

Systèmes minimaux, symétries et ordre unimodal

Jean-Marc Malasoma¹ & Christophe Letellier²

¹ Laboratoire Géomatériaux DGCB — URA CNRS 1652, ENTPE, rue Maurice Audin, 69518 Vaulx-en-Velin cedex, France

² CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex
malasoma@entpe.fr

Résumé. Sept classes de systèmes minimaux sont répertoriées, la topologie de leurs attracteurs est étudiée et les diagrammes de bifurcations sont tracés. Cinq classes correspondent à des suspensions (double ou simple selon la présence de symétrie ou non) d'une application unimodale à maximum différentiable ; une classe est associée à une symétrie centrale et deux à une symétrie de rotation. Les deux dernières classes correspondent à des systèmes invariants sous une rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$, l'une étant une double suspension d'une application multimodale et l'autre une double suspension d'une application feuilletée à maximum différentiable

Abstract. Seven classes of minimal system are reported, the topology of their attractor is investigated and their bifurcation diagram are plotted. Five classes correspond to a (double or simple depending on the existence of a symmetry or not) suspension of an unimodal map with a differentiable maximum, one presenting an inversion symmetry and two being invariant under a rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$. The two remaining systems are invariant under a rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$; one being a double suspension of a multimodal map and one a double suspension of a layered map with a differentiable maximum.

1 Introduction

À l'exception de Rössler qui s'est attaché à simplifier son système d'équations chaotiques [1] en éliminant un à un les termes surperflus pour aboutir à une simple équation pour le chaos continu [2], ce n'est qu'à partir de la seconde moitié des années 90 que les systèmes « minimaux » ont été l'objet de recherches approfondies. C'est Sprott qui a ravivé l'intérêt pour ces systèmes simples lors de sa recherche systématique de systèmes chaotiques [3]. L'adjectif « minimal » caractérise la complexité algébrique de ces systèmes qui est donc aussi simple que possible. Les systèmes chaotiques ont nécessairement cinq termes répartis sur les trois équations différentielles qui les constituent [4]. Nous ne considérons donc que des systèmes chaotiques à cinq termes et dont les nonlinéarités ne sont que quadratiques. Nous répertorions aujourd'hui huit classes de systèmes minimaux. L'objectif de ce travail est de faire un inventaire de leurs propriétés topologiques.

Avant de commencer l'étude de ces systèmes, considérons tout d'abord l'application discrète chaotique la plus simple, soit $x_{n+1} = x_n^2 - \mu$. Elle représente en fait la famille des applications unimodales à un maximum différentiable. À ce titre, elle entre dans la classe d'équivalence de la fonction logistique dont la signature est de présenter une cascade de doublements de périodes comme route vers le chaos (Fig. 1). Le diagramme se termine, lorsque la dynamique symbolique est complète — chaque séquence possible constituée de « 0 » pour la branche croissante et de « 1 » pour la branche décroissante est réalisée comme orbite périodique —, par une crise de frontière qui éjecte la trajectoire à l'infini.

Les flots, autrement dit les équations différentielles, se présentent comme des suspensions des applications discrètes ou, inversement, les applications discrètes correspondent à des applications de premier retour à une section de Poincaré transverse au flot de trajectoires. Nous sommes alors en mesure de nous interroger sur la nature des relations existantes entre les applications discrètes minimales et les flots minimaux. C'est ce que nous aborderons dans ce travail.

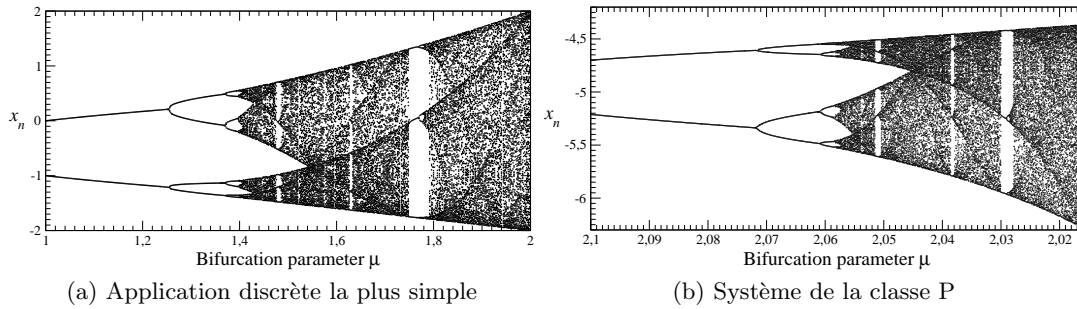


Fig. 1. Diagrammes de bifurcations de l'application discrète la plus simple (a) et d'un système minimal de la classe P.

2 Les différentes classes de systèmes minimaux

2.1 Sans propriété de symétrie

La première classe de systèmes minimaux correspond au système minimal proposé par Sprott [5] sous la forme $\ddot{x} + \alpha\dot{x} - x\dot{x} = 0$ et qui peut se réécrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\alpha z - x + xy. \end{cases} \tag{1}$$

Il correspond à la classe P selon la terminologie introduite par Malasoma [6]. Ce système présente une cascade de doublements de période comme route vers le chaos (Fig. 1b); l'attracteur chaotique (Fig. 2a) est donc caractérisé par une application de premier unimodale pourvue d'un maximum différentiable (Fig. 2b). La crise de frontière terminant le diagramme survient lorsque la dynamique symbolique est complète (Fig. 2b).

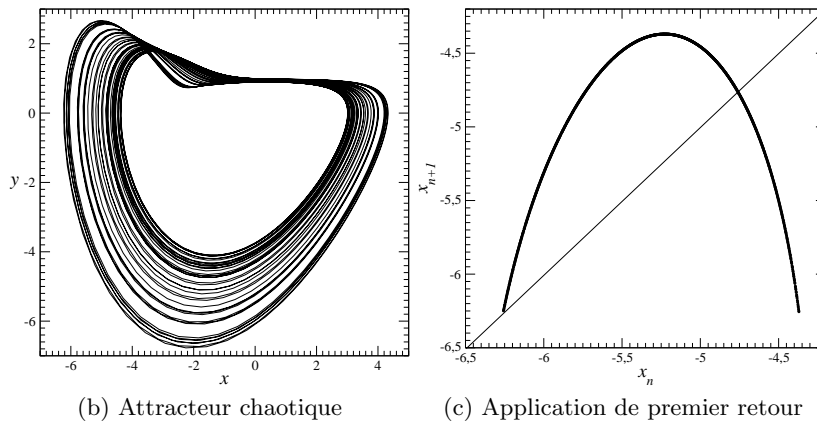


Fig. 2. Solution chaotique et application de premier retour du système minimal (1) de la classe P.

La deuxième classe — la classe R — de systèmes minimaux comprend le système [6]

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{y} = -\alpha y + z \\ \dot{z} = -x + xy. \end{cases} \tag{2}$$

Comme le système précédent, ce système présente une cascade de doublements de période (Fig. 3). L'attracteur chaotique est donc caractérisé par une application de premier retour unimodale à maximum différentiable. La crise de frontière éjectant la trajectoire à l'infini survient lorsque la dynamique symbolique est complète comme pour le système précédent. Une fois de plus, le système minimal est une suspension de l'application discrète minimale.

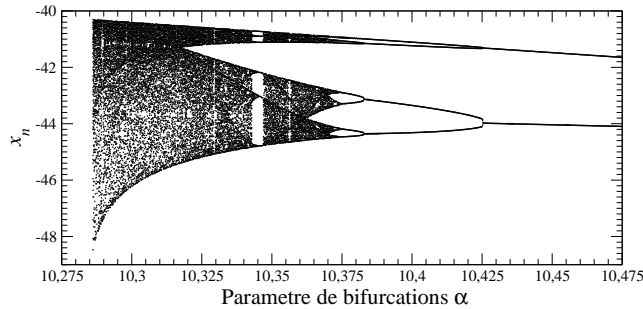


Fig. 3. Diagramme de bifurcations du système minimal (2) de la classe R en fonction du paramètre α .

2.2 Avec symétrie centrale

Le système « jerk » avec symétrie centrale \mathcal{P} minimal a été proposé par Malasoma [7]. Il s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\alpha z + xy^2 - x. \end{cases} \quad (3)$$

La symétrie centrale induit un champ de vecteurs invariant sous le changement de coordonnées $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. Le système (3) possède un seul point singulier F_0 situé à l'origine de l'espace des phases ; le point est du type col-foyer avec une valeur propre réelle négative et deux valeurs propres complexes conjuguées à partie réelle positive. Lorsqu'un système équivariant est obtenu, il est possible de s'affranchir des propriétés de symétrie en utilisant un système image [8,9]. Dans le cas présent, nous pouvons par exemple utiliser le changement de coordonnées $(u, v, w) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy, z^2)$. Dans ce cas, le diagramme de bifurcations (Fig. 4b) se ramène à un diagramme équivalent à celui observé sur l'application discrète la plus simple (Fig. 1a). En d'autres termes, le système (3) est une double suspension d'une application de premier retour unimodale à maximum différentiable, le caractère double étant induit par la rotation (une symétrie d'ordre 2) [10]. Une fois de plus, le système perd sa stabilité par crise de frontières pour $\alpha = 2.027717$ lorsque la dynamique symbolique associée à l'application unimodale du système image est complète. Par ailleurs, la représentation de l'attracteur image (Fig. 4b) correspondant au système (3) rappelle clairement l'attracteur obtenu pour les classes P et R.

2.3 Avec symétrie de rotation

Récemment, Malasoma a proposé deux systèmes minimaux avec une symétrie de rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$ autour de l'axe $0z$. Le premier système est entièrement nouveau et vient d'être découvert par Malasoma : il s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + xz \\ \dot{z} = -\alpha z + y^2 \end{cases} \quad (4)$$

L'attracteur chaotique solution de ce système (Fig. 5a) se présente comme une couverture d'ordre 2 de l'attracteur obtenu avec le système minimal P (Fig. 2b). Ce système est équivariant, c'est-à-dire

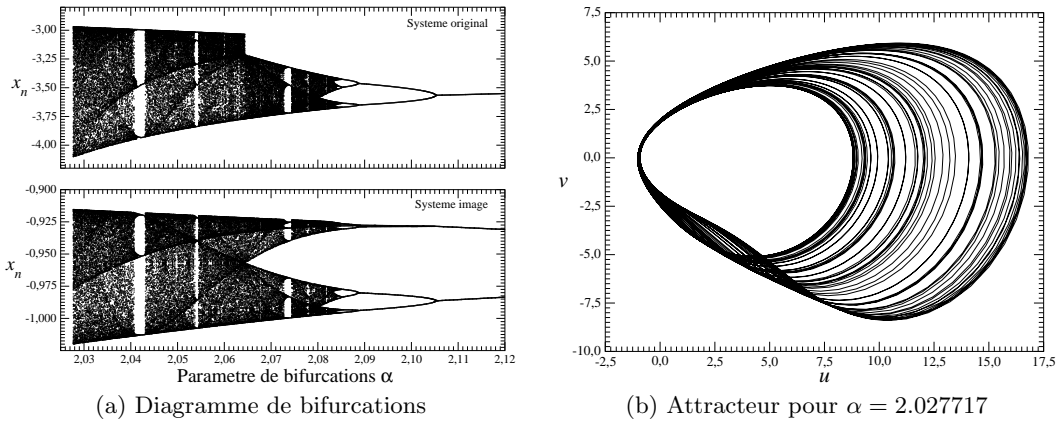


Fig. 4. Diagramme de bifurcations en fonction du paramètre α pour le système (3) et son image. L'attracteur image est représenté juste avant la crise de frontières qui éjecte la trajectoire à l'infini.

que le champ de vecteurs est invariant sous l'action d'une rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$ correspondant au changement de coordonnées $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$. Comme nous l'avons vu précédemment, il est alors possible de s'affranchir des propriétés de symétrie par le changement de variables $(u, v, w) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy, z)$ qui projette l'attracteur original dans l'espace des phases du système *image* [8,9]. L'attracteur ainsi obtenu (Fig. 5b) ne présente plus de symétrie; il est alors de configuration comparable aux attracteurs solutions des systèmes minimaux des classes P et R. La crise de frontière apparaît à la complétude de la dynamique du système image.

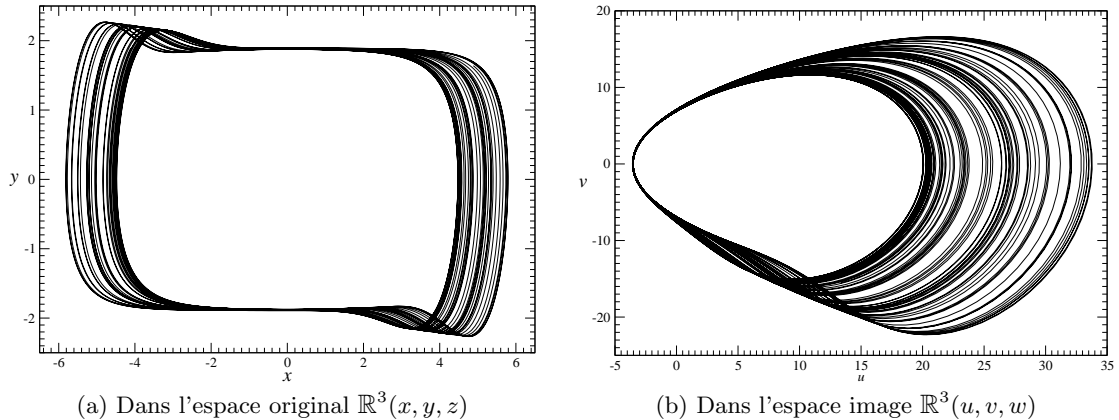


Fig. 5. Attracteur chaotique solution du système minimal (4) juste avant la crise de frontières ($\alpha = 3.588$). Conditions initiales : $x_0 = 1.24$, $y_0 = 1.89$ et $z_0 = 0.99$.

Une deuxième classe de systèmes minimaux comprend le système [11] :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + y \\ \dot{y} = xz \\ \dot{z} = 1 + x^2 \end{cases} \quad (5)$$

Ce système produit un attracteur chaotique issu d'une cascade de doublments de période (Fig. 6b). La crise de frontière survient alors que la dynamique symbolique associé à l'application de premier retour à une section de Poincaré du système image est complète. Topologiquement parlant, ce système est donc

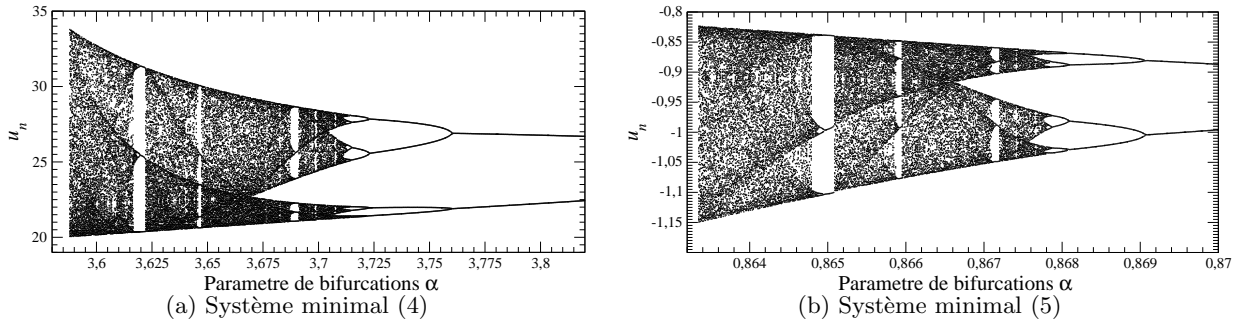


Fig. 6. Diagrammes de bifurcations des systèmes minimaux (4) et (5) en fonction du paramètre α .

équivalent à tous les systèmes vus précédemment. Toutefois, l'attracteur chaotique ne s'organise pas exactement de la même manière dans l'espace des phases (Fig. 7).

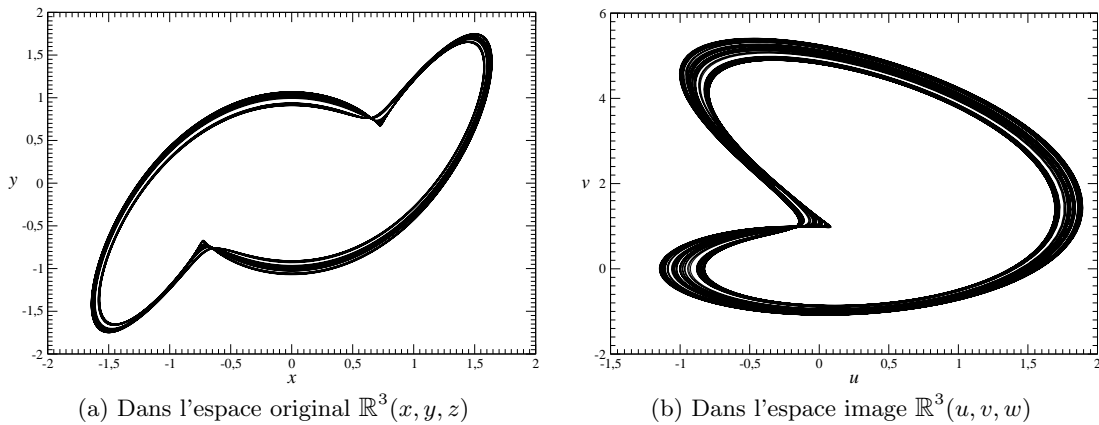


Fig. 7. Attracteur chaotique solution du système minimal (5) juste avant la crise de frontières ($\alpha = 0.86335$). Conditions initiales : $x_0 = 1.171$, $y_0 = 0.0$ et $z_0 = -1.577$.

Une autre classe est associée au système de Sprott B [3] dont un équivalent à un paramètre a été obtenu par van der Schrier et Maas [12]. Il correspond à un système de Lorenz où les effets de viscosité et de diffusion ont été négligés. Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = -xz \\ \dot{z} = R + xy \end{cases} \quad (6)$$

présente l'avantage d'avoir un paramètre naturel, R . Le diagramme de bifurcations (Fig. 8) révèle une structure plus riche que l'ensemble des diagrammes présentés jusqu'ici (Figs. 6 par exemple). Une crise de frontière survient vers $R = 4.417$, mais elle ne produit pas l'éjection de la trajectoire à l'infini. Au lieu de cela, l'attracteur subit une brutale inflation de sa taille par intégration d'une collection d'orbites périodiques instables. Cette crise survient lorsque l'application de premier retour — calculée pour le système image — présente une structure nettement moins courante que l'application unimodale à maximum différentiable, mais néanmoins présente dans de nombreux autres systèmes (le système de van der Pol forcé, par exemple, qu'une expérience pouvant être décrite par ce système présente également [13]). L'application s'apparente à une application unimodale dont la branche décroissante est dédoublée (Fig. 9b) : la crise de frontière survient lorsque la seconde branche décroissante atteint le maximum différentiable.

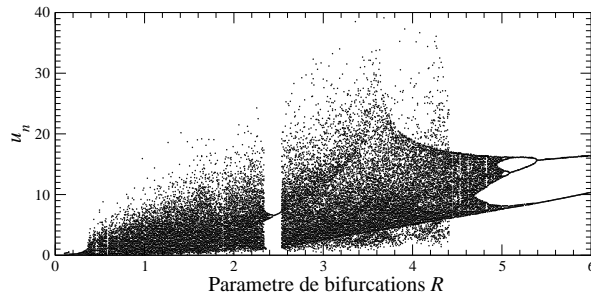


Fig. 8. Diagramme de bifurcations de l'image du système minimal de Schrier & Maas (6) en fonction du paramètre R .

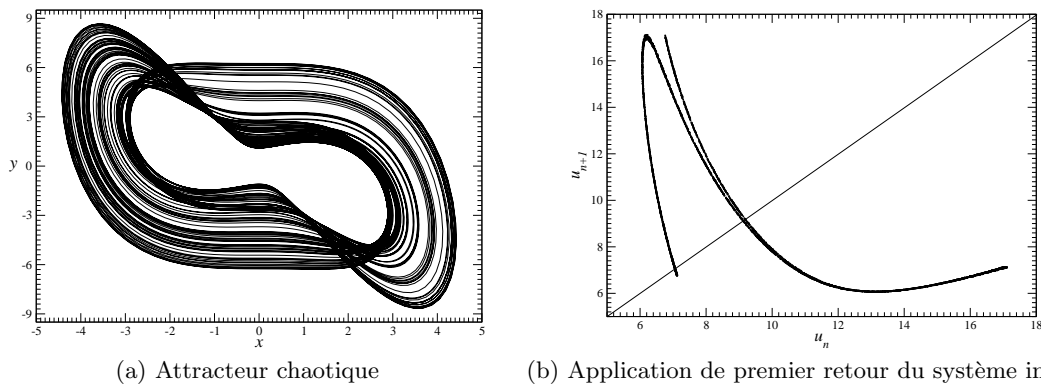


Fig. 9. Attracteur chaotique solution du système minimal (6) juste avant la crise de frontières ($R = 4.417$) et application de premier retour du système image correspondant.

Références

1. O. E. RÖSSLER, Chaotic behavior in simple reaction system, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **31**, 259-264 (1976).
2. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398 (1976).
3. J. C. SPROTT, Some simple chaotic flows, *Physical Review E*, **50** (2), 647-650 (1994).
4. F. ZHANG & J. HEIDEL, Non chaotic behaviour in three-dimensional quadratic systems, *Nonlinearity*, **10**, 1289-1303 (1997).
5. J. C. SPROTT, Simplest dissipative chaotic flow, *Physics Letters A*, **228**, 271-274 (1997).
6. J.-M. MALASOMA, A new class of minimal chaotic flows, *Physics Letters A*, **305**, 52-58 (2002).
7. J.-M. MALASOMA, What is the simplest dissipative chaotic jerk equation which is parity invariant?, *Physics Letters A*, **264**, 383-389 (2000).
8. C. LETELLIER & R. GILMORE, Covering dynamical systems : Two-fold covers, *Physical Review E*, **63**, 16206 (2001).
9. C. LETELLIER & R. GILMORE, Symmetry groups for 3D dynamical systems, *Journal of Physics A*, **40** (21), 5597-5620 (2007).
10. C. LETELLIER & J.-M. MALASOMA, Unimodal order in the image of the simplest equivariant jerk system, *Physical Review E*, **64**, 067202 (2001).
11. J.-M. MALASOMA, New Lorenz-like chaotic flows with minimal algebraic structure, *Indian Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **1** (2), 1-16 (2008).
12. G. VAN DER SCHRIER & L. R. M. MAAS, The diffusionless Lorenz equations; Shil'nikov bifurcations and reduction to an explicit map, *Physica D*, **141**, 19-36 (2000).
13. C. LETELLIER, O. MÉNARD, TH. KLINGER, A. PIEL & G. BONHOMME, Dynamical analysis and map modelling of a thermionic diode plasma experiment, *Physica D*, **156**, 169-178 (2001).