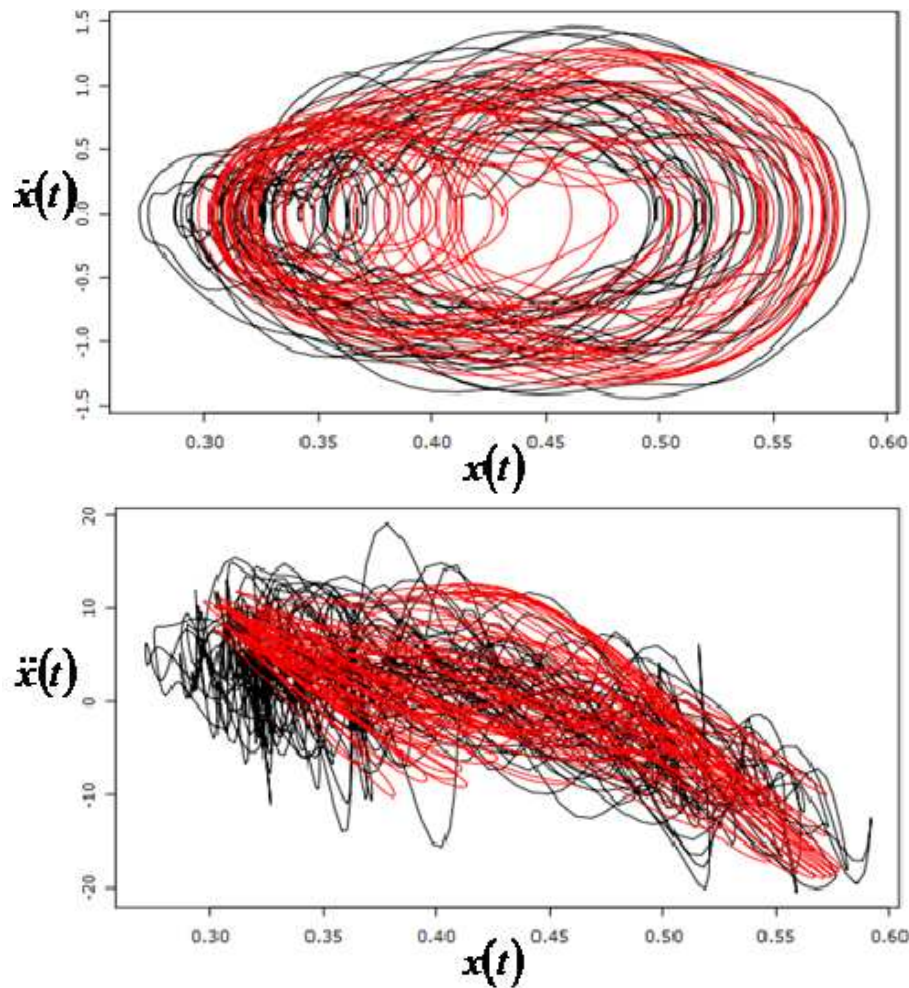


FIG. 2. Projections des portraits de phase tirés des données (noir) et du modèle (rouge).

Un modèle tridimensionnel non trivial a pu être obtenu avec un polynôme de degré 3. Son portrait de phase (Fig. 2) est en bonne cohérence avec le portrait issu des données. Il présente une densité non nulle sur l'intérieur de la trajectoire obtenue à partir des données observées. Ce modèle permet d'atteindre efficacement les valeurs extrêmes de NDVI observées avant récolte (les pics annuels, cf Fig. 1). Pour caractériser le régime du modèle, les exposants de Lyapunov ont été estimés en utilisant les approches de Wolf *et al* [13] et de Grond *et al* [14], donnant un premier exposant nettement positif (respectivement 5,3 et 2,5), caractéristique d'un régime chaotique.

L'application de premier retour du modèle (Fig. 3) présente trois branches : (a) une branche dense et très régulière et (b) et (c) deux branches concurrentes fortement bruitées. La branche (a) correspond aux valeurs fortes de NDVI qu'elle tend à réduire tout en conservant sur cette même branche lorsque les valeurs sont supérieures à 0,53 ; ou à les transporter sur les branches (b) ou (c) en deçà. Aucune structure claire n'apparaît pour privilégier le passage vers (b) plutôt que vers (c), si ce n'est une densité plus forte de la branche (c). Le passage par la branche (c) conduit alors systématiquement à un retour à la branche (a). Au contraire, un passage à la branche (b) conduit à maintenir l'indétermination entre branches (b) et (c).

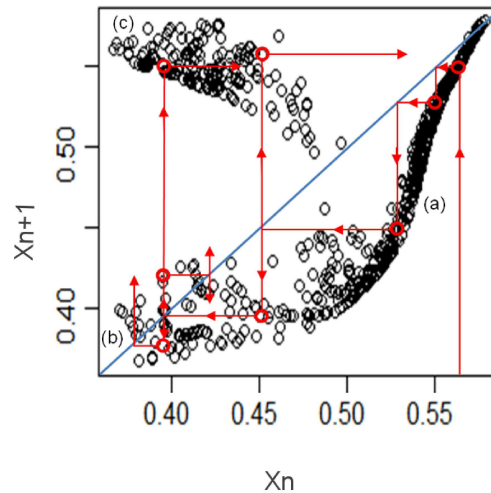


FIG. 3. Application de premier retour tirée du modèle global ; les flèches indiquent le comportement circulaire.

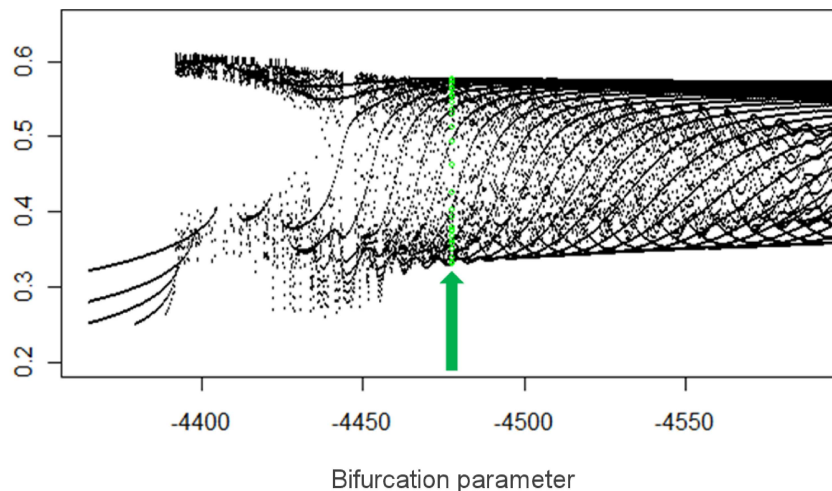


FIG. 4. Diagramme de bifurcations obtenu à partir du coefficient correspondant au terme polynomial X_2 .

Un diagramme de bifurcation a été reconstruit en faisant varier de $\pm 2,5\%$, le coefficient correspondant au terme X_2 (Fig. 4). Ce diagramme fait apparaître des comportements complexes. Le régime correspondant au signal observé montre une densité des valeurs maximales réparties sur une zone étale sans

structure apparente forte, avec des régimes environnants ne présentant pas de différence forte (pas de bifurcation immédiatement à proximité, niveau des valeurs extrémales invariantes). Des non-stationnarités dynamiques pourraient toutefois conduire à une certaine variabilité concernant la distribution des maximums annuels. Pour approfondir cette question, il serait nécessaire d'identifier l'intervalle paramétrique qui pourrait être concerné par de telles non-stationnarités, et d'analyser les distributions de façons quantitatives.

5 Discussion et conclusion

La modélisation de la dynamique du blé pluvial en zone semi-aride par approche globale, à partir d'indices de la végétation obtenus par télédétection spatiale permet d'obtenir un modèle chaotique tridimensionnel. C'est un argument fort du comportement déterministe et chaotique sous-jacent. L'étude de l'application de premier retour permet d'autre part de mettre en évidence un cycle bien identifiable (bien que faiblement prévisible). L'obtention d'un diagramme de bifurcation doit également permettre d'envisager l'analyse d'éventuelles non stationnarités.

Remerciements

Ce travail de recherche est financé par l'Institut de Recherche pour le Développement. Nous tenons à remercier C. Letellier pour ses conseils encourageants.

Références

1. AKAIKE H, A new look at the statistical model identification, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **16** (6), 716-723 (1974).
2. R. BALAGHI, B. TYCHON, H. EERENS & M. JLIBENE, Empirical regression models using NDVI, rainfall and temperature data for the early prediction of wheat grain yields in Morocco, *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, **10** (4), 438-452 (2008).
3. *Global Land Cover 2000 database* (GLC2000, 2000), European Commission, Joint Research Centre, <http://bioval.jrc.ec.europa.eu/> (2003).
4. L. JARLAN, F. DRIOUECH, Y.M. TOURRE, B. DUCHEMIN, J. ABAOUI, M. LE PAGE, H. KHARROU, A. OULDBBA, A. MOKSSIT & G. CHEHBOUNI, Seasonal and interannual vegetation dynamics over Morocco through the NDVI/AVHRR from 1982 to 2008 : linkages with climate signals and potential for seasonal prediction, *soumis*.
5. S. MANGIAROTTI, P. MAZZEGA, E. MOUGIN, & P. HIERNAUX, The vegetation cycle in West Africa from AVHRR-NDVI data : Horizons of predictability *versus* spatial scales, *Remote Sensing of Environment*, **114** (9), 2036-2047 (2010).
6. C. LETELLIER, L.A. AGUIRRE & U.S. FREITAS, Frequently asked questions about global modeling, *Chaos*, **19**, 023103 (2009).
7. C. LETELLIER, L.A. AGUIRRE, J. MAQUET & R. GILMORE, Evidence for low dimensional chaos in the sunspot cycles, *Astronomy & Astrophysics*, **449** (1), 379-387 (2006).
8. J. MAQUET, C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Global models from the Canadian Lynx cycles as a first evidence for chaos in real ecosystems, *Journal of Mathematical Biology*, **55** (1), 21-39 (2007).
9. C. J. TUCKER, J. E. PINZON, M. E. BROWN, D. A. SLAYBACK, E. W. PAK, R. MAHONEY, E. F. VERMOTE & N. E. SALEOUS, An extended AVHRR 8-km NDVI dataset compatible with MODIS and SPOT vegetation NDVI data, *International Journal of Remote Sensing*, **26** (20), 4485-4498 (2005).
10. G. GOUESBET, Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series, *Physical Review A*, **43** (10), 5321-5331 (1991).
11. G. GOUESBET & C. LETELLIER, Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets, *Physical Review E*, **49** (6), 4955-4972 (1994).
12. S. MANGIAROTTI, R. COUDRET & L. DRAPEAU, Package 'PoMoS', <http://www.cesbio.ups-tlse.fr> ou <http://cran.r-project.org> (2010).
13. A. WOLF, J. B. SWIFT, H. L. SWINNEY & J. A. VASTANO, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D*, **16**, 285-317 (1985).
14. F. GROND, H. H. DIEBNER, S. SAHLE, A. MATHIAS, S. FISCHER & O. E. RÖSSLER, A robust, locally interpretable algorithm for Lyapunov exponents, *Chaos, Solitons & Fractals*, **16**, 841-852 (2003).

Identification des paramètres du modèle de Lorenz en contexte perturbé, par une approche de stratégie d'évolution

Sylvain Mangiarotti¹ & Marc Schoenauer²

¹ CESBIO UMR 5126, Observatoire Midi-Pyrénées, 18 Av. Edouard Belin, 31401 Toulouse, France

² INRIA Saclay Ile-de-France, LRI, Université PARIS Sud, 91405 Orsay cedex, France

sylvain.mangiarotti@cesbio.cnes.fr

Résumé. Un algorithme de stratégie d'évolution est testé à l'identification d'un modèle chaotique de petite dimension. Le modèle de Lorenz est pris comme banc d'essai. La structure du modèle est supposée connue et la variable x est prise comme seule source d'information du système. Différentes stratégies d'identification sont considérées, basées sur une optimisation directe ou adaptative et en appliquant (ou non) un ajustement de trajectoire par assimilation de données. Les approches sont comparées en termes de robustesse au bruit. Les résultats sont analysés en fonction du type de perturbation appliqué (bruits additifs, multiplicatifs ou combinés) et de la taille des séries utilisées en entrée.

Abstract. An Evolution Strategy algorithm is tested for the identification of a chaotic system of low dimension. The Lorenz model is selected as bench mark. The structure of the model is assumed to be known and the x variable is taken as single source of information. Several approaches are considered based on direct or adaptative optimization, and applying (or not) simple data assimilation scheme. The comparison of the approaches is based on their robustness to noise. Results are analysed depending on the type of perturbation applied (additive and/or multiplicative noises) and on the size of the time series used as input.

1 Introduction

Les premiers travaux d'identification des systèmes chaotiques par approche par synchronisation sont issus des travaux de Pecora & Carroll [1]. Ces travaux ont ouvert la voie à de nombreux développements ainsi qu'à des applications pratiques, telle la transmission sécurisée de données. A ce jour, les algorithmes de stratégie d'évolution n'ont encore été que peu appliqués à la synchronisation de systèmes chaotiques. Ces algorithmes constituent pourtant des outils d'optimisation puissants dont la capacité reconnue à d'autres contextes mérite d'être confrontée à un tel contexte.

La difficulté spécifique à l'identification du paramétrage en contexte chaotique provient des non linéarités du système et à la sensibilité aux conditions initiales qui en découle. Cette difficulté est accrue lorsque le système subi des perturbations stochastiques, qui tendent à modifier perpétuellement la trajectoire (qui divergent de façon exponentielle), et à en effacer par la même les conditions initiales.

La boucle de rétroaction utilisée dans les approches par synchronisation permet d'ajuster les paramètres du modèle en cours d'identification en se basant sur la minimisation de la distance entre sortie du modèle maître et simulation du modèle esclave. Dans le présent contexte, le modèle maître est représenté par une seule série temporelle, et le bouclage revient à une application itérative de l'algorithme d'évolution qui vise à identifier un paramétrage optimal du modèle en minimisant la distance entre simulation et série temporelle originale. Si l'approche proposée ici ne permet pas d'assurer une identification en temps réel, elle permet en revanche de multiplier les comparaisons en générant itérativement non pas une simulation mais un ensemble de simulations, qui vont pouvoir être optimisées par itération.

Le modèle de Lorenz a été choisi pour effectuer cette étude. On suppose la structure des équations connue, et seuls le paramétrage du modèle et ses conditions initiales sont à identifier.

2 Modèle

Le modèle de Lorenz est utilisé avec des perturbations appliquées à chacune de ses trois variables. Il peut être formulé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_d = \sigma (y_d - x_d) + \varepsilon_x \\ \dot{y}_d = (r - z_d) x_d - y_d + \varepsilon_y \\ \dot{z}_d = x_d y_d - \beta z_d + \varepsilon_z \end{cases} \quad (1)$$

où σ , ρ et β sont les paramètres du modèle et où $\varepsilon_x(t)$, $\varepsilon_y(t)$ et $\varepsilon_z(t)$ constituent un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle. L'intégration est assurée par une méthode de type Runge-Kutta avec un pas de temps $\Delta t = 0.01$. Les perturbations sont appliquées après chaque pas d'intégration, à chacune des trois variables x , y et z , en ajoutant un nombre aléatoire générée à l'aide d'un bruit Gaussien de distribution $N(0, \alpha_d^2 \mu_2)$ avec μ_2 la variance de x , y and z respectivement et α_d un coefficient multiplicatif variant de 0 à 1. Les paramètres du modèle original ont été fixés tels que $(\sigma, \rho, \beta) = (10., 28., 8/3)$, et les conditions initiales prises telles que : $(x_0, y_0, z_0) = (-4.62, -6.61, 17.94)$, correspondant à un régime permanent.

L'influence du bruit additif a également été considérée en ajoutant a posteriori un bruit Gaussien à la série x issue de 1, comme suit :

$$x_s(t) = x(t) + \eta_x(t) \quad (2)$$

où η_x sont des nombres aléatoires suivant une distribution $N(0, \alpha_s^2 \mu_2)$ avec μ_2 , la variance de x et α_s un coefficient multiplicatif allant de 0 to 1. En pratique, la série d'observation ^{obs}x est une série synthétique utilisée pour identifier les paramètres du modèle original qui est obtenue de l'équation 2, après sous-échantillonnage. Le pas de temps du signal sous-échantillonné est pris tel que $\Delta T = 0.05$ u.t..

3 Approches d'identification

Les approches d'identification utilisées dans ce travail prennent toutes appui sur un algorithme de stratégie d'évolution de type *Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy* (CMA-ES). Les algorithmes de stratégie d'évolution sont des algorithmes d'optimisation qui appartiennent à la famille des algorithmes métaheuristiques inspirés de la théorie de l'évolution [2,3]. Ils se distinguent des algorithmes génétiques par une optimisation simultanée des paramètres de l'algorithme afin de diriger à la fois la sélection et l'évolution des règles d'exploration de la fonction objectif.

L'algorithme CMA-ES utilisé ici [4] est reconnu comme l'un des plus performants algorithmes d'optimisation globale, comme en témoignent les résultats de la compétition à IEEE-CEC 2005 (par comparaison avec d'autres algorithmes d'optimisation stochastique) et des deux récents ateliers à ACM-GECCO 2009 et 2010 (par comparaison avec l'ensemble des méthodes d'optimisation globale voir [5]). Par ailleurs, CMA-ES, comme tous les algorithmes évolutionnaires qui n'utilisent que des comparaisons de valeurs de la fonction objectif (et non pas les valeurs elles-mêmes) est par nature particulièrement robuste au bruit, et a été encore récemment amélioré dans ce domaine [6,7]. Enfin, des améliorations substantielles des performances de l'algorithme dans le cadre parallèle ont été obtenues en modifiant le paramétrage par défaut dans le cas de grandes populations [8], le rendant également incontournable dans le cas d'optimisation de systèmes couteux en temps de calcul. L'algorithme CMA-ES est ainsi de plus en plus utilisé dans des applications scientifiques et industrielles. Un exemple de contrôle d'un système industriel complexe est donné dans [9].

L'une des stratégies efficaces utilisée pour identifier les systèmes chaotiques consiste à commencer l'identification en partant d'une série temporelle de taille réduite et à étendre progressivement sa taille en ajustant progressivement l'estimation des paramètres. Dans le présent travail, cet élément d'exploration de la fonction objectif est testé dans un mode adaptatif où la taille de la série temporelle est ajustée selon l'horizon de prévisibilité du modèle (Fig. 1).

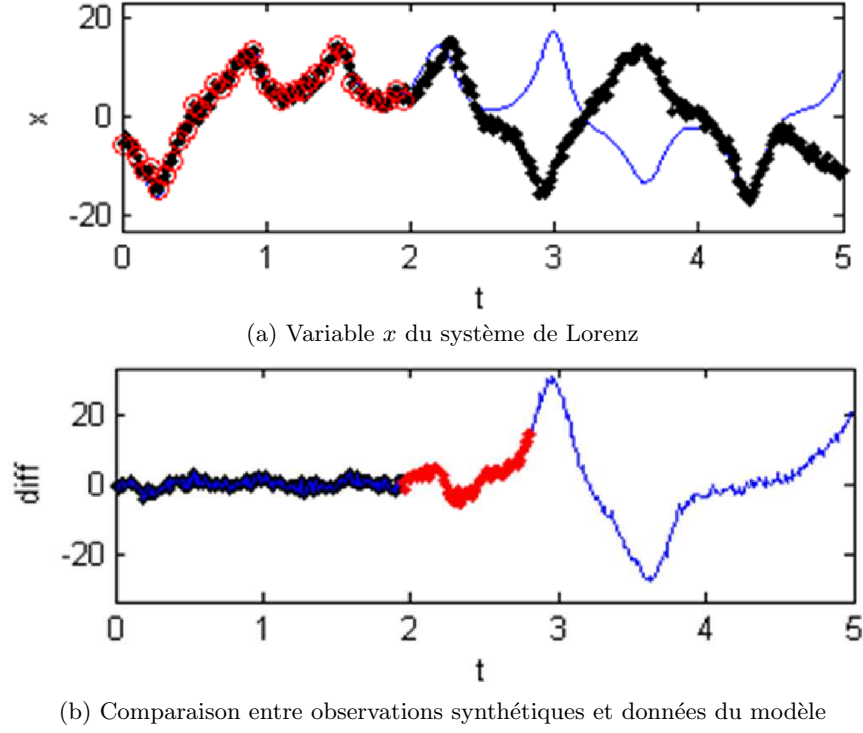


FIG. 1. Variable x du système de Lorenz (a) : la série d'observation synthétique (losanges noirs) obtenue par intégration du modèle de Lorenz perturbé avec un bruit multiplicatif de 0,25%, et dégradée. L'échantillon utilisé pour l'identification y est superposé (cercles gris ou rouges). La trajectoire simulée à partir du dernier modèle identifié est également tracé (ligne fine). L'approche basée sur l'assimilation de données sans application de l'identification est utilisée. La différence entre observations synthétiques et simulation par le modèle identifié sont également présentés (b) : sur la période au cours de laquelle est effectuée l'identification (losanges noirs), et sur la période complète (ligne bleue). La période pour laquelle la prévision peut être considérée comme satisfaisante (erreur inférieure à 50%) est représentée par des losanges gris ou rouges.

La fonction objectif est définie à partir de la distance quadratique entre simulation \hat{x} et la série d'observation ^{obs}x (série issue de l'intégration du système original perturbé) :

$$J_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{x}_i - ^{obs}x_i)^2 \quad (3)$$

L'algorithme d'optimisation est utilisé pour minimiser cette fonction, conduisant à une valeur J_x^* minimale, à laquelle correspondent une estimation 'optimale' des paramètres du modèle et des conditions initiales associées.

Un second élément visant à améliorer la capacité d'identification du modèle original est testé en adjoignant à l'algorithme d'optimisation un schéma d'assimilation de données simplifié. L'assimilation de données consiste à injecter de l'information dans un modèle au cours de son intégration afin d'ajuster sa trajectoire. De part sa capacité à compenser la perte d'information, ce type d'approche a montré une grande efficacité pour l'amélioration de la connaissance et de la prévision des systèmes de grande dimension. Un certain nombre d'études a permis d'en montrer le potentiel en contexte de plus petite dimension, mais chaotique [10]. Pour le présent contexte, l'assimilation de données est envisagée via un schéma volontairement simpliste, afin de ne pas croiser l'apport de l'assimilation de donnée avec l'apport de l'algorithme d'optimisation. Deux schémas sont considérés, consistants en une mise à jour

directe de l'état du système sur la base de la série temporelle d'observation. Le premier schéma (DA-1) fait l'hypothèse d'une observation idéale par rapport à la prévision du modèle; le second schéma (DA-2) donne le même poids aux observations et aux prévisions. Le cas sans assimilation (noDA) revient à donner tout le poids au modèle.

Cinq approches différentes d'identification sont mises en place. Pour chacune de ces approches, une série courte (de $N = 40$ valeurs) et une série longue (de $N = 150$ valeurs) ont été utilisées pour étudier leur sensibilité aux bruits additif et multiplicatif lors de leur mise en oeuvre. Une gamme de perturbation allant jusqu'à 25% a été appliquée pour les tests. Une illustration de simulation est fournie en Fig. 2.

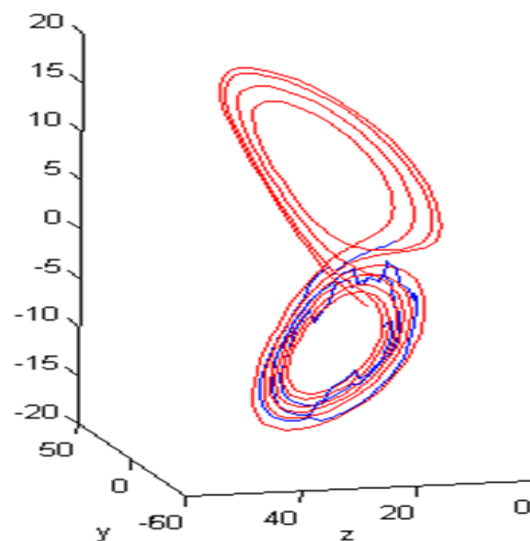


FIG. 2. Portraits de phase de la série d'observation synthétique originale (ligne foncée) et la simulation-prévision tirée du modèle identifié (ligne grise). La série de 40 données qui est utilisée comme source d'information pour cet exemple permet de décrire une des deux boucles de l'attracteur de Lorenz. La série est dégradée par un bruit additif de 4%.

4 Résultats et discussion

Le comparatif entre les différentes approches est présenté ici en terme de robustesse, définie à partir du niveau de bruit maximum supporté pour l'identification des paramètres. Deux tailles de série temporelle sont considérées, en condition de perturbation additive, multiplicative ou combinées. L'approche directe montre une très grande robustesse pour les séries de petite taille, et pour les deux types de perturbation, supportant jusqu'à 25% de bruit additif et 0.25% de bruit multiplicatif, que ceux-ci soient ou ne soient pas combinés. L'efficacité de cette approche s'effondre toutefois en partant de la série longue en raison de la dimension et de la complexité accrues de l'espace des paramètres à explorer, justifiant le développement d'approches complémentaires, telle que l'exploration adaptative.

L'approche adaptative montre une meilleure robustesse face à un jeu de données de plus grande taille mais reste médiocre, dégradant en particulier les résultats issus du petit jeu de données. L'approche n'en est pas moins intéressante mais sous optimale, appelant à des adaptations à effectuer en synergie avec les paramètres d'optimisation du code.

Les approches combinant assimilation de données et identification adaptative dégradent elles-aussi la qualité des estimations obtenues à partir du petit jeu de données, mais montrent en revanche une robustesse persistante quand on augmente la taille de la série temporelle. Les scores atteignent 0.25% pour

le bruit additif et 0.04% pour le bruit multiplicatif. Les différences résultant des schémas d'assimilation n'apparaissent pas significativement.

Pour finir, l'approche basée sur l'assimilation de données sans application de l'identification adaptative, montrent des résultats beaucoup plus convaincants, quelle que soit la combinaison de bruit appliquée, atteignant une robustesse pouvant aller jusqu'à 25% de bruit additif, et 0.25% de bruit multiplicatif.

5 Conclusions

Les capacités de l'algorithme CMA-ES sont testées pour l'identification d'un système chaotique de petite dimension. L'algorithme est appliqué soit de manière directe, soit combiné à une approche adaptative en adaptant la taille de la série d'entrée en fonction des capacités prédictives du modèle, soit combiné à des schémas d'assimilation de données visant à réintroduire l'information dans le modèle cours de son intégration. Les schémas d'assimilation de données sont volontairement choisis extrêmement simples. Cinq approches sont utilisées et comparées en termes de robustesse au bruit en partant d'une série de petite taille (40 données) ou de taille plus grande (150 données).

La taille de la série temporelle utilisée en entrée montre une influence importante sur la robustesse pour plusieurs des approches. Les approches les plus robustes permettent de supporter jusqu'à 25% de bruit additif et 0.25% de bruit dynamique. En contexte de série temporelle courte ($N = 40$ données), les meilleurs résultats sont obtenus par une application directe de l'algorithme d'optimisation. Pour des séries plus longues ($N = 150$), il est nécessaire de combiner à l'algorithme d'autres approches. L'approche adaptative basée sur l'exploration progressive de la série fonctionne mais semble nécessiter l'adaptation de la taille de la série d'entrée en synergie avec l'ajustement des paramètres de l'algorithme d'optimisation. L'utilisation de schémas d'assimilation de données montre en revanche une très bonne robustesse partant de séries temporelles de grande tailles ($N = 150$), avec des résultats similaires aux meilleurs résultats obtenus avec une séries courte.

Remerciements

L'algorithme CMA-ES utilisé ici est issu du code de Nikolaus Hansen (équipe TAO de l'INRIA-Saclay), dans une version légèrement adaptée, <http://www.lri.fr/hansen/>. Cette étude a été financée par l'Institut de Recherche pour le Développement (IRD).

Références

1. L. M. PECORA & T. L. CARROL, Synchronization in chaotic systems, *Physical Review Letters*, **64** (8), 821-824 (1990).
2. I. RECHENBERG, *Evolution strategie : Optimierung technischer systeme nach prinzipien des biologischen evolution*, Stuttgart : Fromman-Holzboog Verlag (1973).
3. M. SCHOENAUER, *Evolutionary computation and applications at Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique*, Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris XI (Orsay), pp. 69 (1997).
4. N. HANSEN, S. D. MÜLLER & P. KOUMOUTSAKOS, Reducing the time complexity of the derandomized evolution strategy with covariance matrix adaptation (CMA-ES), *Evolutionary Computation*, **11** (1), 1-18 (2003).
5. N. HANSEN, A. AUGER, R. ROS, S. FINCK & P. POSIK, Comparing results of 31 algorithms from the black-box optimization benchmarking BBOB-2009, In *Proceedings of the 12th annual conference companion on Genetic and evolutionary computation* (GECCO'10), Association for Computing Machinery, pp. 1689-1696 (2010).
6. M. JEBALIA, A. AUGER & N. HANSEN, Log-linear convergence and divergence of the scale-invariant (1+1)-ES in noisy environments, In : *Algorithmica*, Springer (2010).
7. D. BROCKHOFF, A. AUGER, N. HANSEN, D. V. ARNOLD & T. HOHM, Mirrored sampling and sequential selection for evolution strategies, *Lecture Notes in Computer Science*, **6238**, 11-21 (2011).
8. M. JEBALIA & A. AUGER, Log-linear convergence of the scale-invariant ES and optimal for intermediate recombination for large population sizes, *Lecture Notes in Computer Science*, **6238**, 52-61 (2011).
9. N. HANSEN, A. NIEDERBERGER, L. GUZZELLA & K. PETROS, A method for handling uncertainty in evolutionary optimization with an application to feedback control of combustion, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, **13** (1), 180-197 (2009).
10. R. N. MILLER, E. F. CARTER JR. & S. T. BLUE, Data assimilation into nonlinear stochastic models, *Tellus A*, **51**, 167-194 (1999).

Dynamique intégrro-différentielle en longueur d'onde optique, à retards multiples, pour le « Reservoir Computing »

Romain Martinenghi¹, Sergei Rybalko¹, Lennert Appeltant², Guy Van der Sand², Jan Danckaert², Maxime Jacquot¹, Yanne Chembo¹, & Laurent Larger¹

¹ FEMTO-ST, UMR CNRS 6174, Université de Franche-Comté, 25030 Besançon Cedex, France

² Applied Physics Research Group (APHY), Vrije Universiteit Brussel, Pleinlaan 2, 1050 Brussels, Belgique
laurent.larger@univ-fcomte.fr

Résumé. Les calculateurs du type Reservoir Computing (RC) se rapportent à une nouvelle discipline, visant à étudier et réaliser des unités de calcul basées sur des réseaux de neurones artificiels. Leurs principes s'inspirent du fonctionnement des neurones biologiques, et plus généralement du cerveau. Le projet Européen PHOCUS (towards a PHOtonic liquid state machine based on delay-CoUpled Systems) a pour objectif la démonstration physique (en photonique) du Reservoir Computing, en faisant intervenir de manière originale la complexité des dynamiques non linéaires à retards. Le "Réservoir" correspondant typiquement à un réseau de neurones spatialement étendu, est ainsi remplacé par une dynamique purement temporelle, pour laquelle le retard "émule" la dimension spatiale. Dans cet article, nous exposons ces principes, leur mise en œuvre, et leurs performances sur des tests standards (NARMA).

Abstract. Reservoir Computing (RC) refers to a new discipline to study and develop calculation units based on artificial neural networks, which operation is schematically inspired by biological neurons. The European project PHOCUS (Towards a Photonic liquid state machine based on delay-coupled system) aims to study, and design for the first time, innovative photonic systems such as using Reservoir Computing, with a particular approach involving nonlinear time-delay dynamic for the Reservoir, instead of the usual complex neural network of large. In this paper, we explain how we developed a Reservoir Computing based on an opto-electronic nonlinear dynamic with multiples delays feedback, and how we tried to evaluate the computational performances through a standard test (NARMA).

1 Introduction

Les réseaux neuronaux artificiels ont vu le jour avec un article fondateur de Warren Mc Culloch et Walter Pitts publié en 1943 [5]. Cet article donna accès au premier modèle de neurones artificiels. Ils démontrèrent que ces neurones étaient capables d'effectuer de simples opérations logiques et arithmétiques tel que des fonctions booléennes simples. Très rapidement, en 1949, le psychologue et neuropsychologue canadien, Donald Hebb définit la plasticité synaptique, puis le premier modèle du perceptron simple couche. Le modèle de perceptron multicouche, qui est la base des neurones artificiels, a été développé par Franck Rosenblatt en 1957. Après une période de doute concernant les possibilités des systèmes neuronaux, jusqu'à la fin des années 90, l'engouement pour ce type de machine renaît. On voit apparaître une nouvelle famille de réseaux artificiels, plus fiables et plus performants, comme par exemple avec le RC. Ainsi, Jaeger et al. [1] proposèrent en 2001 la première approche de RC appelée « *Echo State Networks* » (ESN), puis Maass *et al.* décrivent indépendamment en 2002 une architecture similaire baptisée "Liquid State Machine" (LSM) [2], ou encore avec Steil en 2004, on voit apparaître une autre version nommée "Backpropagation decorrelation" (BPDC) [6]. Dans le cadre du projet Européen PHOCUS, nos travaux proposent de mettre en œuvre, numériquement et expérimentalement, une machine à état liquide (donc un RC) s'appuyant sur une dynamique non linéaire opto-électronique à retards multiples.

2 Du neurone biologique au neurone artificiel

Un neurone biologique peut se décomposer de manière relativement simple [7]. Il est constitué, entre autre, d'un corps cellulaire qui fait la somme des influx qui lui parviennent, d'un axone, de dendrites ou

encore de synapses. À partir de ce modèle simplifié, il est possible de déterminer le schéma de principe d'un neurone artificiel. La figure 1 montre les différentes entrées notées x_i à chacune desquelles est appliqué un poids synaptique noté w_i , toutes ces informations étant ensuite sommées, puis injectées dans une fonction de seuillage, pour donner la sortie $y = f_{NL}[\sum w_i x_i]$. L'originalité de notre travail consiste en l'émulation de ce neurone artificiel au travers d'une dynamique non linéaire purement temporelle, dont la sortie se modélise alors par une forme intégrale en produit de convolution $y = h * f_{NL} = \int h(t-\xi) f_{NL}[\sum w_i x_i(\xi)] d\xi$, $h(t)$ étant la réponse impulsionnelle d'un processus dynamique linéaire. La répartition spatiale des entrées x_i est ainsi convertie en une répartition temporelle $x(t - \delta t_i)$. La possibilité de disposer d'un grand nombre d'entrées x_i distribuées temporellement, et non spatialement, est obtenue en utilisant une mémoire temporelle significative, c'est-à-dire un retard grand devant le temps caractéristique rapide de la dynamique décrite par $h(t)$.

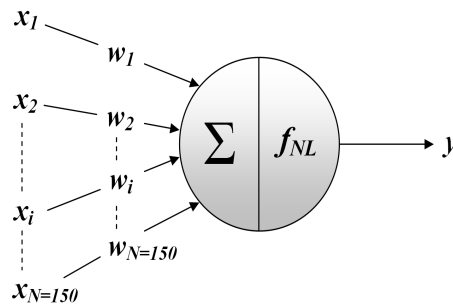


FIG. 1. Schéma de principe d'un neurone artificiel.

3 Dynamique non linéaire opto-électronique à retard τ_D

La mise œuvre expérimentale de notre neurone artificiel émulé par une dynamique à retard, s'est orientée naturellement par l'utilisation de principes physiques en optoélectronique permettant de réaliser une dynamique non linéaire à retard sur la variable longueur d'onde d'un laser semi-conducteur accordable [4]. Le schéma de principe est donné à la figure 2.

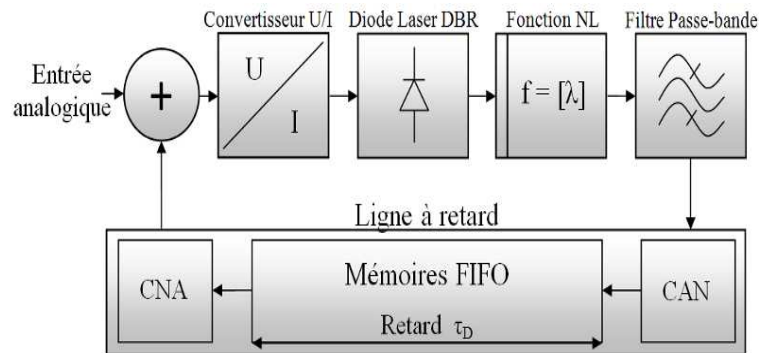


FIG. 2. Dynamique non linéaire à retard en longueur d'onde.

Le montage est constitué d'une diode laser DBR (*Distributed Bragg Reflector*) télécom à 1550nm, accordable par l'intermédiaire d'un second courant d'injection dans la zone de Bragg. Un interféromètre

biréfringent réalise la fonction non linéaire, au travers de la modulation de la condition d'interférence en fonction de la valeur absolue de la longueur d'onde. Une photodiode convertit ensuite les fluctuations d'intensité lumineuse en fluctuations électriques, qui sont filtrées électroniquement par un passe-bande définissant la réponse impulsionnelle $h(t)$ avec un temps caractéristique court τ limitant le taux d'évolution rapide par un terme différentiel, et un temps caractéristique long θ limitant la dynamique lente par un terme intégral. Le signal filtré est ensuite retardé d'une durée τ_D avant d'être appliqué sur l'électrode de commande de la longueur d'onde du laser.

Le retard est pratiquement obtenu par une taille de mémoire électronique réalisée via un circuit logique programmable de type FPGA (*Field Programmable Gate Array*). Cette solution permet une grande souplesse de contrôle de ce retard, contrairement par exemple à l'utilisation d'une longueur fixe de fibre optique. Le FPGA est programmé pour réaliser des mémoires FIFO (*First In First Out*), dont le retard τ_D est défini par le temps mis par les informations pour les traverser, au rythme de la fréquence d'horloge du circuit numérique. Des convertisseurs analogique / numérique (CAN) et numériques / analogiques (CNA) permettent de faire l'interface entre le monde physique et le FPGA.

L'ensemble du système dynamique est décrit par une équation intégral-différentielle non linéaire à retard :

$$\tau \frac{dx}{dt} + x(t) + \frac{1}{\theta} \int x(s) ds = \beta \sin^2[x(t - \tau_D) + \Phi_0], \quad (1)$$

β étant le gain normalisé du poids de la non linéarité, et Φ_0 étant un offset de phase permettant d'ajuster le point de fonctionnement de la fonction non linéaire [8].

L'analogie entre ce type de dynamique, et un neurone artificiel dont l'espace est émulé par un retard, peut alors se faire de la manière suivante. Un stimulus $x_i = x(t - \delta t_i)$ est pratiquement couplé linéairement à ses voisins proches via le temps court τ de la réponse impulsionnelle, et il est aussi couplé non linéairement au temps long τ_D . La loi dynamique permet de sommer (intégrer) ces diverses couplages.

4 Reservoir Computing basé sur une dynamique non linéaire opto-électronique à retards multiples

Afin d'augmenter la densité des connections entre neurones artificiels distribués sur un retard, nous proposons de réaliser grâce au FPGA une dynamique non linéaire à retard multiples $\delta t_i = i\tau_D/N$, où N devient le nombre de neurones artificiels impliqués dans le *Reservoir* sur un « espace » de largeur τ_D . Le nouveau schéma de principe est donné sur la figure 3, où on a également fait apparaître la fonction essentielle en RC de lecture de l'état du *Reservoir*, fonction qui doit être « apprise » pour chaque type de problème à résoudre. Les données d'entrée à analyser vont servir à exciter le *Reservoir*, provoquant ainsi un transitoire qui sera « lu » afin d'en extraire la réponse au problème traité.

Dans les expériences typiquement réalisées avec des architectures classiques de RC (simulation de réseaux de neurones spatiaux), le nombre de neurones permettant d'obtenir une fonction de calcul significative est de l'ordre de 400. C'est sur cette base que nous avons dimensionné notre dynamique à retards multiples ($N = 400$), ce qui implique la définition de 400 valeurs w_i pour l'interconnexion des neurones (dont la combinaison linéaire avec les divers stimuli retardés est faite dans le FPGA), et aussi l'apprentissage de 400 valeurs α_i pour la fonction de lecture de l'état de ces neurones pour chaque problème donné (également dans le FPGA). L'équation régissant la dynamique du *Reservoir* peut donc s'écrire :

$$\tau \frac{dx}{dt} + x(t) + \frac{1}{\theta} \int x(s) ds = \beta \sin^2 \left[\sum_{i=1}^N w_i x \left(t - i \frac{\tau_D}{N} \right) + I(t) + \phi_0 \right] \quad (2)$$

Le signal $I(t)$ correspond au problème à analyser, qui a été formaté de manière à s'adapter aux propriétés de la dynamique du *Reservoir* (voir plus loin pour le formatage). Les coefficients synaptiques w_i sont pour l'instant déterminés de manière à définir une fonction de transfert de la somme à lignes à retard multiples, comme celle d'un filtre numérique à réponse impulsionnelle fini large bande (leur somme est normalisée à 1).

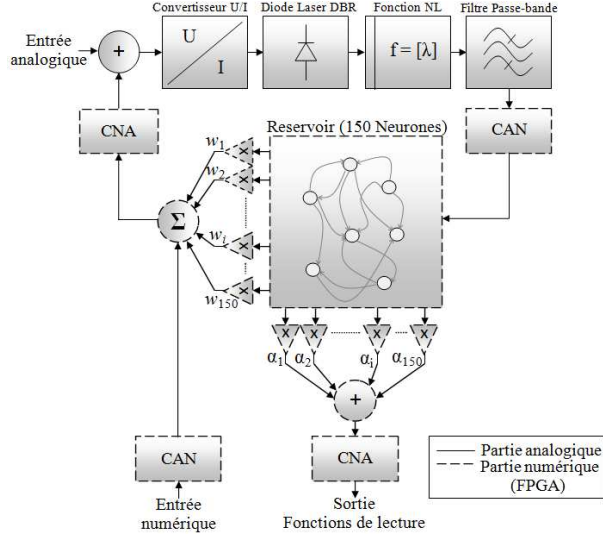


FIG. 3. Schéma de principe d'une machine à états liquide photonique, à retards multiples.

Les plages expérimentales d'ajustement des constantes du filtre passe-haut et passe-bas ainsi que le retard total τ_D sont récapitulées dans le tableau 4. Numériquement, une valeur optimale de séparation temporelle entre 2 neurones artificiels successifs (plus proches voisins), donne un espacement de $0,2\tau$. Les valeurs optimales des paramètres β et Φ_0 pour lesquelles on obtient une bonne réponse du *Réservoir*, sont aussi déterminées par simulation numérique.

TAB.1. Définition des constantes de temps du *Réservoir*.

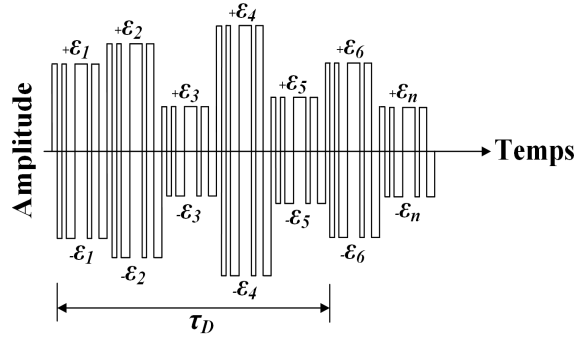
	Domaine fréquentiel	Domaine temporel
Filtre passe-haut	$2 \text{ Hz} < \theta^{-1} < 3100 \text{ Hz}$	$80 \text{ ms} < \theta < 51.84 \mu\text{s}$
Filtre passe-bas	$1200 \text{ Hz} < \tau^{-1} < 30 \text{ kHz}$	$132.629 \mu\text{s} < \tau < 5.3 \mu\text{s}$
Retard total	$50 \text{ kHz} < \tau_D^{-1} < 100 \text{ MHz}$	$256.12 \text{ ms} < \tau_D < 128.06 \mu\text{s}$

L'évaluation de la puissance de calcul de notre *Réservoir* a été effectuée par un test standard NARMA (*Nonlinear Autoregressive Moving Average*) d'ordre 10. Le but consiste à faire deviner au *Réservoir* la séquence issue d'une itération non linéaire d'ordre 10 excité par un bruit, à partir de la connaissance du bruit seulement, et bien sûr après une phase d'apprentissage permettant de déterminer les coefficients α_i . La performance est quantifiée à l'aide de l'erreur quadratique normalisée NRMSE (*Normalized Root Mean Square Error*). Des valeurs inférieures à 0.4 indiquent une capacité de prédiction meilleures que les approches linéaires classiques.

Une étape importante dans la mise en œuvre de ce test, consiste à formater correctement le signal d'entrée $I(t)$, c'est à dire la mise en forme temporelle des valeurs ϵ_n du bruit d'excitation de la séquence NARMA :

$$I(t) = \gamma \epsilon_n(t) v(t), \quad (3)$$

où $v(t)$ est une série de N coefficients aléatoires dont l'amplitude est égale à ± 1 , et dont la durée est égale à l'espacement défini entre 2 neurones successifs ($0,2\tau$). Ce signal est appelé « masque binaire »-et est modulé en amplitude par 800 valeurs de ϵ_n . Le masque a pour but d'adresser temporellement, sur toute la durée de la mémoire τ_D , les différentes valeurs du bruit. Le coefficient γ permet d'ajuster la force d'excitation de la non linéarité par le signal d'entrée (voir figure 4). Les paramètres θ , τ et τ_D sont


 FIG. 4. Forme du signal d'entrée $I(t)$ pour le test NARMA.

fixés à 80 ms, 132.629 μ s et 3.98 ms, respectivement. Comme déjà indiqué, les paramètres β et Φ_0 sont optimisés numériquement. Dans cette procédure, on a cependant certaines conditions à respecter pour le bon fonctionnement du *Réservoir* : celui doit posséder un état de repos (sans aucune donnée en entrée) de point fixe stable. On peut donc au préalable tracer le diagramme de bifurcation en fonction de β , et pour différents Φ_0 , pour déterminer les premières zones de fonctionnement dans l'espace des paramètres. La figure 5 représente de tels diagrammes pour le système dynamique considéré et décrit par l'équation 2. Les coupes verticales de différentes couleurs indiquent des oscillations, donc des points de fonctionnement non adaptés.

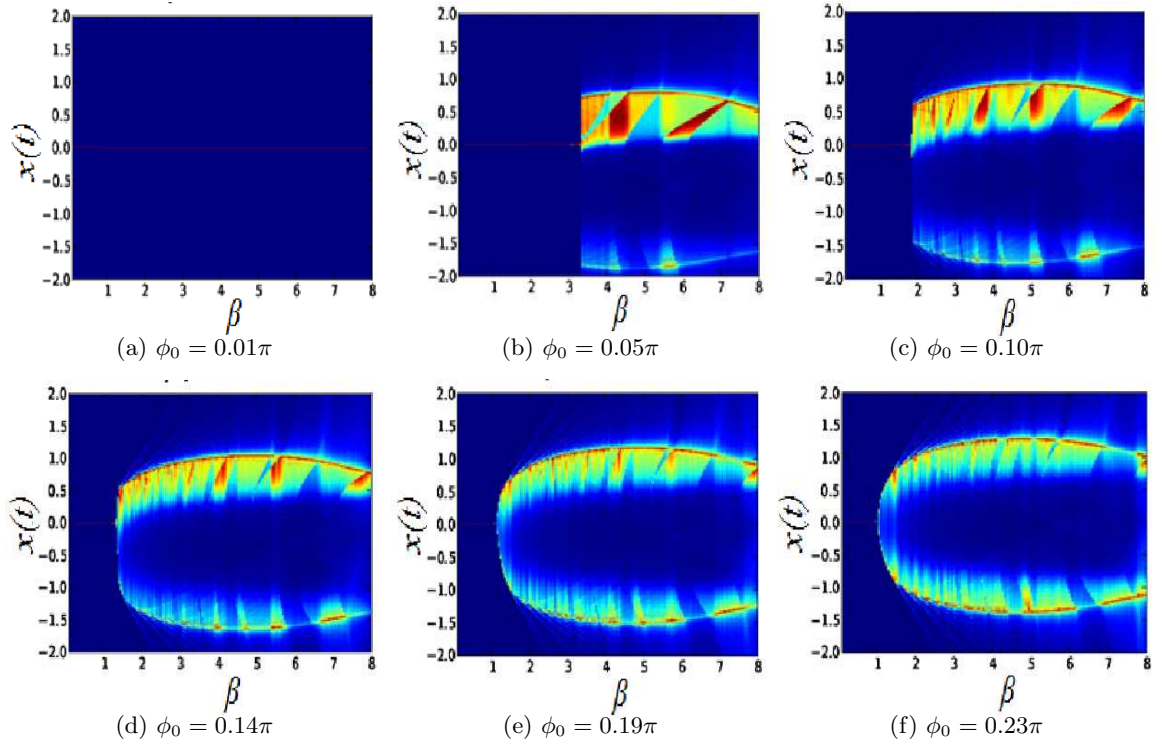


FIG. 5. Diagrammes de bifurcation pour un système à multiples retards.

Les résultats du test NARMA en fonction de différentes valeurs des paramètres γ , β , et ϕ_0 sont représentés à la figure 6. Nous observons clairement l'existence de bonnes conditions de fonctionnement, avec une erreur NRMSE aussi basse que 0,22 ($\beta = 0,46$, $\gamma = 0,42$ et $\Phi_0 = \pi/4$).

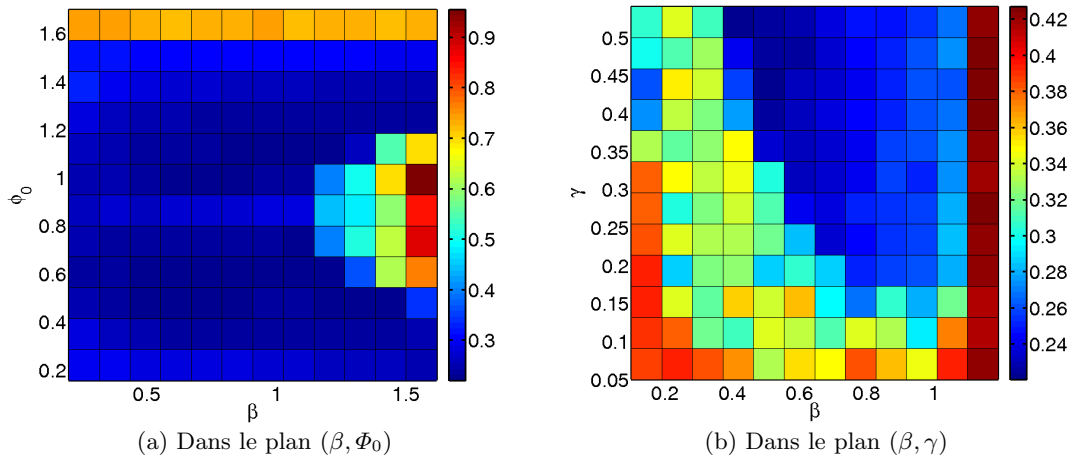


FIG. 6. Erreur NRMSE obtenue pour le test NARMA.

5 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté une des premières réalisations physiques d’une machine à état liquide (*Reservoir Computing*) photonique. Le montage expérimental s’appuie sur une architecture dont le *Réservoir* est constitué par une dynamique non linéaire à retards multiples. Cette dynamique est réalisée physiquement par un oscillateur non linéaire à retard sur la variable dynamique “longueur d’onde” d’un laser semi-conducteur accordable. Ce *Réservoir* photonique a permis d’émuler un réseau de neurones artificiel équivalent à 400 neurones interconnectés. Les performances du montage ont été évaluées par la mesure de l’erreur d’un test NARMA, et a donné un résultat tout à fait encourageant avec une erreur normalisée aussi basse que 0,22. Il reste encore de nombreux paramètres à optimiser avant de comprendre tous les principes qui permettent à ce type de calculateur d’atteindre des performances. De nombreuses architectures similaires sont en cours d’étude, afin d’explorer les mécanismes dynamiques qui entrent en jeu dans la fonction de calcul.

Références

1. H. JAEGER, The “echo state” approach to analysing and training recurrent neural networks, *Technical Report GMD 148*, German National Research Center for Information Technology, (2001).
2. W. MAASS, T. NATSCHLÄGER & H. MARKRAM, Real-time computing without stable states : A new framework for neural computation based on perturbations, *Neural Computations*, **14**, 2531-2560 (2002).
3. F. T. ARECCHI, G. GIACOMELLI, A. LAPUCCI & R. MEUCCI, Two-dimensional representation of a delayed dynamical system, *Physical Review A*, **45**, R4225 (1993).
4. J.-P. GOEDGEBUER, L. LARGER & H. PORTE, Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laserdiode, *Physical Review Letters*, **80**, 2249–2253 (1998).
5. J. Y. LETTVIN, H. R. MATURANA, W. S. MCCULLOCH & W. H. PITTS, What the frog’s eye tells the frog’s brain, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, **47** (11), 1940-1951 (1959).
6. J. J. STEIL, Backpropagation-decorrelation, Online recurrent learning with $O(N)$ complexity, *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, **2**, 843–848 (2004).
7. P. BORNE, M. BENREJEB & J. HAGGÈGE, *Les réseaux de neurones ; Présentation et applications*, Editions TECHNIP (2008).
8. M. PEIL, M. JACQUOT, Y. KOUOMOU CHEMBO, L. LARGER & T. ERNEUX, Routes to chaos and multiple time scale dynamics in broadband bandpass nonlinear delay electro-optic oscillators, *Physical Review E*, **79**, 026208 (2009).

Système de communication haut débit par chaos en phase utilisant un composant dédié : un interféromètre à 3 ondes

Jérémy Oden, Roman Lavrov, & Laurent Larger

Institut FEMTO-ST / Dépt. d'Optique, UMR 6174, Université de Franche-Comté, 25030 Besançon, France.
laurent.larger@univ-fcomte.fr

Résumé. Les dernières innovations en matière de communications cryptées au niveau de la couche physique ont donné naissance à des méthodes utilisant le chaos comme méthode de cryptage. C'est dans cette optique que s'inscrit notre étude, qui vise à adapter des architectures existantes de chaos en phase. Plus précisément, nous démontrons la synchronisation d'un système émetteur-récepteur de chaos en phase présentant une non linéarité 2D, obtenue par un composant dédié remplissant le rôle d'une clé physique : un interféromètre déséquilibré à trois ondes. Les résultats théoriques et expérimentaux obtenus ont permis de démontrer une transmission de données sécurisées à un débit de 3 Gb/s.

Abstract. The latest developments in physical layer encryption systems have been particularly emphasizing on the use of chaotic optical waveforms as carrier signals intended to hide information to be transmitted securely over fiber optics network. On the basis of a recently proposed optical phase chaos generator, we have studied the possibility for using a dedicated device acting as a physical key determining the chaotic motion, the latter requiring to be synchronized at the receiver for a correct signal recovery. This dedicated device is performing a 2D nonlinear transformation at the origine of the chaotic solution, it consists practically in a three wave imbalanced interferometer. Our experimental and theoretical investigations led to the successful demonstration of data encoding and decoding at 3 Gb/s, through the use of this "key" custom device.

1 Introduction

Les communications sécurisées par chaos ont évolué de manière intense, de la découverte de la synchronisation entre chaos par Pecora et Carroll au début des années 1990 [1], puis vers les premières démonstrations expérimentales en optique [2,3], jusqu'aux dernières architectures de chaos électro-optique en phase [4] atteignant des débits record de 10 Gb/s.

Alors que les premières démonstrations de transmissions de données Gb/s sur réseau installé [5] utilisaient essentiellement une porteuse chaotique en intensité, les récentes architectures électro-optiques de chaos en phase ont permis de franchir un gap important, d'une part dans la qualité de synchronisation sur une large bande passante (> 10 GHz), et d'autre part, elles ont aussi ouvert la voie vers l'introduction de composants dédiés constituant une clé "matérielle" à ce principe de cryptage physique. C'est dans ce cadre que se situe notre contribution, avec la démonstration expérimentale de la mise en œuvre d'une telle clé "matérielle", consistant en un interféromètre déséquilibré à ondes multiples. Les paramètres de déséquilibre et de phase relative de chacun des différents bras de l'interféromètre constituent alors les paramètres physiques "clé" qu'il est nécessaire de connaître côté récepteur afin de pouvoir effectuer l'opération de décodage, c'est-à-dire l'opération de récupération des données noyées dans la porteuse chaotique [7].

2 Interféromètre à trois ondes

Nous détaillons ici le fonctionnement de l'interféromètre à trois ondes, ses caractéristiques physiques ainsi que ses divers paramètres et leur rôle dans le générateur de chaos en phase. Le composant a été réalisé sur mesure, en 2 exemplaires, par la société *Kylia*. Il comprend deux déséquilibres entre les différentes branches de l'interféromètre, correspondant à des retards $\Delta T_1 = 180$ ps et $\Delta T_2 = 300$ ps. Il est équipé

d'un dispositif thermique, permettant de fixer les déphasages statiques Φ_{10} et Φ_{20} entre les ondes, dont la plage d'accordabilité est de 16π environ. La figure 1 montre d'une part le modèle équivalent fibré de l'interféromètre (à gauche), et d'autre part, la fonction d'interférence en 2D en fonction des déphasages statiques Φ_{10} et Φ_{20} . Le rapport des retards dûs aux déséquilibres entre les bras de

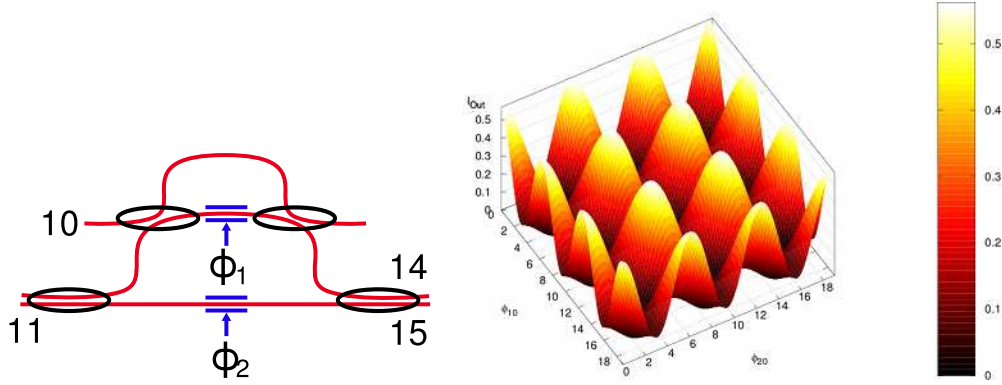


FIG. 1. À gauche : modèle équivalent en structure fibrée de l'interféromètre à trois ondes. À droite : fonction de transfert en puissance en fonction des paramètres statiques ϕ_{10} et ϕ_{20} .

l'interféromètre permet d'en déduire son intervalle spectral libre : $ISL = \frac{3}{180 \text{ ps}} = \frac{5}{300 \text{ ps}} = 16.67 \text{ GHz}$. L'intensité de sortie résultant de la conversion non linéaire de la modulation de phase en entrée, elle peut également être analysée en fonction de la déviation de fréquence optique $\delta\nu$ (issue de la modulation de phase par exemple) :

$$I_{\text{OUT}} = \frac{I_{\text{IN}}}{16} \left[3 + 2 \cos(\phi_{10} + 2\pi \Delta T_1 \delta\nu) + 2 \cos(\phi_{20} + 2\pi \Delta T_2 \delta\nu) + 2 \cos(\{\phi_{10} - \phi_{20}\} + 2\pi \{\Delta T_1 - \Delta T_2\} \delta\nu) \right], \quad (1)$$

ce qui nous donne la réponse spectrale de l'interféromètre (voir figure 2, dont les paramètres ont été ajustés par rapport au relevé expérimental). Expérimentalement, la réponse spectrale de l'interféromètre

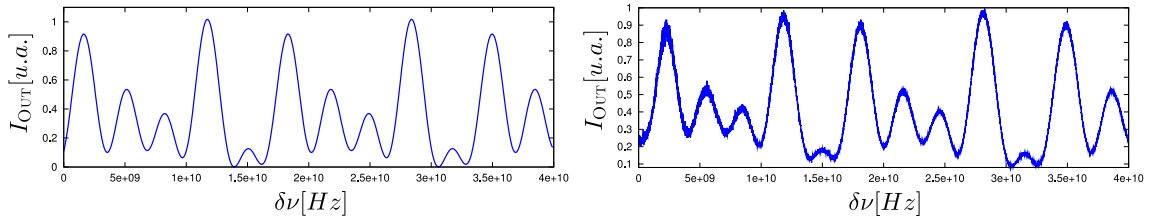


FIG. 2. Fonction de transfert de l'interféromètre, à gauche : le modèle avec les paramètres ajustés aux mesures, à droite : le spectre observé expérimentalement.

est mesurée à l'aide d'une source laser accordable en longueur d'onde commandée par une rampe, et d'un oscilloscope dont le trigger est synchronisé à cette même rampe. Le modèle précédemment décrit permet d'en déduire les valeurs "clés" des paramètres des deux interféromètres, qui devront être appariées entre émetteur et récepteur avec la meilleure précision possible afin d'assurer une bonne qualité de décodage. Les résultats de la mesure sont présentés par le tableau 1. Les différences entre les déphasages statiques représentent notre capacité à régler Φ_{10} et Φ_{20} afin d'obtenir approximativement les mêmes valeurs pour chacun des interféromètres. Les différences entre les retards sont des paramètres intrinsèques critiques car une différence très faible, inférieure à 0.5%, est indispensable à la synchronisation du récepteur avec l'émetteur. Cette étude montre alors que les interféromètres sont suffisamment bien appariés pour permettre la synchronisation du chaos.

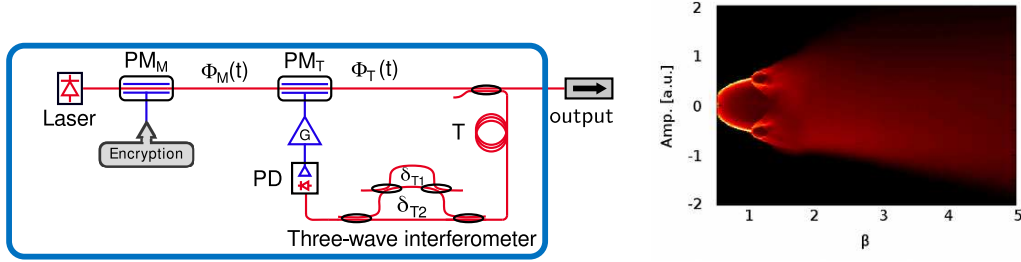
Variable	Interféromètre 01	Interféromètre 02	Différence
ϕ_{10}	6.15750 rad	6.12203 rad	0.60 %
ϕ_{20}	4.15310 rad	4.17542 rad	0.50 %
ΔT_1	177.455 ps	177.587 ps	0.07 %
ΔT_2	297.618 ps	297.670 ps	0.02 %

TAB.1. Paramètres des interféromètres.

3 Approche théorique et simulations numériques du système émetteur-récepteur de chaos en phase

3.1 Structure de l'émetteur

Le chaos est généré à l'aide d'une boucle de rétroaction non linéaire à retard sur la modulation de phase électro-optique. Un modulateur de phase (PM_T sur la figure 3a) permet de réaliser cette rétroaction, il est suivi d'un coupleur 50/50 ; la moitié de la lumière est ainsi injectée dans l'interféromètre, l'autre moitié récupérée en sortie. La sortie de l'interféromètre est connectée à une photodiode, qui re-convertis dans le domaine électrique le signal d'oscillation. Un amplificateur RF permet ensuite d'obtenir une excursion en tension suffisante en entrée du modulateur de phase, afin d'obtenir des régimes chaotiques.



(a) Schéma de principe du générateur de chaos

 (b) Un diagramme de bifurcation numérique ($T = 24.35$ ns)

FIG. 3. Dynamique chaotique en phase optique.

En parcourant la boucle, la phase optique accumule plusieurs retards : le retard global T correspond essentiellement à la longueur de fibre entre le modulateur de phase et la photodiode ; les retards différentiels ΔT_1 et ΔT_2 sont dus au passage de l'onde dans l'interféromètre à trois ondes, ils agissent dans la transformation non linéaire phase/intensité, qui en font une non linéarité non locale dans le temps. Un second modulateur de phase doit pratiquement être inséré dans le montage, il permet d'insérer le message sous forme d'une modulation différentielle de phase binaire masquée dans l'oscillation chaotique.

3.2 Modèle de la dynamique

Les éléments électroniques (photodiode et amplificateur) se comportent comme un filtre passe-bande du fait de leurs limitations en fréquence. L'équation différentielle qui régit la dynamique de la modulation de phase peut alors s'exprimer comme le filtrage passe-bande de l'interférence de trois ondes retardées de T , $T + \Delta T_1$ et $T + \Delta T_2$. L'équation 2 donne l'évolution de $x(t) = \phi(t)/2$, où $\phi(t)$ est la phase de l'onde. Le paramètre β représente un gain et la fonction non linéaire d'interférence est ici normalisée pour avoir une valeur maximale unitaire.

$$\frac{1}{\theta} \int_{t_0}^t x(\xi) d\xi + x(t) + \tau \frac{dx}{dt}(t) = \beta F_{NL}(x, t, \Phi_{10}, \Phi_{20}, \Delta T_1, \Delta T_2, T). \quad (2)$$

Cette équation est le résultat dans le domaine temporel du filtre passe-bande, qui est soumis à une terme de forçage correspondant à la contre-réaction non linéaire, non locale et retardée :

$$F_{\text{NL}}(x, t, \Phi_{10}, \Phi_{20}, \Delta T_1, \Delta T_2, T) = \frac{1}{9} \left(3 + 2 \cos [x(t - T) - x(t - \Delta T_1 - T) + \Phi_{10}] \right. \\ \left. + 2 \cos [x(t - T) - x(t - \Delta T_2 - T) + \Phi_{20}] \right. \\ \left. + 2 \cos [x(t - \Delta T_1 - T) - x(t - \Delta T_2 - T) + \Phi_{10} - \Phi_{20}] \right). \quad (3)$$

3.3 Caractérisation du chaos généré

L'équation précédente est utilisée pour explorer numériquement les trajectoires solutions, et ainsi caractériser les différents régimes dynamiques observables par exemple en fonction du paramètre de gain, qui est le poids de la non linéarité, ou encore les paramètres de phase statique. Un diagramme de bifurcation pour lequel $\Phi_{10} = \Phi_{20} = \pi/4$ est tracé sur la figure 3b, en fonction de β . Une cascade s'apparentant à un doublement de période est observée, elle mène généralement à un régime dynamique chaotique lorsque le gain dépasse une certaine valeur. Les multiples combinaisons possibles des paramètres Φ_{10} et Φ_{20} donnent pratiquement accès à un grand nombre de comportements dynamiques ayant de nombreuses solutions chaotiques différentes.

4 Résultats expérimentaux

Dans cette partie, nous présentons les résultats expérimentaux concernant l'obtention de divers régimes dynamiques, de la synchronisation d'un récepteur avec une porteuse chaotique générée par un émetteur, et enfin l'utilisation de ces conditions de synchronisation pour une transmissions de données binaires à 3 Gb/s chiffrées par chaos en phase.

4.1 Dynamiques observées

Dans un premier temps, seul l'émetteur est étudié. De la même manière que lors des simulations, le diagramme de bifurcation est tracé. Il correspond à des enregistrements successifs (à chaque fois pour un β fixé) de la trace temporelle de la tension commandant la modulation de phase. Les différents régimes observés sont regroupés sur la figure 4, où l'échelle de couleur représente sur une verticale (à β fixé) la distribution de probabilité des amplitudes de la phase optique calculée à partir des traces temporelles enregistrées. On voit qu'expérimentalement, les comportements dynamiques sont bien plus complexes que

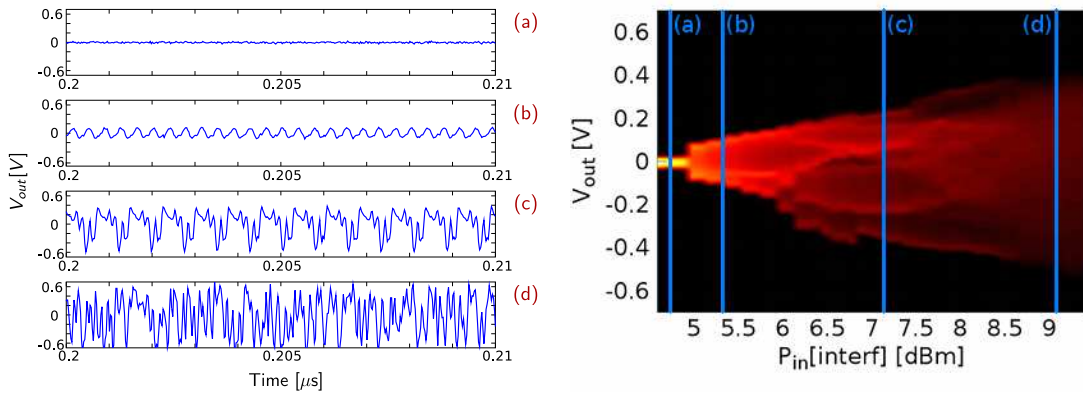


FIG. 4. Dynamiques observées : (a) régime stationnaire, 4.5 dBm ; (b) régime périodique, 5.4 dBm ; (c) régime quasi-périodique, 7.1 dBm ; (d) dynamique chaotique à 9 dBm.

les simples doubléments de périodes révélés par les simulations, cela provient en partie des valeurs de Φ_{10} et Φ_{20} , différentes de $\pi/4$, qui peuvent donner des comportements plus complexes également observés en simulation. En effet, avant d’atteindre le régime chaotique, les régimes dynamiques sont quasi-périodiques et vont en se complexifiant, dès le premier doublement de période. Expérimentalement, nous avons été capables d’atteindre des régimes chaotiques correspondants à une valeur de β légèrement supérieure à trois, le chaos ainsi généré est déjà de grande complexité et fournit potentiellement un excellent masquage comme on le verra par la suite lors du transmission de données chiffrées par chaos.

4.2 Système émetteur-récepteur : suppression de la porteuse chaotique

Le récepteur est conçu de manière à répliquer le chaos généré par l’émetteur, de telle sorte qu’il soit capable de se synchroniser avec ce dernier. Comme le montre la figure 5, la structure du récepteur est identique à celle de l’émetteur à trois différences près :

- le récepteur est en boucle ouverte : la sortie du modulateur de phase n’est pas ré-injectée dans l’interféromètre ;
- l’amplificateur est inverseur : la modulation chaotique de phase est anti-synchronisé au récepteur, de manière à soustraire le chaos synchronisé à la modulation chaotique reçue (superposée au message binaire) ;
- la sortie optique dont la composante chaotique est supposée supprimée est connectée à un démodulateur DPSK, suivi d’une photodiode, ce qui permet soit de mesurer l’erreur de synchronisation en l’absence de message, soit le message lui-même si celui-ci est présent.

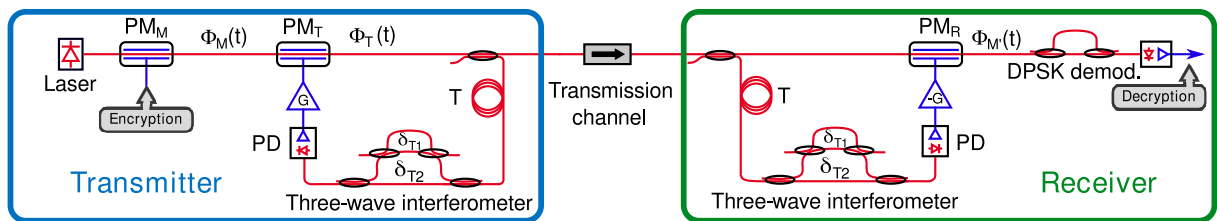


FIG. 5. Architecture du système émetteur-récepteur de chaos en phase.

À l’aide d’un analyseur de spectre optique haute résolution (10 MHz) placé à la sortie du modulateur de phase du récepteur, il est possible de visualiser soit le spectre de la porteuse chaotique générée par l’émetteur lorsque la branche non linéaire à retard est déconnectée (pas de modulation de phase au récepteur), soit le spectre de l’erreur de synchronisation (lorsque le signal anti-synchronisé est appliqué au modulateur de phase). Ceci permet, comme le montre la figure 6, d’observer le rapport entre le signal chaotique et le “bruit” résiduel après suppression du chaos. Celui-ci est de l’ordre de 20 dB sur largeur spectrale de ± 10 GHz autour de la porteuse optique.

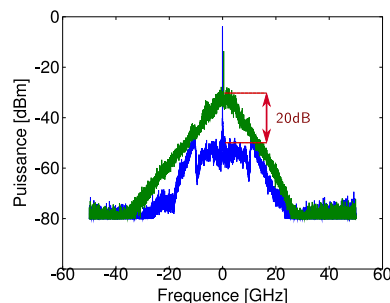


FIG. 6. Suppression du chaos de 10 à 20 dB dans le spectre optique sur une bande de 10 GHz.

4.3 Transmission de données à 3 Gb/s

La réalisation du système complet de communications haut débit par chaos en phase impliquant un interféromètre à trois ondes, ainsi que l'utilisation d'un testeur de taux d'erreur binaire, nous a permis de démontrer une transmission sans erreur à un débit de 3 Gb/s (figure 7). Lors de nos expériences,

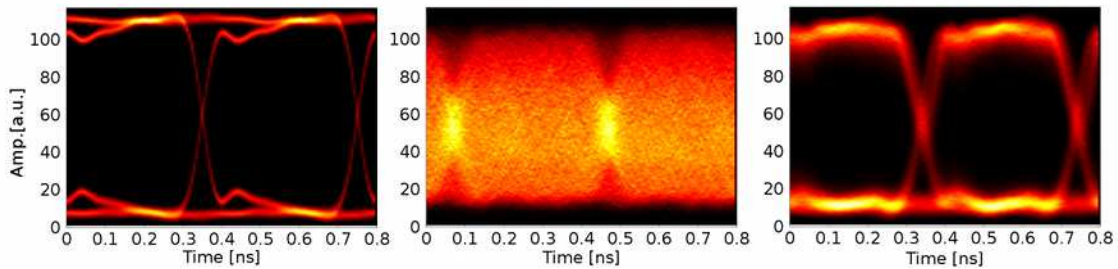


FIG. 7. De gauche à droite : le diagramme de l'œil du message transmis à 3 Gb/s, celui du message crypté par chaos, et enfin celui du message décodé au récepteur après suppression de la porteuse chaotique. Le taux d'erreur binaire (BER) est inférieur à 10^{-12} .

nous avons réglé l'émetteur dans les conditions de régime chaotique maximal ($\beta \sim 3$), et ceci pour une multitude de valeurs du couple (Φ_{10}, Φ_{20}) donnant à chaque fois un taux d'erreur binaire inférieur à 10^{-10} après avoir correctement réajusté les paramètres du récepteur.

5 Conclusion

Nous avons présenté des expériences de communication par chaos optique permettant de chiffrer et déchiffrer en temps réel des données binaires à 3 Gb/s. Le principe particulier de génération de chaos électro-optique par modulation de phase nous a permis de définir un clé physique "sur mesure", nécessaire au déchiffrement. Cette clé consiste pratiquement en un interféromètre déséquilibré à ondes multiples, dont les paramètres de déséquilibre et d'offset de phase relative entre les bras constituent une part de la clé physique de chiffrement.

La sécurité de ce mode de chiffrement pourra encore être améliorée en combinant à cette clé physique une clé numérique destinée à définir une loi de commutation d'autres paramètres physiques.

Références

1. L. M. PECORA & T. L. CARROLL, Synchronization in chaotic systems, *Physical Review Letters*, **64** (8), 821-824 (1990).
2. G. VANWIGGEREN & R. ROY, Communicating with chaotic lasers, *Science* **279**, 1198-1200 (1998).
3. J.-P. GOEDGEBUER, L. LARGER & H. PORTE, Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laserdiode, *Physical Review Letters* **80**, 2249-2252 (1998).
4. R. LAVROV, M. PEIL & M. JACQUOT, Nonlocal nonlinear electro-optic phase dynamics demonstrating 10 Gb/s chaos communications, *IEEE Journal on Quantum Electronics*, **46**, 1430-1435 (2010).
5. A. ARGYRIS, D. SYVRIDIS, L. LARGER, V. ANNOVAZZI-LODI, P. COLET, I. FISCHER, J. GARCIA-OJALVO, C. R. MIRASSO, L. PESQUERA, K. A. SHORE, Chaos-based communications at high bit rates using commercial fiber-optic links, *Nature*, **438**, 343-346 (2005).
6. M. NOURINE, M. PEIL & L. LARGER, Chaos généré par une non linéarité 2D et une dynamique à retard, *Comptes-Rendu des Rencontres du Non Linéaire*, **12**, 149-154 (2009).
7. Y.C. KOUOMOU, P. COLET, L. LARGER & N. GASTAUD, Mismatch-induced bit error-rate in optical chaos communication using semiconductor lasers with electro-optical feedback, *Physical Review E*, **41**, 156-163 (2005).

Dynamique du seuil d'excitabilité des neurones

Jonathan Platkiewicz¹ & Romain Brette^{2,3}

¹ Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique, UPMC Univ Paris 06, UMR 7222, Paris, France

² Laboratoire Psychologie de la Perception, CNRS and Université Paris Descartes, Paris, France

³ Département d'Etudes Cognitives, Ecole Normale Supérieure, Paris, France

platkiewicz@isir.upmc.fr

Résumé. Les neurones transmettent les signaux sous la forme de trains d'impulsions électriques : une impulsion est générée et propagée si l'intensité du signal d'entrée est plus grande qu'une quantité critique, autrement aucun signal n'est transmis. Cette quantité critique, appelée seuil d'excitabilité, a été observée comme fortement variable et adaptative dans différents enregistrements *in vivo*. Nous nous sommes intéressés à ce phénomène du point de vue de la modélisation. Nous avons essentiellement proposé un modèle bidimensionnel à condition de décharge explicite permettant de reproduire les différents traits caractéristiques de la variabilité et de la dynamique du seuil. Dans ce modèle, les non-linéarités du système n'interviennent plus que dans la condition de déclenchement des impulsions. De plus, ses paramètres peuvent être directement déduits des grandeurs biophysiques de l'excitabilité. Enfin, des validations de ce modèle ont été faites à partir de simulations numériques de modèles physiologiques détaillés de neurones corticaux.

Abstract. Neurons transmit signals by emitting trains of electrical spikes : a spike is generated and propagated provided that the strength of the input signal is larger than a critical quantity, otherwise no signal is transmitted. This critical quantity, called the excitability threshold, has been shown to be highly variable and adaptive by *in vivo* recordings. We have studied this phenomenon from a modeling point of view. Our main contribution is a two-dimensional model with an explicit firing condition which allows to reproduce the different characteristic features of threshold variability and dynamics. Interestingly, the model nonlinearity comes from the spiking condition only. Moreover, its parameters can be directly linked to excitability ones. At last, this model has been validated by simulating detailed physiological models of cortical neurons.

1 Introduction

Les neurones convertissent un signal électrique continu, le potentiel membranaire, en un signal électrique discret, le train de potentiels d'action (PA). Il est admis que les signaux physiques reçus par les récepteurs sensoriels sont transmis, codés et traités par le système nerveux au moyen de ces trains d'impulsions électriques. Dans la conception traditionnelle du codage nerveux en neurophysiologie, seule la fréquence de décharge importe [1]. Plus récemment, de nombreuses évidences expérimentales et théoriques ont remis en cause cette conception, soulignant l'importance de l'instant de chaque impulsion à la milliseconde près dans le codage nerveux [2].

Il existe deux grandes classes de modèles pour décrire cette transduction du signal par les neurones : les modèles de type Hodgkin-Huxley (HH) et les modèles de type intègre-et-tire (IT). Les premiers modèles sont basés sur le modèle développé par Hodgkin et Huxley pour décrire le phénomène de génération et de propagation des PA dans l'axone géant du calamar [3]. Ils ont l'avantage de donner une description de l'excitabilité d'une membrane à partir de ses caractéristiques biophysiques. Néanmoins, cette précision biophysique va de pair avec une grande complexité mathématique : équations non linéaires, nombre de variables élevé et nombre de paramètres très élevé. A contrario, les seconds types de modèles, basés sur les travaux pionniers de Lapicque [4], sont beaucoup plus simples du point de vue mathématique. La principale caractéristique de ces modèles est de rendre explicite la condition de décharge. Cependant, bien qu'inspirés de la biophysique des membranes excitables, ces modèles sont essentiellement phénoménologiques. De nombreuses études expérimentales récentes ont confirmé la pertinence des modèles IT pour décrire la réponse des neurones du cortex [5]. Par ailleurs, il a été proposé qu'au contraire de

l'axone du calamar, une des caractéristiques typiques de l'initiation des PA dans les neurones corticaux est la conjonction d'une variabilité élevée du seuil et d'un déclenchement brusque des PA [6], modélisable plus directement par les modèles IT. Ainsi, il semble que cette classe de modèles soit plus pertinente dans le cadre de la modélisation de la dynamique des neurones et des réseaux neuronaux du système nerveux central.

Dans cet article, nous présentons un modèle IT à seuil dynamique basé sur une analyse biophysique des neurones centraux et établi de façon beaucoup plus détaillée dans nos études précédentes [7,9]. Nous allons exposer tout d'abord sa formulation mathématique et son interprétation biophysique. Nous verrons que ce modèle IT peut-être vu comme une généralisation du modèle IT à fuite standard. Nous présenterons ensuite succinctement les différentes approximations qui ont permis d'aboutir à ce modèle à partir d'un modèle réaliste de neurone cortical de type HH. Nous verrons que malgré le grand nombre d'approximations réalisées, nous avons obtenu plusieurs validations importantes confirmant sa pertinence. Enfin, nous exposerons quelques propriétés dynamiques intéressantes de ce modèle. Nous montrerons comment il permet de renforcer l'hypothèse de l'importance de la précision temporelle dans le codage neuronal.

2 Modèle intègre-et-tire inactivant

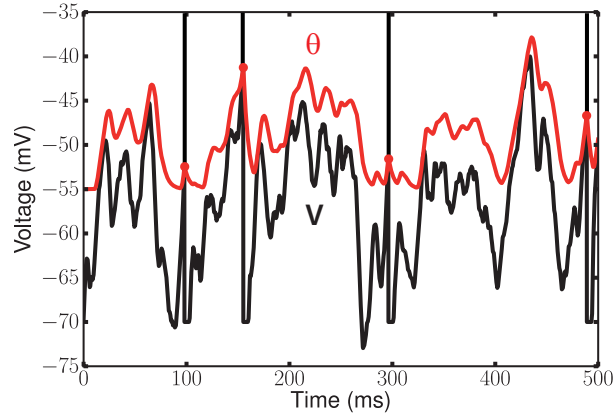


FIG. 1. Modèle intègre-et-tire (IT) inactivant soumis à un bruit coloré. Les traits noir et rouge représentent respectivement la dynamique de V et de θ . Les points rouges correspondent aux déclenchements des impulsions, représentées par les barres verticales ajoutées manuellement. (Adapté de [9])

Soit V et θ deux grandeurs réelles telles que $V \leq \theta$. Dans le modèle IT inactivant proposé dans l'étude [9], la dynamique de ces grandeurs est donnée par les équations :

$$\begin{aligned}\tau_{\theta}\dot{\theta} &= a(V)(V - V_1) + \theta_0 - \theta \\ \tau\dot{V} &= V_0 - V + I\end{aligned}$$

avec :

$$a(V) = a, \text{ si } V > V_1 \quad a(V) = 0, \text{ si } V < V_1$$

où I est la variable d'entrée du modèle et a , V_0 , V_1 , θ_0 , τ , τ_{θ} sont des paramètres fixés. Quelques précisions supplémentaires peuvent être données sur ces paramètres et leurs ordres de grandeur : a est positif et est en général voisin de 1 ; τ et τ_{θ} sont positifs ; V_0 , V_1 , θ_0 sont négatifs et on a en général $V_0 < V_1 < \theta_0$. Dès que $V \geq \theta$, V est réinitialisé à une valeur prédéterminée (en général V_0) et θ aussi peut être réinitialisé.

Enfin, une période réfractaire peut être ajoutée au modèle en posant des conditions supplémentaires sur la réinitialisation de V ou de θ .

Ce modèle peut être réduit à un modèle IT à fuite standard en prenant $a = 0$ et $\tau_\theta \ll \tau$. En effet, nous avons alors en permanence $\theta = \theta_0$. Un modèle très similaire a été proposé par [10]. Néanmoins, ce modèle ne prenait pas en compte le caractère linéaire rectifié de la dépendance au voltage du seuil à l'état stationnaire. De plus, il a été établi à partir d'une analyse biophysique du rôle des canaux potassiums, alors que le modèle que nous proposons est basé sur une étude de l'inactivation des canaux Na. Comme nous l'avons justifié dans une étude précédente [9], il est plus plausible que ce dernier mécanisme soit le facteur prédominant de modulation du seuil.

Sans entrer dans les détails de la construction biophysique de ce modèle, nous pouvons donner son interprétation biophysique. Pour l'équation de V , l'interprétation est classique : V représente le potentiel membranaire, I le courant membranaire, V_0 le potentiel de repos et τ la constante de temps membranaire. En somme, cette équation revient à négliger toutes les contributions des courants ioniques voltage-dépendants à la dynamique du voltage avant le déclenchement du PA. La condition de réinitialisation de V après franchissement du seuil provient de l'approximation que la phase de montée des PA est quasi-instantanée. L'équation du seuil a été établie dans les deux études biophysiques que nous avons faites sur l'excitabilité des neurones [7,9]. Ainsi, θ représente naturellement le seuil de déclenchement des PA et plus précisément le voltage au seuil de courant, θ_0 est directement associé au seuil de charge et dépend uniquement des caractéristiques des canaux Na, V_1 représente le voltage typique d'inactivation des canaux Na, a le rapport entre pente d'activation et d'inactivation et τ_θ correspond à la constante de temps typique d'inactivation.

3 Approximations et pertinences physiologiques

Une série d'approximations permet de conduire à l'équation linéaire proposée pour la dynamique du seuil. Cette série d'approximations est faite à partir d'un modèle générique de neurone central de type HH et est présentée en détail dans nos deux études précédentes [7,9]. Tout d'abord, nous avons effectué plusieurs approximations sur la séparation des constantes de temps : l'activation des canaux Na est quasi-instantanée ; l'inactivation des canaux Na est lente à l'échelle de l'initiation des PA ; la conductance totale membranaire est lente sur la même échelle de temps. Ces approximations usuelles sont faites par exemple pour le modèle de Fitzhugh-Nagumo [11], mais dans ce cas les variables ioniques sont supposées lentes à l'échelle de l'évolution du potentiel membranaire, qui est bien plus grande que celle de l'initiation des PA. Nous avons effectué de plus des approximations sur les dépendances en voltage : la courbe d'activation des canaux Na est supposée bien ajustable par une fonction de Boltzmann ; les évolutions du voltage entre deux émissions de PA et pendant le PA sont supposées clairement distinctes. Cette série d'approximations a permis d'établir une équation du seuil en fonction des grandeurs biophysiques. Plus précisément, si on note h la variable d'inactivation et g_{tot} la conductance totale membranaire, le seuil peut être simplement exprimé en fonction de ces variables sous la forme :

$$\theta = \theta_0 - k_a \log h + k_a \log \frac{g_{tot}}{g_L}$$

où k_a représente la pente d'activation des canaux Na et g_L la conductance de fuite de la membrane. Cette formule s'applique aussi pour des modèles HH multi-compartmentaux, c'est-à-dire pour lesquels la morphologie des neurones et l'inhomogénéité des caractéristiques biophysiques sont prises en compte. Dans ce cas, des approximations supplémentaires sont implicitement faites : seuls les canaux Na au niveau du site d'initiation des PA interviennent dans la détermination du seuil ; la membrane du neurone est isopotentielle avant initiation des PA.

Cette formule confirme des résultats expérimentaux et numériques concernant la densité de canaux Na au niveau du site d'initiation des PA. De plus, elle a été validée à partir de simulations numériques de modèles réalistes de neurones corticaux en présence d'un courant d'entrée bruité comme observé *in vivo* (Fig. 2).

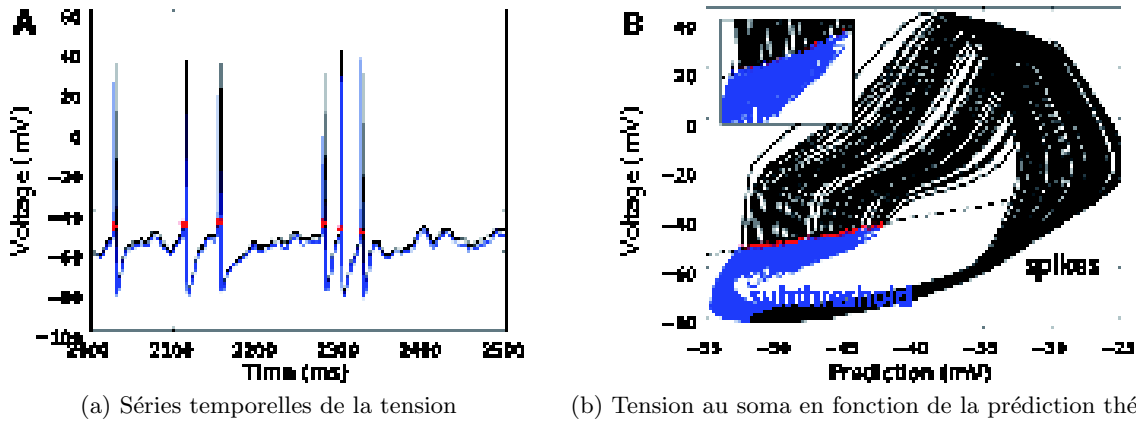


FIG. 2. L'équation générale du seuil proposée prédit correctement les valeurs du seuil dans un modèle réaliste de neurone cortical. Les séries temporelles du voltage au soma (noire) et au site d'initiation des PA (bleue) en réponse à un courant bruité sont représentées en (a). Le seuil est mesuré au soma lorsque dV/dt dépasse 10 V/s (points rouges). La tension au soma en fonction de la prédiction théorique du seuil est représentée à chaque instant (b). Les impulsions sont tracées en noir, les trajectoires sous le seuil en bleu et les instants de décharge en rouge : les impulsions sont bien initiées lorsque le potentiel membranaire dépasse le seuil théorique. (Adapté de [7])

Pour obtenir la version linéaire de l'équation de la dynamique du seuil, d'autres approximations sont nécessaires. Tout d'abord, nous avons négligé la contribution de g_{tot} à la modulation du seuil. Nous avons ensuite supposé que les variations temporelles du seuil autour de sa valeur à l'état stationnaire sont faibles. Nous avons aussi supposé que la dépendance au voltage de la courbe d'inactivation peut être ajustable par une fonction de Boltzmann. Enfin, nous avons approximé la dépendance du seuil au voltage à l'état stationnaire par une fonction linéaire rectifiée. Nous n'avons pas directement validé cette équation particulière de la dynamique du seuil. Néanmoins, l'équation du seuil dans le modèle IT inactivant donne une relation entre le seuil et la vitesse d'atteinte du seuil que nous avons pu valider à partir d'une simulation numérique d'un modèle HH réaliste de neurone cortical [9]. Enfin, ce modèle permet de reproduire les différents traits caractéristiques de la dynamique du seuil observée *in vivo* : corrélation positive entre le seuil moyen et le voltage moyen ; corrélation négative entre le seuil et la vitesse d'atteinte du seuil ; dépendance de cette dernière corrélation au voltage moyen ; dépendance de la variabilité du seuil à la moyenne et à la variabilité de l'entrée ; corrélation négative entre le seuil et l'intervalle de temps entre deux impulsions pour une dynamique lente du seuil.

4 Propriétés dynamiques

Le modèle que nous avons proposé présente plusieurs propriétés dynamiques intéressantes, dont certaines ont été observées expérimentalement. Nous avons présenté ces propriétés dans le cadre de l'étude du rôle de l'inactivation des canaux Na dans l'intégration synaptique [9]. Nous avons regardé l'influence de l'adaptabilité du seuil sur la réponse du modèle. Nous avons étudié cet aspect à partir de simulations numériques (Fig. 3). Nous avons fait varier le paramètre a , réglant la dépendance du seuil au voltage à l'état stationnaire. Le phénomène intéressant intervient lorsque l'entrée moyenne ($\langle I \rangle$) est supérieure au seuil constant (θ_0). En effet, dans le cas où l'adaptation est nulle ou faible (Fig. 3b et 3c), la fréquence de sortie du modèle est principalement déterminée par la moyenne de l'entrée. Cependant, lorsque l'adaptation est importante (Fig. 3d), la fréquence de sortie devient essentiellement fonction de l'écart-type de l'entrée. On peut dire que le modèle se comporte alors plus comme un détecteur de transitoires. De façon intéressante, ce type de réponse a été observé dans les conditions *in vitro* par Arsiero *et al* [8].

D'autres phénomènes dynamiques intéressants peuvent être exhibés pour ce modèle. Notamment, il est possible de déclencher une impulsion avec une perturbation négative (éloignant V de θ). Plus précisément,

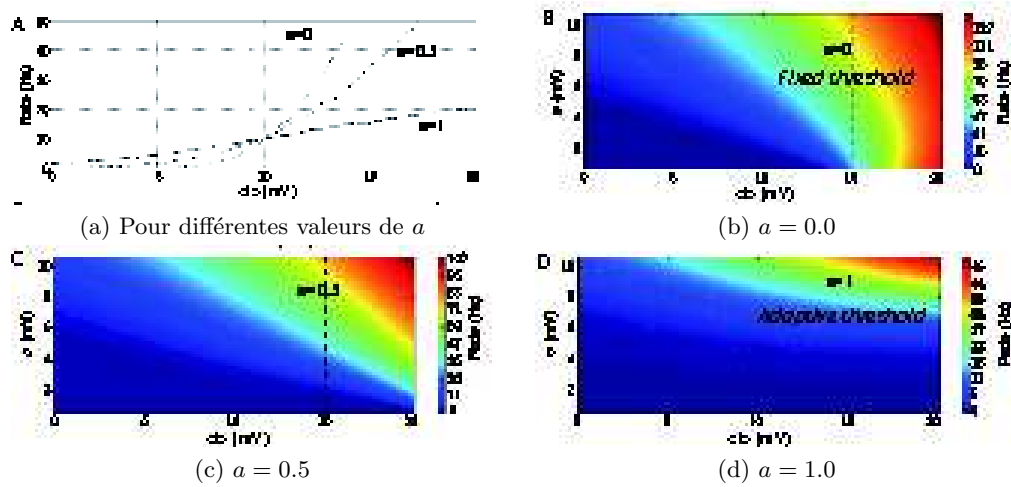


FIG. 3. Fréquence de décharge en fonction de la statistique des entrées. Un modèle IT inactivant soumis à une entrée générée par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck a été simulé. Pour chaque sous-figure présentée, la valeur du paramètre a est fixée et les valeurs de la moyenne et de l'écart-type de l'entrée sont modifiés d'un essai sur l'autre. Fréquence de décharge en fonction de la moyenne de l'entrée pour différentes valeurs de a (a). L'écart-type de l'entrée a été fixé de telle sorte que le modèle décharge à une fréquence de 10 Hz lorsque le voltage moyen est 10 mV au-dessus du voltage au repos. Fréquence de décharge en fonction de la moyenne et de l'écart-type de l'entrée, sans adaptation du seuil (correspond approximativement au modèle IT standard) (b). La ligne horizontale en pointillés correspond à la courbe en pointillés en (a) et la ligne verticale en pointillés correspond au seuil pour des entrées constantes. (c) et (d) idem à (b) mais avec des valeurs de a différentes. (Adapté de [9])

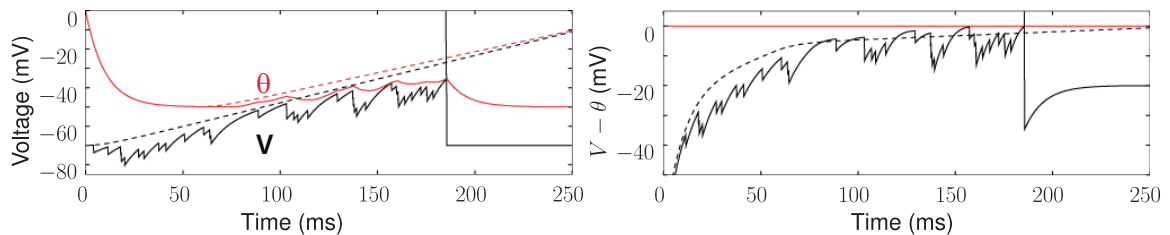


FIG. 4. Des perturbations négatives distribuées temporellement selon un processus de Poisson sont ajoutées à une entrée linéairement croissante. Sans ces perturbations (ligne en pointillés), le seuil est adapté et aucune impulsion n'est déclenchée. Avec ces perturbations (lignes continues), un phénomène de « rebond » permet le déclenchement d'une impulsion. (Adapté de [9])

nous avons simulé un modèle IT inactivant soumis à une entrée linéairement croissante. Sans addition de perturbations, aucune impulsion n'est déclenchée. Par contre, lorsque l'on perturbe le système avec des impulsions d'amplitude très faible et négative, il est possible d'en déclencher (Fig. 4). Ce phénomène est bien connu en neurophysiologie mais n'avait pas été mis en relation avec l'inactivation des canaux Na [11].

Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté un nouveau type de modèle IT. Nous avons vu que ce modèle peut être vu comme une généralisation du modèle IT à fuite standard. Ce modèle a été construit à partir d'une analyse biophysique, permettant ainsi de relier directement ses paramètres à ceux de l'excitabilité. De plus, il peut être vu comme une version minimale d'un modèle HH réaliste de neurone cortical, si seuls les

instants de décharge sont pris en compte. Nous avons vu que ce modèle a obtenu différentes validations empiriques. De plus, il permet de reproduire les différents traits caractéristiques de la dynamique du seuil observés *in vivo*. Néanmoins, d'autres validations expérimentales *in vitro* doivent être faites pour confirmer définitivement la pertinence physiologique du modèle.

Enfin, nous avons vu que ce modèle permet de mettre en évidence simplement différents comportements dynamiques de la réponse neuronale : sensibilité aux fluctuations ; insensibilité à la moyenne notamment aux valeurs élevées de celle-ci ; déclenchement d'une impulsion par perturbation négative. Ce modèle donne ainsi une description biophysique minimale de la décharge des neurones centraux et souligne l'importance de la dynamique de l'excitabilité dans le codage neuronal.

Remerciements

Ce travail a été soutenu financièrement par le Conseil Européen de la Recherche (ERC StG 240132) : <http://erc.europa.eu/>.

Références

1. M. N. SHADLEN & W. T. NEWSOME, Is there a signal in the noise?, *Current Opinions in Neurobiology*, **5**, 248–250 (1995).
2. , F. RIEKE, D. WARLAND, R. DE RUYTER VAN STEVENINCK & W. BIALEK, *Spikes : Exploring the neural code*, The MIT Press, (1999).
3. A. L. HODGKIN & A. F. HUXLEY, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *Journal of Physiology*, **117**, 500–544 (1952).
4. L. LAPICQUE, Recherches quantitatives sur l'excitation électrique des nerfs traitée comme une polarisation, *Journal de Physiologie*, **9**, 620-635 (1907).
5. C. ROSSANT, D. F. M. GOODMAN, B. FONTAINE, J. PLATKIEWICZ, A. K. MAGNUSSON & R. BRETTE, Fitting neuron models to spike trains, *Frontiers in Neuroscience*, **5** (9), (2011).
6. B. NAUNDORF, F. WOLF & M. VOLGUSHEV, Unique features of action potential initiation in cortical neurons, *Nature*, **440**, 1060–1063 (2006).
7. J. PLATKIEWICZ & R. BRETTE, Impact of sodium channel inactivation on spike threshold dynamics and synaptic integration, non publié.
8. M. Arsiero, H.-R. Lüscher, B. N. Lundstrom & M. Giugliano, The impact of input fluctuations on the frequency-current relationships of layer 5 pyramidal neurons in the rat medial prefrontal cortex, *Journal in Neuroscience*, **27**, 3274–3284 (2007).
9. J. PLATKIEWICZ & R. BRETTE, A threshold equation for action potential initiation, *PLoS Computational Biology*, **6**, e1000850, (2010).
10. R. DODLA, G. SVIRSKIS & J. RINZEL, Well-timed, brief inhibition can promote spiking : postinhibitory facilitation, *Journal in Neurophysiology*, **95**, 2664–2677, (2006).
11. E. M. IZHKEVICH, *Dynamical systems in neuroscience : The geometry of excitability and bursting*, MIT Press (2007).

Etude d'un canal stratifié différentiellement chauffé

Bérangère Podvin¹ & Patrick Le Quéré²

LIMSI-CNRS, Université Paris-Sud, Orsay
podvin@limsi.fr

Résumé. Nous considérons l'écoulement de convection naturelle dans un canal vertical différentiellement chauffé et stratifié en deux dimensions. Nous avons dérivé une équation de Ginzburg-Landau à partir des équations du mouvement et comparé les prédictions du modèle avec les observations de la simulation numérique directe. Nous montrons que le modèle de Ginzburg-Landau permet de représenter correctement la dynamique de l'écoulement au-dessus de la bifurcation à des nombres de Rayleigh modérés. Suffisamment au-delà de la bifurcation, on observe un comportement fortement non-linéaire de l'écoulement avec des ondes cnoidales.

Abstract. We consider the flow in a differentially heated, stratified, two-dimensional channel. A Ginzburg-Landau equation was derived from the equations of motion and its predictions were compared with the direct numerical simulation. We find that the Ginzburg-Landau provides an adequate representation of the flow dynamics in a range of moderate Rayleigh numbers. At higher Rayleigh numbers, the flow becomes strongly nonlinear and cnoidal waves appear in the boundary layers.

1 Introduction

Depuis les travaux de Newell et Whitehead [1] et Stuart et Di Prima [2] pour la convection de Rayleigh-Bénard, le formalisme de Ginzburg-Landau a été souvent utilisé pour décrire une grande variété de phénomènes nonlinéaires dans les milieux continus avec une symétrie de translation, et peut être considéré comme une forme normale généralisée pour la bifurcation des instabilités primaires [3]. Nous nous intéressons ici à la convection naturelle, dans une situation où, à la différence de Rayleigh-Bénard, la poussée d'Archimède agit orthogonalement au gradient de température imposé. Nous étudions les instabilités dans un canal différentiellement chauffé et stratifié à faible nombre de Prandtl, dans le cadre d'une simulation numérique bi-dimensionnelle. Au delà du seuil d'instabilité linéaire, nous identifions d'abord un régime chaotique, puis au-delà d'un second seuil, un régime plus organisé, caractérisé par la présence de structures de type solitons (ondes cnoidales).

2 Le problème

2.1 Le domaine

Le domaine physique est représenté en figure 1. On considère un canal vertical de largeur 1 et hauteur H . Le nombre de Prandtl est égal à 0.71. Les parois sont maintenues à des températures différentes. L'écart de température entre les deux parois à hauteur constante est pris égal à 1. Les températures à la paroi varient de plus linéairement en fonction de la hauteur, ce qui induit une stratification positive. Ceci nous conduit à introduire un paramètre de stratification relative

$$\gamma = \frac{1}{4}(RaS)^{1/4}$$

où Ra est le nombre de Rayleigh $Ra = \frac{\tilde{\alpha}g\Delta TD^3}{\nu\kappa}$ ($\tilde{\alpha}$ est le coefficient d'expansion thermique, g la gravité, ν la viscosité et κ la conductivité thermique), et S est le gradient de température adimensionné. Le paramètre γ est supposé être constant et égal à 8.

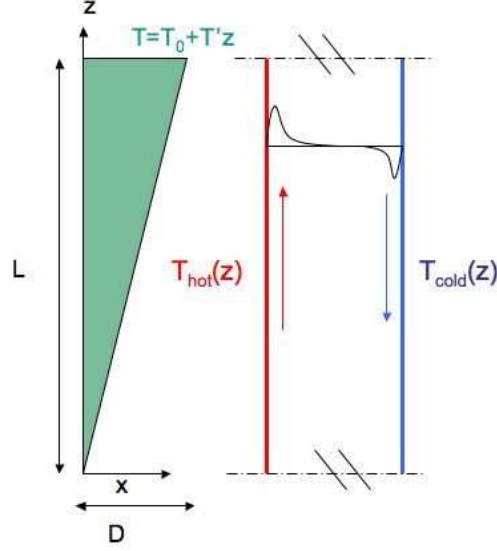


FIG. 1. Configuration.

2.2 Equations du mouvement

On note (u, w) les composantes de vitesse et θ la différence de température. En raison de la stratification la température T peut être décomposée en une partie linéaire et une partie périodique en z

$$T(x, z) = Sz + \theta(x, z)$$

Par la suite nous ne considérerons que la partie fluctuante.

Dans l'approximation de Boussinesq, les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + g\tilde{\alpha}(\theta - T(x, z)) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} + wS = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

avec les conditions aux limites $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = 0$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, $w(0) = 0$, $w(1) = 0$

La configuration admet une solution de base analytique pour la vitesse verticale W et la température, dont la forme dépend de γ [4].

$$W(x) = \frac{1}{4i} \frac{\kappa}{D} \left(\frac{Ra}{S} \right)^{1/2} \left(\frac{sh[(1+i)\gamma(x-\frac{1}{2})]}{sh[(1+i)\frac{\gamma}{2}]} - \frac{sh[(1-i)\gamma(x-\frac{1}{2})]}{sh[(1-i)\frac{\gamma}{2}]} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\Theta(x) - T_0 - T'_\infty z}{\Delta T} = -\frac{1}{4} \left(\frac{sh[(1+i)\gamma(x-\frac{1}{2})]}{sh[(1+i)\frac{\gamma}{2}]} + \frac{sh[(1-i)\gamma(x-\frac{1}{2})]}{sh[(1-i)\frac{\gamma}{2}]} \right) \quad (6)$$

Les équations sont résolues avec un code spectral Fourier-Chebyshev. En enlevant la partie stratifiée de l'écoulement, nous considérons des conditions aux limites périodiques.

3 Stabilité linéaire de l'écoulement

Nous avons d'abord reproduit des résultats pour la stabilité linéaire de l'écoulement. Nos résultats s'accordent avec ceux de Bergholz [5], qui a réalisé une étude de stabilité pour une gamme de nombres de Prandtl et de paramètres de stratification. L'écoulement reste stable pour un nombre de Rayleigh inférieur à une valeur critique de $Ra = 1.63 \cdot 10^5$. Le nombre d'onde critique est $k_c = 4.33$ et définit une hauteur critique $H_c = 2\pi/k_c = 1.45$. La déstabilisation correspond à une bifurcation de Hopf. L'examen des vecteurs propres associés aux valeurs propres instables (Fig. 2) révèle que chaque mode est concentré essentiellement dans une moitié de canal pour la valeur de la stratification relative considérée.

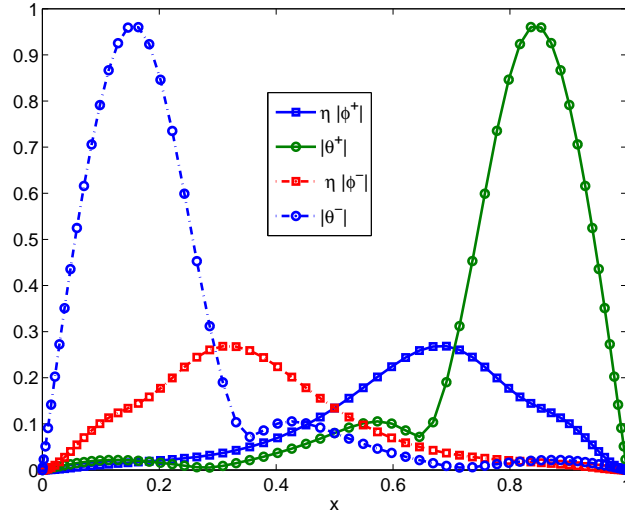


FIG. 2. Amplitude des modes instables (fonction de courant ϕ and température θ).

Du fait de la stratification, les conditions d'application du théorème de Squire ne sont pas remplies et une instabilité tridimensionnelle pourrait précéder l'instabilité bidimensionnelle.

4 Chaos par défaut de phase

Lorsque la hauteur du canal est suffisamment grande, la solution linéaire périodique se déstabilise rapidement. Nous avons dérivé un modèle de Ginzburg-Landau [6] à partir des équations du mouvement. Le modèle est de la forme

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \alpha(1 + ic_0)A + \beta(1 + ic_1)\frac{\partial A}{\partial z^2} - g(1 + ic_2)(|A|^2 A) \quad (7)$$

Les valeurs des coefficients de l'équation sont $\alpha = 0.10 + i0.38$, $\beta = 0.0079 + i0.0068$, $g = 10.11 + i8.60$, $c_1 = -5.4$, $c_2 = 0.85$.

Les valeurs de c_1 et c_2 montrent que le système est instable vis-à-vis des instabilités de Benjamin-Feir, ce qui s'accorde avec l'observation numérique d'un régime quasi-périodique. Comme on peut le voir dans la figure 3, on observe de rapides variations de l'amplitude de la solution, qui sont réminiscentes des trous de Nozaki-Bekki [7] observées dans l'équation de Ginzburg-Landau.

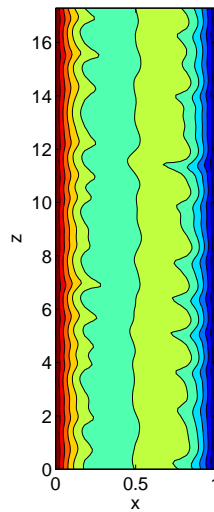


FIG. 3. Température fluctuante pour $Ra = 2.4 \cdot 10^5$ dans un domaine $H = 12H_c$.

5 Solitons

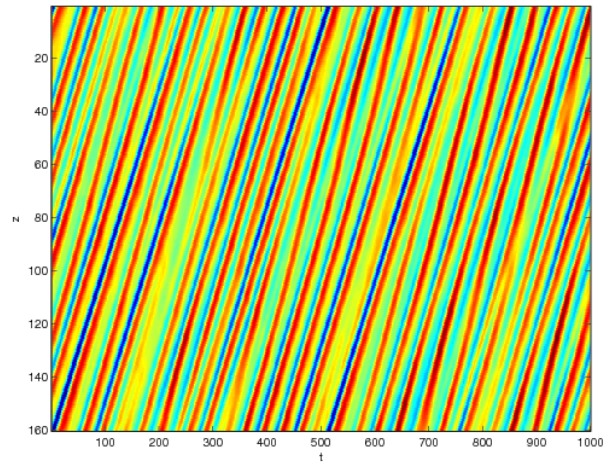
En augmentant le nombre de Rayleigh, on observe un changement de dynamique dans la simulation, où l'on passe d'un état à plusieurs cellules dont l'intensité varie faiblement, à un état où une cellule devient beaucoup plus importante que les autres. On a montré [6] que la forme de cette structure correspondait bien à celle d'un soliton. La comparaison des diagrammes spatio-temporels de la température à une certaine distance de la paroi chaude en figure 4 illustre le changement de dynamique. Toutes les cellules dans le régime chaotique évoluent essentiellement à la même vitesse, alors que les structures isolées dans le nouveau régime ont une vitesse très différente. L'intensité des solitons augmente avec le nombre de Rayleigh.

En augmentant encore le nombre de Rayleigh, on s'aperçoit que la vitesse de ces solitons n'est pas constante (Fig. 4c). On observe des ralentissements, suivis de fortes accélérations. L'examen de la simulation révèle que cette situation correspond au croisement de deux solitons - l'un dans la couche limite thermique chaude, l'autre dans la couche limite thermique froide. Notons que la simulation bi-dimensionnelle ne peut probablement pas décrire correctement l'interaction de ces solitons, de sorte qu'il est tout à fait possible que ces changements de vitesse soient dus à un artefact numérique.

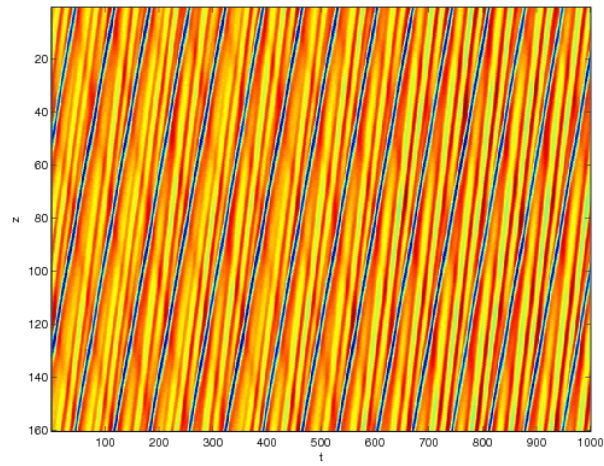
Le nombre de Rayleigh au-dessus duquel les solitons sont observés ne dépend pas de la hauteur du canal et semble être autour de $Ra = 2.7 \cdot 10^5$. En revanche le nombre de structures localisées dépend de la hauteur du canal. Nous avons identifié une hauteur critique $H = 6H_{ref}$ au-dessus de laquelle on passe de une à deux structures (Figs. 5a et 5b). Lorsque on augmente encore la hauteur du canal, l'espacement entre les structures n'est pas forcément constant.

6 Conclusion

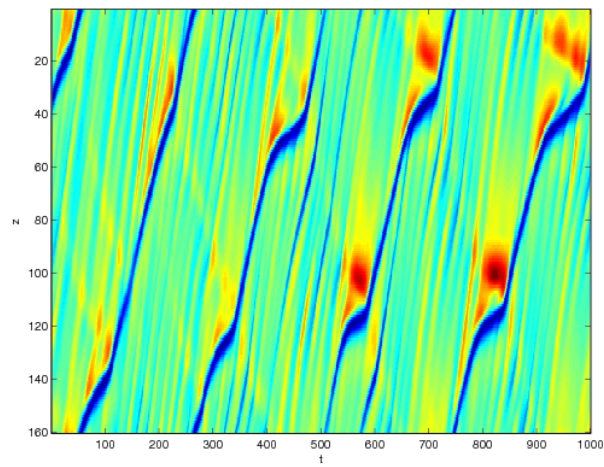
Nous avons étudié la simulation numérique d'un canal différentiellement chauffé et stratifié à faible nombre de Prandtl. Nous identifions d'abord un régime chaotique, puis au-delà d'un second seuil, un régime plus organisé, caractérisé par la présence de structures de type solitons. Nous avons comparé les observations de la simulation numérique avec les prédictions d'un modèle de Ginzburg-Landau et obtenu certains points de convergence. Nous souhaitons à présent mieux comprendre l'origine des solutions cnoidales. Une comparaison avec le cas tridimensionnel est également prévue.



(a) $Ra = 2.5 \cdot 10^5$

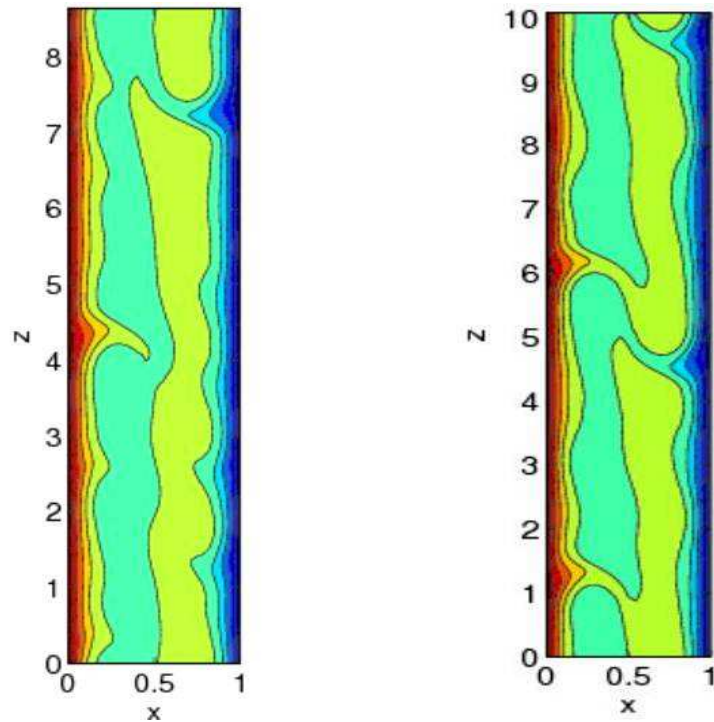


(b) $Ra = 2.7 \cdot 10^5$



(c) $Ra = 3.4 \cdot 10^5$

FIG. 4. Diagrammes spatio-temporel le long d'une ligne verticale $x = 0.98$ dans un canal de hauteur $H = 7H_c$.



(a) Dans un canal de hauteur $H = 6H_c$ (b) Dans un canal de hauteur $H = 7H_c$

FIG. 5. Température instantanée à $Ra = 2.7 \cdot 10^5$.

Références

1. A. NEWELL & J. WHITEHEAD, Finite band width, finite amplitude convection, *Journal of Fluid Mechanics*, **38**, 279–303 (1969).
2. J. T. STUART & R.C. DIPRIMA, The Eckhaus instability and Benjamin-Feir resonance mechanisms, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **362**, 27, 1978.
3. P. MANNEVILLE, *Dissipative structures and weak turbulence*, Academic New York, (1990).
4. S. XIN, *Simulations Numériques de Convection Naturelle Turbulente*. PhD thesis, LIMSI — Université Paris-Sud, 1993.
5. R.F. BERGHOLZ, Instability of steady natural convection in a vertical fluid layer, *Journal of Fluid Mechanics*, **84**, 743–768 (1978).
6. B. PODVIN & P. LE QUÉRÉ, Instabilités dans un canal stratifié différentiellement chauffé, *Technical Report*, LIMSI-CNRS, 2011.
7. N. BEKKI & K. NOZAKI, Formations of spatial patterns and holes in the generalized Ginzburg-Landau equation, *Physics Letters A*, **110** (3), 133–135 (1985).

Fortelling catastrophes ?

Yves Pomeau¹, Martine Le Berre², Jean-Louis Le Mouél³, Clément Narteau³ & Patrice Fromy⁴

¹ Department of Mathematics, University of Arizona, Tucson, USA.

² Institut des Sciences Moléculaires d'Orsay ISMO-CNRS, Univ. Paris-Sud, Bat. 210, 91405 Orsay Cedex.

³ Institut de Physique du Globe de Paris, 1 rue Jussieu, 75238 Paris, Cedex 05.

⁴ Direction Informatique, Univ. Paris-Sud, Bat. 210, 91405 Orsay Cedex.

Martine.le-berre@u-psud.fr

Résumé. Nous proposons un modèle générique de bifurcation nœud-col pour décrire des transitions rapides d'amplitude finie qui apparaissent par exemple en géophysique. Les transitions sont génériquement précédées par une phase annonciatrice, moins rapide. Lorsqu'une source extérieure de bruit perturbe la transition, nous montrons que les propriétés statistiques des fluctuations sont modifiées *avant la transition*, ce qui pourrait être utilisé comme signe précurseur de la catastrophe.

Abstract. A generic saddle-node bifurcation is proposed to modelize fast transitions of finite amplitude arising in geophysical (and perhaps other) contexts, when they result from the intrinsic dynamics of the system. In this model, if an external source of noise exist, the correlation length of the fluctuations increases before the transition, and its spectrum tends to drift towards lower frequencies. This change in the fluctuations could be a way of detecting catastrophic events before they happen.

Earthquakes, like volcanic eruptions as well as other physical phenomena and perhaps also some kinds of socio-economical "revolutions", show an abrupt transition from one state to another. We consider cases where this transition is intrinsic (not the result of an excitation from outside) and dynamical in the sense that, as a parameter changes slowly, the system jumps by a finite amount in a time much shorter than the typical time of evolution of the external parameter. In earthquake physics, this typical time of evolution, the earthquake recurrence time, is on geological scales of plate tectonics although the time scale of seismic ruptures is within the second to minute range [1]. Our basic assumption is that, as a dynamical system, an earthquake shows a "dynamical saddle-node" bifurcation. At the bifurcation point, a pair of fixed points, one locally stable the other locally unstable, merge and vanish as a control parameter varies. Take a damped dynamical system, with a coordinate $x(t)$ solution of the equation

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (1)$$

In this equation $V(x)$ is a potential. In the geophysical context of earthquakes, the scalar variable x could be the relative displacement across the fault. The equation (1) is too general to be very helpful. However, as time varies slowly, it may describe a saddle-node bifurcation where a stable equilibrium disappears, assuming that V depends slowly on time in a prescribed way, to become a function $V(x, t)$. Near the transition, one may use a mathematical picture which is correct for a short time around the transition if the potential $V(x, t)$ is a smooth function (see below for what happens beyond this local study).

Assume first that $V(\cdot)$ does not depend explicitly on time and takes the form

$$V(x) = -\left(\frac{1}{3}x^3 + bx\right), \quad (2)$$

with b real constant (for the moment). For b negative $V(x)$ has two real extrema (*i.e.* the roots of $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$), one $-\sqrt{-b}$ is a stable equilibrium, the other, $\sqrt{-b}$, is an unstable equilibrium. For $b = 0$ the two equilibria merge and disappear for b positive, see Figure (1-a). This is the saddle-node bifurcation. The

shape of $V(x)$ near $x = 0$ and for b small is universal : for a given smooth $V(x)$ showing this saddle-node bifurcation, one can always rescale time and external parameter to find the "local" problem in this form.

The extension to time dependent variation of the control parameter b goes as follows. If b is a smooth function of time, one can assume that $b(t)$ crosses the critical value, *i.e.* zero in the present case, at time zero in such a way that $b(t) = at + \dots$ with a non zero constant, and the dots being for higher terms in the Taylor expansion of $b(t)$. For t and x close to zero, after elementary rescaling, one can represent the dynamical system (1), close to the saddle-node bifurcation, by an "universal" parameterless equation

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t. \quad (3)$$

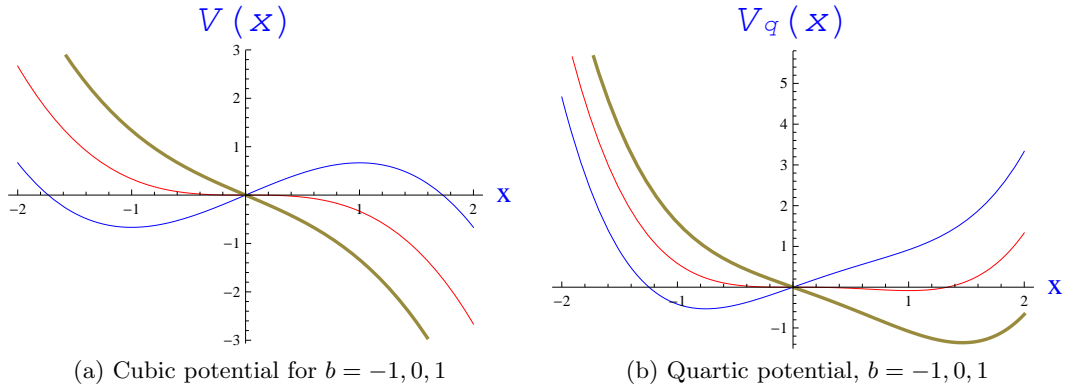


FIG. 1. Cubic (a) and quartic (b) potentials.

Outside of the neighborhood of $x = 0$, the solution of (1) depends on other parameters like the one defining $V(\cdot)$ far from $x = 0$, as studied below.

Let first consider what happens close to the saddle-node bifurcation. We look for a solution of equation (3) transiting from the "stable" fixed point at "large" negative times to the rolling down one towards positive value of x at positive times. This solution behaves like $x(t) \approx -\sqrt{-t}$ at large negative times. The equation (3) is of the Riccati type and can be integrated by introducing the function $y(t)$ such that $x(t) = -\frac{y'}{y}$ where $y' = \frac{dy}{dt}$ and $y(t)$ is a solution of Airy's equation $y'' + ty = 0$. The solution relevant with the given condition for $x(t)$ at $t \rightarrow -\infty$, is the Airy function $Ai(-t)$ which writes $Y(t) = Ai(-t) = \int_0^{+\infty} \cos(\frac{u^3}{3} - ut) du$ and leads to the curve $x(t)$ drawn on Figure(2a).

Yet we have only solved the transient problem near the saddle-node bifurcation. The transition ends-up when t becomes equal to the first zero of the Airy function $Ai(-t)$, corresponding to a divergence of the original $x(t)$. Let t_c be this critical value of t , *i.e.* the smallest root of $Y(t) = 0$, a pure number, about $t_c \approx 2.338$, and let us look at the behaviour of $x(t)$ just before this transition. From the Laurent expansion of $Y(t)$ close to t_c , and returning to the original variable $x(t)$, one obtains $x(t) \approx \frac{1}{t_c - t} - \frac{t_c}{3}(t_c - t) \dots$

As this solution diverges, it loses its validity because the "universal" dynamical equation (3) was derived under the condition that x remains close to zero. This local theory cannot deal with finite variations away from the critical conditions, therefore we shall add finite amplitude effects to limit the growth of the instability after the transition. We shall study now two questions, first the response of this dynamical system to an external noise source, then the dynamics of a system showing a saddle-node bifurcation of the type just studied and reaching a new stable fixed point after this bifurcation.

We explore first the response of our system to a small external noise, and search whether the response to the noise changes qualitatively and so could be a signal ahead of the transition. Let us consider the equation (3) with a small noise added, so that equation (3) is replaced by

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t + \epsilon \zeta(t), \quad (4)$$

where $\zeta(t)$ is a random function of time, and ϵ a small factor. In the limit ϵ small, one can solve equation (4) by expansion in powers of ϵ , $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \dots$ where $x_0(t) = -\frac{Y'(t)}{Y(t)}$. The linear response to the noise is

$$x_1(t) = \frac{1}{Y^2(t)} \int_{t_0}^t d\tilde{t} \zeta(\tilde{t}) Y^2(\tilde{t}). \quad (5)$$

Because $Y^2(\tilde{t})$ tends rapidly to zero as (\tilde{t}) tends to minus infinity, one can take $t_0 = -\infty$ to get rid of the effect of the initial conditions.

Let us take a delta-correlated (or white) noise, such that $\langle \zeta(t_a)\zeta(t_b) \rangle = \delta(t_a - t_b)$. The correlation function of $x_1(t)$ is given by $\langle x_1(t)x_1(t') \rangle = \frac{1}{Y^2(t)Y^2(t')} \int_{-\infty}^{\inf(t,t')} d\tilde{t} Y^4(\tilde{t})$, whose behavior for large negative values of both t and t' , is derived from the asymptotic expression of the Airy function, $Ai(-t) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}(-t)^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}(-t)^{1/4}}$. Setting $w = \frac{\tilde{t}}{t}$, and $F(w) = 1 - w^{3/2}$, the variance $\sigma^2 = \langle (x(t) - x_0(t))^2 \rangle$ of the fluctuations writes $\langle x_1(t)^2 \rangle \approx (-t) \int_1^\infty \frac{dw}{w} e^{\frac{8}{3}(-t)^{3/2}F(w)}$. In the limit $(-t) \rightarrow \infty$ the integral is concentrated near $w = 1$ so that

$$\langle x_1(t)^2 \rangle \approx \frac{1}{4}(-t)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

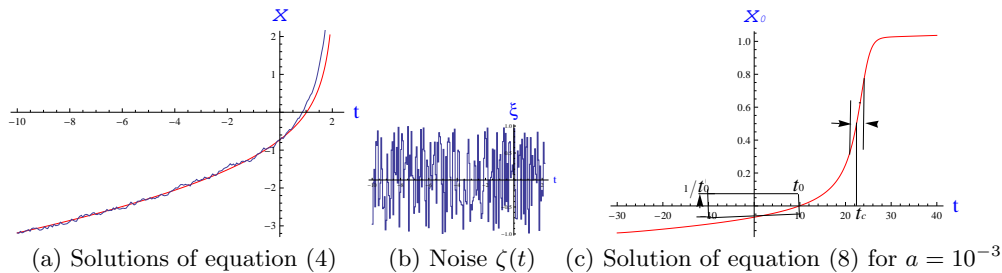


FIG. 2. (a) Solutions of equation (4), with and without noise, $\epsilon = 0$ (smooth curve) and $\epsilon = 1$ (noisy curve). (b) Noise $\zeta(t)$. (c) Solution of equation (8) for $a = 10^{-3}$. The rectangle around the origin defines the region $-t_0 < t < t_0$ and $-1/t_0 < x < 1/t_0$, with $t_0 \sim a^{-1/3}$. The critical time is $t_c \sim 2.34 t_0$. The two vertical lines inserted between the two arrows delimitate the large slope time duration, of order unity.

which shows that the fluctuations increase as time goes on, some time before the transition itself. As the transition approaches, the variance of the fluctuations increases close to the critical time t_c , because $Y(t_c) = 0$.

Because of the divergence of the solution at $t = t_c$, it does not make sense to describe the dynamical behavior of the fluctuations due to the external noise very close to t_c . This unbounded growth is a consequence of the *local* cubic form of $V(x)$ as expanded near $x = 0$, which is valid around $x = 0$ only, in obvious contradiction with the fact that $x(t)$ diverges. To suppress the divergence of $x(t)$ after the saddle-node bifurcation we add a stabilizing (positive) term to the potential $V(x)$ which becomes quartic,

$$V_q(x) = -\frac{x^3}{3} - bx + \frac{x^4}{4}, \quad (7)$$

as drawn in Figure(1-b). Because of the growth of $V_q(x)$ at infinity, like x^4 , the solution of the differential equation $\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial V_q}{\partial x} = b + x^2 - x^3$, does not diverge at finite time. The equation (7) can be written in the given scaled form, provided the coefficient of x^4 is positive. For such a potential one parameter only remains. In equation (7) the coefficient is chosen as b , the one of the linear term. For $b = 0$ the dynamical system is exactly at the saddle-node bifurcation, because at $b = x = 0$ the first and second derivative of $V_q(x)$ both vanish, but not the third one. Contrary to the case of the pure cubic potential, this system has always, that is for any value of b , a stable fixed point beyond the pair of fixed points collapsing at the saddle-node bifurcation. This makes it a fair candidate for describing the dynamical saddle-node bifurcation without blow-up.

As in the previous case, we shall look now at the case of a time dependent b , that will be taken as $b = at$ with a positive constant. Because of the rescaling of the cubic and quartic term, the parameter a cannot be eliminated (another possibility is to put a parameter in front of the cubic term). For the potential $V_q(x) = -\frac{x^3}{3} - atx + \frac{x^4}{4}$ we shall analyse the solution of the dynamical equation

$$\frac{dx}{dt} = at + x^2 - x^3, \quad (8)$$

tending at large times to the quasi-equilibrium point $x = (at)^{1/3}$, t being considered as a parameter, see Figure(2-c). Moreover we consider the limit a small, which could describe a wide range of slip phenomena [2], as earthquakes where a is generally very small, of order 10^{-9} (see below). In this limit we show first that there are three characteristic time intervals, depending how x is close to zero.

The long time scale is the average recurrence time of an earthquake at the same site along the fault. It is typically of order $t_b^{\text{phys}} \sim 200$ years. In our model it is the time needed for the potential $V_q(x, t)$ to change significantly, to move from a pair of fixed points to a saddle-node bifurcation. Because time enters in $V_q(x, t)$ through the combination (at) , the adimensional time needed for a change of shape of V_q is of order $t_b \sim a^{-1}$.

The short time t_{eqk} is of order unity in our model equation (8) as stated in the next paragraph. It is the duration of the abrupt change of the slope of the solution $x(t)$. This short time corresponds to the dynamic rupture duration, which is typically of order ten seconds for a magnitude 6 earthquake, $t_{\text{eqk}}^{\text{phys}} \sim 10s$ [1]. Therefore the ratio of these two time scales $\frac{t_{\text{eqk}}^{\text{phys}}}{t_b^{\text{phys}}} = \frac{t_{\text{eqk}}}{t_b}$, is small as $a = 1.6 \cdot 10^{-9}$ in the geophysical context.

There is another time scale, t_0 , the time interval standing before the transition, and close to it, during which the potential is very flat, while the solution has not jumped. During this time, x and at are much smaller than unity, then the cubic term on the right-hand side of equation (8) is negligible. In this range one recovers the universal equation of the dynamical saddle-node bifurcation (3) by taking $X = xa^{-1/3}$ and $T = ta^{1/3}$, with the boundary condition $X(T) \approx -\sqrt{-T}$ at T tending to minus infinity. This property concerns the rectangular domain drawn on Figure (2-c), where x is small, $x \sim a^{1/3}$, and t extends from $-a^{-1/3}$ to $t \sim a^{-1/3}$, located before the abrupt increase. Therefore the time extension of this domain introduces the intermediate time scale, $t_0 \sim a^{-1/3}$, long compared to unity (the adimensional time scale t_{eqk} for the duration of a seismic rupture) and small compared to $t_b = a^{-1}$, the average recurrence time between earthquakes.

Let us prove that the short time is of order unity, by matching the solution $X(T)$ of the universal equation to the solution of equation (9) below, in the vicinity of the critical point $t_c(a) = a^{-1/3} t_c$. Because $X(T)$ behaves like $\frac{1}{t_c - T}$ before it diverges, it follows that the solution $x(t)$ behaves as $\approx \frac{1}{a^{-1/3}t_c - t}$ for "large" values of $\delta t = t - a^{-1/3}t_c$ before the critical time. Using δt in this development as time variable, $x(\delta t)$ becomes of order one when δt becomes of order one too. When this happens, the term at in equation (8) is negligible, therefore the solution of this equation which can be matched with the solution near the bifurcation is the solution of the integrable equation

$$\frac{dx(\delta t)}{d(\delta t)} = x(\delta t)^2 - x(\delta t)^3, \quad (9)$$

with the asymptotic behavior for very large negative times $x(\delta t) \sim -\frac{1}{\delta t}$. This equation shows that the time scale for the earthquake rupture is of order one, because it has no explicit dependence with respect to the small parameter a . This result is confirmed by the numerics : For a small we find that the rising time of $x(t)$ close to $t_c(a)$ (defined as the half-width of the slope $\frac{dx}{dt}$ solution of equation (8)) is $t_{\text{eqk}} \sim 2.5$, independent of a . From the observational point of view, the catastrophe takes place during this time t_{eqk} of order one, because the displacement is of order one then, compared to the displacement of order $a^{1/3}$ taking place during time $a^{-1/3}$ typical of the "universal" transition process. The two solutions match in the range $1 \ll (-\delta t) \ll a^{-1/3}$. Supposing that the physical fast time scale for earthquakes is $t_{\text{eqk}}^{\text{phys}} \sim 10s$, the intermediate time scale is $t_0^{\text{phys}} \sim a^{-1/3}t_{\text{eqk}}^{\text{phys}}$, which is a few hours for $a = 10^{-9}$.

With a noise source added, the dynamical equation (1) becomes,

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - x^3 + at + \epsilon\zeta(t). \quad (10)$$

Actually the effective noise amplitude is not equal to ϵ close to the saddle-node, but depends on the value of the parameter a . Indeed for $|t| \leq t_0$, the cubic term in equation (10) is negligible, and the equation reduces to

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + at + \epsilon\zeta(t). \quad (11)$$

which may be written on a form $\frac{dX}{dT} = X^2 + T + \tilde{\epsilon}(a)\zeta(t)$, by setting $X = xa^{-1/3}$, $T = ta^{1/3}$, and $\tilde{\epsilon}(a) = \epsilon a^{-2/3}$. Therefore the effective noise is larger than ϵ in the rectangular domain of figure (2-c).

Let us study the fluctuations of the solution $x(t)$ of equation (11). For a small noise input, the solution may be expanded in power of ϵ as above. At first order it gives

$$\frac{dx_1}{dt} = [2x_0(t) - 3x_0^2(t)]x_1(t) + \zeta(t), \quad (12)$$

whose solution is formally

$$x_1(t) = \int_{t_0}^t d\tilde{t} \zeta(\tilde{t}) \exp[g(t) - g(\tilde{t})], \quad (13)$$

where $g(t)$ is the time integral of the second derivative of the potential $-\frac{d^2V_g(x)}{dx^2}$, $g(t) = \int_{t_0}^t [2x_0(u) - 3x_0^2(u)]$. The standard deviation $\sigma_{x_1}(t)$ has to be calculated numerically. We expect it to display the same behavior as for the cubic case in the whole domain where $x(t) \ll 1$, i.e. before the transition, and close to it, because the potential is cubic in this region. After the transition, we expect that the fluctuation decreases, because the solution without noise becomes quasi-steady. This is confirmed by the numerics : as for the cubic potential, the fluctuations strongly increase close to the critical time t_c . With respect to time, the maximum of σ_{x_1} occurs at time $t_c(a)$ for small noise. Therefore the variance of the signal fluctuations cannot be used as a precursor for predicting the transition. Such a correlation between the standard deviation of the fluctuations and the sudden change of the solution has been reported recently [3] where the GPS geodetic signal, which can be assimilated to our $x_0(t)$, is shown to be strongly correlated to the seismic signal (which we see as related to the fluctuations $x_1(t)$). Note that when the noise increases, the growth of the fluctuations occurs earlier and earlier, their maximum progressively shifting before t_c . This shift becomes visible only for an effective noise amplitude larger than unity, that is physically outside the range of noise values.

Consider the case of small effective noise, where the correlation function and the spectrum of the fluctuations $x(t) - x_0(t)$ are well described by the correlation function and spectrum of $x_1(t)$, respectively. The calculation of these functions requires some care because the system is not in a statistically steady state. Therefore the spectral density of the fluctuations depends on time and the correlation function

$$\Gamma_{x_1}(t, \tau) = \langle x_1(t - \tau/2)x_1(t + \tau/2) \rangle, \quad (14)$$

depends both on t and on τ . A time dependent spectrum is formally defined by the (real) Wigner transform

$$S_{x_1}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-2i\pi f\tau} \langle x_1(t - \tau/2)x_1(t + \tau/2) \rangle, \quad (15)$$

that has to be modified for numerical applications, by introducing a slipping window.

The width τ_x of the correlation function and the spectral width Δf are reported in figures (3) in a range of time of few t_0 around the transition, together with the solution $x_0(t)$ drawn in solid red line for covering. Both widths show an interesting behavior which provides the same result. Consider first the left curve, obtained for the parameter value $a = 10^{-9}$, typical for earthquake phenomena, as discussed above. The figure displays a strong increase of the correlation time τ_x of $x(t) - x_0(t)$ in the intermediate

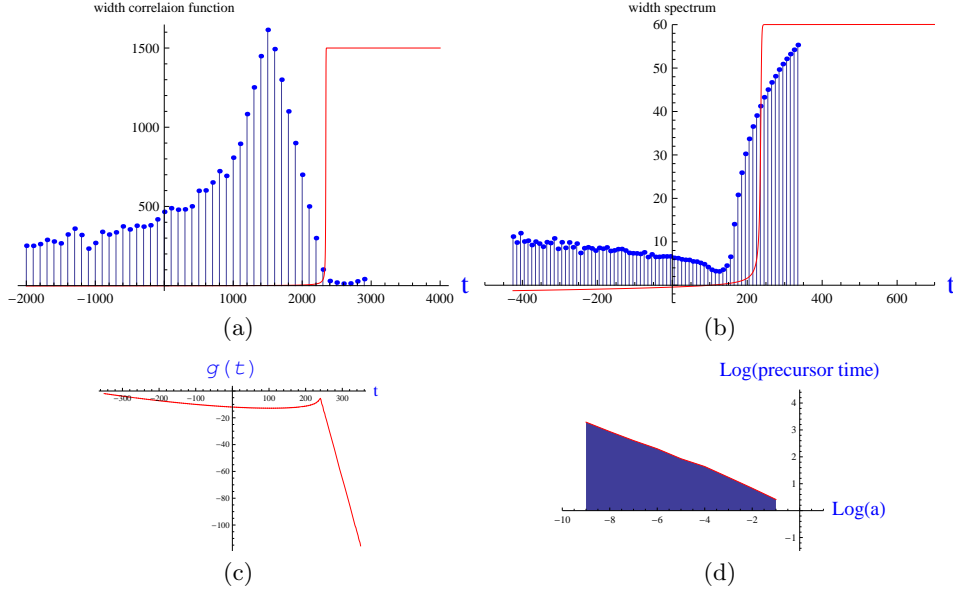


FIG. 3. (a) Width (in arbitrary units) of the correlation function of the fluctuation $x(t) - x_0(t)$ for $a = 10^{-9}$ ($t_0 = 10^3$); (b) Spectral width (a. u.) and (c) flat shape of $g(t)$ before the critical time, for $a = 10^{-6}$ ($t_0 = 10^2$); (d) "Precursor time" $t_c(a) - t_{1/3}$ versus a , in Log scale ($t_{1/3}$ being the time where the width is $\frac{1}{3}$ of its maximum value, before the catastrophe time $t_c(a)$).

time range, reaching its maximum value at time $t \sim 1.5 t_0$ (which was estimated as a couple of hours before the earthquake), then it displays a rapid decrease before the critical time $t_c(a) \sim 2340$. In addition, we observe a slow growth of τ_x as t increases from large negative values (not shown in the figure), τ_x increasing by a factor ten for $-100t_0 < t < 0$, that corresponds to a time interval about one week. Such a remarkable behavior should be used as precursor. The increase of the correlation length *before* the catastrophe can be understood when looking at the formal expression (13). The second derivative of the potential vanishes at $t = t_0$, that leads to the flatness of $g(t)$ in the whole domain $0 < t < t_c(a)$, as shown in figure (3-c). Figure (3-d) shows that the "precursor time" (see caption) is proportional to t_0 . As for the spectral width, the result is just the opposite : it continuously decreases from large negative time, until the time $t \sim 1.5t_0$, where it suddenly grows. The slow decrease of Δf corresponding to a slow shift of the spectrum towards low frequencies, is followed by a rapid spectral broadening at the end of the intermediate domain, before the transition time $t_c(a)$. The two stages of the width change are both important, because they occur *before the transition*.

The growth of the fluctuations and their shift to lower frequencies can be understood as follows. As the transition approaches the potential $V(x, t)$ becomes flatter and flatter, making weaker and weaker the restoring force toward the equilibrium. Therefore, at constant noise source, the amplitude of the fluctuations driven by this noise source will grow because the damping is less and less efficient. Moreover, the typical time scale for this damping will get larger and larger because of the decreasing stiffness of the potential, which will favour noise at lower and lower frequencies.

Références

1. C. SCHOLZ, *The mechanism of earthquakes and faulting*, Cambridge University Press (1990).
2. Z. PENG & J. GOMBERG, An integrated perspective of the continuum between earthquakes and slow-slip phenomena, *Nature Geoscience*, **3**, 599–607 (2010).
3. M. R. BRUDZINSKI & R. M. ALLEN, Segmentation in episodic tremor and kkip all along cascadia, *Geology*, **35**, 907 (2007).

Modèle de Landau–Langevin pour la description des bandes laminaires-turbulentes dans l’écoulement de Couette plan

Joran Rolland & Paul Manneville

Laboratoire d’hydrodynamique, École polytechnique, route de Saclay, 91128 Palaiseau
 joran.rolland@ladhyx.polytechnique.fr

Résumé. On présente une étude numérique et une modélisation des bandes alternativement laminaires et turbulentes se manifestant dans l’écoulement de Couette plan lors de la transition à la turbulence. L’écoulement laminaire est globalement stable jusqu’à un premier nombre de Reynolds R_g , au dessus duquel la turbulence se maintient sous forme de bandes obliques de grande longueur d’onde. La modulation disparaît au delà d’un deuxième nombre de Reynolds R_t ; le motif est desorganisé pour R proche de R_t . Un paramètre d’ordre est défini pour étudier le motif, et on montre que son comportement peut être modélisé à l’aide d’une équation de Landau avec un bruit blanc additif. En particulier, les fluctuations d’orientation se manifestant près de R_t se comprennent à l’aide du processus à saut tiré du modèle.

Abstract. This paper describes a numerical study and a modelling of the alternately laminar and turbulent oblique bands appearing in transitional plane Couette flow. The laminar flow is globally stable up to a Reynolds number R_g , above which turbulence is self-sustained and displays a long wavelength oblique modulation. The modulation disappears when R reaches R_t . For R close to R_t the pattern loses organisation. An order parameter can be defined to measure the modulation, and we show that its behaviour can be modeled by a Landau equation with additive white noise. The orientation fluctuations seen for R close to R_t can be understood using the corresponding jump process.

1 Introduction

Les écoulements cisailés peuvent maintenir de la turbulence bien en deçà du seuil pour lequel l’écoulement de base est linéairement instable; en particulier, l’écoulement de Couette plan, l’écoulement entre deux plaques séparées d’une distance $2h$ en mouvement à la vitesse $\pm U$, est linéairement stable pour tout $R = hU/\nu$, bien que la turbulence puisse se maintenir sous la forme de bandes obliques de grande longueur d’onde¹ à partir de $R_g = 325$ et jusqu’à $R_t = 410$ valeur au delà de laquelle la turbulence apparait homogène [1]. Prigent *et al.* ont montré que ces bandes sont similaires à la spirale turbulente de l’écoulement de Taylor–Couette contra-rotatif, mais n’ont pu faire qu’une étude qualitative du cas de Couette plan. Le motif a pu être reproduit numériquement, par exemple par Barkley *et al.*[2] qui ont choisi un domaine périodique incliné, adapté à l’obliquité de la bande, qui permet d’utiliser des domaines de taille relativement petite, mais contraint l’orientation. Cependant, aucune approche de type “formation de motif” n’avait été menée à terme jusqu’à présent.

On utilise une procédure de modélisation basée sur des simulations numériques directes (DNS) des équations de Navier–Stokes, pour laquelle on opère une baisse contrôlée de la résolution, en particulier dans la direction orthogonale aux parois [3]. Ceci permet un échantillonnage avec des temps et des moyens de calcul raisonnables. En particulier, on montre que le prix à payer est un abaissement des seuils R_g et R_t (respectivement 275 et 350 pour une résolution $N_y = 15$).

2 Motif à l’équilibre

On étudie des domaines périodiques de tailles $L_x \times L_z$, en unité de h , choisies en fonction des longueurs d’onde du motif déterminées expérimentalements, $\lambda_x = 110$ et $45 \leq \lambda_z \leq 85$ [1].

1. Par grande longueur d’onde, il faut comprendre grande par rapport à la longueur d’onde transverse des structures cohérentes qui composent la région turbulente, de l’ordre de h

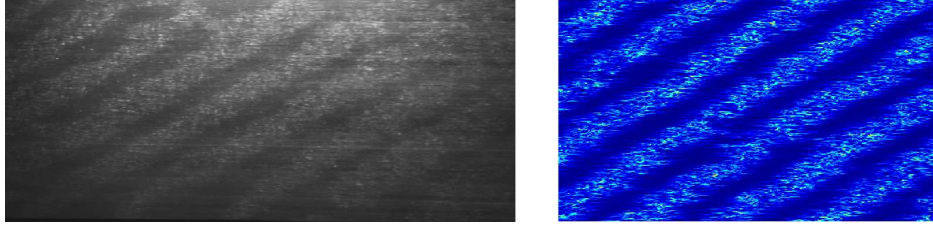


FIG. 1. Photographie du dispositif expérimental (A. Prigent, [1] gauche) $R = 358$, exemple de bandes dans un grand domaine (niveaux de couleur de \mathbf{u}^2 , perturbation à l'écoulement de base, droite, $L_x \times L_z = 432 \times 256$, $R = 290$).

En partant du mode de Fourier fondamental du motif, repéré par n_x et n_z , on peut définir un paramètre d'ordre instantané [4] :

$$m_{\pm}(t) = \left(\int_{y=-1}^1 dy |\hat{u}_x|^2(n_x, y, \pm n_z, t) \right)^{0.5},$$

qu'on ne repère dans la suite que par le signe de n_z , le nombre de bandes présente dans le domaine ne variant pas dans la grande majorité des cas. Le paramètre d'ordre m_{\pm} quantifie la modulation de la turbulence dans l'écoulement, le choix du fondamental est suffisant, la modulation étant quasi sinusoïdale [2,4]. La position du motif dans l'écoulement est déterminée par la phase ϕ de \hat{u}_x , prise à n'importe quelle ordonnée y , le déphasage entre les différentes ordonnées étant constant. Le paramètre d'ordre m_{\pm} étant une quantité fluctuant dans le temps, on échantillonne sa fonction de densité de probabilité (PDF). À partir de la PDF (Fig. 2a), on peut déterminer la moyenne M de m_{\pm} pour chaque valeur des paramètres de contrôle. Le décalage entre le maximum de la PDF et 0 est typique d'une variable aléatoire complexe, qui a une probabilité nulle de s'annuler, et dont la phase est, en conséquence, toujours bien définie. Pour suivre la dynamique de la moyenne et des fluctuations de la phase², on découpe une longue série temporelle en N échantillons de durée T sur lesquels on réalise une moyenne d'ensemble :

$$\langle \phi \rangle(t) = \sum_{j=0}^N \phi(t + jT) - \phi(jT),$$

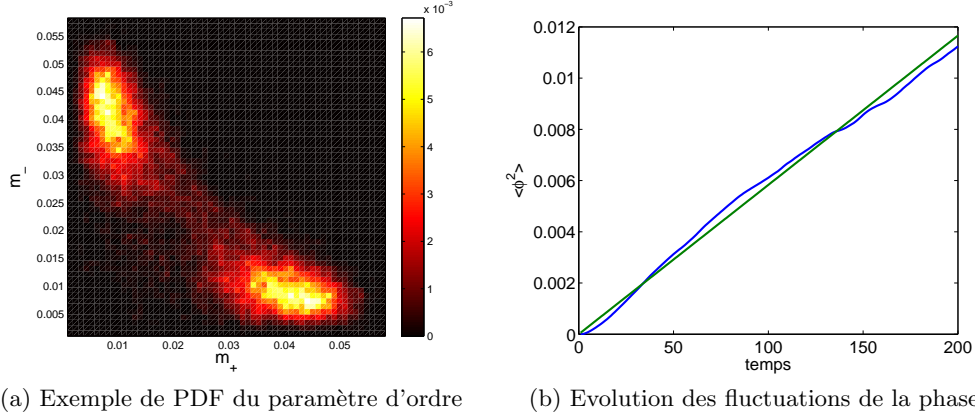
$$\langle (\phi - \langle \phi \rangle)^2 \rangle(t) = \sum_{i=0}^N (\phi(t + iT) - \phi(iT))^2 - \langle \phi \rangle^2(t).$$

On remarque que la moyenne de la phase est sensiblement nulle, tandis que ses fluctuations croissent linéairement avec le temps (Fig. 2b), comportement typique d'une marche aléatoire. Un coefficient de diffusion est déterminé à partir de la pente de $\langle \phi^2 \rangle(t)$; l'opération ne peut être réalisée pour toutes les valeurs des paramètres de contrôle considérées en raison des durées des séries temporelles nécessaires.

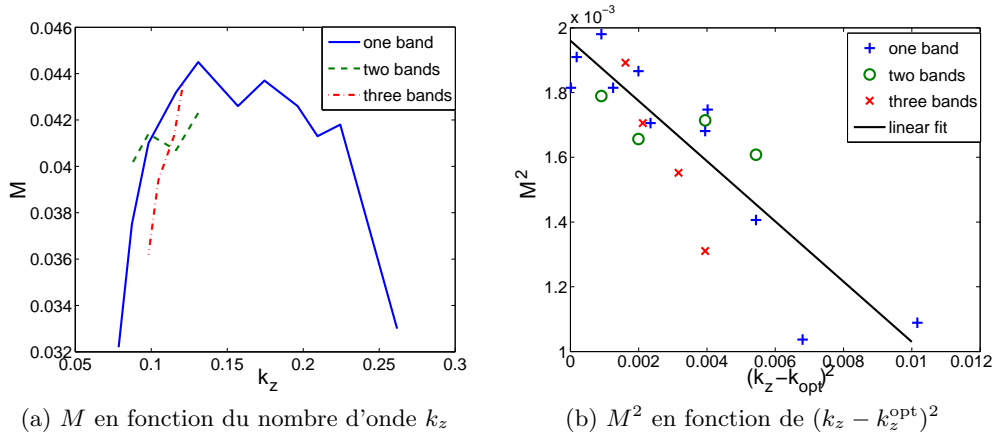
Nous avons réalisé une étude paramétrique, en fonction des nombres d'onde $k_{x,z} = 2\pi n_{x,z}/L_{x,z}$ en variant la taille du domaine périodique, L_x et L_z . On étudie la dépendance en L_x (resp. L_z) à L_z (resp. L_x) et R constants (ici $R = 315$ pour L_z et $R = 290, 315$ et 330 pour L_x). On observe une à trois bandes en faisant varier L_z de 24 à 192 et une à deux bandes en faisant varier L_x de 55 à 170. La compétition entre une et deux bandes est décrite dans la suite (§ 3). dans chaque cas, on note l'existence d'un nombre d'onde optimal $k_{x,z}^{\text{opt}}$ pour lequel M est maximum, de plus la dépendance de M^2 en $(k_{x,z} - k_{x,z}^{\text{opt}})^2$ est en bonne approximation linéaire pour les plus grandes valeurs de R (315 et 330). Plus loin du seuil ($R = 290$) on s'écarte de ce comportement; on note de plus un décalage du nombre d'onde optimal.

On étudie la dépendance en nombre de Reynolds R pour deux tailles fixes $L_x \times L_z = 110 \times 32$ et 128×64 . Comme noté précédemment, l'augmentation du nombre de Reynolds provoque une réduction

2. On ne s'intéresse qu'à un motif développé dont l'orientation ne fluctue pas, on peut abandonner les indices \pm



(a) Exemple de PDF du paramètre d’ordre (b) Evolution des fluctuations de la phase
 FIG. 2. Fonction de densité de probabilité du paramètre d’ordre et évolution des fluctuations de la phase.



(a) M en fonction du nombre d’onde k_z (b) M^2 en fonction de $(k_z - k_z^{\text{opt}})^2$
 FIG. 3. Paramètres d’ordre.

de la modulation et une augmentation de la fraction turbulente jusqu’à la disparition du motif [1,2,4]. Près de R_t la compétition entre orientations se manifeste (les temps de résidence deviennent observables, § 3), de plus, très près du seuil, la modulation peut disparaître de manière transitoire. Nous avons étudié quantitativement l’évolution de la modulation à l’aide du paramètre d’ordre moyen, son écart type n’apportant qu’une information quantitative. Nous avons identifié trois plages de nombre de Reynolds : la première, pour les plus faibles valeurs de R voit $M(R_t - R)$ saturer, son comportement est fortement non-linéaire (par exemple dans sa dépendance en $k_x - k_x^{\text{opt}}$ [4]). La seconde, à nombres de Reynolds intermédiaire, pour laquelle M^2 dépend linéairement de l’écart au seuil $R_t - R$. La troisième, pour les plus grandes valeurs de R dans laquelle se manifeste les fluctuations d’orientation et la réapparition de la turbulence uniforme.

3 Fluctuations d’orientation et de longueur d’onde

Pour des valeurs particulières des paramètres de contrôle, le système va subir des changements brutaux d’orientation et dans certains cas de longueur d’onde. Ces changements peuvent être caractérisés par le temps de résidence, passé dans chaque état. On détermine le temps de résidence dans un état donné (orientation et longueur d’onde) à l’aide des séries temporelles de m_{\pm} , éventuellement de $m_{\pm 1,2}$ s’il y a compétition entre orientations et longueurs d’onde [4]. Une procédure de seuillage permet déterminer le temps de résidence T , et on peut échantillonner des PDF cumulées $1 - Q$ (Fig. 5). La dépendance linéaire

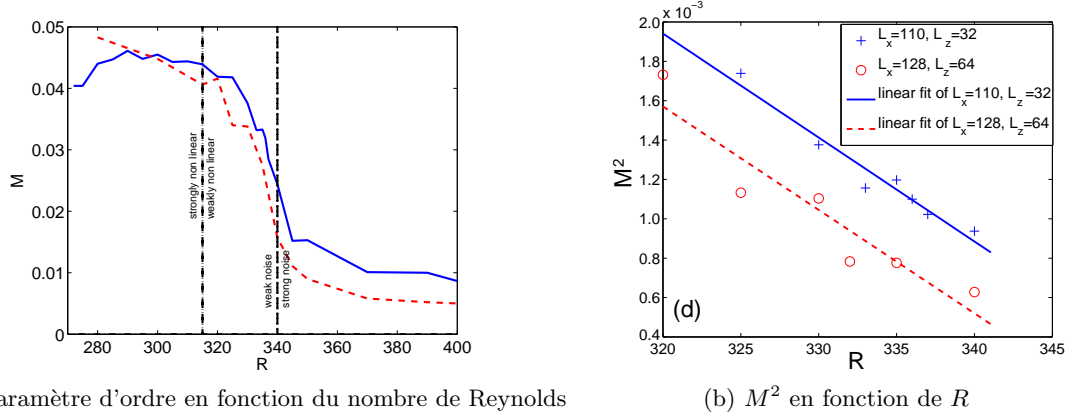


FIG. 4. Paramètre d'ordre en fonction du nombre de Reynolds pour les deux tailles considérées, les lignes en pointillés indiquent approximativement les limites entre les trois régimes (a), M^2 en fonction de R (b).

en T est typique d'une loi de type Poisson, et le temps de résidence moyen peut alors être déterminé [5]. Nous l'avons spécifiquement étudiée pour la compétition entre orientation et nombre d'onde pour une seule valeur de R , et les fluctuations d'orientation pour R proche de R_t . Dans le second cas, on réalise une étude systématique de la dépendance en R (Fig. 5). Le temps de résidence croît exponentiellement avec R . L'échantillonnage nécessaire pour une estimation précise devient extrêmement long pour les valeurs de R les plus basses.

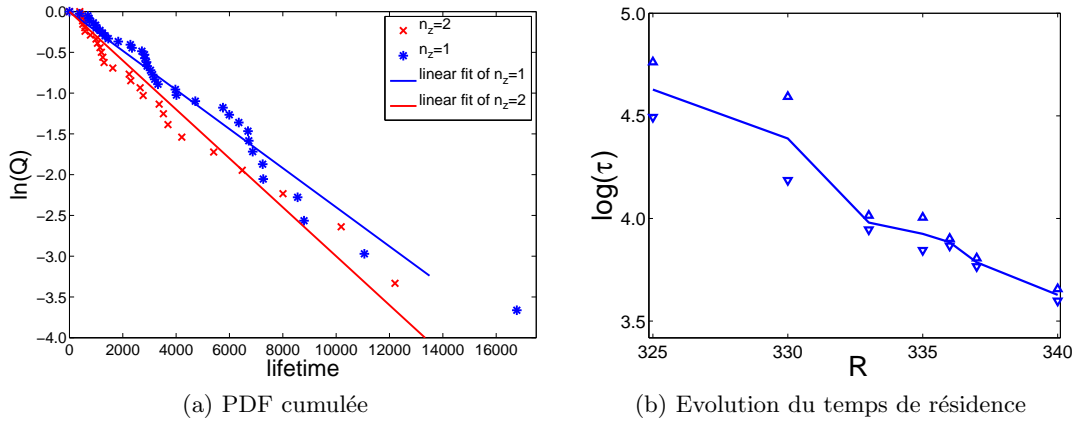


FIG. 5. PDF cumulée de temps de résidence pour une taille donnée (a) Évolution du temps de résidence moyen en fonction du nombre de Reynolds (b).

4 Modèle de Landau–Langevin

On modélise le système avec pour contrainte la simplicité du modèle ainsi que la représentation de l'ensemble des caractéristiques observées. On suit une approche typique d'une étude de formation de motif [2,4,5]. Le champ de vitesse est exprimé à l'aide de deux paramètres d'ordre A_{\pm} :

$$u_x = A_+(\tilde{x}, y, \tilde{z}, \tilde{t}) \exp(i(k_x x + k_z z)) + A_-(\tilde{x}, y, \tilde{z}, \tilde{t}) \exp(i(k_x x - k_z z)) + c.c.,$$

les variables \tilde{x} , \tilde{z} et \tilde{t} étant “lentes”. Pour un système confiné, et en se basant sur les symétries du système on peut écrire une équation de Landau pour A_{\pm} à l’ordre le plus bas, valide près du seuil R_t :

$$\tau_0 \partial_z A_{\pm} = \left[\underbrace{\left(1 - R/R_t - \xi_x^2 \delta k_x^2 - \zeta_z^2 \delta k_z^2\right)}_{\tilde{\epsilon}} - g_1 |A_{\pm}|^2 - g_2 |A_{\mp}|^2 \right] A_{\pm} + \zeta_{\pm}(t).$$

Le temps τ_0 donne l’échelle de temps caractéristique, $\delta k_{x,z}$ correspond à l’écart au vecteur d’onde optimal, les longueurs de corrélation $\xi_{x,z}$ contrôlent la sélection du nombre d’onde, le paramètre g_1 contrôle l’amplitude à saturation, et g_2 le couplage entre les deux orientations. On décrit un motif oblique pour $g_2/g_1 > 1$. Le bruit additif ζ_{\pm} est supposé gaussien et ses fluctuations données par : $\langle \zeta_{\pm}(t) \zeta_{\pm}(t') \rangle = \alpha^2 \delta(t - t')$. En posant le potentiel :

$$V = -\frac{1}{2} \tilde{\epsilon} (|A_+|^2 + |A_-|^2) + \frac{1}{4} g_1 (|A_+|^4 + |A_-|^4) + g_2 \frac{1}{2} |A_+|^2 |A_-|^2,$$

on peut réécrire la dynamique (en notant les parties réelles et imaginaires par r et i) :

$$\tau_0 \partial_t A_{\pm}^{\pm r,i} = \frac{\partial V}{\partial A_{\pm}^{\pm r,i}} + \zeta_{\pm}(t),$$

et la PDF :

$$\rho(|A_+|, |A_-|) = |A_+| |A_-| \exp(-2V(A_+, A_-)/\alpha^2) / Z,$$

à comparer au résultat de l’expérience numérique sur la Fig. 2.

Dans une approche de type champ moyen, on peut déterminer l’amplitude du mode dominant, au premier ordre non nul en α^2 , pour $\tilde{\epsilon} > 0$ [4] :

$$A_{\pm} = \left(\frac{1 - R/R_t - \xi_x^2 \delta k_x^2 - \zeta_z^2 \delta k_z^2}{g_1} \right) + o(1), \quad A_{\mp} = \frac{\alpha}{\sqrt{2\tilde{\epsilon}(g_2 - g_1)/g_2}} + o(\alpha),$$

qui met en évidence la dépendance attendue dans la limite faiblement non linéaire en l’écart au seuil (linéaire) et en l’écart au nombre d’onde optimal (quadratique), ainsi que la présence du mode non développé autour d’une valeur non nulle ; et pour $R > R_t$, $\tilde{\epsilon} < 0$:

$$A_{\pm} \propto \frac{\alpha}{|\tilde{\epsilon}|} + o(\alpha).$$

On peut écrire l’équation d’évolution de la phase du mode dominant, qui passe d’une variable neutre dans un cas déterministe à une marche aléatoire :

$$\tau_0 \partial_t \phi = \frac{\zeta}{m(t)},$$

d’où l’on tire ses fluctuations :

$$\langle \phi^2 \rangle(t) = \frac{t \alpha^2}{\langle m \rangle + \sigma_m^2}.$$

Ces expressions sont validées par le calcul de la PDF et la simulation du modèle de Landau–Langevin, et permettent une confrontation quantitative aux données des DNS.

En considérant le processus de saut entre les deux minima du potentiel, on peut déterminer le temps de premier passage d’un puit à l’autre du potentiel [5] :

$$\tau = \tau_0 \frac{2\pi\sqrt{2}}{\tilde{\epsilon}} \frac{\sqrt{g_1(g_1 + g_2)}}{g_2 - g_1} \exp\left(\frac{\tilde{\epsilon}^2}{2\alpha^2 g_1} \frac{g_2 - g_1}{g_2 + g_1}\right),$$

expression asymptotique, valable pour des valeurs suffisamment importantes de $\tilde{\epsilon}$. Une intégration numérique du modèle, et une détermination des temps de résidence avec la procédure déjà utilisée pour le traitement de la DNS, permet de mettre en évidence les deux limites : pour des petites valeurs de $\tilde{\epsilon}$, l’expression asymptotique n’est plus valable, pour les plus grandes valeurs de $\tilde{\epsilon}$, l’échantillonnage de temps de résidence devient insuffisant. Le comportement qualitatif du modèle et des DNS est cependant identique en tous points [5].

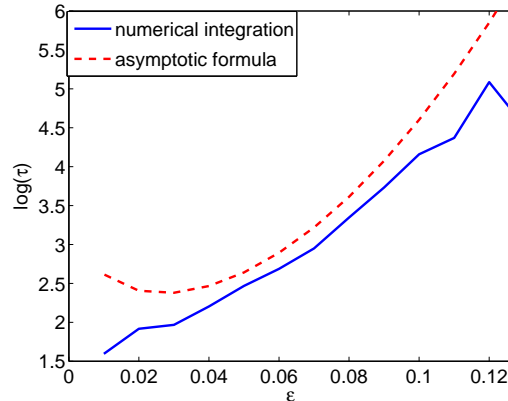


FIG. 6. Évolution du temps de résidence moyen dans le modèle en fonction de l'écart au seuil.

5 Discussion

La confrontation des données des DNS au modèle montre qu'il est tout à fait adapté dans la limite faiblement non linéaire et permet une estimation des coefficients qui se comparent favorablement aux valeurs obtenues par Prigent *et al.* pour le système similaire de Taylor–Couette. Une confrontation directe des temps de résidence provenant de la DNS avec l'expression asymptotique est plus difficile, la plage de R pour laquelle l'estimation de ces temps est possible correspond à des valeurs pour laquelle l'expression asymptotique n'est plus valable. Une discussion des fluctuations d'orientation et de longueur d'onde est possible dans le même cadre, en ajoutant un second couple de paramètres d'ordre complexes, mais le modèle devient moins lisible du fait de l'augmentation du nombre de paramètres. Les systèmes étendus peuvent être décrits par un modèle de Ginzburg–Landau–Langevin. La disparition transitoire de la modulation est elle à comparer au régime intermittent décrit par Barkley *et al.*. De manière plus générale, le système permet d'étudier la formation d'un motif soumis à un bruit, de manière plus accessible que dans le cas d'un motif soumis au bruit thermique.

La procédure de simulation à basse résolution apparaît bien adaptée pour l'étude semi quantitative du motif à très grand rapport d'aspect, et peut être étendue aux autres écoulements cisailés « bidimensionnels » (Taylor–Couette, Poiseuille plan). La comparaison à l'écoulement dans un tube cylindrique est moins claire, du fait de son caractère « unidimensionnel ». Les mécanismes de formation des alternances laminaire-turbulent restent cependant pour l'instant largement inconnus.

Références

1. A. PRIGENT, *La spirale turbulente : motif de grande longueur d'onde dans les écoulements cisailés turbulents*, Thèse de doctorat (2001). — A. PRIGENT, G. GRÉGOIRE, H. CHATÉ & O. DAUCHOT, Long-wavelength modulation of turbulent shear flow, *Physica D*, **174**, 100–113 (2003).
2. D. BARKLEY & L. TUCKERMAN, Computational study of turbulent laminar patterns in Couette flow, *Physical Review Letters*, **94**, 014502 (2005) — D. BARKLEY & L. TUCKERMAN, Mean Flow of turbulent-laminar patterns in plane Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **576**, 109–137 (2007).
3. P. MANNEVILLE & J. ROLLAND, On modelling transitional turbulent flows using under-resolved direct numerical simulations : the case of plane Couette flow, *Theoretical Computations in Fluid Dynamics, Sous presse*.
4. J. ROLLAND & P. MANNEVILLE, Ginzburg–Landau description of laminar-turbulent oblique bands in transitional plane Couette flow, *Soumis*.
5. J. ROLLAND & P. MANNEVILLE, Pattern fluctuations in transitional plane Couette flow, *Journal of Statistical Physics*, **142**, 577–591 (2011).

Vers une topologie du chaos toroïdal tridimensionnel

Martin Rosalie & Christophe Letellier

CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France
 Martin.Rosalie@coria.fr

Résumé. Un attracteur chaotique toroïdal plongé dans un espace tridimensionnel est étudié. Après avoir transformé le système original pourvu d'une symétrie de rotation en un système *image* sans symétrie, une partition du tore est proposée en tenant compte de l'orientation des structures d'une application de $n^{\text{ème}}$ retour (n étant le nombre de plis observés sur la surface du tore).

Abstract. A toroidal chaotic attractor embedded in a tridimensional space is investigated. Once the original system with a rotation symmetry is transformed in an *image* system without symmetry, a partition of the tore is proposed using the orientation of the structures of a n th return map (n being the number of folds observed on the toroidal surface).

1 Introduction

La topologie du chaos toroïdal n'a été que peu abordée, ne serait-ce que parce que la notion de partition — une étape qui simplifie toujours la description de la population d'orbites périodiques instables — est des plus délicate dans ce cas. De plus, l'analyse topologique n'est réellement efficace que dans des espaces de dimension trois, espaces dans lesquels peu d'exemples de chaos toroïdaux sont connus [1,2]. Une première étude du système de Li a été réalisée en tenant compte des propriétés de symétrie [3] : une intersection entre l'axe de symétrie et l'image de l'attracteur — représentation sans symétrie [4] — conduit à un tore de genre trois non trivial dans la mesure où il y a une intersection entre deux des « trous » du tore.

Nous proposons ici l'étape suivante qui consiste en une première étude des séquences de bifurcations présentes dans le système de Li lorsque l'un des paramètres est varié. Typiquement, deux familles de cascades de doublements de période sont obtenues : l'une fait suite à une bifurcation nœud-col induisant des orbites asymétriques, et l'autre succède à une bifurcation fourche qui rompt la symétrie du cycle limite qui donne la périodicité à la fenêtre étudiée. L'orientation des applications de $n^{\text{ème}}$ retour à une section de Poincaré (n étant le nombre de plis observés sur la surface) permet de dresser une première cartographie des repliements présents sur l'attracteur.

2 Système de Li

Parmi les rares systèmes conduisant à du chaos toroïdal plongé dans un espace tridimensionnel, le système de Li [2]

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + dxz \\ \dot{y} = kx + fy - xz \\ \dot{z} = cz + xy - ex^2 \end{cases} \quad (1)$$

se présente comme un système de Lorenz auquel deux nonlinéarités ont été ajoutées, à savoir le terme dxz sur la première équation et le terme $-ex^2$ sur la dernière. Sur un grand domaine de l'espace des paramètres, le système de Li présente des solutions qui se structurent autour d'un tore de genre 3 non trivial [3]. En effet, il a été montré que le tore présentait la particularité d'avoir un trou en forme de « croix », autrement dit, deux trous qui se coupent. Cette structure toroïdale particulière résulte de

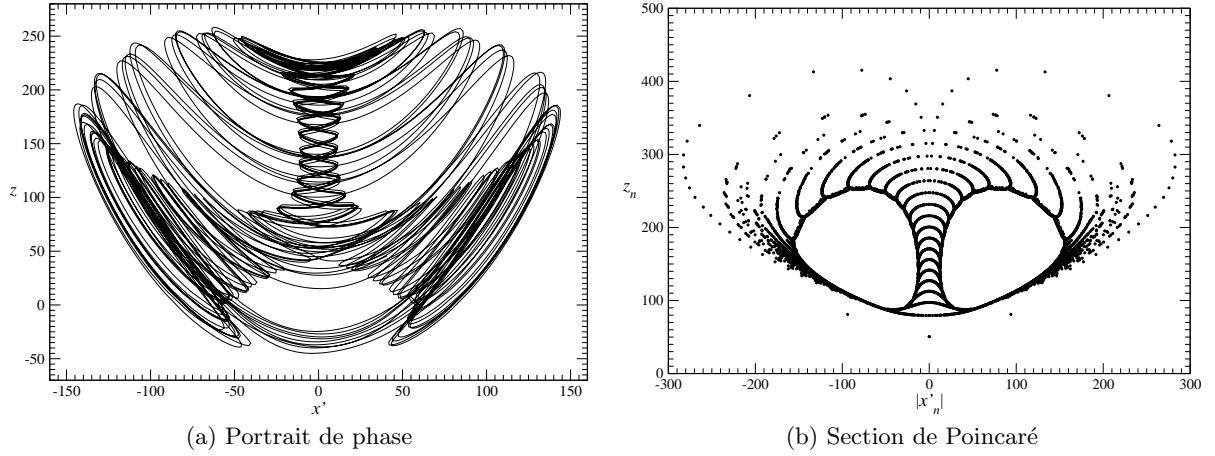


FIG. 1. Section de Poincaré du système (1). Paramètres : $a = 41$, $c = 11/6$, $d = 0.16$, $e = 0.65$, $k = 55$ et $f = 20$

l'intersection entre l'axe de rotation Oz du système de Li avec le tore de genre 1 du système image [5]. Un attracteur chaotique possédant cette structure est représenté Fig. 1a.

De manière à utiliser les propriétés de la symétrie de rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$ de π autour de l'axe Oz , nous avons utilisé le changement de variables

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases} \quad (2)$$

où $\varphi = \tan^{-1}(f/a)$ [3]. Une section de Poincaré définie par

$$\mathcal{P} \equiv \{(x'_n, y'_n) \in \mathbb{R}^2 \mid y'_n = 0, z_n > 50\} \quad (3)$$

révèle de nombreux plis — plus d'une vingtaine — apparaissant sur le tore : ces plis sont caractéristiques de la nature chaotique de l'attracteur, en accord avec le scénario de Curry & Yorke [6]. Ces plis sont à extrema différentiables et conduisent à des cascades de doublements de période comme le montre un diagramme de bifurcations en fonction du paramètre a (Fig. 2). Les diagrammes de bifurcations sur des structures toroïdales ne révèlent souvent aucune structure particulière hormis en de très rares fenêtres périodiques car la courbe fermée typiquement observée comme section de Poincaré d'un tore est projetée sur un seul axe : en conséquence, la variété sur laquelle se développe l'attracteur est écrasée sur elle-même, brouillant les éventuelles structures liées à la manière dont la variété est visitée. Une section de Poincaré schématique du tore de genre trois que nous étudions se présente sous la forme de deux courbes fermées — l'une symétrique de l'autre par la symétrie $\mathcal{R}_z(\pi)$ — sur laquelle se greffent des plis. L'une de ses courbes fermées (disons telle que $x'_n > 0$) peut être considérée comme un cercle de rayon moyen ρ dépendant linéairement du paramètre a . De manière à nous affranchir de cette dépendance et à éviter l'écrasement de la variété sur elle-même, nous utilisons uniquement la dépendance angulaire

$$\theta_n = 2 \arctan \left(\frac{|x'_n| - 3a + 27}{z_n - 9a + 191 + \sqrt{(|x'_n| - 3a + 27)^2 + (z_n - 9a + 191)^2}} \right) \quad (-\pi \leq \theta_n \leq \pi) \quad (4)$$

des intersections avec la section de Poincaré. Le diagramme de bifurcations est donc obtenu en traçant θ_n en fonction du paramètre a (Fig. 2).

Le diagramme révèle de nombreuses fenêtres périodiques (de période au moins égale à 21), chacune conduisant à une cascade de doublements de période. Selon la parité de l'orbite, l'orbite est symétrique (orbite impaire) ou non [7,8]. Les fenêtres associées à des orbites impaires débutent par des bifurcations fourches qui brisent la symétrie avant qu'une cascade de doublements de période ne puissent se développer

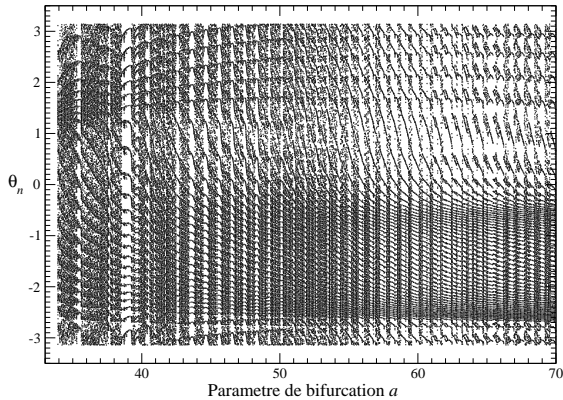


FIG. 2. Diagramme de bifurcations du système de Li en fonction du paramètre a . La section de Poincaré est dépliée grâce à l'angle θ_n .

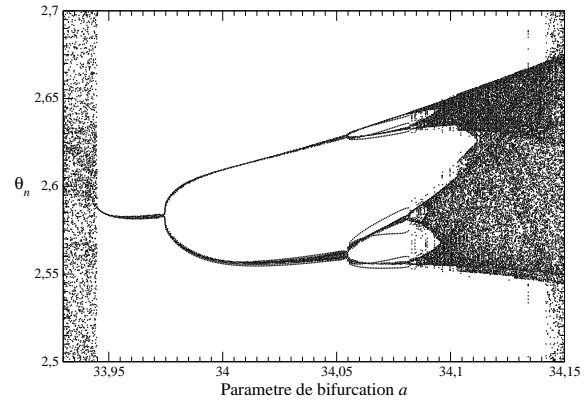


FIG. 3. Agrandissement d'une fenêtre du diagramme de bifurcations (Fig. 2) au voisinage d'un cycle limite de période 24. Autres paramètres identiques à ceux de la Fig. 1.

[9]. Un agrandissement de l'une de ces cascades de doublements de période est représentée Fig. 3. Les premières bifurcations y sont clairement observées. Malheureusement, le pli associé à l'intervalle angulaire sélectionné écrase la variété sur elle-même, ce qui induit des dédoublements des branches du diagramme de bifurcations. Ainsi, malgré le dépliement de la structure toroïdale grâce à l'angle θ_n , il reste des artéfacts de « mesures » qui brouillent l'analyse fine de la dynamique.

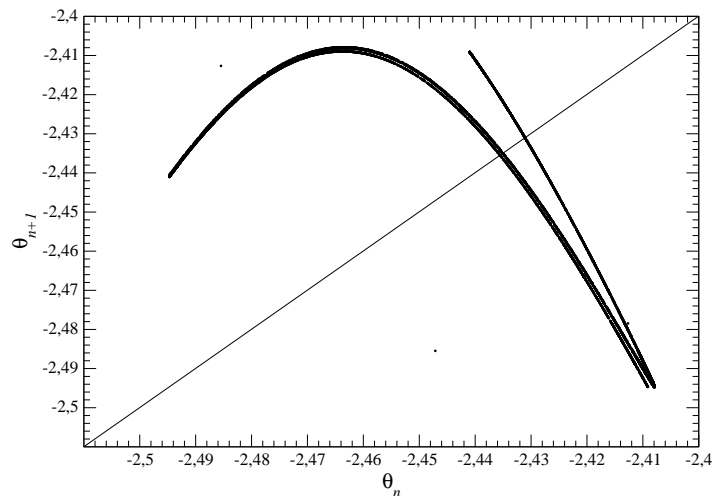


FIG. 4. Application de premier retour à une section de Poincaré de l'une des 21 bandes de l'attracteur. Valeurs des paramètres : $a = 34, 108$, les autres étant identiques à celles de la Fig. 1.

Une application de premier retour à une section de Poincaré de l'une des 21 bandes est calculée. Comme attendu après une cascade de doublements de période, l'application de premier retour se présente — en première approximation — comme une application unimodale à extremum différentiable (Fig. 4). Notons toutefois une branche décroissante « double », un phénomène observé dans de nombreux autres systèmes. Dans ce cas, la crise survient toujours lorsque cette branche « aditionnelle » atteint le niveau de l'extremum, ce qui est bien le cas ici. Nous pouvons noter par ailleurs une structure légèrement feuilletée résultant du pli présent sur cet intervalle angulaire. Ce sont de nouvelles complications que nous devons résoudre avant de parvenir à une caractérisation topologique complète de l'attracteur.

3 Topologie du système image

3.1 Le système image

Afin de nous affranchir de la structure complexe présentée par le tore de genre 3 dans l'espace des phases $\mathbb{R}^3(x', y', z)$, nous choisissons d'évacuer la symétrie par le changement de coordonnées [4]

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re}(x' + iy')^2 = x'^2 + y'^2 \\ v = \operatorname{Im}(x' + iy')^2 = 2x'y' \\ w = z. \end{cases} \quad (5)$$

Ce système ne comporte plus aucune trace de la symétrie de rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$: il est appelé système *image*. L'attracteur se structure maintenant sur un tore de genre 1 (Fig. 5) : l'axe Ow coupe l'attracteur, ce qui implique le tore de genre 3 non trivial obtenu dans l'espace $\mathbb{R}^3(x', y', z)$ [5,3].

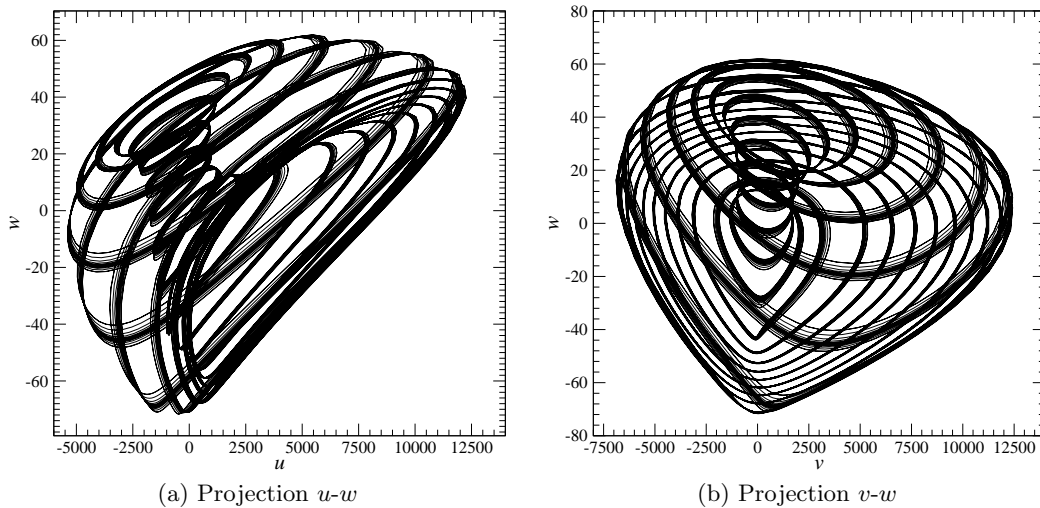


FIG. 5. Projections du portrait de phase du système image dans l'espace $\mathbb{R}^3(u, v, w)$. Valeurs des paramètres identiques à celles de la Fig. 4.

3.2 Principe de l'analyse sur le système de Rössler

Avant de poursuivre l'analyse du système image, nous exposons ici le principe de notre analyse sur le système de Rössler [10]

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (6)$$

pour des valeurs de paramètres telles que l'attracteur corresponde à un attracteur à trois bandes chaotiques (Fig. 6a). Ces valeurs sont choisies dans la fenêtre de période 3 du diagramme de bifurcations, lorsque la dynamique est encore unimodale ($a < 0.43295$ pour $b = 2$ et $c = 4$, [11]). La valeur de a est choisie après la cascade de doublements de période et avant la crise qui détruit la nature « à trois bandes » de l'attracteur. Dans ce cas, une application de premier retour à une section de Poincaré locale sur une bande est telle que la branche croissante jouxte la bissectrice.

Lorsque l'application de 5^{ème} retour à une section de Poincaré globale est calculée, nous obtenons deux structures unimodales à minimum différentiable et une structure à maximum différentiable (Fig.

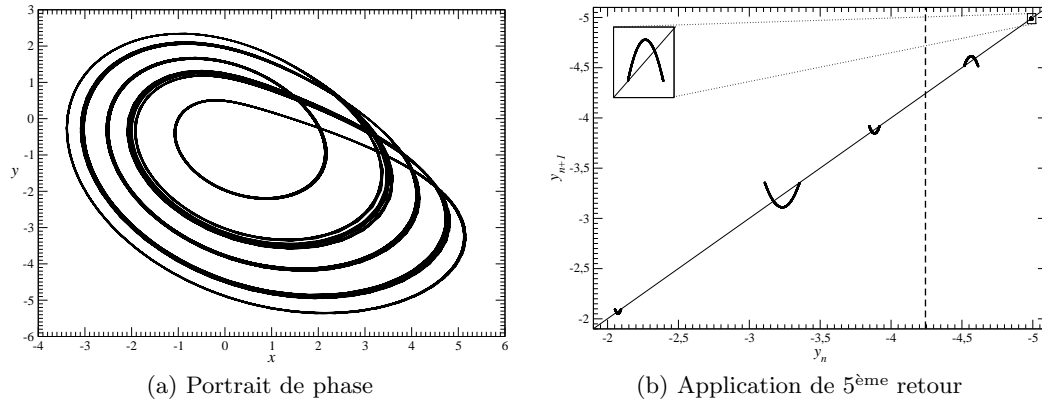


FIG. 6. Attracteur chaotique à cinq bandes solution du système de Rössler. Les valeurs des paramètres sont choisies juste avant la crise : $a = 0.400628$, $b = 2$ et $c = 4$.

6b). L'orbite donnant naissance à la cascade de doublements de période est l'orbite codée par (10110) où 0 est la branche croissante et 1 la branche décroissante [11]. Sa parité est impaire, c'est-à-dire qu'elle s'inscrit sur un espace tangent subissant un nombre impair de demi-tours [9,11], propriété requise pour autoriser la cascade de doublements de période. Chacune des bandes se développent donc respectivement sur des bandes, impaire, paire, impaire, impaire et paire. De ce fait, le nombre de demi-tours diffèrent et, en conséquence, lorsqu'une application de 5^{ème} retour est calculée sur une section de Poincaré globale, les structures « en cloche » sont d'orientation inversée selon leur appartenance à une bande paire ou impaire (Fig. 6b). L'idée est alors d'utiliser l'orientation des structures pour établir la partition de l'attracteur puisque la partition se situe nécessairement entre les deux orientations opposées (ligne en pointillés de la Fig. 6b). Plus la fenêtre utilisée est associée à une périodicité élevée, meilleure est la partition.

3.3 Application au chaos toroïdal image

La section de Poincaré révèle une structure annulaire en 21 bandes (Fig. 7a), chacune comportant un pli caractéristique de la cascade de doublements de période (Fig. 7b). De ce point de vue, chaque bande, qui fait une révolution sur le tore autour du « trou » central, possède la structure de l'application réalisée sur le système image (Fig. 4). Il est à noter qu'une application de premier retour à une section de Poincaré — locale — sur une bande est équivalente à un agrandissement d'une application de 21^{ème} retour sur cette même bande. Les 21 bandes sont numérotées arbitrairement à partir de la première bande traversée lors de notre simulation numérique.

Deux constatations peuvent être faites sur cette section de Poincaré. La première est que l'orientation de la surface du tore par rapport à ce qu'aurait celle d'un tore régulier (sans pli). Dans la partie droite de la section de Poincaré (Fig. 7a), les bandes se redressent progressivement jusqu'à être colinéaires au rayon de la section du tore (bandes 10 et 11). Ensuite, les bandes redeviennent progressivement tangentes à la surface moyenne du tore (ou à peu près perpendiculaires au rayon du tore). Sur cette portion du tore (bandes 10 à 14), la surface du tore présente un pli qui induit un demi-tour sur les bandes. Ainsi, le long de la section du tore, les bandes s'inversent.

Par ailleurs, lorsqu'une application de 21^{ème} retour à la section de Poincaré est calculée, les structures associées à chaque bande — représentées isolément Fig. 7b — présentent clairement deux orientations distinctes : la partition passerait ainsi entre les bandes 1 et 2, et les bandes 13 et 14 (lignes en tirets, Fig. 7a). Notons que cette inversion, contrairement à ce qui se passe sur le système de Rössler, se développe progressivement. Elle est pilotée par l'écrasement de la structure autour de l'un des extrema. Puisque l'attracteur se développe sur une structure toroïdale, il est nécessaire que l'inversion survienne deux fois le long de la surface du tore. Cette inversion doit donc se combiner avec la modification de l'orientation des bandes pour obtenir un nombre impair de demi-tours.

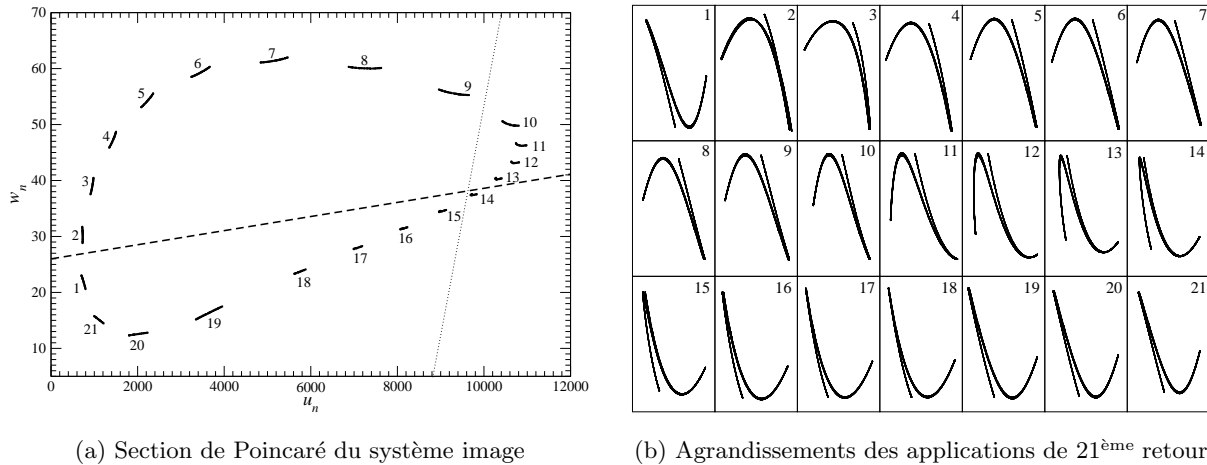


FIG. 7. Partition de la section de Poincaré du système image (a) à partir de l'orientation des applications de premier retour à une section de Poincaré de chacune des 21 bandes. De telles applications peuvent être également obtenues à l'aide d'agrandissement d'une application de 21^{ème} retour sur chacune des bandes.

4 Conclusion

Nous avons abordé la topologie d'un attracteur chaotique toroïdal solution d'un système tridimensionnel. Ce système possède une symétrie de rotation par π autour de l'axe Oz . Après avoir évacué la symétrie par un changement de coordonnées permettant d'obtenir une représentation du système image — sans symétrie résiduelle —, nous obtenons un attracteur structuré sur un simple tore de genre 1. La surface de tore présente de nombreux plis pour permettre une dynamique chaotique. Afin d'obtenir une partition du tore — étape importante pour la construction d'une dynamique symbolique — nous avons utilisé l'orientation des structures « en cloche » de l'application de $n^{\text{ème}}$ retour (n étant le nombre de plis sur la surface) pour en proposer une. Il nous reste maintenant à l'utiliser pour l'étude de la population d'orbites périodiques.

Références

1. BO DENG, Constructing homoclinic orbits and chaotic attractors, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **4** (4), 823-841, 1994.
2. D. LI, A three-scroll chaotic attractor, *Physics Letters A*, **372** (4), 387-393, 2008.
3. C. LETELLIER & R. GLIMORE, Poincaré sections for a new three-dimensional toroidal attractor, *Journal of Physics A*, **42**, 015101 (2009).
4. C. LETELLIER & R. GILMORE. Covering dynamical systems : Two-fold covers, *Physical Review E*, **63**, 16206, 2001.
5. C. LETELLIER, R. GILMORE & T. JONES, Peeling bifurcation of toroïdal chaotic attractors, *Physical Review E*, **76**, 066204, 2007.
6. J. CURRY & J. A. YORKE, A transition from Hopf bifurcation to chaos : computer experiments with maps on \mathbb{R}^2 , *Lecture Notes in Mathematics*, **668**, 48-66, 1978.
7. C. LETELLIER, P. DUTERTRE, J. REIZNER & G. GOUESBET, Evolution of multimodal map induced by an equivariant vector field, *Journal of Physics A*, **29**, 5359-5373, 1996.
8. R. GILMORE & C. LETELLIER, Dressed Symbolic Dynamics, *Physical Review E*, **67** (3), 036205, 2003.
9. Y. AIZAWA & T. UEZU, Topological aspects in chaos and in 2^k period-doubling cascade, *Progress in Theoretical Physics*, **67** (3), 982-985, 1982.
10. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398 (1976).
11. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5** (1), 271-282, 1995.

Biais dans l'analyse de dynamiques lentes/rapides à forte composante linéaire : cas de la détection de non-linéarité

Elise Roulin¹, Ubiratan Santos Freitas² & Christophe Letellier¹

¹ CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

² ADIR Association — EA GRHV 3830, Hôpital de Bois-Guillaume, France

roulin@coria.fr

Résumé. La détection de non-linéarité par prédiction à un pas en avant repose sur l'avantage à utiliser un modèle non-linéaire plutôt qu'un modèle linéaire. Lorsque la probabilité p d'avoir de meilleurs résultats avec un modèle non-linéaire est supérieure à 0,99, un titrage du bruit peut être appliqué. Lorsque $p \approx 0,5$, le modèle non-linéaire n'est pas plus — ni moins — performant que le modèle linéaire. Nous traitons ici en détails le cas où $p \approx 0$, c'est-à-dire le cas où le modèle linéaire est significativement plus performant que le modèle non-linéaire. Une dynamique caricaturale correspondante à ce cas est construite. Nous proposons ainsi une explication possible à des résultats obtenus pour des situations de fibrillations auriculaires lors d'une étude précédente de dynamiques cardiaques.

Abstract. Detecting nonlinearities by one-step-ahead prediction is based on the advantage to use a nonlinear model rather than a linear model. When the probability p to get better results with a nonlinear model is greater than 0.99, a noise titration can be applied. When $p \approx 0.5$, the nonlinear model was not more performant than the linear model. We here investigate in details the case $p \approx 0$, that is, when the linear model is significantly more performant than the linear model. A caricature corresponding to this case is built. We thus explain results obtained in a previous study where atrial fibrillation was found with nearly zero p -value.

1 Introduction

Dans le domaine de la biomédecine, les enjeux liés à l'identification d'un comportement chaotique à partir d'une série temporelle expérimentale sont nombreux, aussi bien d'un point de vue physiologique que thérapeutique. Toutefois, malgré maintes tentatives, la preuve irréfutable de la présence de chaos au sein de dynamiques biomédicales n'a jamais été apportée [1], car c'est la propriété de sensibilité aux conditions initiales qui est le plus souvent testée (plus grand exposant de Lyapunov, etc.) alors que la question — nécessaire — du déterminisme est rarement abordée. À ce jour, la seule preuve satisfaisante de l'existence d'un déterminisme sous-jacent serait l'obtention d'un modèle global reproduisant la dynamique et vérifiant par ailleurs la sensibilité aux conditions initiales [2], mais un tel modèle n'a encore jamais été obtenu à partir d'enregistrements biologiques [3].

Pour pallier ce manque, Poon & Barahona ont proposé une technique de titrage du bruit, en affirmant pouvoir quantifier la chaotité de la dynamique sous-jacente à partir d'une série temporelle [4]. Malheureusement, dans certains cas, cette technique se révèle incapable de distinguer une dynamique aléatoire d'une dynamique déterministe [5]. Elle ne peut donc pas être utilisée comme indicateur de présence de chaos. Toutefois, elle peut contribuer à l'identification d'une composante non-linéaire. Elle a ainsi permis d'analyser, à partir d'enregistrements électrocardiographiques de patients souffrant de différentes pathologies cardiaques, l'impact des types de pathologies sur la non-linéarité du rythme cardiaque [3]. Cette technique a également été utilisée pour distinguer des dynamiques ventilatoires spontanées [6] ou assistées mécaniquement [7]. Néanmoins, cette technique doit être appliquée avec certaines précautions relatives à l'échantillonnage de la série temporelle analysée, le paramétrage des modèles utilisés pour la prédiction, le choix de l'observable, etc. Ces précautions seront explicitées dans la section 2.

Parmi les dynamiques biologiques ou biomédicales observées, certaines peuvent se ramener à des oscillations de relaxation [10]. Ceci a été observé à l'échelle cellulaire, que ce soit au niveau de la cellule

unique [12,13] ou des niveau des tissus [14], mais également à l'échelle de l'organisme, considérant les rythmes physiologiques [8,9] ou biologiques [11], ou encore à un niveau comportemental, macroscopique et collectif [15]. Ces oscillations présentent, la plupart du temps, une augmentation rapide de l'amplitude, suivie d'une relaxation lente de retour à la valeur de base. Typiquement, la dynamique lente peut être reproduite par un processus linéaire, tandis que la dynamique rapide est contrôlée par un processus non-linéaire, pilotant notamment les fluctuations de l'amplitude. Ces comportements sont délicats à analyser de par leur structure dynamique intrinsèque. Afin de pouvoir mieux comprendre ces phénomènes, nous construisons une dynamique artificielle, reposant sur des oscillations périodiques dont l'amplitude est modulée par une fonction logistique. La série temporelle résultante se présente comme un cas « pathologique » du point de vue du traitement du signal, dans la mesure où la non-linéarité agit par impulsions très brèves. Nous montrons ici que la technique de détection de non-linéarité [4] échoue à détecter la composante non-linéaire de la dynamique ainsi construite.

2 Principe de la détection de non-linéarité

La technique de titrage du bruit [4] est conditionnée par une détection de non-linéarité, basée sur une estimation de modèles polynomiaux auto-régressifs utilisés pour la prédiction à un pas en avant. Précisons que, de manière générale, la validation par prédiction à un pas en avant souffre de certaines faiblesses comme cela a été récemment montré [16]. Suivant cette détection, et seulement si les données révèlent effectivement une composante non-linéaire, le titrage du bruit est appliqué. Ces deux étapes sont maintenant détaillées.

2.1 Détection de non-linéarité

Une série temporelle $\{y_k\}_{k=1}^N$ ($k \in \mathbb{N}$) est analysée à l'aide d'une part, de modèles linéaires et, d'autre part, de modèles non-linéaires. Ces modèles n'ont pas pour vocation de reproduire la dynamique globale mais seulement d'être optimaux pour une prédiction à un pas en avant. Chacun de ces modèles est estimé sur une fenêtre de la série temporelle. La forme générale de ces modèles est la suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n(d, M) &= a_0 + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_{\kappa+1} y_{n-1}^2 + a_{\kappa+2} y_{n-1} y_{n-2} + \dots + a_{M-1} y_{n-\kappa}^d \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} a_m z_m(n) \end{aligned} \quad (1)$$

où $\{z_m(n)\}_{m=1}^M$, $M \in \mathbb{N}$, est la base fonctionnelle composée de toutes les combinaisons distinctes des coordonnées décalées $\{y_{n-k}\}_{k=1}^{\kappa}$, $\kappa \in \mathbb{N}$, jusqu'au degré maximum de non-linéarité permis d . Il y a alors $M = \frac{(\kappa+d)!}{(d!\kappa!)}$ termes. Des deux paramètres d et M découle donc l'ordre κ du polynôme utilisé pour la modélisation. Pour un modèle linéaire, $d = 1$, ce qui implique $\kappa = M - 1$.

Ainsi, chaque famille de modèles peut être décrite univoquement avec les paramètres M — nombre maximal d'éléments de la base fonctionnelle — et d — degré de non-linéarité maximal des modèles de la famille. Les M termes ne contribuent pas tous de la même façon à reproduire la dynamique et, même si l'ajout de termes supplémentaires au développement polynomial contribue en général à améliorer la qualité prédictive du modèle, il est possible qu'un trop grand nombre de termes finisse par réduire cette qualité [2]. La recherche du modèle optimal parmi ceux de la « famille » définie par les paramètres M et d commence donc par la sélection des termes les plus pertinents, selon la méthode de minimisation de l'erreur de prédiction

$$\varepsilon(M, d)^2 = \frac{\sum_{n=1}^N (\tilde{y}_n(M, d) - y_n)^2}{\sum_{n=1}^N (y_n - \bar{y})^2} \quad (2)$$

où $\bar{y} = 1/N \sum_{n=1}^N y_n$, et où $\varepsilon(M, d)^2$ est une variance normalisée des erreurs résiduelles. L'inclusion d'un $m^{\text{ème}}$ terme au modèle (1) induit une réduction de ε^2 ; réduction qui peut être exprimée comme un pourcentage de l'erreur maximale $\max(\varepsilon^2)$, conduisant au rapport de réduction d'erreur (ou *ERR pour*

error reduction ratio) [19]. Les coefficients a_m sont ensuite estimés en utilisant la méthode des moindres carrés dans le but de minimiser l'erreur de prédiction ϵ^2 . À l'issue de ce processus, nous disposons d'un modèle polynomial auto-régressif linéaire, et d'un second modèle qui est non-linéaire, les deux modèles étant paramétrés par un même couple (M, d) .

La probabilité p pour que le meilleur modèle non-linéaire soit plus performant pour décrire la dynamique à un pas en avant que le meilleur modèle linéaire est calculée. Si la détection de non-linéarité est concluante, en autorisant une marge d'erreur de 1%, c'est-à-dire si la valeur de p est plus grande que 0,99, le titrage de bruit est appliqué.

2.2 Titrage du bruit

Le titrage en lui-même utilise une distribution gaussienne de bruit blanc pour quantifier la contribution de la composante non-linéaire à la dynamique sous-jacente aux données expérimentales. Pour titrer le bruit d'une série temporelle, un bruit blanc ν_n , de même déviation standard que y_n et d'amplitude A ($0 \leq A \leq 1$) croissante, est ajouté aux données, jusqu'à ce que la non-linéarité ne soit plus détectée, à un certain degré de confiance près. Tant que la détection de non-linéarité demeure concluante, le paramètre A est augmenté jusqu'à ce que la valeur de p passe sous le seuil préalablement défini de 0,99. Le titrage est ici terminé et la déviation standard du bruit blanc alors ajouté correspond à la limite de bruit de l'échantillon testé (LB).

2.3 Recommandations pour une utilisation optimale

Nous avons précédemment montré que les résultats obtenus avec la détection de non-linéarité et le titrage du bruit dépendaient fortement de certains choix relatifs à l'obtention des modèles d'une part, et à la série temporelle analysée, d'autre part [20]. Ainsi l'ensemble de la gamme des paramètres d et M ne peut être utilisée. En effet, la structure des modèles ne doit être ni trop petite, ni trop grande, faute de quoi les résultats risquent d'être biaisés. Aussi, le degré de non-linéarité doit être au moins de 3 et le nombre de termes au moins égal à 20 ou 30. Il est raisonnable de ne pas dépasser une centaine de termes constituant le modèle. Par ailleurs, la limite de bruit est sensible à la réalisation du bruit utilisé pour le titrage; aussi, il est nécessaire de considérer une valeur moyenne (correctement définie du point de vue statistique) de la limite de bruit [20].

Si plusieurs variables sont disponibles pour l'étude d'une dynamique, le résultat peut dépendre de la variable choisie [17] et du taux d'échantillonnage utilisé [20]. Enfin, lorsque la probabilité p est voisine de 0,50, ceci indique que le choix entre un modèle linéaire et un modèle non-linéaire n'est pas évident, et que la pertinence de ces modèles est à peu près équivalente. Lorsqu'elle est supérieure à 0,99, l'utilisation d'un modèle non-linéaire conduit à de meilleures prédictions qu'un modèle linéaire, et l'on peut conclure que la dynamique sous-jacente présente une composante non-linéaire. Lorsqu'elle est au voisinage de 0, en principe, la dynamique sous-jacente est principalement linéaire, mais cela n'a jamais été vérifié. C'est ce que nous allons tester dans ce qui suit.

3 Dynamique lente/rapide à modulation chaotique d'amplitude

3.1 Motivation

Le recours à la détection de non-linéarité pour l'analyse de dynamiques cardiaques a permis de révéler des dynamiques de nature très différentes entre des patients souffrant de fibrillation auriculaire ($p \approx 0$), d'insuffisance cardiaque congestive ($p \approx 1$) et un groupe de sujets sains ($p \approx 0.75$) [3]. De manière surprenante, la détection de non-linéarité indiquait que la dynamique cardiaque était très fortement linéaire chez les patients souffrant de fibrillation auriculaire, comme le révélait le p voisin de zéro (Fig. 1). Aucun autre exemple — y compris impliquant des cycles limites — n'avaient conduit à des valeurs de p aussi faibles.

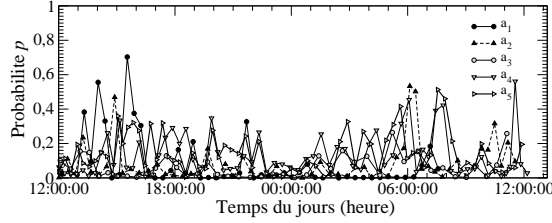


FIG. 1. Probabilités p calculées à partir des $\Delta RR_n = RR_{n+1} - RR_n$ pour les 5 patients souffrant de fibrillation auriculaire. Paramètres de modélisation : $(d, M) = (3, 50)$. D'après [3].

3.2 Le modèle

On considère ici la série temporelle correspondant à un comportement périodique, modulé en amplitude par une fonction logistique itérée en régime chaotique. Le comportement périodique se ramène à un signal triangulaire pour lequel la décroissance est linéaire et lente par rapport à la croissance qui est ici très rapide puisque l'amplitude maximale est atteinte en un seul pas de temps (une itération). L'amplitude maximale du $i^{\text{ème}}$ cycle est donnée par

$$A_i = \frac{n}{20} \left(1 + \frac{y_i}{10} \right) \quad (3)$$

où n définit le nombre d'itérations dans une oscillation et y_i est une solution de la fonction logistique

$$y_{n+1} = \mu y_n (1 - y_n). \quad (4)$$

La série temporelle $\{x_k\}$ est alors construite selon le processus par morceaux

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k - \frac{A_i}{n} & \text{si } x_k > 0 \\ A_i & \text{si } x_k \leq 0. \end{cases} \quad (5)$$

où $i = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor$. À chaque cycle i correspond une seule valeur A_i ; la période des oscillations demeure donc constante, et ne dépend pas de la valeur de l'amplitude, qui elle, varie à chaque cycle.

Une série temporelle typique est représentée Fig. 2.

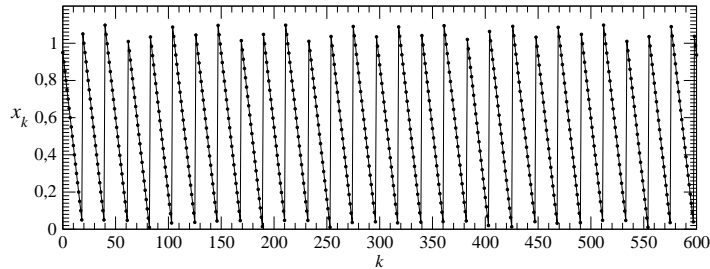


FIG. 2. Série temporelle de la dynamique lente-rapide à modulation chaotique d'amplitude. Valeurs des paramètres : $\mu = 3,9$ et $n = 20$.

Cette série temporelle est gouvernée la plupart du temps par un processus linéaire défini par la première équation du processus (5). Sur de très brefs instants, le processus non-linéaire déterminant les fluctuations de l'amplitude agit. Du point de vue de la série temporelle, le processus est principalement linéaire. Toutefois, si une application de premier retour à la section de Poincaré prise en tout point du signal est calculée, nous retrouvons une parabole caractéristique de la fonction logistique (Fig. 3). De ce fait, nous nous attendons à ce que l'analyse d'une série temporelle $\{x_k\}$, solution de ce processus de relaxation, conduise à l'identification d'une dynamique purement linéaire.

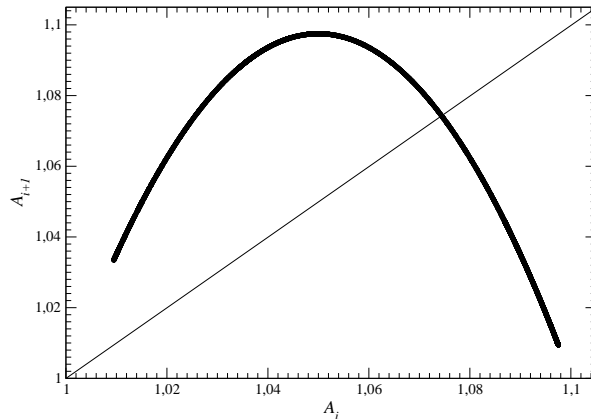


FIG. 3. Série temporelle de la dynamique lente-rapide à modulation chaotique d'amplitude. Valeurs des paramètres : $\mu = 3,9$ et $n = 20$.

3.3 Résultats

La technique de détection de non-linéarité décrite section 2 est alors appliquée à la série temporelle $\{x_k\}$. Les paramètres de modélisation sont fixés à $(d, M) = (3, 50)$, et une moyenne sur 5 détections a été réalisée pour chaque valeur de p . Nous observons que les valeurs de la probabilité p pour que le meilleur modèle non-linéaire soit plus performant pour la prédiction à un pas en avant que le meilleur modèle linéaire sont toujours nulles, et ce, quel que soit le nombre α d'oscillations de relaxation du signal contenues dans la fenêtre considérée. Nous avons effectué les tests pour $n = 20$ et $\alpha \geq 12$, soit une fenêtre d'environ 240 points pour l'estimation des modèles. Même pour des valeurs du nombre α d'oscillations à 30, la valeur de p reste à zéro. Ceci signifie que la composante non-linéaire agit trop sporadiquement pour qu'elle puisse être détectée sur la base d'une erreur de prédiction à un pas en avant. Précisons que typiquement, un modèle linéaire ne fournit une mauvaise prédiction que lors d'un retour brutal à l'amplitude maximale, c'est-à-dire pour un point sur n . Plus n est grand, moins cette erreur pèse sur la statistique. De ce fait, puisqu'avec $n = 20$, la technique échoue déjà à détecter la composante non-linéaire, *a fortiori*, ceci reste toujours vrai pour des n plus grands.

La série temporelle que nous avons construite se présente alors comme un cas « pathologique », dans la mesure où, la non-linéarité agissant par impulsions très brèves, la technique de détection de non-linéarité échoue à détecter la composante non-linéaire pourtant clairement présente dans la dynamique, et ne met en évidence que le processus linéaire. Notons cependant que si le problème est abordé du point de vue d'une application de premier retour, la probabilité p calculée présente une valeur toujours égale à 1, comme c'est le cas lors d'une étude de la fonction logistique, révélant alors clairement la présence d'une composante non-linéaire sous-jacente à la dynamique. Cet exemple, certes caricatural, montre qu'il n'est pas équivalent de travailler à partir d'une série temporelle représentative de l'évolution du système dans l'espace des phases, et de travailler avec une série temporelle associée à une section de Poincaré ou une application de premier retour. Une telle différence avait déjà été relevée dans le cas d'une analyse par entropie de Shannon [17].

4 Conclusion

Outre les précautions d'utilisation déjà mentionnées de la détection de non-linéarité, nous montrons ici que la recherche d'une composante non-linéaire par détection de non-linéarité selon la technique du titrage du bruit échoue lorsque la série temporelle considérée résulte d'une dynamique où la non-linéarité agit par impulsions brèves. Notre dynamique caricaturale se révèle être un excellent cas d'école pour tester la robustesse de toute technique d'analyse. Par ailleurs, la non-équivalence entre une analyse selon une trajectoire dans l'espace des phases ou selon une section de Poincaré est encore confirmée ici, pour

l’outil de détection de non-linéarité associé au titrage du bruit. Aussi, nous concluons naturellement que l’étude de toute dynamique devrait se faire préférentiellement dans une section de Poincaré.

Références

1. L. GLASS, Introduction to controversial topics in nonlinear science : Is the heart rate chaotic?, *Chaos*, **19**, 028501 (2009).
2. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & U. S. FREITAS Frequently Asked Questions about global modelling, *Chaos*, **19**, 023103, 2009.
3. U. S. FREITAS, E. ROULIN, J.-F. MUIR & C. LETELLIER, Identifying determinism underlying heart rate : the right task?, *Chaos*, **19**, 028505 (2009).
4. C.-S. POON & M. BARAHONA, Titration of chaos with added noise, *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)*, **98**, 7107-7112 (2001).
5. U. S. FREITAS, E. ROULIN & C. LETELLIER, Failure for distinguishing colored noise from chaos by the “Noise titration” technique, *Physical Review E*, **79**, 035201 (2009).
6. M.-N. FIAMMA, C. STRAUS, S. THIBAUT, M. WYSOCKI, P. BACONNIER & T. SIMILOWSKI, Effects of hypercapnia and hypocapnia on ventilatory variability and the chaotic dynamics of ventilatory flow in humans, *American Journal of Physiology-Regulatory Integrative and Comparative Physiology*, **292**, R1985-R1993 (2007).
7. L. MANGIN, M.-N. FIAMMA, C. STRAUS, J.-P. DERENNE, M. ZELTER, C. CLERICI & T. SIMILOWSKI, Source of human ventilatory chaos : Lessons from switching controlled mechanical ventilation to inspiratory pressure support in critically ill patients, *Respiratory Physiology & Neurobiology*, **161** (2), 189-196 (2008).
8. B. VAN DER POL, The heartbeat considered as a relaxation oscillation and an electrical model of the heart, *Philosophical Magazine*, **6**, 763-775 (1928).
9. B. VAN DER POL, Biological rhythms considered as relaxation oscillations, *Acta Medica Scandinavica*, **103** (S108), 76 (1940).
10. K. KLOTTER, General properties of oscillating systems, *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology*, **25**, 185-187 (1960).
11. J. S. BARLOW, A phase-comparatormodel for the diurnal rhythm of emergence of *Drosophila*, *Annals of the New-York Academy of Science*, **98**, 788-805 (1962).
12. J. TYSON & S. KAUFFMAN, Control of mitosis by a continuous biochemical oscillation : synchronisation : spatially inhomogeneous oscillations, *Journal of Mathematical Biology*, **1**, 289-310 (1975).
13. M. R. GUEVARA, L. GLASS & A. SHRIER, Phase locking, period-doubling bifurcations, and irregular dynamics in periodically stimulated cardiac cells, *Science*, **214**, 1350-1353 (1981).
14. J. P. KEENER, F. C. HOPPENSTEADT & J. RINZEL, Integrate-and-fire models of nerve membrane response to oscillatory input, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **41**, 503-517 (1981).
15. W. LIU, D. XIAO & Y. YI, Relaxation oscillations in a class of predator-prey systems, *Journal of Differential Equations*, **188**, 306-331 (2003).
16. M. P. DAFILIS, N. C. SINCLAIR, P. J. CADUSCH & D. T. J. LILEY, Re-evaluating the performance of the nonlinear prediction error for the detection of deterministic dynamics, *Physica D*, **240**, 695-700 (2011).
17. C. LETELLIER, Estimating the Shannon entropy : recurrence plots versus symbolic dynamics, *Physical Review Letters* **96**, 254102 (2006).
18. M. BARAHONA & C.-S. POON, Detection of nonlinear dynamics in short noisy time series, *Nature*, **381**, 215-217 (1996).
19. L. A. AGUIRRE & S. A. BILLINGS, Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering, *International Journal of Control*, **62** (3), 569-587 (1995).
20. E. ROULIN, U. S. FREITAS & C. LETELLIER, Guidelines for improving detection of nonlinearity and noise titration, *Physical Review E*, à paraître.

Propriétés multifractales dans l'espace de Hilbert : analyse de séries temporelles non linéaires et invariants d'échelle utilisant la décomposition modale empirique et transformation de Hilbert

François Schmitt¹, Yongxiang Huang², Zhiming Lu², & Yulu Liu²

¹ CNRS, Laboratoire d'Océanologie et de Géosciences, UMR 8187, F-62930 Wimereux

² Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, 200072 Shanghai China
francois.schmitt@univ-lille1.fr

Résumé. La méthode de décomposition modale empirique (EMD) a été développée il y a une dizaine d'années pour décomposer des séries temporelles non-linéaires et non-stationnaires en une somme de modes, chaque mode étant localisé en fréquence. Cette décomposition est associée à une transformation de Hilbert-Huang (HHT) visant à extraire localement une fréquence instantanée et une amplitude. Cette nouvelle méthode d'analyse, baptisée EMD-HHT, a rencontré un grand succès dans de nombreux domaines des sciences de la nature de la société. Ici nous présentons une généralisation, que nous avons développée récemment. Cette généralisation permet d'extraire les exposants multifractals de séries temporelles non stationnaires invariantes d'échelle ; ceci fournit une méthode alternative, utilisant l'espace de Hilbert, pour la caractérisation multifractale, qui peut être comparée à d'autres méthodes comme les fonctions de structure, les transformées en ondelette ou la méthode MFDA (Multifractal detrended fluctuation analysis). En tant qu'illustration, nous appliquons la méthode à des données de turbulence, et des données d'irradiance.

Abstract. Empirical mode decomposition (EMD) has been proposed about ten years ago to decompose nonlinear and non-stationary time series into a sum of modes, each one narrow-banded. This decomposition is associated to a Hilbert-Huang transform (HHT) in order to locally extract an instantaneous frequency and an amplitude. This new analysis method, called EMD-HHT, has met a large success in many fields of natural and social sciences. Here we present a generalization, which we developed recently. With this generalization, multifractal exponents can be extracted from non stationary scale invariant time series. This corresponds to an alternative way to characterize multifractal time series, using Hilbert space. It can be compared to other more classical methods such as structure functions, wavelet transform or multifractal detrended fluctuation analysis. As an illustration, we apply here the method to turbulence data and irradiance time series.

1 Introduction

Il y a plus d'une dizaine d'années, Norden Huang a proposé une méthode intitulée décomposition modale empirique (EMD, pour *Empirical Mode Decomposition*), pour analyser des séries temporelles non-linéaires et non stationnaires possédant une « large bande » [1,2]. Cette méthode permet de décomposer une série temporelle quelconque en une somme de plusieurs séries temporelles, appelées « modes » (IMF, pour *Intrinsic Mode Function*). Chaque mode possède une fréquence caractéristique. Pour un bruit blanc ou un bruit Gaussien fractionnaire, la répartition de ces fréquences caractéristiques est telle que la décomposition correspond à un banc de filtre dyadique [3,4]. La décomposition modale empirique s'accompagne souvent d'une transformation spectrale de Hilbert pour chaque mode pris séparément, permettant de proposer une densité spectrale d'énergie de Hilbert pour les séries temporelles [1,2]. Cette nouvelle méthode d'analyse, baptisée EMD-HHT, a rencontré un grand succès dans de nombreux domaines des sciences de la nature de la société : une recherche sur le Web of Science en janvier 2011 donne plus de 1600 articles ayant « *empirical mode decomposition* » ou « *Hilbert Huang transform* » dans leur titre ou leurs mots clés.

Ici nous présentons une généralisation, que nous avons développée récemment [5,6] et appliquée en turbulence [5,7,8] et dans le domaine de l'environnement [9,10] : cette généralisation permet d'extraire les exposants multifractals de séries temporelles non stationnaires invariantes d'échelle ; ceci fournit une méthode alternative, utilisant l'espace de Hilbert, pour la caractérisation multifractale. Nous rappelons dans une première section les principaux résultats obtenus : validation sur des simulations de mouvements Brownien fractionnaire et des simulations multifractales, puis rappel de son point fort par rapport à d'autres méthodes : elle est moins perturbée par l'existence d'échelles caractéristiques dans la série temporelle analysée, provenant par exemple d'un forçage déterministe superposé aux fluctuations stochastiques invariantes d'échelle. Dans une seconde section nous illustrons l'application de cette méthode à des séries temporelles de turbulence puis d'irradiance.

2 Intermittence dans l'espace de Hilbert

Nous considérons ici un signal non-linéaire, comportant différentes échelles de façon simultanée. L'idée de la décomposition est de considérer un signal en tant que superposition de différentes oscillations monocomposantes, appelées fonctions modales intrinsèques. Pour cela chaque mode doit satisfaire à deux conditions : 1) la différence entre le nombre de minima locaux et le nombre de traversée du zéro doit être zéro ou un ; 2) la moyenne glissante de la somme de l'enveloppe définie par les maxima locaux et l'enveloppe définie par les minima locaux est nulle. La décomposition est faite de façon itérative, en considérant à chaque étape le signal comme étant la somme d'une composante basse fréquence et d'une composante haute fréquence. A la fin de la décomposition, la méthode exprime une série temporelle $x(t)$ comme la somme d'un nombre fini de modes $C_i(t)$ et un résidu final $r_n(t)$ [1,11] :

$$x(t) = \sum_{i=1}^N C_i(t) + r_n(t) \quad (1)$$

Après la décomposition en une somme de modes, une analyse spectrale de Hilbert est effectuée sur chaque mode pris séparément, ce qui s'écrit :

$$C_i^H(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{C_i(t')}{t-t'} dt' \quad (2)$$

La combinaison de $C_i(t)$ et $C_i^H(t)$ permet de construire un signal analytique [12] sous la forme $C_i^A(t) = C_i(t) + jC_i^H(t) = \mathcal{A}_i(t)e^{j\theta_i(t)}$. La fréquence instantanée est définie par $\omega_i = \frac{d\theta_i(t)}{dt}$. Pour chaque mode, la densité spectrale de Hilbert est définie comme le carré de l'amplitude $H(\omega, t) = \mathcal{A}^2(\omega, t)$. $H(\omega, t)$ donne une valeur locale de l'énergie dans une représentation temps-fréquence et on peut extraire la densité de probabilité jointe $p(\omega, \mathcal{A})$ de la fréquence et de l'amplitude instantanées, pour l'ensemble des modes $i = 1 \dots N$. Ceci permet d'estimer la densité spectrale marginale (de Hilbert) :

$$h(\omega) = \int_0^\infty H(\omega, t) dt \quad (3)$$

qui est une densité d'énergie pour une fréquence ω . Ceci est comparable à la densité spectrale d'énergie estimée par la transformée de Fourier $E(f)$, bien que les définitions de f et ω soient différentes. L'objectif recherché par ce type de méthode est d'effectuer la décomposition au niveau local, de façon adaptative, dans un espace temps-fréquence, par une méthode ne nécessitant pas d'hypothèse a priori.

La densité spectrale d'énergie $h(\omega)$ est un second moment statistique. Pour étudier l'intermittence multifractale d'une série temporelle, nous avons généralisé ceci pour un moment d'ordre $q > 0$ quelconque [5,6] :

$$\mathcal{L}_q(\omega) = \int_0^\infty p(\omega, \mathcal{A}) \mathcal{A}^q d\mathcal{A} \sim \omega^{-1-\zeta(q)} \quad (4)$$

Ici, $\mathcal{L}_q(\omega)$ est un spectre d'amplitude de Hilbert généralisé; on a supposé une invariance d'échelle caractérisée par l'exposant qui peut aussi être, classiquement, estimé via les fonctions de structure $\zeta(q)$:

$$\langle (\Delta V_\tau)^q \rangle \approx \tau^{\zeta(q)} \quad (5)$$

Celui-ci caractérise l'intermittence multifractale de la série temporelle. Notre proposition ci-dessus correspond à une nouvelle méthodologie pour l'analyse de l'intermittence en fonction de l'échelle non plus dans l'espace physique, mais dans l'espace de Hilbert.

Des études à partir de simulations de séries temporelles monofractales (mouvement Brownien fractionnaire) et multifractales montrent que les exposants $\zeta(q)$ estimés dans l'espace de Hilbert sont très proches de ceux estimés par les méthodes classiques; les paramètres sont même souvent estimés de façon plus précise par cette méthode [5,6]. On constate également que cette approche est moins influencée par des structures à grande échelle comme des forçages périodiques ou des gradients, par comparaison par exemple avec les fonctions de structure, qui sont très perturbées par ces forçages [8].

3 Application à des données de turbulence et d'irradiance

Nous avons analysé avec cette méthode des données de turbulence provenant d'une expérience de turbulence homogène et isotrope : des mesures de turbulence en aval d'une grille active à une distance $x/M = 48$ de la grille dans la direction de l'écoulement, où M est la taille de la maille. Le nombre de Reynolds est $Re_\lambda = 720$ et la fréquence des mesures est $f_s = 40$ kHz [13]. Lorsque la méthode EMD est appliquée à ces données (Fig. 1) : on constate que chaque mode est bien localisé en fréquence et que la reconstitution de l'ensemble des modes produit un signal ayant un spectre de Kolmogorov en $-5/3$, en accord avec la théorie de Richardson-Kolmogorov pour la turbulence homogène et isotrope. Ces séries temporelles possèdent des fluctuations structurées, possédant des corrélations à longue portée, et des propriétés intermittentes et multifractales [14,15].

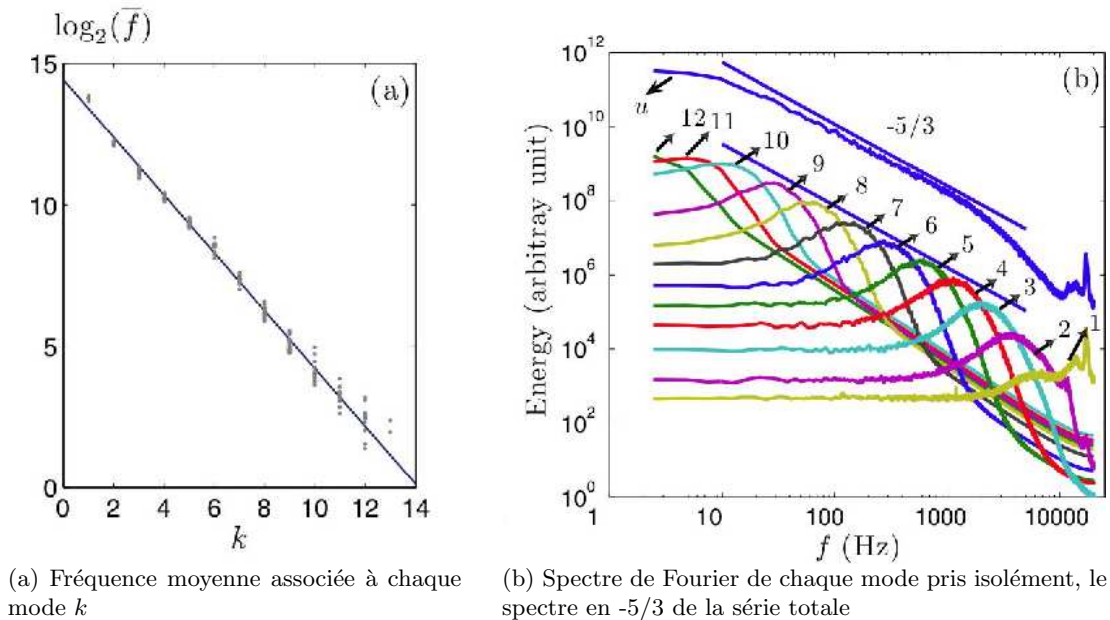


FIG. 1. Application de la méthode EMD à des données de turbulence.

L'analyse spectrale en Fourier est comparée à l'analyse spectrale dans l'espace de Hilbert (Fig. 2) : les deux courbes ont des comportements très similaires; cette analyse est la première mise en évidence d'un

spectre de Kolmogorov en $-5/3$ dans l'espace de Hilbert [5]. Nous avons également estimé les exposants $\zeta(q)$ par cette méthode, comparés aux estimations via les fonctions de structure (non montré ici) [5].

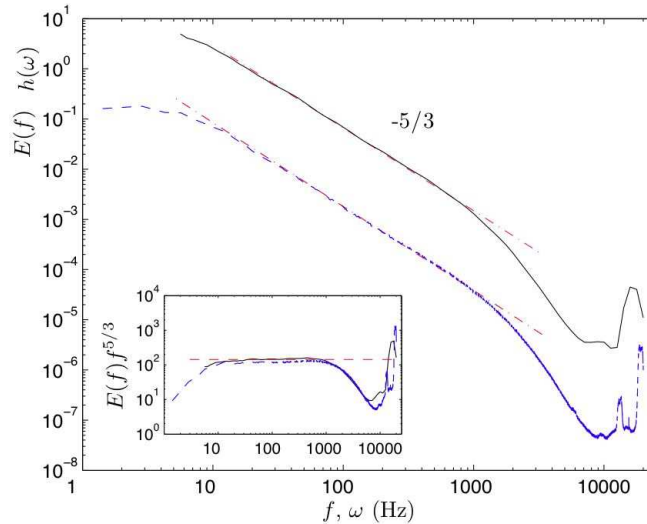


FIG. 2. Analyse spectrale en Fourier (en bas) comparée à l'analyse spectrale dans l'espace de Hilbert (en haut) : les deux courbes ont des comportements très similaires et une invariance d'échelle mise en évidence par les spectres compensés (insert).



FIG. 3. Capteur « *Ultra miniature light intensity recorder* » modèle MDS-MkV/L de la société Alec Electronics.

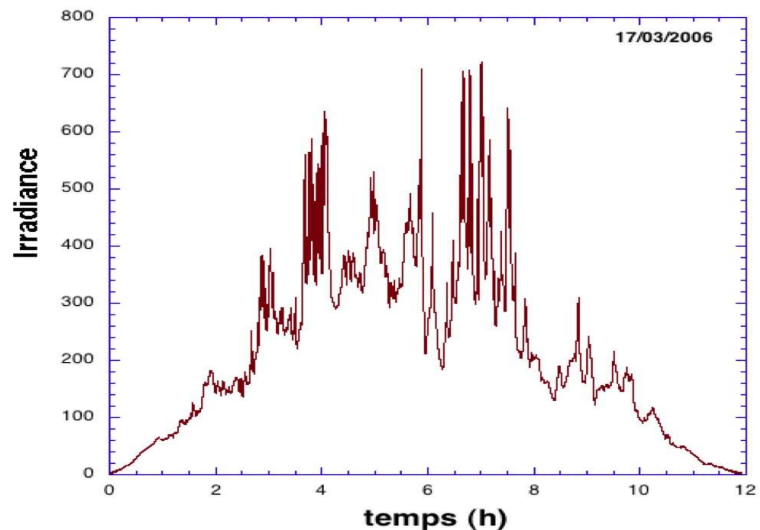


FIG. 4. Données d'irradiance totale dans le visible, mesurées toutes les secondes au niveau du sol à Wimereux (Pas-de-Calais) le 17 Mars 2006. De fortes fluctuations sont visibles.

Ici nous appliquons aussi la méthode à des données environnementales : ils s'agit de mesures de l'irradiance totale dans le visible (en nombre de photons par unité de surface) mesurée au niveau du sol toutes les secondes pendant une journée. La mesure est effectuée à l'aide d'un capteur « *Ultra miniature light intensity recorder* » modèle MDS-MkV/L de la société Alec Electronics, de diamètre 18 mm et

longueur 93 mm (Fig. 3). La très forte variabilité associée aux données analysées est représentée Fig. 4. Cette variabilité est indirectement associée à la turbulence de l'atmosphère : les mesures concernent les photons reçus au niveau du récepteur, de diamètre d'environ 2 cm : chaque photon reçu peut avoir parcouru un chemin optique différent, direct ou indirect. En raison de la variabilité multi-échelle de la couverture nuageuse, l'irradiance possède de fortes fluctuations, en dehors du lever et du coucher du soleil. Ici, nous analysons les données dans la partie centrale de cette courbe. Ce type de données a été très peu étudié (voir cependant Soubdhan et al [16]).

L'analyse spectrale des données, dans l'espace de Fourier et de Hilbert, est représentée Fig. 5. On constate une bonne invariance d'échelle avec une pente de l'ordre de $\beta = 1.5$. Cette invariance d'échelle est sans doute liée, de façon indirecte, à l'invariance d'échelle des nuages en tant que scalaires passifs advectés par la turbulence de l'atmosphère. Une estimation plus précise de la pente spectrale, à partir d'une moyenne d'ensemble sur plusieurs jours et dans différentes conditions météorologiques, permettra de comparer l'exposant empirique avec des valeurs théoriques telles que $5/3$ ou $7/5$ correspondant à différentes formes de turbulence. L'invariance d'échelle en espace de Hilbert est estimée pour différents moments $\mathcal{L}_q(\omega)$ (Fig. 6). On constate une bonne invariance d'échelle sur près de deux décades. Les exposants estimés de cette façon sont représentés en insert (Fig. 6), montrant la courbe moyenne de $\zeta(q)$ et la variabilité obtenue en choisissant une zone différente pour les ajustements des pentes. Sa nonlinéarité confirme le caractère multifractal de ces données visuellement très intermittentes.

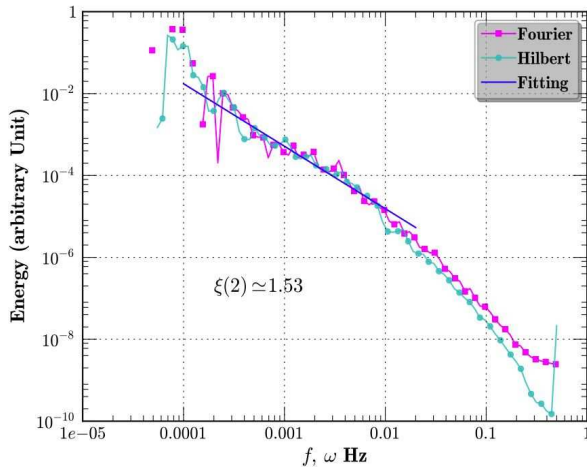


FIG. 5. Spectre d'énergie en Fourier et en espace de Hilbert des données d'irradiance.

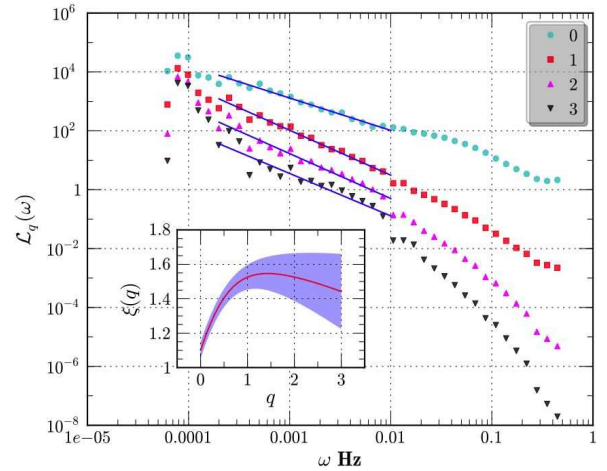


FIG. 6. Invariance d'échelle des différents moments estimés en espace de Hilbert et en insert, la fonction d'invariance d'échelle $\zeta(q)$ non linéaire.

4 Conclusion

Cette étude a rappelé ici la méthode EMD-HHT, et la généralisation que nous avons récemment proposée pour étudier dans l'espace de Hilbert les séries temporelles intermittentes et invariantes d'échelle (multifractales). Nous avons illustré la méthode à l'aide de données de turbulence, et des données d'irradiance. Cette nouvelle méthode pour extraire les exposants multifractals pour caractériser l'intermittence de séries temporelles, hérite des propriétés de la méthode EMD-HHT : analyse en temps-fréquence, estimation de la fréquence instantanée et de l'amplitude instantanée, caractérisations dans l'espace de Hilbert, méthode adaptative, sans a priori pour l'analyse, permettant d'être utilisée pour des séries non linéaires et non stationnaires.

Remerciements

Ce travail a été soutenu financièrement par la *National Natural Science Foundation of China* (programmes N^{os} 10772110 et 11072139) et le *Shanghai Program for Innovative Research Team in Universities*. Y. H. a été financé par une bourse de doctorat en cotutelle en alternance du Ministère Français des Affaires Etrangères et par l'Université de Lille 1. Le code EMD en MATLAB utilisé ici a été écrit par Dr Gabriel Rilling et Pr. Patrick Flandrin du laboratoire de Physique, CNRS & ENS Lyon, et est disponible sur le site <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>. Les données de turbulence ont été mesurées dans la soufflerie Corrsin de la *Johns Hopkins University* et peuvent être téléchargées sur la page de C. Meneveau : <http://www.me.jhu.edu/meneveau/datasets.html>.

Références

1. N. E. HUANG, Z. SHEN, S. R. LONG, M. C. WU, H. H. SHIH, Q. ZHENG, N.-C. YEN, C. C. TUNG & H. H. LIU, The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **454**, 903–995 (1998).
2. N. E. HUANG, Z. SEN & S. R. LONG, A new view of nonlinear water waves : The Hilbert spectrum. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **31**, 417–457 (1999).
3. P. FLANDRIN, G. RILLING & P. GONÇALVÈS, Empirical mode decomposition as a filter bank, *IEEE Signal Processing Letters*, **11**, 112–114 (2004).
4. Z. WU & N. E. HUANG, A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method. *Proceedings of the Royal Society of London A*, **460**, 1597–1611 (2004).
5. Y. X. HUANG, F. G. SCHMITT, Z. M. LU, & Y. L. LIU, An amplitude-frequency study of turbulent scaling intermittency using Hilbert spectral analysis, *Europhysics Letters*, **84**, 40010 (2008).
6. Y. X. HUANG, F. G. SCHMITT, Z. M. LU, & Y. L. LIU, Analyse de l'invariance d'échelle de séries temporelles par la décomposition modale empirique et l'analyse spectrale de Hilbert, *Traitement du Signal*, **25**, 481–492 (2008).
7. Y. X. HUANG, F. G. SCHMITT, Z. M. LU, & Y. L. LIU, Autocorrelation function of velocity increments time series in fully developed turbulence, *Europhysics Letters*, **84**, 40010 (2009).
8. Y. X. HUANG, F. G. SCHMITT, Z. M. LU, P. FOUGAIROLLES, Y. GAGNE & Y. L. LIU, Second order structure functions in fully developed turbulence, *Physical Review E*, **82**, 026319 (2010).
9. F. G. SCHMITT, Y. X. HUANG, Z. M. LU, Y. L. LIU & N. FERNANDEZ, Analysis of turbulent fluctuations and their intermittency properties in the surf zone using empirical mode decomposition, *Journal of Marine Systems*, **77**, 473–481 (2009).
10. Y. X. HUANG, F. G. SCHMITT, Z. M. LU & Y. L. LIU, Analysis of daily river flow fluctuations using empirical mode decomposition and arbitrary order Hilbert spectral analysis, *Journal of Hydrology*, **373**, 103–111 (2009).
11. P. FLANDRIN, & P. GONÇALVÈS, Empirical mode decompositions as data-driven wavelet-like expansions. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, **2**, 477–496 (2004).
12. S. R. LONG, N. E. HUANG & C. C. TUNG, The Hilbert techniques : an alternate approach for non-steady time series analysis, *IEEE Geoscience and Remote Sensing Society Letters*, **3**, 6–11 (1995).
13. H. S. U. K. KANG, S. CHESTER & C. MENEVEAU, Decaying turbulence in an active-grid-generated flow and comparisons with large-eddy simulation, *Journal of Fluid Mechanics*, **480**, 129–160 (2003).
14. U. FRISCH, *Turbulence : the legacy of AN Kolmogorov*, Cambridge University Press, (1995).
15. D. SCHERTZER, S. LOVEJOY, F. G. SCHMITT, Y. CHIGIRINSKAYA & D. MARSAN, Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency, *Fractals*, **5**, 427–471 (1997).
16. T. SOUBDHAN, R. EMILION & R. CALIF, Classification of daily solar radiation distributions using a mixture of Dirichlet distributions, *Solar Energy*, **83**, 1056–1063 (2009).

Dynamique cardiaque de nourrissons à risque

Emad Yacoub¹, Ubiratan Freitas², Valérie Messenger¹, Eric Mallet³, & Christophe Letellier¹

¹ CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

² ADIR Association — EA GRHV 3830, IFRMP 23, Université de Rouen, France

³ Groupe de Recherche en Pédiatrie de Normandie - CI INSERM 204, Centre Hospitalier Universitaire Charles Nicolle, Rouen, France

Emad.Yacoub@coria.fr

Résumé. Des nourrissons à risque hospitalisés pour des épisodes sévères de pathologies cardio-respiratoires ont été suivis — en routine — durant une nuit. Leurs dynamiques cardiaques ont été étudiées à l'aide d'applications de premier retour construites sur les variations calculées d'un intervalle RR à l'autre. Il est alors montré que les extrasystoles et les événements de bradycardie ont des signatures caractéristiques au sein de ces applications de premier retour. Ces signatures, ont été retrouvées sur la moitié des enfants suivis. Une entropie de Shannon et un indice d'asymétrie ont également été introduits pour identifier les anomalies les plus sévères.

Abstract. Vulnerable infants who were hospitalized for severe cardio-respiratory failures were routinely monitored during one night. Their cardiac dynamics were investigated in terms of first-return map built on the variation from one RR-interval to the next. It is then shown that ectopic beats and bradycardia have a characteristic signature in these first-return maps, signatures that we found in more than the half of the infants we monitored. A Shannon entropy and an asymmetry index were also introduced to identify strongest cardiac abnormalities.

1 Introduction

La théorie des systèmes dynamiques non linéaires a ouvert une nouvelle approche dans l'étude des caractéristiques des dynamiques cardio-vasculaires. Durant la dernière décennie, plusieurs études de la variabilité du rythme cardiaque ont été entreprises (voir la revue par Glass [1]) mais, contrairement à ce qui est souvent affirmé, il n'y a toujours pas de preuve rigoureuse de la nature chaotique de la dynamique cardiaque [1,2,3].

Notre étude a été réalisée pour tester l'hypothèse selon laquelle les nourrissons à risque — qui pourraient être sujets à un syndrome de mort subite du nourrisson (SMSN) — présentent des troubles du rythme cardiaque. Par exemple, il est connu qu'une prédisposition au syndrome de mort subite se manifeste par des séquences anormales dans les fluctuations du rythme cardiaque et de l'activité respiratoire [4]. Dans cette première étude, nous nous sommes limités à l'étude de la dynamique cardiaque à l'aide de techniques issues de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires, en l'occurrence des applications de premier retour et une dynamique symbolique. Nous présentons ainsi les résultats de l'analyse dynamique des quatorze tachogrammes mesurés sur des nourrissons à risque.

2 Matériels et Méthodes

Un électrogramme a été enregistré en routine pour chacun des quatorze enfants à risque durant une nuit à l'hôpital. Les électrocardiogrammes — enregistrés avec un moniteur PHILIPS MP 70 — ont été transformés en tachogrammes avec le logiciel RECAN de la société (ALPHA-2, France). Les dynamiques cardiaques ont été étudiées à l'aide d'applications de premier retour construites sur la variable $\Delta RR_n = RR_{n+1} - RR_n$, en raison du bon pouvoir discriminant obtenu lors d'une étude précédente [3]. Les applications de premier retour sont ensuite transformées en séquences symboliques selon la partition

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \Delta RR_n < -40 \text{ ms} \\ 1 & \text{si } -40 < \Delta RR_n < 40 \text{ ms} \\ 2 & \Delta RR_n > +40 \text{ ms} . \end{cases} \quad (1)$$

Le symbole 1 code ainsi la variabilité sinusale tandis que les symboles 0 et 2 sont associés aux arythmies, 0 (2) pour une décroissance (croissance) rapide de l'intervalle RR. Notons que le seuil de 40 ms peut être comparé aux 50 ms souvent utilisées pour l'étude de l'activité parasymphatique [5]. Notre seuil est légèrement inférieur à ce qui est souvent utilisé, mais certaines études montrent qu'un seuil inférieur à 50 ms peut parfois conduire à une analyse plus discriminante que l'utilisation du seuil habituel [6].

A partir de la dynamique symbolique ainsi obtenue, une entropie de Shannon est calculée sur les probabilités de réalisation des différentes séquences symboliques. L'entropie est définie selon la relation

$$\tilde{S}_h = \sum_{n=0}^{N_p^{N_q}-1} -P_n \log P_n, \quad (2)$$

où P_n est la probabilité de réalisation de la $n^{\text{ème}}$ séquence. Les séquences de $N_p = 6$ symboles sont considérées. Utilisant un codage sur $N_q = 3$ symboles différents en accord avec la partition (1), $N_p^{N_q}$ séquences différentes sont ainsi considérées. L'indice de chaque séquence est l'entier décimal obtenu à partir de la séquence symbolique en base 3. De manière à éviter la dépendance de la valeur de l'entropie de Shannon aux choix de N_p et N_q , l'entropie a été normalisée par l'entropie la plus grande pouvant être obtenue avec ces paramètres, c'est-à-dire

$$S_{\max} = - \sum_{n=0}^{N_p^{N_q}-1} \frac{1}{N_p^{N_q}} \log \frac{1}{N_p^{N_q}} = N_q \log N_p = 6 \log 3 = 6.59. \quad (3)$$

L'entropie de Shannon relative $S_h = \frac{\tilde{S}_h}{S_{\max}}$ est ainsi définie sur l'intervalle $[0;1]$. Elle fournit une estimation de la complexité de la dynamique sous-jacente à l'activité cardiaque. Selon le choix de notre partition, une petite entropie de Shannon correspond à un faible taux d'arythmies. Une grande entropie, disons supérieure à $\frac{1}{3}$, traduit en retour un taux significatif d'arythmies.

La partition divise l'application de premier retour sur les ΔRR_n en neuf domaines (Fig. 1). Le domaine central, désigné par l'indice 11, correspond à l'activité cardiaque pilotée par le nœud sinusal. Les huit autres sont associés aux arythmies. Les domaines 01, 02, 12 et 22 sont associés à des croissances rapides des intervalles RR. Les domaines 00, 10, 20 et 21 sont associés à des décroissances rapides des intervalles RR. Chaque domaine est visité selon une probabilité η_{ij} . Il est ainsi possible de définir un indice d'asymétrie selon

$$\alpha = \frac{1}{4} \left[\frac{\eta_{10}}{\eta_{12}} + \frac{\eta_{00}}{\eta_{22}} + \frac{\eta_{01}}{\eta_{21}} + \frac{\eta_{02}}{\eta_{20}} \right],$$

soit, grossièrement, le rapport du nombre d'extrasystoles sur le nombre d'évènements de bradycardie.

Un indice d'asymétrie α autour de 1 correspond à une activité cardiaque pour laquelle les décroissances rapides sont à peu près aussi fréquentes que les croissances rapides des intervalles RR. Lorsque $\alpha < 1$ ($\alpha > 1$), l'indice α caractérise une tendance à des décroissances (croissances) rapides.

Il y a deux types principaux d'arythmies : les extrasystoles et les évènements de bradycardie. Les extrasystoles correspondent à des battements prématurés, d'un délai τ , qui sont déclenchés par des tissus cardiaques et non par le nœud sinusal. Un battement prématuré est toujours suivi d'un battement compensatoire — dont la durée est augmentée du même délai τ par rapport à un battement "normal" — afin de retrouver une synchronisation avec l'horloge du nœud sinusal. La durée d'un intervalle RR étant désignée par T , nous avons ainsi la chaîne $\dots T, T - \tau, T + \tau, T, \dots$, c'est-à-dire, selon notre dynamique symbolique, la séquence $\dots 1102011\dots$. Au niveau de l'application de premier retour, les points sont ainsi localisés au voisinage des quatre segments suivants :

- le segment A défini par l'angle $\theta = \frac{3\pi}{2}$;
- le segment B défini par l'angle $\theta = \pi$;
- le segment C défini par l'angle $\theta = 116,6^\circ \approx \frac{2\pi}{3}$ ($\tan \theta = -\frac{1}{2}$) ;
- le segment D défini par l'angle $\theta = 333,4^\circ \approx \frac{5\pi}{6}$ ($\tan \theta = -2$)

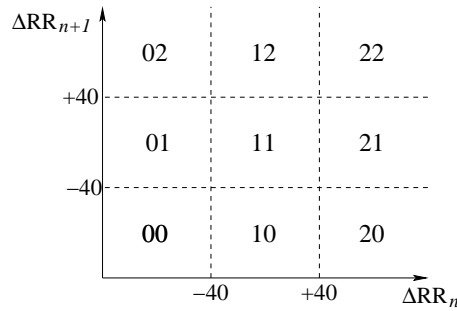
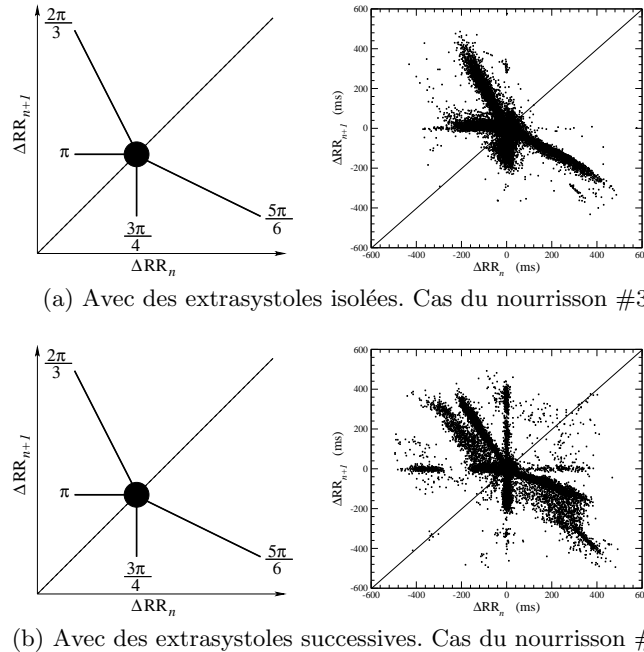


FIG. 1. Division de l'application de premier retour en neuf domaines selon la partition (1) utilisée pour la construction de la dynamique symbolique.

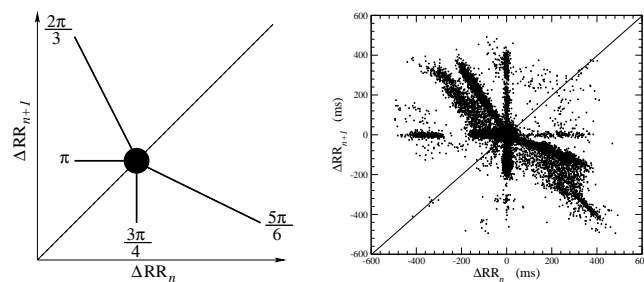
où θ est l'angle entre le segment considéré et la demi-droite horizontale positive issue de l'origine de l'application de premier retour de coordonnées $(\Delta RR_n = \Delta RR_{n+1} = 0)$. Ces segments sont visités selon l'ordre $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$. L'application de premier retour d'un nourrisson présentant des extrasystoles isolées a ainsi une forme typique comme cela est montré Fig. 2a. Lorsque deux extrasystoles successives sont observées, deux segments viennent s'ajouter à l'application de premier retour ; ce sont

- le segment E défini par l'angle $\theta = \frac{3\pi}{4}$ et
- le segment F défini par l'angle $\theta = \frac{7\pi}{4}$.

Un schéma typique de l'application de premier retour correspondante est montré Fig. 2b.



(a) Avec des extrasystoles isolées. Cas du nourrisson #3



(b) Avec des extrasystoles successives. Cas du nourrisson #10

FIG. 2. Schéma des applications de premier retour avec des extrasystoles isolées (a) et des extrasystoles apparaissant par salves (b). Dans les deux cas, un exemple est donné.

Le second type important d'arythmies est associé à des croissances rapides des intervalles RR. Lorsque le retour au rythme "normal" se fait par une décroissance rapide, la séquence symbolique serait ...112011... Les points sont ainsi sur les trois segments orientés selon les angles respectifs $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ et π (Fig. 3).

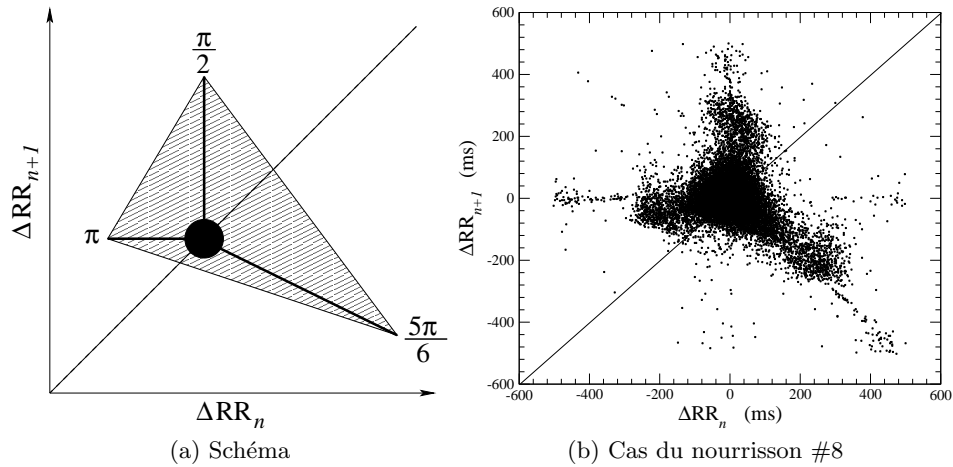


FIG. 3. Schéma des applications de premier retour avec des croissances rapides suivies de décroissances rapides des intervalles RR. L'application calculée à partir de l'activité cardiaque du nourrisson #8 est donnée en exemple.

De manière à suivre l'évolution des arythmies au cours de la nuit, il est possible d'utiliser l'angle θ_n uniquement calculé pour les points codés par les symboles 0 et 2, c'est-à-dire associés aux arythmies. Selon les valeurs de l'angle θ_n , il est possible de vérifier quels types d'arythmies sont ainsi réalisés au cours de la nuit (non représenté).

3 Résultats

Quatorze nourrissons à risque ont été monitorés en routine durant leur hospitalisation. Les données anthropomorphiques des nourrissons sont reportées Tab. 1. Tous les nourrissons ont été suivis après un épisode aigu : le plus souvent après un épisode de bronchiolite avec ou sans virus respiratoire syncytial (VRS), mais aussi après un reflux gastro-œsophagien (RGE), des vomissements, des malaises, ou des alarmes durant une surveillance à domicile. Les principales caractéristiques de l'activité cardiaque sont reportées Tab. 2.

D'un point de vue général, la fréquence cardiaque ($\bar{f} = 139 \pm 16$ bpm) dépend de l'âge en accord avec ce qui est connu [7], c'est-à-dire qu'elle décroît lorsque l'âge augmente. En particulier, le nourrisson #3 est proche d'une tachycardie soutenue, puisque animé d'une fréquence cardiaque ($f_3 = 171 \pm 25$ bpm) proche de la limite (180 bpm) au-delà de laquelle, la tachycardie est couramment identifiée. Ce nourrisson a été identifié par l'équipe clinique comme présentant des arythmies cardiaques. Le nourrisson #6 est proche d'une bradycardie soutenue avec une fréquence cardiaque $f_6 = 107 \pm 16$ bpm. Les autres nourrissons ont un rythme cardiaque en accord avec ce qui est communément observé.

La variabilité cardiaque est plutôt importante puisque l'entropie de Shannon relative moyenne ($\bar{S}_h = 0.37 \pm 0.16$) est supérieure à $\frac{1}{3}$, valeur que nous avons choisie comme seuil au-delà duquel la variabilité est considérée comme importante. L'indice d'asymétrie moyen est à peu près égal à l'unité ($\bar{\alpha} = 1.01 \pm 0.41$). Six des quatorze nourrissons présentent un indice d'asymétrie hors de l'intervalle $[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}]$: deux parmi ces six nourrissons (cas #3 et #10) ont un indice d'asymétrie α supérieur à 1, indiquant ainsi une grande tendance à la tachycardie. Les quatre autres nourrissons (#2, #6, #8 et #13) ont un indice d'asymétrie inférieur à 0.75, indiquant une forte tendance à la bradycardie. Les quatre applications de premier retour correspondantes ont une forme triangulaire comme cela est schématisé Fig. 3a. Cinq nourrissons ont une entropie de Shannon relative inférieure à $\frac{1}{3}$. Un cas particulier est observé : en effet, le nourrisson #12 présente une application de premier retour tout de même surprenante puisque principalement orientée selon la seconde bissectrice. Ceci signifie qu'il y a une tendance à la bigéminie, soit un comportement semblable à un régime de période 2, alternant croissances et décroissances rapides.

TAB.1. Détails anthropomorphiques des nourrissons de notre protocole.

#	Age (mois)	F/M	Principaux faits cliniques
1	5	F	Refus alimentaires. Petit souffle systolique. Prématuré.
2	5	F	Grippe H ₁ N ₁ . Bronchiolite avec VRS
3	2	M	Bronchiolite. Arythmies cardiaques arrhythmia. Prématuré.
4	1	F	RGE. Vomissements. Activité cardiaque anormale.
5	1	F	Parents fumeurs. Bronchiolite. VRS.
6	9	F	RGE. Refus alimentaires.
7	6	M	Bronchiolite. VRS.
8	3.5	F	Bronchiolite. Traité par méthylpredisolone (effets secondaires : bradycardie et tachycardie).
9	5	F	Vomissements. Malaise.
10	1	F	Malaise. Longs intervalles QT.
11	3	F	RGE. Malaise.
12	1	M	Bronchiolite. Mise sous assistance ventilatoire non invasive. Apnées. Bradycardie.
13	1	F	Malaise. Surveillance avec alarmes (bradycardie et tachycardie)
14	9	F	Hypotonie. Surveillance avec alarmes (bradycardie et tachycardie)

TAB.2. Principales caractéristiques de l'activité cardiaque. Sont reportés pour les quatorze nourrissons, la durée totale τ_{rec} de l'enregistrement, le taux de rejet (en % de la durée totale) des artefacts par l'algorithme de codage, la durée moyenne $\overline{\text{RR}}$, la fréquence cardiaque moyenne \bar{f} , l'entropie de Shannon S_h , et l'indice d'asymétrie α .

#	τ_{rec}	% _{rej}	$\overline{\text{RR}}$ (ms)	\bar{f} (bpm)	S_h	α
1	9h 30min	8.6	511 ± 87	121 ± 21	0.29	1.03
2	9h 38min	3.4	444 ± 66	138 ± 23	0.49	0.74
3	9h 56min	3.2	357 ± 55	171 ± 25	0.44	2.30
4	9h 52min	5.7	449 ± 54	135 ± 14	0.35	1.16
5	10h 53min	1.2	402 ± 43	151 ± 18	0.14	0.96
6	11h 24min	< 0.1	574 ± 82	107 ± 16	0.67	0.75
7	10h 00min	1.8	451 ± 54	135 ± 17	0.14	1.02
8	10h 51min	1.7	509 ± 91	122 ± 24	0.68	0.67
9	9h 40min	10.7	406 ± 54	150 ± 22	0.22	0.85
10	10h 39min	5.2	408 ± 62	150 ± 24	0.36	1.27
11	8h 03min	8.6	457 ± 83	137 ± 39	0.28	0.82
12	11h 14min	0.5	422 ± 49	144 ± 19	0.39	1.04
13	9h 21min	0.5	421 ± 57	145 ± 20	0.33	0.67
14	10h 33min	1.3	540 ± 85	114 ± 19	0.62	0.89

Pour les six nourrissons dont l'indice d'asymétrie est hors de l'intervalle $[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}]$, nous avons identifiés de fortes anomalies de l'activité cardiaque ; trois nourrissons avaient été détectés par l'équipe clinique comme présentant des troubles de l'activité cardiaques, et un nourrisson était sous médication à effets secondaires sur l'activité cardiaque. Trois des six applications de premier retours sont montrées Figs 2 and 3. Les trois autres sont montrées Fig. 5.

4 Discussion et conclusion

Parmi les quatorze nourrissons à risque qui ont fait l'objet d'une surveillance cardio-respiratoire lors d'un séjour à l'hôpital, au moins six ont présenté de forts troubles de l'activité cardiaque selon l'entropie de Shannon relative et l'indice d'asymétrie que nous avons introduits. Deux d'entre eux présentaient des extrasystoles en quantité non négligeable : les arythmies étaient isolées dans l'un des cas (nourrisson #3) et en salves dans l'autre cas (nourrisson #10). Les extrasystoles en salves sont connues pour être une signature d'une pathologie plus sévère que lorsqu'elles sont observées isolées. Ceci indique que les indicateurs statistiques sur la globalité de la dynamique cardiaque comme nous les avons développés peuvent être dotés d'un fort pouvoir discriminant pour distinguer des nourrissons pathologiques de nourrissons sains. Il reste toutefois que ces deux indices ne peuvent statuer trop finement sur la sévérité d'une pathologie. La dynamique symbolique que nous avons introduite se révèle capable de distinguer la présence d'arythmies mais ne peut évaluer les sévérités relatives de celles-ci, ce qui reste donc l'apanage du cardiologue.

Quatre des six nourrissons ayant été identifiés avec de forts troubles cardiaques présentent une tendance à la bradycardie. Au moins deux d'entre eux (nourrissons #6 et #8) sont caractérisés par une

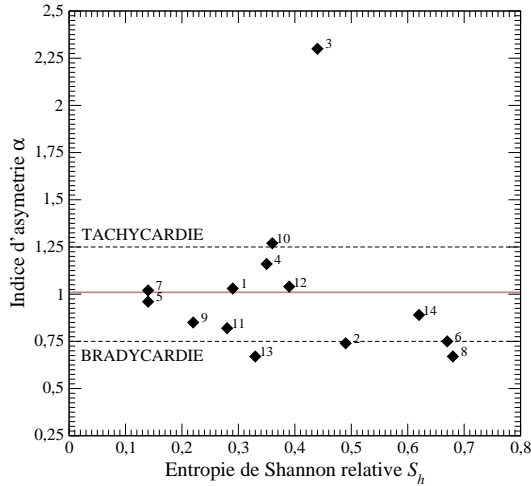


FIG. 4. Indice d'asymétrie α tracée en fonction de l'entropie de Shannon relative S_h .

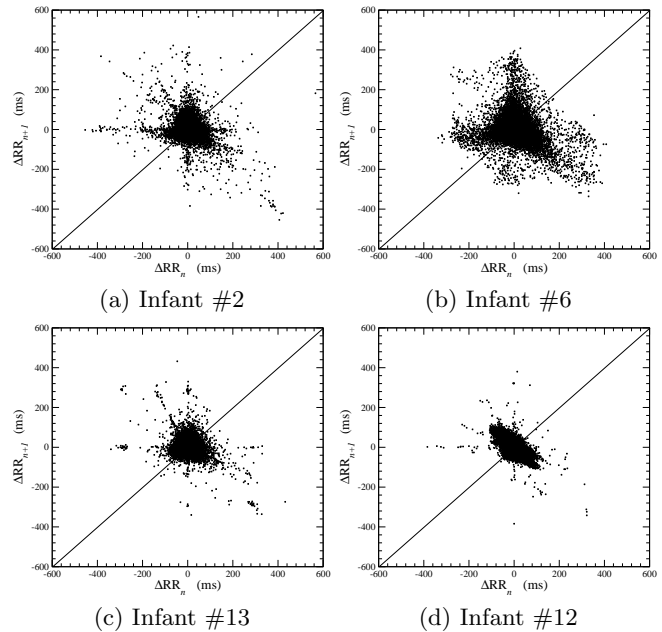


FIG. 5. Applications de premier retour sur les ΔRR_n pour les trois enfants identifiés avec de forts troubles de l'activité cardiaque (a)-(c), et pour le cas spécial du nourrisson #12 pour lequel une bigéminie est suspectée.

application de premier retour sur les ΔRR_n dont la forme est triangulaire, une signature clairement identifiée comme caractéristique de cette pathologie. Cette forme triangulaire est également observée pour le nourrisson #2, mais de taille plus petite.

Remerciements Les auteurs remercient la *Fondation de France* pour son soutien dans le financement de la thèse d'Emad Yacoub.

Références

1. L. GLASS, Introduction to controversial topics in nonlinear science : Is the heart rate chaotic ?, *Chaos*, **19**, 028501, 2009.
2. N. WESSEL, M. RIEDL & J. KURTHS, Is the normal heart rate "chaotic" due to respiration, *Chaos*, **19**, 028508, 2009.
3. U. S. FREITAS, E. ROULIN, J.-F. MUIR & C. LETELLIER, Identifying chaos from heart rate : the right task ?, *Chaos*, **19**, 028505, 2009.
4. D. GORDON, R. J. COHEN, D. KELLY, S. AKSELROD & D. C. SHANNON, Sudden infant death syndrome : abnormalities in short term fluctuations in heart rate and respiratory activity, *Pediatric Researches*, **18** (10), 921-926, 1984.
5. D. J. EWING, J. M. M. NEILSON & P. TRAVIS, New method for assessing cardiac parasympathetic activity using 24 hour electrocardiograms, *British Heart Journal*, **52**, 396-402, 1984.
6. J. E. MIETUS, C.-K. PENG, I. HENRY, R. L. GOLDSMITH, A. L. GOLDBERGER, The pNN_x files : re-examining a widely used heart rate variability measure, *Heart*, **88**, 378-380, 2002.
7. F. BABRE, Surveillance des fonctions vitales et signes d'alerte chez le nourrisson, *Journées d'Anesthésie Réanimation d'Aquitaine*, 26-27 Octobre 2006.

'Venting' dans un milieu granulaire immergé

Valérie Vidal, Germán Varas & Jean-Christophe Géminard

Laboratoire de Physique, Université de Lyon, Ecole Normale Supérieure de Lyon - CNRS
46 Allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France
valerie.vidal@ens-lyon.fr

Résumé. L'émission de gaz ou de fluides en surface des sédiments, dans les fonds océaniques, est un phénomène répandu, connu sous le nom de '*venting*'. La dynamique de ces systèmes, cependant, reste encore mal connue, en particulier dans le cas de gaz remontant à travers la couche sédimentaire, où trois phases sont mises en jeu (gaz, eau, grains). Nous présentons ici l'étude expérimentale de ce phénomène qui a permis de caractériser, en laboratoire, la dynamique de remontée et d'émission de gaz dans un milieu granulaire immergé, lorsque de l'air est injecté de manière ponctuelle à la base d'un tel système. Dans un système 3D (cuve cylindrique), nous avons caractérisé la distribution des émissions de gaz en surface du milieu. Dans un système 2D (cellule de Hele-Shaw), nous avons effectué une analyse des chemins explorés lors de la remontée de l'air. Un modèle analytique simple permet d'expliquer, aux temps longs, la géométrie de la zone fluidifiée comme un phénomène de diffusion [1]. Enfin, nous présentons des résultats numériques préliminaires, en 2D, sur l'évolution de la géométrie de la zone fluidifiée lorsque l'on change le paramètre de contrôle, χ , qui prend en compte la gravité et la taille des grains.

Abstract. Gas or fluid venting at the surface of sediments, on the seafloor, is a widely recognized phenomenon. Its dynamics, however, still remain unconstrained, in particular in the case of three phase systems (gas, water, grains), when gas rises through the sedimentary layer. Here we present laboratory experiments, which aim at characterizing this phenomenon. Air is injected punctually at the base of an immersed granular layer, and we study the dynamics of gas rising through the medium, and its subsequent emission at the surface. In a 3D experiment (cylindrical tank), we characterized the gas emission distribution at the surface of the immersed granular layer. In a 2D experiment (Hele-Shaw cell), we analyzed the paths explored by the gas rising through the system. A simple analytical model can explain, at long times, the geometry of the fluidized zone as a diffusion phenomenon [1]. Finally, we present preliminary numerical results, in 2D, describing the evolution of the fluidized zone when changing the control parameter, χ , which takes into account the gravity and the grain size.

1 Introduction

Le terme '*venting*' désigne l'émission de gaz ou, plus généralement, de fluides à travers un terrain quelconque (sol, sédiments marins, etc.). Il inclut des exemples de phénomènes naturels tels que les complexes hydrothermaux (e.g. bassin de Karoo, Afrique du Sud) [2], les '*pockmarks*' (émission de carbonates) au large de la Norvège [3], les diatrèmes de kimberlite (gisements de diamants en Afrique du Sud et au Botswana) [4] ou les volcans de boue (Azerbaïdjan) [5]. Dans les fonds océaniques, les gaz émis sont principalement des hydrocarbures, dont l'extraction présente des intérêts économiques évidents [6,7]. D'un point de vue biologique, l'écosystème des fonds marins près de ces points d'émission bénéficie d'un environnement privilégié pour se développer, grâce aux minéraux apportés par ces émissions [8]. D'un point de vue géophysique, enfin, la compréhension des régimes d'écoulement de fluide à travers une couche de sédiments est fondamentale, car ils déterminent, par exemple, les conditions de liquéfaction des sols (glissements de terrain) ou les éruptions de boue [6,9].

La formation d'instabilités lors d'écoulement de fluide dans une couche de grains immergés (système diphasique) a largement été étudiée, tant du point de vue physique que géophysique [10,11,12]. Ces études ont montré que les canaux formés à travers la couche de grains ne sont pas stationnaires, mais migrent au cours du temps [13], formant des morphologies complexes, représentatives de la dynamique de '*venting*'. Aux temps longs, la migration de ces canaux fluidifie la région autour du point d'émission de gaz, pouvant éventuellement conduire à des instabilités massives dans des sols saturés en eau [10].

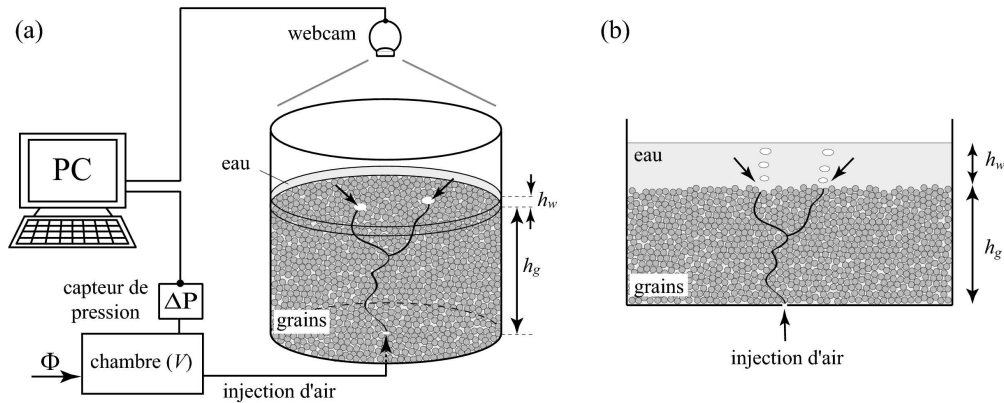


FIG. 1. Schéma du montage expérimental (a) 3D ou (b) 2D. On injecte de l'air à débit constant Φ , via une chambre de volume V , en base d'une couche de granulaire immergée, et on observe la dynamique du système. h_g et h_w indiquent la hauteur de grains et la hauteur d'eau au-dessus du lit granulaire, respectivement. Dans certaines séries d'expériences, on enregistre la surpression ΔP dans la chambre au cours du temps. Les flèches noires indiquent le(s) point(s) de sortie de l'air en surface du lit granulaire. En 2D, la webcam est placée face à la cellule expérimentale.

Les systèmes triphasiques (solide, liquide et gaz) ont une dynamique encore plus complexe qui, à l'heure actuelle, n'est pas encore entièrement caractérisée. Par exemple, dans un milieu poreux bidimensionnel, non altéré par le passage du gaz, on observe une transition dans la morphologie du front d'invasion [14]. Dans un milieu granulaire immergé non contraint, pour un débit de gaz suffisamment grand, les grains peuvent se déplacer au passage du gaz [15]. On observe dans ce cas trois régimes différents : une émission quasi-périodique de bulles à travers le milieu ; la formation d'un canal stable, reliant le point d'émission du gaz à la surface libre de la couche granulaire, par lequel le gaz s'échappe continuellement ; ou un régime intermittent, correspondant à une alternance spontanée du système entre les deux régimes précédents [15,16,17]. Nous présentons ici les résultats associés à l'étude expérimentale, analytique et numérique de la dynamique de remontée et d'émission de gaz dans un milieu granulaire immergé, lorsque de l'air est injecté de manière ponctuelle à la base d'un tel système.

2 Etude expérimentale

2.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental (Fig. 1) est identique dans le cas d'une cellule 2D (plaques de verre 40×30 cm, gap 2 mm) ou 3D (cylindre de plexiglas de diamètre 24 cm). On injecte de l'air à débit constant Φ , via une chambre de volume V , en base de la couche de granulaire immergée par un système de valve et capillaire (Φ entre 1.5 et 4.3 mL/s) ou par un contrôleur de débit (Bronkhorst, Mass-Stream Series D-5111, Φ entre 0.17 et 1.74 mL/s). Les grains utilisés sont des billes de verre sphériques (USF Matrasur) tamisées (diamètres typiques 100–125, 200–250, 250–425 ou 400–500 μm). Un capteur de pression (MKS Instruments, 223 BD-00010 AB), connecté à une carte d'acquisition (National Instruments, PCI-6251) enregistre la surpression ΔP dans la chambre (sensibilité ~ 10 Pa). Un plan lumineux (Just NormLicht, Classic Line) placé derrière la cellule expérimentale assure un éclairage homogène. La dynamique de remontée et/ou d'émission des bulles en surface est observée par une webcam Logitech QuickCam Express (expérience 2D) ou Logitech QuickCam S7500 (expérience 3D).

2.2 En 3D : Localisation des émissions de bulles

Au cours de la durée typique d'une acquisition (10 min), plusieurs centaines de bulles sont émises. Bien que l'air soit injecté au centre de la cellule (Fig. 1a), on observe, au cours du temps, que les bulles émises

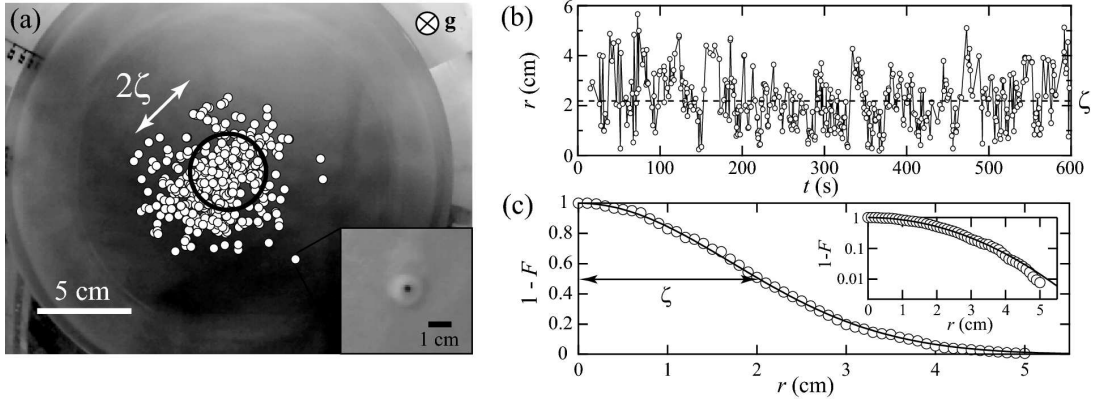


FIG. 2. (a) Localisation des points d'émission successifs du gaz en surface (cercles blancs). 50% des bulles sont émises à l'intérieur du cercle de rayon ζ (en noir). *Insert* : Zoom sur une émission de bulle. (b) Distance au centre à laquelle les bulles sont émises, en fonction du temps. (c) La complémentaire $(1 - F)$ de la probabilité cumulée $F(r)$ suit une loi gaussienne (ligne noire, fit). ζ est la demi-largeur à mi-hauteur. *Insert* : graphe log-lin des données (cercles blancs) et du fit gaussien (ligne noire) [$d = 250\text{--}425 \mu\text{m}$, $\Phi = 3 \text{ mL/s}$, $h_g = 20 \text{ cm}$].

en surface explorent une région donnée (Fig. 2a). L'analyse des images permet d'obtenir l'évolution de la distance r des bulles au centre (Fig. 2b). On définit la probabilité cumulée $F(r) \equiv \int_0^r p(u) du$, où $p(r)$ est la probabilité qu'une bulle se trouve à la distance r du centre. On trouve que la complémentaire $(1 - F(r))$ de la probabilité cumulée peut être décrite par une loi gaussienne (Fig. 2c). On peut alors définir la taille caractéristique ζ de la région explorée par les bulles par $F(\zeta) = 1/2$ (Fig. 2c). En d'autres termes, 50% des bulles sont émises à l'intérieur du cercle de rayon ζ , centré à la verticale du point d'injection. Lorsque l'on fait varier la hauteur de la couche de grains h_g , on trouve que les données sont compatibles avec la loi d'échelle empirique $\zeta \propto \sqrt{h_g}$, qui ne dépend pas significativement de Φ (Fig. 3b).

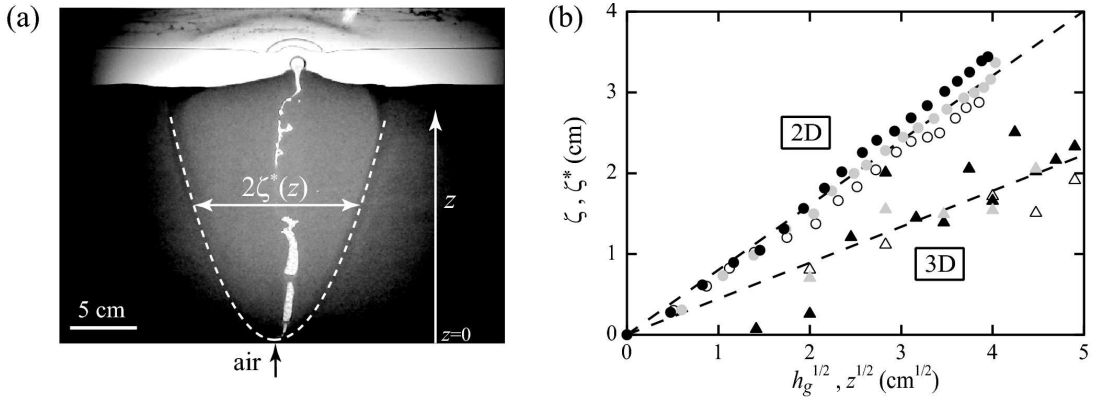


FIG. 3. (a) Morphologie de la zone fluidifiée (contour en traits blancs pointillés, déterminé par analyse d'images et interpolé par une fonction parabolique). $2\zeta^*(z)$ indique la taille caractéristique, à l'altitude z , de la région explorée par l'air en régime stationnaire [$h_g = 22 \text{ cm}$, $h_w = 2 \text{ cm}$, $d = 250\text{--}425 \mu\text{m}$, $\Phi = 2.17 \text{ mL/s}$]. (b) Taille caractéristique ζ vs. $\sqrt{h_g}$ (3D, triangles) et ζ^* vs. \sqrt{z} (2D, cercles) [Couleur, Φ (mL/s) : blanc, 1.0; gris, 2.0; noir, 3.0 (expérience 3D); blanc, 0.4; gris, 0.9; noir, 1.3 (expérience 2D); $d = 250\text{--}425 \mu\text{m}$].

2.3 En 2D : Morphologie de la zone fluidifiée

Afin de pouvoir observer les chemins suivis par l'air à travers le milieu granulaire immergé, nous avons réalisé la même expérience, en 2D (Fig. 1b). Aux temps longs, on observe la formation d'une zone fluidifiée, clairement visible sur les images (Fig. 3a). Au lieu de déterminer, comme en 3D, les points d'émission pour chaque bulle, on détermine, pour une grande hauteur de grains h_g , la taille caractéristique $\zeta^*(z)$ de la zone fluidifiée en fonction de l'altitude z (Fig. 3a). ζ^* et ζ sont comparables si l'on suppose que les chemins suivis par l'air dans le milieu ne sont sensibles qu'aux variations locales (e.g. polydispersité ou compaction), et non à la hauteur de la couche au-dessus. Cette hypothèse est vérifiée expérimentalement. En 2D, une seule expérience permet donc d'avoir accès à l'évolution de la taille caractéristique ζ^* de la zone explorée en fonction de la hauteur de grains (ici, de l'altitude z). On trouve que $\zeta^* \propto \sqrt{z}$, de nouveau indépendamment du débit injecté Φ (Fig. 3b). La différence de pente entre les résultats 2D et 3D est due d'une part, au facteur géométrique inhérent au changement de dimension, et d'autre part, à la différence entre les définitions de ζ (taille typique, définie statistiquement) et ζ^* (largeur maximale de la zone explorée par l'air).

3 Modèle analytique

Afin d'expliquer les résultats précédents, nous avons développé un modèle analytique 2D qui permet de rendre compte de la variation de ζ en fonction de la hauteur de la couche de grains h_g . L'air se propage dans le milieu selon une règle simple : un chemin déjà établi jusqu'à une altitude donnée continue sa remontée vers la surface en passant entre les grains dans la direction associée à la plus faible surpression capillaire. C'est donc la répartition de ces surpressions dans le milieu qui va déterminer le chemin suivi par l'air.

Notre modèle, dans un esprit de simplicité, considère un réseau carré bidimensionnel. Afin de prendre en compte le réarrangement local des grains, on suppose que les surpressions capillaires associées avec les directions possibles de l'air vers $x < 0$ (δP_-), $x > 0$ (δP_+) et $z > 0$ (δP_z), où x et z dénotent l'axe horizontal et vertical, respectivement, sont distribuées aléatoirement autour d'une valeur typique δP_c . Dû à la différence de pression hydrostatique δP_g ($\delta P_g \simeq \rho g d/2$, où d est la taille d'un grain) entre les chemins dans le plan horizontal et celui vers le haut, le chemin vers le haut (probabilité p_z) est favorisé. La propagation vers le haut aura lieu si $(\delta P_z - \delta P_g)$ est plus petite que δP_- et δP_+ . On peut considérer que l'air va se déplacer N fois à gauche et à droite avant de se propager vers le haut, avec $N \sim 1/p_z - 1$. Le déplacement carré moyen associé avec un déplacement vertical typique de l'ordre de la taille d'un grain d peut être estimé comme $\langle \delta x^2 \rangle \sim N d^2$. En moyenne, la distance latérale ζ^* entre le chemin parcouru par l'air et la verticale du point d'injection, à l'altitude z , est donnée par

$$\zeta^* \sim \sqrt{D} z, \quad (1)$$

où $D \sim d(1-p_z)/p_z$. C'est donc un processus de diffusion qui permet de rendre compte de la dépendance de ζ^* en z (ou, de manière équivalente, de ζ en h_g). La détermination de la dépendance du coefficient de diffusion D en fonction des paramètres du problème nécessite une hypothèse sur la distribution des surpressions dans le système. Une distribution gaussienne (expérimentalement plausible) montre que le paramètre unique, sans dimension, qui contrôle la dynamique du système est le suivant :

$$\chi = \frac{2\sigma_p}{\rho g d}, \quad (2)$$

où σ_p est la largeur de la distribution. On peut aussi exprimer χ sous la forme $\chi \sim 2\omega\gamma/\rho g d^2$, où ω est la variation typique de la taille des pores, et γ la tension de surface de l'eau [1].

4 Invasion du milieu : étude numérique

Lors d'une étude précédente, nous avons montré que l'air injecté pouvait traverser le milieu de deux façons différentes : soit en percolant à travers la couche granulaire, soit en la fracturant [15]. Expérimentalement, on observe que la morphologie de la zone fluidifiée aux temps longs est indépendante du régime

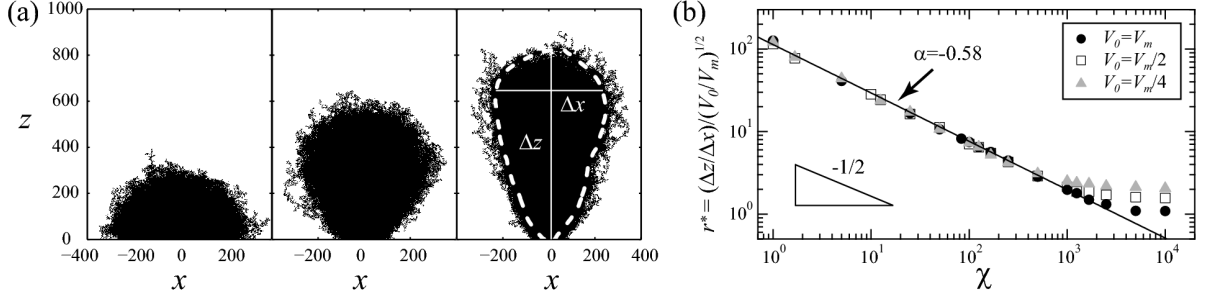


FIG. 4. (a) Géométrie de la zone explorée par l'air (superposition de 2000 chemins calculés numériquement) à volume fixé ($V_0 = V_m$) pour (de gauche à droite) $\chi = \infty$, $\chi = 250$ et $\chi = 100$. Pour chaque jeu de paramètres, on détermine la géométrie de la zone explorée (ligne en pointillés), ainsi que ses dimensions caractéristiques Δx et Δz . (b) Rapport d'aspect normalisé, $r^* = (\Delta z / \Delta x) / (V_0 / V_m)^{1/2}$, en fonction du paramètre χ . On trouve $r^* \sim \chi^\alpha$, avec $\alpha = -0.58$ (ligne noire). Pour $\chi > 10^3$, le rapport d'aspect tend vers une valeur asymptotique.

d'invasion [15], et ne dépend que du paramètre χ . Afin de quantifier la variation de la géométrie de cette région en fonction de χ , nous avons réalisé l'étude numérique suivante : on considère, comme dans la section précédente, un réseau bidimensionnel. À chaque point du réseau est associée une pression qui correspond à la somme de la pression hydrostatique équivalente à la position verticale (z) du point considéré, et une pression capillaire, définie par une distribution aléatoire gaussienne sur le réseau (représentative de la distribution de taille des pores due à la polydispersité et à la compaction locale). On injecte un volume d'air V_0 fixé au point central en base de ce réseau, et on regarde le chemin parcouru par l'air. Contrairement au cas analytique précédent, les chemins peuvent se diviser en plusieurs branches et éventuellement, selon la répartition des pressions locales, se propager vers le bas.

Pour chaque jeu de paramètres (V_0, χ), on réalise 2000 simulations, en changeant à chaque fois la répartition des pressions capillaires sur le réseau, toujours selon la même distribution gaussienne. La superposition des 2000 chemins obtenus permet d'obtenir la morphologie de la région fluidifiée (Fig. 4a). Pour un même volume injecté, on observe que lorsque χ diminue, la zone explorée par l'air, statistiquement, passe d'un cercle (exploration isotrope) à un lobe orienté vers le haut. Rappelons que physiquement, une diminution de χ signifie une augmentation de la gravité, ou une diminution de la largeur σ_p de la distribution des pressions capillaires (signifiant, par exemple, une diminution de la polydispersité ou un arrangement des grains moins aléatoire). On note Δx et Δz les largeur et hauteur typiques de la zone explorée par l'air, respectivement (Fig. 4a, droite), et on définit $\Delta z / \Delta x$ comme le rapport d'aspect géométrique, caractérisant la morphologie de la région fluidifiée.

Le volume occupé par l'air pour un pas du réseau peut s'exprimer comme $s_p d$, où s_p est la surface typique associée à un pore (espace inter-grains) et d la taille d'un grain (pas du réseau). On note V_m le volume maximal injecté sur l'ensemble des séries (ici, $V_m = 8000 s_p d$). On observe que, lorsqu'on normalise le rapport d'aspect $\Delta z / \Delta x$ par la racine carrée du volume injecté, $V_0^{1/2}$, l'ensemble des données se regroupe sur une courbe maîtresse (Fig. 4b) :

$$r^* = \frac{(\Delta z / \Delta x)}{(V_0 / V_m)^{1/2}} \sim \chi^\alpha \quad (3)$$

avec $\alpha = -0.58$. Pour $\chi > 10^3$, r^* tend vers une valeur asymptotique qui ne dépend pas du volume injecté. En effet, pour χ grand, l'air explore le milieu de manière isotrope (Fig. 4a, gauche), et le rapport d'aspect $\Delta z / \Delta x \rightarrow 1$. Le modèle développé ici autorise les branchements et les retours en arrière lors de la propagation de l'air dans le milieu. On ne peut donc pas, comme dans la description analytique précédente (section 3), le considérer en terme de processus diffusif. Il est cependant possible d'y associer un coefficient de diffusion effectif, par analogie avec le cas précédent, et par extrapolation du cas limite où χ est suffisamment petit pour que la propagation de l'air ait lieu essentiellement vers le haut – et, donc, où l'on peut considérer le processus comme diffusif. Ce travail est toujours en cours.

5 Conclusion

Nous avons présenté ici des résultats expérimentaux, analytiques et numériques concernant le phénomène de 'venting'. Il peut être décrit comme un processus de diffusion : aux temps longs (ou après une série successive d'injection d'air dans le milieu), la morphologie de la zone fluidifiée peut être décrite comme une région parabolique, avec un coefficient de diffusion D donné. Lorsque le rôle de la gravité diminue (ou que le paramètre déterminant, χ , augmente), on observe, pour un volume d'air donné, une invasion de plus en plus isotrope. L'étude numérique, encore en cours, de la variation de la morphologie de la zone explorée par l'air en fonction du volume injecté et de χ , permettra de compléter la caractérisation de ce phénomène à l'échelle du laboratoire.

Références

1. G. VARAS, V. VIDAL & J.-C. GÉMINARD, Venting dynamics of an immersed granular layer, *Physical Review E*, **83**, 011302 (2011).
2. H. SVENSEN, B. JAMTVEIT, S. PLANKE & L. CHEVALLIER, Structure and evolution of hydrothermal vent complexes in the Karoo Basin, South Africa, *Journal of the Geological Society, London*, **163**, 671-682 (2006).
3. M. HOVLAND, M. TALBOT, S. OLAUSSEN & L. AASBERG, Recently formed methane-derived carbonates from the North Sea floor, in *Petroleum Geochemistry in Exploration of the Norwegian Shelf*, Ed. B. M. Thomas, pp. 263-266, Graham and Trotman, London (1985).
4. A. L. WALTERS, J. C. PHILLIPS, R. J. BROWN, M. FIELD, T. GERON, G. STRIPP & R. S. J. SPARKS, The role of fluidisation in the formation of volcanoclastic kimberlite : Grain size observations and experimental investigation, *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **155**, 119-137 (2006).
5. S. PLANKE, H. SVENSEN, M. HOVLAND, D. A. BANKS & B. JAMTVEIT, Mud and fluid migration in active mud volcanoes in Azerbaijan, *Geo-Marine Letters*, **23**, 258-268 (2003).
6. T. MÖRZ, E. A. KARLIK, S. KREITER & A. KOPF, An experimental setup for fluid venting in unconsolidated sediments : New insights to fluid mechanics and structures, *Sedimentary Geology*, **196**, 251-267 (2007).
7. L. NAUDTS, J. GREINERT, Y. ARTEMOV, S. E. BEAUBIEN, C. BOROWSKI & M. DE BATIST, Anomalous sea-floor backscatter patterns in methane venting areas, Dnepr paleo-delta, NW Black Sea, *Marine Geology*, **251**, 253-267 (2008).
8. G. BOHRMANN, K. HEESCHEN, C. JUNG, W. WEINREBE, B. BARANOV, B. CAILLEAU, R. HEATH, V. HÜHNERBACH, M. HORT, D. MASSON & I. TRUMMER, Widespread fluid expulsion along the seafloor of the Costa Rica convergent margin, *Terra Nova*, **14**, 69-79 (2002).
9. E. G. FLEKKØY, A. MALTHER-SØRENSEN & B. JAMTVEIT, Modeling hydrofracture, *Journal of Geophysical Research*, **107**, 2151 (2002).
10. T. WILHELM & K. WILMAŃSKI, On the onset of flow instabilities in granular media due to porosity inhomogeneities, *International Journal of Multiphase Flow*, **28**, 1929-1944 (2002).
11. P. RIGORD, A. GUARINO, V. VIDAL & J.-C. GÉMINARD, Localized instability of a granular layer submitted to an ascending liquid flow, *Granular Matter*, **7**, 191-197 (2005).
12. F. ZOUESHTIAGH & A. MERLEN, Effects of a vertically flowing water jet underneath a granular bed, *Physical Review E*, **75**, 056313 (2007).
13. A. MAZZINI, M. K. IVANOV, A. NERMOEN, A. BAHR, G. BOHRMANN, H. SVENSEN & S. PLANKE, Complex plumbing systems in the near subsurface : Geometries of authigenic carbonates from Dolgovskoy Mound (Black Sea) constrained by analogue experiments, *Marine and Petroleum Geology*, **25**, 457 (2008).
14. A. VEDVIK, G. WAGNER, U. OXAAL, J. FEDER, P. MEAKIN, & T. JØSSANG, Fragmentation transition for invasion percolation in hydraulic gradients, *Physical Review Letters*, **80**, 3065-3068 (2002).
15. V. VIDAL, G. VARAS & J.-C. GÉMINARD, Dynamique de dégazage dans un milieu granulaire immergé : différents aspects, *Compte-rendus des Rencontres du Non-Linéaire*, **13**, 199-204 (2010).
16. L. GOSTIAUX, H. GAYVALLET & J.-C. GÉMINARD, Dynamics of a gas bubble rising through a thin immersed layer of granular material : an experimental study, *Granular Matter*, **4**, 39-44 (2002).
17. G. VARAS, V. VIDAL & J.-C. GÉMINARD, Dynamics of crater formations in immersed granular materials, *Physical Review E*, **79**, 021301 (2009).

Index

- Amroun Aliane Dalila, 1
Appeltant Lennert, 115
Aubert Oriane, 7
- Barros Joanna, 63
Bianco Federico, 13
Bounoiare Dounia, 19
Boutat Driss, 25
Boutat-Baddas Latifa, 25
Brault Pascal, 93
Brette Romain, 127
Brubach Jean-Blaise, 63
- Cassinari Lodovico, 63
Chembo Yanne, 115
Chibbaro Sergio, 13
Chiffaudel Arnaud, 37
Clamond Didier, 97
Cortet Pierre Philippe, 37
Coudret Raphael, 103
Couprie Marie-Emmanuelle, 63
Creff Gaëlle, 63
Crumeyrolle Olivier, 69
Cuvelier Antoine, 19
- Danckaert Jan, 115
Darouach Mohamed, 25
Davaille Anne, 31
Daviaud François, 37
Deike Luc, 41
Douay Christelle, 47
Drapeau Laurent, 103
Duboin Aurélien, 53
Dubrulle Bérengère, 37
Duguet Yohann, 57
- Evain Clément, 63
- Falcon Eric, 41
Faure Thierry, 47, 87
Freitas Ubiratan Santos, 19, 157, 169
Fromy Patrice, 139
- Géminard Jean-Christophe, 175
Gassa Feugaing Canisius Martial, 69
Ginoux Jean-Marc, 75, 81
- Guéniat Florimond, 47, 87
Gueslin Blandine, 31
- Herbert Éric, 37
Huang Yongxiang, 163
- Jacquot Maxime, 115
James François, 93
Jarlan Lionel, 103
- Labat Marie, 63
Larger Laurent, 115, 121
Lavrov Roman, 121
Le Bars Michael, 7
Le Berre Martine, 139
Le Gal Patrice, 7
Le Mouël Jean-Louis, 139
Le Quéré Patrick, 133
Leroux Alphonse, 97
Letellier Christophe, 1, 19, 75, 151, 157, 169
Liu Yulu, 163
Loulergue Alexandre, 63
Lu Zhiming, 163
Lusseyran François, 47, 87
- Mallet Eric, 169
Mallogi Florent, 53
Manceron Laurent, 63
Mangiarotti Sylvain, 103, 109
Manneville Paul, 145
Marcus Philip, 7
Martinenghi Romain, 115
Massmeyer Anna, 31
Messenger Valérie, 169
Monti Fabrice, 53
Muir Jean-François, 19
Mutabazi Innocent, 69
- Naeck Roomila, 19
Nagaoka Ryutaro, 63
Narteau Clément, 139
- Oden Jérémy, 121
- Pastur Luc, 1, 47, 87
Petitgirard Loïc, 81
Phung Thanh-Tam, 93

Platkiewicz Jonathan, 127
Podvin Bérengère, 133
Pomeau Yves, 139
Portmann Adriana, 19
Prud'homme Roger, 13

Rajchenbach Jean, 97
Rolland Joran, 145
Rosalie Martin, 151
Roulin Elise, 157
Roy Pascale, 63
Rybalko Sergei, 115

Schlatter Philipp, 57

Schmitt François, 163
Schoenauer Marc, 109

Tabeling Patrick, 53
Tordeux Marie-Agnès, 63

Van der Sand Guy, 115
Varas Germán, 175
Vidal Valérie, 175

Yacoub Emad, 169

Zheng Gang, 25