

Formes normales singulières non linéaires : un nouvel observateur

Driss Boutat¹, Gang Zheng², Latifa Boutat-Baddas³ & Mohamed Darouach³

¹ Loire Valley University, ENSI de Bourges, Laboratoire PRISME, 88, Boulevard Lahitolle 18020 Bourges Cedex

² INRIA Lille-Nord Europe, 40, avenue Halley, 59650 Villeneuve d'Ascq

³ CRAN-CNRS, UHP NancyI, IUT de Longwy 186, rue de Lorraine, 54400 Cosnes-et-Romain
driss.boutat@ensi-bourges.fr

Résumé. Les systèmes singuliers (connus aussi sous le nom de systèmes implicites ou systèmes algébro-différentiels) ont été introduits pour modéliser une large classe de systèmes pour lesquels la représentation d'état standard n'est pas applicable. On les rencontre dans les domaines des industries minérales et chimiques, en électronique et en économie. L'estimation de l'état de ces systèmes est d'une grande importance pour le diagnostic et pour la commande. Contrairement au cas des systèmes singuliers linéaires où il existe des résultats sur la synthèse des observateurs, pour les systèmes non linéaires il n'existe que quelques résultats, on cite par exemple [5]. Tous ces résultats supposent que la non linéarité est Lipschitzienne. Dans cet article, nous présentons une nouvelle approche de synthèse d'observateur pour les systèmes singuliers, elle est fondée sur le développement d'une nouvelle forme normale. Les conditions géométriques nécessaires et suffisantes d'existence de cette forme normale et une méthode simple de synthèse de l'observateur seront présentées. Un exemple numérique est présenté pour illustrer la méthode.

Abstract. Descriptor systems (known also as generalized, singular or differential algebraic (DA) systems) can describe a large class of systems, which are not only of theoretical interest but also have a great importance in practice. They are frequently encountered in chemical and mineral industries, in electronic and economic systems. The state estimation problem for descriptor systems has been the subject of several studies in the past decades and almost results exist for linear systems, only few results exist for a class of nonlinear systems where the nonlinearity is Lipschitz. This paper presents an observability normal form for nonlinear singular systems. The interest of the proposed form is to improve the observer design for these systems. Necessary and sufficient geometrical conditions to guarantee the existence of a diffeomorphism which transforms the nonlinear singular systems into the proposed normal form are given. A numerical example is given to illustrate the approach.

1 Introduction

Dans cette note on s'intéresse à la classe des systèmes suivante :

$$N\dot{x} = f(x) + \sum_{k=1}^p g_k(x)u_k, y = h(x) \quad (1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ désigne l'état du système, $u_i \in \mathbb{R}^m$ désignent les entrées, $y \in \mathbb{R}^p$ les sorties mesurées. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, le champ de vecteur qui régit l'évolution du système et les $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ les directions de contrôle et N est une matrice constante de type $n \times n$.

Si N est inversible on dit que le système (1) est régulier. Ainsi, il s'écrit sous la forme classique : $\dot{x} = \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^p \tilde{g}_i(x)u_i$ où $\tilde{f} = N^{-1}f$ et $\tilde{g}_k = N^{-1}g_k$ pour $k = 1 : n$. Si le rang(N) < n alors, on dit que le système (1) est singulier. Dans ce cas, le système est régi par un jeu d'équations différentielles (dynamiques) et un autre jeu d'équations algébriques (pour cette raison les systèmes singuliers sont aussi appelés systèmes algébro-différentiels). Si on dérive un certain nombre de fois les équations algébriques et que l'on obtienne un ensemble de nouvelles dynamiques qui forme avec les anciennes un système d'équations différentielles indépendantes, alors on aboutit à un système régulier.

Pour les systèmes réguliers linéaires ou non linéaires les méthodes de traitement des problèmes d'observateur et de commande sont nombreuses dans la littérature (voir par exemple [1]). Cependant, la carence

des systèmes singuliers en dynamiques rend les problèmes de conception d'observateurs et de commandes très difficiles à traiter. On trouve quelques travaux pour les systèmes linéaires [6,4,7]. Ces mêmes travaux ont été adaptés aux systèmes non linéaires Lipschitziens [5,3]. Dans cet article, on va s'intéresser à une classe des systèmes dynamiques (1). Plus précisément la classe des systèmes avec une dynamique manquante et une seule équation algébrique c'est-à-dire le cas où $\text{rang}(N) = n - 1$. Dans ce travail, nous allons présenter une autre nouvelle méthode de concevoir un observateur pour cette classe de systèmes que nous appellerons les formes d'observabilité canoniques singulières non-linéaires (FOCSN). Puis, nous donnerons un algorithme permettant de transformer un système singulier non-linéaire, qui satisfait des conditions géométriques, en une forme (FOCSN).

Cet article est organisé comme suit : La section 2 est consacrée à la forme (FOCSN) et son observateur. Dans la section 3, nous donnons les conditions géométriques pour qu'un système singulier peut être mis sous la forme (FOCSN). Un exemple numérique est donné dans la section 4.

2 Une forme d'observabilité canonique singulière non linéaire

Cette section est dédiée à une classe de formes canoniques singulières et à la conception d'un observateur. Les formes qui nous intéressent sont de la forme :

$$N\dot{z} = z + \beta(y) + \sum_{k=1}^p \alpha_k(y)u_k, \quad y = Cz \quad (2)$$

où $z \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $y \in \mathbb{R}$ sa sortie (la mesure) et $\beta(y) \in \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs qui ne dépend que de la sortie y . La matrice $C = (1, 0, \dots, 0)$ et la matrice N est de rang $n - 1$ et elle est de la forme :

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Notons que l'on ignore l'évolution de l'état z_1 et qu'à la place on a l'équation algébrique :

$$0 = z_n + \beta_n(y) + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,n}(y)u_k$$

où $\beta_n(y)$ est la $n^{\text{ème}}$ composante de β et $\alpha_{k,n}(y)$ la $n^{\text{ème}}$ composante de α_k .

Proposition 1. *Le système dynamique suivant*

$$N\dot{\hat{z}} - K(\dot{\hat{z}}_1 - \dot{y}) = \hat{z} + \beta(y) + \sum_{k=1}^p \alpha_k(y)u_k, \quad \hat{y} = C\hat{z} \quad (4)$$

est un observateur pour (2) où K est choisi de sorte que la matrice $(N - KC)$ soit une matrice Hurwitz.

Démonstration. Si l'on note par $e = \hat{z} - z$ l'erreur d'observation entre (4) et (2), alors sa dynamique est linéaire et s'écrit comme $\Gamma\dot{e} = e$ où $\Gamma = N - KC$. Grâce à la forme de la matrice N et celle de C , il est facile de montrer que la paire (N, C) est observable, c'est-à-dire que la matrice $O = \left(C^T (CN)^T \dots (CN^{n-1})^T \right)^T$ est de rang maximum n . Par conséquent, on peut choisir K pour rendre la matrice Γ Hurwitz i.e. la partie réelle de ses valeurs propres est < 0 . En outre, la matrice Γ est inversible. Donc, Γ^{-1} est aussi Hurwitz. D'où $\dot{e} = \Gamma^{-1}e$ est asymptotiquement stable. Donc, (4) est un observateur pour (2). ■

Il est important de noter que l'observateur (4) présente explicitement la dérivée de la sortie, c'est-à-dire $\dot{\hat{y}}$ et \dot{y} . Cependant, en pratique, la dérivée d'une sortie avec du bruit cause une amplification de ce dernier. Pour surmonter ce problème ; nous allons introduire l'estimateur algébrique : $\eta_1 = \hat{z}_1 - y$, $\eta_k = \hat{z}_k$ pour $2 \leq k \leq n$ et comme Γ est inversible (les parties réelles de ses valeurs propres < 0), alors on remplace l'observateur (4) par le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \Gamma^{-1}\eta + \tilde{\beta}(y) + \sum_{k=1}^p \tilde{\alpha}_k(y)u_k \\ \eta_1 = \hat{z}_1 - y, \eta_i = \hat{z}_i \text{ pour } 2 \leq i \leq n \end{cases} \quad (5)$$

où $\tilde{\beta}(y) = \Gamma^{-1}\beta(y)$, $\Gamma^{-1}\tilde{\alpha}_i =$. Il faut noter que le système dynamique (5) est régulier.

Avant de présenter la section suivante, faisons une remarque importante.

Remarque 1. Nous allons mettre la forme (2) sous la forme équivalente suivante que nous appellerons sa forme régulière :

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i-1} + \beta_{i-1}(y) + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,i-1}(y)u_k \text{ pour } i = 2 : n \\ \dot{z}_1 = z_n + \dot{y} + \beta_n(y) + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,n}(y)u_k \\ y = Cz \end{cases} \quad (6)$$

où $\beta_i(y)$ pour $i = 1 : n$ sont les composantes de $\beta(y)$ dans (2) et où l'équation algébrique

$$0 = z_n + \beta_n(y) + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,n}(y)u_k$$

est remplacée par l'équation "différentielle"

$$\dot{z}_1 = z_n + \beta_n(y) + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,n}(y)u_k + \dot{y}.$$

En supposant théoriquement que $\dot{z}_1 = \dot{y}$, si on regarde \dot{y} comme une entrée du système, et si on ré-ordonne le vecteur état $z_i = \xi_{i+1}$ pour $i = 2 : n - 1$, $z_1 = \xi_n$ et $z_n = \xi_1$, cette forme régulière « artificielle »¹ (6) s'écrit sous la forme compacte suivante :

$$\dot{\xi} = A\xi + \gamma(y) + \dot{y}e_1 + \sum_{k=1}^p \mu_k(y)u_k, \quad y = \xi_n \quad (7)$$

où A est la matrice de Brunovsky (on a $N^T = A$) et e_1 est le vecteur dont la première composante vaut 1 et les autres sont nulles. Si comme il a été dit ci-dessus ; \dot{y} est considérée comme une entrée, alors la forme (7) bien connue dans la littérature pour les systèmes réguliers sous le nom de forme normale d'observabilité non linéaire.

3 Résultat principal

L'objectif principal de cette section est de caractériser la classe des systèmes dynamiques singuliers de la forme (1) qui peut se mettre sous la forme (7). Comme cette dernière est équivalente à (2) l'objectif est alors atteint et on peut utiliser l'observateur (5) pour estimer les états du système (1).

On va présenter notre algorithme pour les systèmes sous la forme (1) avec $y = Cx = x_1$ et N comme dans (2). Le résultat peut être généralisé à N et y quelconque.

1. La terminologie « artificielle » est justifiée par le fait qu'on utilise \dot{y} comme une entrée du système.

3.1 Régularisation

Comme dans la remarque 1 ci-dessus, on peut régulariser le système (1) en ajoutant une dynamique artificielle en x_1 de la manière suivante :

$$N\dot{x} + \dot{x}_1 e_n = f(x) + \dot{y}e_n + \sum_{k=1}^p g_k(x)u_k, \quad y = x_1 \quad (8)$$

où pour $1 \leq i \leq n$, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Il est clair que

$$N\dot{x} + \dot{x}_1 e_n = \dot{x}_2 e_1 + \dot{x}_3 e_2 + \dots + \dot{x}_n e_{n-1} + \dot{x}_1 e_n = P\dot{x} \text{ avec } P = (e_n, e_1, \dots, e_{n-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc, (8) est équivalent au système suivant :

$$P\dot{x} = f(x) + \dot{y}e_n + \sum_{k=1}^p g_k(x)u_k, \quad y = x_1 \quad (9)$$

La matrice P est inversible et il est facile de voir que son inverse $Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$ est tel

que $Qe_n = e_1$. En multipliant les deux membres de l'équation (9) par Q , on obtient la forme régulière *artificielle*

$$\dot{x} = Qf(x) + \dot{y}e_1 + \sum_{k=1}^p Qg_k(x)u_k, \quad y = x_1 \quad (10)$$

L'idée essentielle derrière le fait de regarder un système singulier sous la dernière forme (10) permet de le traiter par des méthodes classiques introduites par Krener.

Hypothèse 1 *On suppose que le système (1) (ou son équivalent (10)), satisfait la condition de rang²*

$$\text{rank} (dh^T, (dL_F h)^T, (dL_F^2 h)^T, \dots, (dL_F^{n-1} h)^T) = n \quad (11)$$

où L_F^j désigne la dérivée de Lie j fois dans la direction de $F = Qf$ et $h(x) = y = Cx$.

Avant de donner le résultat, nous allons décrire des objets associés naturellement à un système qui satisfait à la condition du rang d'observabilité (11). Le premier objet donné dans la condition (11) étant le co-repère $\theta = ((\theta_i)_{i=1:n})$. Il est formé des 1-formes différentielles indépendantes suivantes : $\theta_1 = dx_1$ et $\theta_i = dL_F^{i-1} h$ pour $2 \leq i \leq n$. A partir de là, on définit un repère $\tau = (\tau_i)_{i=1:n}$ formé par le premier champ de vecteurs τ_1 déterminé par les équations algébriques

$$\theta_i(\tau_1) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } \theta_n(\tau_1) = 1,$$

et les autres sont obtenus par induction comme suit : $\tau_{i+1} = [\tau_i, F]$ pour $1 \leq i \leq n-1$, où $[\cdot, \cdot]$ désigne le crochet de Lie. L'évaluation de θ sur τ donne la matrice inversible suivante : $\Lambda = \theta\tau = (\Lambda_{i,j})$, où pour $1 \leq i, j \leq n$ on a $\Lambda_{i,j} = \theta_i(\tau_j)$. Par construction des τ_i il est facile de voir que : $\Lambda_{i,n-(i-1)} = 1$ et $\Lambda_{i,j} = 0$ pour $i \geq j$. Par conséquent, la famille de 1-formes différentielles suivantes : $\omega = \Lambda^{-1}\theta$, a ses composantes données par : $\omega_n = \theta_1$ et $\omega_{n-k} = \theta_{k+1} - \sum_{j=n-k-1}^n \Lambda_{k,j}\omega_j$ pour $k = 1 : n-1$. Nous avons le résultat suivant.

2. On l'appellera par abus de langage condition d'observabilité.

Théorème 1. *Sous la condition de rang d'observabilité 1, il existe un difféomorphisme qui transforme le système (10) sous la forme 7) si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

- $[\tau_i, \tau_j] = 0$ pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, [\tau_i, g_k] = 0$ et $[\tau_i, e_1] = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $k = 1 : p$
- $d\omega = 0, [\tau_i, g_k] = 0$ et $[\tau_i, e_1] = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $k = 1 : p$.

Si l'une des conditions équivalentes du théorème est satisfaite alors la différentielle du difféomorphisme en question est donnée par $d\phi = \omega$. Dans l'exemple ci-dessous, on présentera l'algorithme qui donne un tel difféomorphisme.

4 Exemple numérique

Considérons le système singulier non-linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = x_1 + x_1 x_3 + x_1^2 + (1 + x_1) u \\ \dot{x}_3 = x_2 + u \\ 0 = x_3 + x_1 + u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (12)$$

D'après la technique présentée dans la dernière section, ce système peut être réécrit sous la forme du système non-linéaire régulier

$$\dot{x} = Qf + Qgu = \begin{bmatrix} x_3 + x_1 \\ x_1 + x_1 x_3 + x_1^2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + x_1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{y} \quad (13)$$

En posant $F = Qf$, on peut calculer les 1-formes suivantes :

$$\theta_1 = dh = dx_1, \theta_2 = dL_F h = dx_1 + dx_3 \text{ et } \theta_3 = dL_F^2 h = dx_1 + dx_2 + dx_3.$$

Maintenant, on va calculer le repère τ de (12) :

$$\tau_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \tau_2 = [\tau_1, F] = \frac{\partial}{\partial x_3} \text{ et } \tau_3 = [\tau_2, F] = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Il est clair que pour tout $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$, on a $[\tau_i, \tau_j] = 0$.

De plus, il est facile de vérifier que pour $1 \leq i \leq 2$, on a $[\tau_i, g] = 0$ et $[\tau_i, e_1] = 0$ où $g = \frac{\partial}{\partial x_1} + (1 + x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$, et $e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$. D'où $A = \theta\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 \end{bmatrix}$ est inversible. Ainsi on a $\omega = A^{-1}\theta =$

$\begin{bmatrix} -x_1 dx_1 + dx_2 \\ dx_3 \\ dx_1 \end{bmatrix}$, ce qui donne le changement de coordonnées $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T = (x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, x_3, x_1)^T$. En posant $z_1 = \xi_1, z_2 = \xi_2 + \frac{y^2}{2}$ et $z_3 = \xi_3$, on obtient la forme (2)

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = z_1 + u \\ \dot{z}_3 = z_2 + u \\ 0 = z_3 + y + u \\ y = z_1 \end{cases}$$

En choisissant $K = (5, 5, 1)^T$; $(N - KC)$ est inversible et les valeurs propres de $(N - KC)^{-1}$ sont $(-0.2679, -1, -3.7321)$. Dans la simulation, l'entrée u de (12) est choisit comme suit :

$$u = \begin{cases} \sin(2t), & t \in [0, 12.5] \\ 1 + \sin(3t), & t \in (12.5, 25] \\ \sin(4t), & t \in (25, 37.5] \\ 1 - \sin(2t), & t \in (37.5, 50] \end{cases}$$

Les résultats de simulation pour l'observateur sont présentés Figs. 1.

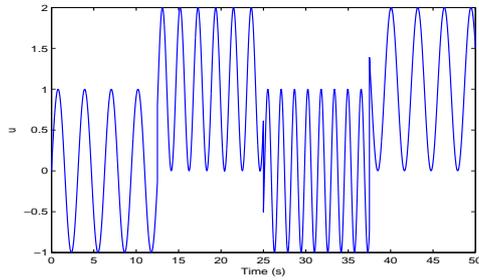
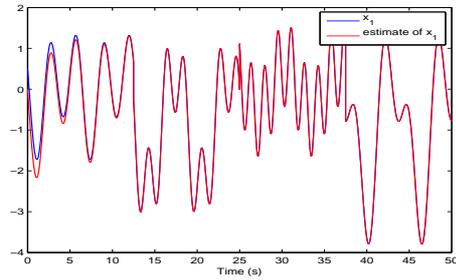
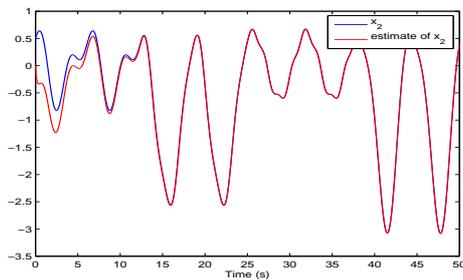
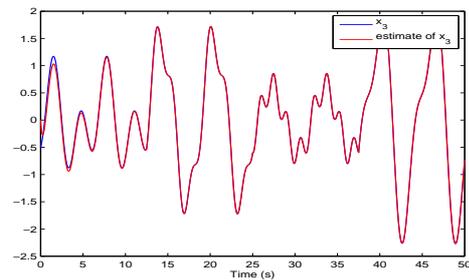
(a) L'entrée u (b) L'état z_1 et son estimé \hat{z}_1 avec les conditions initiales $z_1(0) = 0.5$ et $\hat{z}_1(0) = 0$ (c) L'état z_2 et son estimé \hat{z}_2 avec les conditions initiales $z_2(0) = 0.5$ et $\hat{z}_2(0) = 0$.(d) L'état z_3 et son estimé \hat{z}_3 avec les conditions initiales $z_3(0) = -0.5$ et $\hat{z}_3(0) = 0$.

FIG. 1. Simulations pour l'observateur.

5 Conclusion

Dans cet article nous avons proposé une nouvelle méthode de synthèse d'observateur pour une classe de systèmes singuliers non-linéaires. Nous avons d'abord proposé une forme normale d'observabilité singulière non-linéaire, ce qui nous a permis de concevoir un nouvel observateur. Nous avons aussi caractérisé géométriquement les systèmes singuliers qui peuvent se transformer sous une telle forme normale. Nous avons présenté l'algorithme de transformation sur un exemple numérique et nous avons donné les résultats de l'estimation de l'état pour cet exemple.

Références

1. A. J. KRENER & A. ISIDORI, Linearization by output injection and nonlinear observers, *Systems & Control Letters*, **3**, 47-52 (1983).
2. D. BOUTAT, A. BENALI, H. HAMMOURI & K. BUSAWON New algorithm for observer error linearization with a diffeomorphism on the outputs, *Automatica*, **45** (10), 2187-2193 (2009).
3. M. DAROUACH & L. BOUTAT-BADDAS, Observers for a class of nonlinear singular systems, *IEEE Transactions in Automatic Control*, **53**, 2627-2633 (2008).
4. M. DAROUACH, M. ZASADZINSKI & M. HAYAR, Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**, 1068-1072 (1996).
5. G. LU & D. W. C. HO, Full-order and reduced-order observer for Lipschitz descriptor systems : The unified LMI approach, *IEEE Transactions on Circuits & Systems II*, **53** (7), 563-567 (2006).
6. M. DAROUACH & M. ZASADZINSKI, Data reconciliation in generalized linear dynamic systems, *AICHE Journal*, **37**, 193-201 (1991).
7. D. KOENIG & S. MAMMAR, Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47** (12), 2057-2062 (2002).