Entre les lignes, la véritable contribution d'Otto Rössler à la théorie du chaos

Christophe Letellier & Valérie Messager

CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex
Christophe.Letellier@coria.fr

Résumé. Otto Rössler est largement reconnu comme l'un des « pères fondateurs »de la théorie du chaos pour ses équations produisant un attracteur chaotique tout simple, mais très peu savent que cette attracteur n'est pas le premier qu'il publia. Notre objectif est de montrer que son premier article sur un système chaotique contient en fait beaucoup plus et révèle une compréhension profonde de la manière dont les attracteurs chaotiques s'organisent dans l'espace des phases. De plus, nous montrerons qu'Otto Rössler était essentiellement influencé par le livre d'Andronov, Khaikin et Vitt, l'article de 1963 publié par Lorenz et le théorème de Li et Yorke « une période trois implique le chaos ». Rössler étudiait les attracteurs chaotiques en termes de surface schématisant l'enveloppe de la trajectoire dans l'espace des phases, et parvint à distinguer différents domaines topologiques caractérisant l'attracteur.

Abstract. Otto Rössler is widely considered as one of the very influential contributors to "chaos theory", mainly for its equations producing one of the simplest chaotic attractors. But very few know that this attractor was not the first he published. Our aim is to show that his first paper on a chaotic system contains in fact much more and reveals a deep understanding of how chaotic attractors were organized in the phase space. Moreover, it is shown that Otto was mainly influenced by Andronov, Khaikin and Vitt's textbook, the 63 Lorenz paper and the Li-Yorke's theorem "period-three implies chaos". Rössler investigated chaotic attractors in terms of a surface sketching the enveloppe of the trajectory in the phase space, and went up to distinguish different topological domain characterizing the attractor.

La théorie du chaos correspond au paradigme selon lequel les solutions des systèmes dynamiques non linéaires, qui sont sensibles aux conditions initiales, sont étudiées. Elle constitue une branche de la théorie des systèmes dynamiques. Comme la plupart des théories scientifiques, elle a ses « héros » : Henri Poincaré (1854-1912), Edward Lorenz (1913-2008) et Otto Rössler, né en 1940. Poincaré est souvent crédité d'une contribution majeure à la théorie du chaos. S'il n'a pas observé de solutions chaotiques, il a été confronté à la grande sensibilité aux conditions initiales au voisinages des orbites homoclines [1]. Depuis ses premiers travaux, Poincaré a utilisé l'espace des phases, les quatre type de points singuliers (dans le plan), les sections de Poincaré, les applications de premier retour, les bifurcations [2]. Lorenz est connu pour avoir développé un jeu d'équations produisant un fascinant attracteur chaotique [3]. Sa contribution repose sur le fait d'avoir appliqué les techniques, développées par David Birkhoff (1884-1944) dans le contexte des systèmes conservatifs, à un système dissipatif dérivé du problème de la convection de Rayleigh-Bénard. L'utilisation d'un ordinateur numérique pour calculer la solution de ce système constitue également un aspect important de la contribution de Lorenz.

Les ordinateurs sont requis pour disposer de la précision nécessaire à l'étude de la structure sous-jacente aux solutions apériodiques. Quelques scientifiques furent toutefois confrontés à de telles solutions avant l'avènement des ordinateurs : Poincaré avec les trajectoirs homoclines, Balthazar van der Pol (1889-1859) et van der Mark while alors qu'ils étudiaient une triode [4], Mary Lucy Cartwright (1900-1998) et John Edensor Littlewood (1885-1977) lors de l'étude des solutions apériodiques de l'équation de "van der Pol equation" [5]. Mais aucun ne disposait d'obtenir une représentation globale de la trajectoire dans l'espace des phases, manquant ainsi la structure sous-jacente.

A la suite des travaux de Lorenz, David Ruelle et Floris Takens poussèrent l'idée que les comportements étranges pouvaient émerger de systèmes relativement simples [6] : en d'autres termes, il n'était plus nécessaire d'invoquer des systèmes de grandes dimensions pour expliquer des comportements « turbulents ». En dépit de leur contribution cruciale au développement de la théorie du chaos, leur langage trop mathématique et le manque de figures attractives à montrer ne les amenèrent pas à disposer d'un impact durable sur un large public, comme c'est le cas aujourd'hui pour la théorie du chaos. Néanmoins, pour les scientifiques, Ruelle (et dans une moindre mesure, Takens) fut un acteur important des premiers développements de la théorie du chaos.

Otto Rössler fut le second, après Lorenz, à fournir une belle — fascinante — image d'un attracteur chaotique. C'était en 1976 [22]. Après ce premier essai, il « inonda » le marché du chaos avec différentes variétés de chaos aux noms suggestifs comme le chaos « spiral », l'attracteur « vis », le chaos « entonnoir », le chaos « sandwich », l'application « canne », l'application « serviette pliée », parmi d'autres. En raison de ces usages de termes informels (non techniques) et d'images très suggestives — il utilisa même le « son du chaos » dans une conférence en reliant son ordinateur à un haut-parleur —, Otto Rössler attira rapidement une très large audience. Il est probable que ces termes inadéquats au sein d'articles scientifiques le conduisirent à une reconnaissance finalement très limitée par ses pairs. Adepte d'un style d'écriture elliptique, intuitif, il n'a jamais consacré beaucoup de temps à introduire le bagage qu'il utilisait. En conséquence, ce qui est habituellement retenu de sa contribution à la théorie du chaos peut être réduit à l'attracteur de Rössler, et de manière plus discrète, au premier exemple d'attracteur hyperchaotique [10]. Notre propos est de « décoder » le premier article sur un système chaotique publié par Rössler en 1976.

1 Courte biographie

Otto Rössler est né en 1940. Son père, Otto Rössler (1907-1991), était un linguiste reconnu pour avoir introduit un nouveau système de correspondance des consonnances Egypto-sémites. Adolescent, il fabriqua son propre radio-émetteur et s'initia ainsi à l'électronique. Il étudia ensuite la médecine jusqu'en 1967, époque à laquelle il était particulièrement intéressé par l'origine de la vie. Attiré par les travaux mathématiques sur l'auto-reproduction de Robert Rosen (1934-1998), il se rendit pour un an au Centre de Biologie Théorique à Buffalo où Rosen travaillait. Dans ce centre, une atmosphère très stimulante était présente, comme le rapporte Vahe Bedian au sujet d'un séjour qu'il effectua peu après Rössler [11] :

> Au début des années 70, le campus temporaire Ridge Lea de SUNY/Buffalo accueillait le Centre de Biologie Théorique et le Département de Sciences Biophysiques, où j'ai été diplômé. C'était un endroit très stimulant et encourageant pour penser et apprendre des meilleurs du domaine : Robert Rosen, Fred Snell, Robert Spangler, Robert Rein et Howard Pattee. Face à des tableaux et dans les halls, nous discutions de tout, en passant du principe d'incertitude aux automates de von Neumann, aux réseaux de neurones, aux réseaux de bascules binaires de Stuart Kauffman, à la complexité des calculs de mécanique quantique.

Bedian mentionne également que Spangler était l'un de ceux à aller « au-delà des simulations itératives [pour] formaliser le modèle comme un système dynamique non linéaire ». C'est exactement ce que Spangler et Snell réalisèrent au sujet de la réaction chimique oscillante qu'ils simulèrent en 1961 sur un ordinateur digital et en 1967 sur un ordinateur analogique [12]. Dans ce dernier travail, ils montrèrent quelques oscillations périodiques et un portrait de phase d'un cycle limite. Bien que Rössler ne rencontra pas Spangler, il cita l'article de 1967 dans l'un de ses articles de 1975 [13]. C'est à cette époque que Rössler commença à étudier **les** équations différentielles.

En 1970, Rössler découvre le livre d'Andronov, Khaikin et Vitt où il puisa une motivation poour étudier un multivibrateur à deux et trois variables. Quelques années auparavant, il avait rencontré Friedrich-Franz Seelig qui venait tout juste d'obtenir une position au département de Chimie Théorique à l'Université de Tübingen. Dans les années 60, Seelig avait été diplômé en contribuant avec Hans Kuhn et Firtz-Peter Schäfer à la construction d'un ordinateur analogique pour résoudre l'équation de Schrödinger à deux dimensions. En 1965, Seelig résolva une équation de Schrödinger avec un ordinateur digital (IBM 7090) [14]. Alors qu'ils partageaient leur intérêt pour l'origine de la vie, les équations différentielles et les ordinateurs, ils tombèrent d'accord pour tenter de trouver des équivalents chimiques aux circuits électroniques.

Rössler rejoignit Seelig à Tübingen à son retour de Buffalo en 1970. Avec l'argent mis à disposition pour ses recherches, Seelig avait acheté (80 000 DM) un ordinateur analogique, un Dornier DO 240 (Fig. 1). C'est ainsi qu'Otto commença à l'Université de Tübingen en enseignant la programmation sur ordinateur analogique, juste après avoir lui-même suivi un cours de l'Enterprise Application Integration sur le sujet. En parallèle, Rössler commença l'étude de systèmes à quelques variables avec Seelig.
A l'aide du livre de Hans Sutaner [15] de la Librairie des radio-amateurs (acheté en 1967 à Marburg avec Seelig), Otto commença par un oscillateur électronique, un flip-flop, c'est-à-dire un multivibrateur à deux états stables pouvant par conséquent être utilisé comme un bit de mémoire. Avec Seelig, Rössler proposa un multivibrateur chimique [16,17]. Ces premiers travaux restent encore aujourd'hui cité comme l'un des tous premiers systèmes chimiques pour l'implémentation de circuits logiques [18]. L'analyse de ce multivibrateur par Otto Rössler révèle une très bonne connaissance de l'électronique d'une part, mais également du livre d'Andronov, Khaikin et Vitt [13] :

Fig. 1. Ordinateur analogique Dornier DO 240 comme celui acheté par Seelig en 1970 et sur lequel Otto effectua la plupart de ses recherches sur les premiers systèmes chaotiques.

> Les equations de ce système partiel sont bien connues en électronique où elles correspondent au flip-flop symétrique RS habituel [...] seuls les termes non linéaires [...] sont normalement remplacés par une classe de fonctions formulée plus généralement (voir Andronov *et al* [19], p. 309, Eq. 5.61). Cependant, le système [A-B] est obtenu, même dans le cas électronique, si des transistors à effet de champ à n canaux sont utilisés comme élements actifs [20]...

2 Le premier système chaotique de 1976

Alors qu'il poursuit ses premières études sur les circuits chimiques, Rössler rencontra le biologiste théoricien Art Winfree (1942-2002) qui lui demanda de tenter un « Lorenz chimique ». Avec cette « commande », Winfree lui fit parvenir une collection d'articles comprenant celui de Lorenz [3], celui de Robert May [7], celui de Tien Y. Li et James Yorke [8], celui de Guckenheimer, Oster et Ipatchki (en tant que preprint puisque seulement publié en 1977 [21]), et un de Stephen Smale. Rössler considéra ces articles comme son « initiation et son armure ». Les articles qui l'influencèrent plus particulièrement furent ceux de Lorenz, et de Li & Yorke, à tel point qu'il est intéressant de comparer la construction de l'article de Lorenz à celle du premier article de Rössler (Tab. 1). Il est manifeste que Rössler a fortement calqué son article sur celui de Lorenz, au moins dans la structure car nous verrons que dans la forme, ces deux articles diffèrent grandement.

Rössler évita le problème en citant quelques travaux antérieurs où l'utilisation de l'espace des phases était, de plus, évidente. Il résuma la discussion sur l'espace des phases à un paragraphe où foisonnent des remarques telles que, pour deux oscillateurs, « quatre variables d'état »sont nécessaires : la trajectoire évolue alors sur une « métrique non Euklidienne » (même orthographe que celle utilisée par Lorenz). Pour Rössler, le fait qu'un « tore T^2 puisse être replongé dans un espace $\mathbb{R}^3$ Euklidien n'a d'une certaine manière pas été exploité ». De cette remarque, Rössler sortit trois ans plus tard un jeu de trois équations produisant un tore T^2 plongé dans $\mathbb{R}^3$ [23], mais ce système ne produisait qu'un comportement quasi-périodique.

Afin de se débarrasser d'une éventuelle définition de la notion de chaos, Rössler commença par considérer que « le chaos est connu depuis longtemps », se référant à Poincaré, l'application d'Arnold, le fer-à-cheval de Smale, et l'attracteur étrange de Ruelle et Takens. Bien sûr, aucun de ces exemples n'était explicitement associé, dans leurs contextes originaux, au terme « chaos ». Cependant, plusieurs articles

Tab.1. Table comparative entre le contenu des articles respectifs de Lorenz [3] et Rössler [22]. Les numérotations renvoient aux différentes sections des articles.

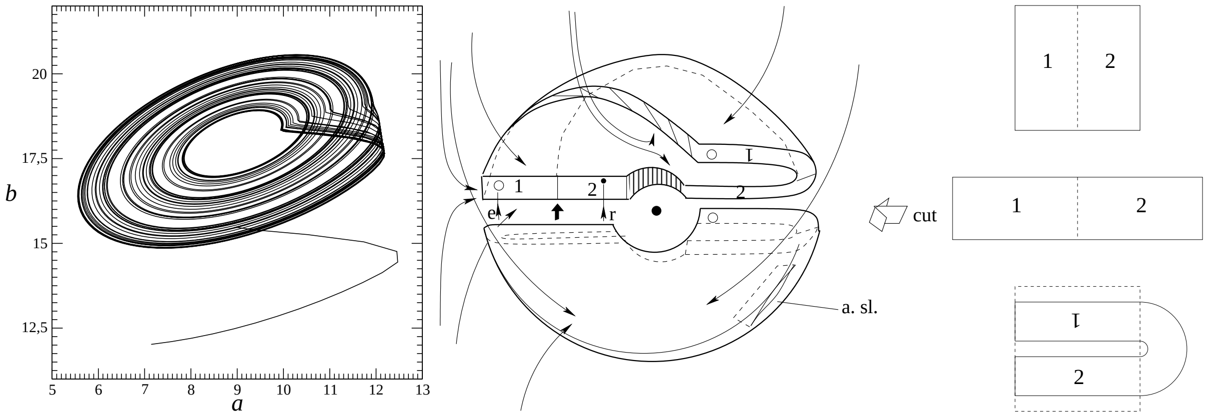
Lorenz 1963 12 pages	Rössler 1976 6 pages
I. Introduction	I. Introduction
Flots hydrodynamiques turbulents	Comportements chaotiques
II. Espace des phases	Espace des phases
	Application de Poincaré
III. Stabilité des orbites périodiques	Théorème de Li et Yorke
IV. Schéma d'intégration numérique	une simple citation à Gear
V. Les équations de convection	II. Les équations de réaction chimique
VI. Stabilité linéaire des points singuliers	$\emptyset$
VII. Séries temporelles et portraits de phase	Séries temporelles et portraits de phase
Analyse topologique = "isopleths"	III. Application de premier retour
Application de premier retour	IV. Analyse topologique = le « mixeur »
$\emptyset$	Preuve de l'existence d'un fer-à-cheval de Smale
VIII. Conclusion	V. Discussion

publiés en 1974 et 1975 (ou circulant alors comme « preprint ») mentionnaient le terme de chaotique : l'article de May [7], celui de Li et Yorke [8]. De manière plus intéressante, celui de Guckenheimer & Co [21] mentionait également que « plusieurs auteurs avaient pointé que des modèles déterministes simples pouvaient produire des comportements apparemment chaotiques qui étaient essentiellement indistingables de processus aléatoires », et en donnaient même une définition :

> Par « attracteur étrange [1] »pour une application $f(\cdot)$ nous entendons un ensemble infini Λ avec les propriétés suivantes :
>
> 1. Λ est invariant sous $f(\cdot)$, c'est-à-dire que $f(\Lambda) = \Lambda$.
> 2. Λ a une orbite qui est dense dans Λ.
> 3. Λ a un voisinage a constitué des points dont les orbites tendent asymptotiquement vers Λ : $\lim\limits_{t\to\infty} f^{(t)}(a) \subset \Lambda$.

Par la suite, Guckenheimer et ses collègues proposèrent une procédure pour l'étude des systèmes chaotiques : 1. montrer que l'application a un attracteur étrange (chaotique), 2. examiner la topologie de l'attracteur, 3. examiner la nature des orbites sur l'attracteur, 4. discuter la « mécanique statistique » de l'attracteur, etc. Ils résumèrent ensuite la première étape consistant à montrer qu'il y a une orbite dense sur Λ, c'est-à-dire que la trajectoire n'est pas un cycle limite. Malheureusement, il a été montré récemment par Lozi [25], qu'il est illusoire de vouloir expliquer cela numériquement. La seconde étape se résumait à montrer l'implication d'un fer-à-cheval de Smale. L'étape 3 était en fait commutée en une analyse par dynamique symbolique et matrices de Markov, ces dernières contribuant également à la détermination de la statistique sur l'attracteur. On peut montrer que Rössler complète la première étape en invoquant le théorème de Li et Yorke, l'étape 2 en introduisant un « mixeur » comme une « enveloppe des trajectoires » (Fig. 2a). Ce mixeur est particulièrement important car Otto lui donna une épaisseur afin de bien mettre en évidence la relation avec le fer-à-cheval de Smale : celle-ci permet une connection avec une dynamique symbolique (les deux symboles « 1 » et « 2 ») qui n'est toutefois pas exploitée dans l'article d'Otto Rössler. Ce mixeur — ou la « crèpe pliée » — est en fait un équivalent des « isopleths » de Lorenz et des variétés branchées de Williams qui deviendront des « gabarits »[26]. Pour Rössler, le mixeur se présente comme une enveloppe pour les trajectoires dans l'espace des phases : description plutôt vague.

[1] A cette époque, l'adjectif d'étrange est utilisée de manière quasi-équivalente à celui de chaotique. Ce n'est qu'après l'article de Grebogi, Ott, Pelikan et Yorke sur les attracteurs étranges qui ne sont pas chaotiques [24].



(a) Simulation numérique (b) Schéma du flot (c) fer-à-cheval de Smale

Fig. 2. Le « mixeur tri-dimensionnel". $\rightarrow$ = trajectoires entrant dans la structure par l'extérieur ; 1, 2 = demi section d'intersection (démontrant la « transformation mélangeante » qui apparaît), e = point d'entrée d'une trajectoire arbitraiement choisie, r = reéntrée du point de la même trajectoire après un cycle. $\uparrow$ = « application du fer-à-cheval », a.sl. = incision permise. Dans (b), ne pas oublier que le repliement est associé à une rotation de π autour du point singulier central $\bullet$, envoyant ainsi le repliement à droite et non à gauche, comme les symboles « 1 » et « 2 » auraient pu le suggérer autrement.

Pourtant, toute la topologie de l'attracteur est contenue dans cette figure, jusqu'à l'« incision permise » qui rappelle la troncature qu'impose Smale à son fer-à-cheval pour éviter les complications mathématiques avec la courbure due au repliement. Reste que cette description ne résiste pas à celle de Williams, par exemple : « l'étude de l'attracteur peut être réduite à celle de la variété branchée sur laquelle est appliqué un semi-flot ».

Enfin, Rössler applique une isotopie (déformation continue sans découpage) pour passer du mixeur à une structure équivalente qui révèle un ruban de Möbius et une boucle normale, c'est-à-dire deux domaines topologiquement inéquivalents et constituant l'attracteur. Sur cette figure, le cœur de la figure révèle une carte de jonction (partie supérieure) où les deux rubans sont « collés »l'un avec l'autre, et une carte de séparation, résultat de l'étirement. C'est ainsi que les deux rubans résultent d'un mécanisme d'étirement et de repliement, deux ingrédients essentiels dans la production du chaos. Mais tout ceci n'est qu'implicitement montré, sans aucun autre commentaire.

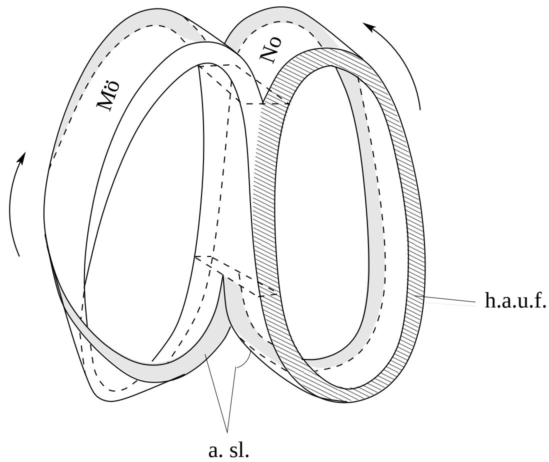


Fig. 3. Une structure équivalente à celle montrée Fig. 2a. Mö = boucle de Möbius, No = boucle normale ; h.a.u.f. = trou autour du foyer instable de la Fig. 2a ; a.sl. = frontières de l'incision permise de la Figure 2. Les deux flèches — ajoutées par les auteurs — montrent la direction du flot.

3 Conclusion

Avec son premier article sur le chaos, Otto Rössler reproduit le « tour de force » réalisé par Lorenz ou par Guckenheimer, Oster et Ipaktchi, et comme il est rarement rencontré, c'est-à-dire **avec** qu'une étude détaillée du système. Du point de vue du contenu, l'écart entre l'article de Lorenz et celui de Rössler n'est pas si grand, et les structures de ces deux articles sont finalement relativement proches. Ce qui les distingue le plus, c'est un style de rédaction très mathématique pour Lorenz, et un style très intuitif, très imagé, parfois implicite, pour Rössler. De ce style informel, il ressort une impression de flou, d'autant plus que l'ensemble des détails ne sont pas explicitement donnés ; seul un examen minutieux des figures comme celle du « mixeur » et de sa légendre révèle la parfaite maîtrise des concepts par Otto Rössler.

Sans aucune doute, une rédaction plus mathématique aurait fait de cet article relativement peu cité (186 citations en 2010) un article de référence pour l'étude des systèmes chaotiques.

Références

1. H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Tome III, (Gauthier-Villars, Paris, 1899, and A. Blanchard, Paris, 1987).
2. H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de Mathématiques*, Serie 3, **7**, 375-422, 1881 — Serie 4, **1**, 167-244, 1885.
3. E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141, 1963.
4. B. van der Pol & van der Mark, Frequency demultiplication, *Nature*, **120**, 363-364, 1927.
5. M. L. Cartwright & J. E. Littlewood, On non-linear differential equations of the second-order, *Annals of Mathematics*, **48**, 472-494, 1947.
6. D. Ruelle & F. Takens, On the nature of turbulence, *Communications in Mathematical Physics*, **20**, 167-192, 1971.
7. R. May, Biological populations with nonoverlapping generations; stable points, limit cycles, and chaos, Science **186** (1974) 645-647.
8. T. Y. Li & J. Yorke, Period-three implies chaos, American Mathematics Monthly **82** (1975) 985, 1975.
9. O. E. Rössler, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398, 1976.
10. O. E. Rössler, An equation for hyperchaos, *Physics Letters A*, **71**, 155-157, 1979.
11. V. Bedian, Self-description and the origin of the genetic code, Biosystems **60** (2001), 39-47.
12. R. A. Spangler & F. M. Snell, Transfer function analysis of an oscillatory model chemical system, *Journal of Theoretical Biology*, **16**, 381-405, 1967.
13. O. E. Rössler, A multivibrating switching network in homogeneous kinetics, *Bulletin of Mathematical Biology*, **37**, 181-192, 1975.
14. F. F. Seelig, Numerical solution of 2- and 3-dimensional Schrödinger equations for any molecular potential by iterative variation of numerical test functions with a digital computer — I. Theoretical principles : description of a computer program for solution of 2-dimensional Schrödinger equation, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **20**, 416-427, 1965.
15. H. Sutaner, *Das Spulenbuch — Hochfrequenzspulen*, (Franzis Verlag, 1972).
16. F. F. Seelig & O. E. Rössler, A chemical reaction flip-flop with one unique switching input, *Zeitschrift für Naturforschung B*, **27**, 1441-1444, 1972.
17. F. F. Seelig & O. E. Rössler, A Rashevsky-Turing system as a two-cellular flip-flop, *Zeitschrift für Naturforsch B*, **27**, 1445-1448, 1972.
18. K.-P. Zauner, Molecular information technology, *Critical Reviews in Solid State and Material Sciences*, **30**, 33-69, 2005.
19. A. A. Andronov, A. A. Vitt & S. E. Khaikin, *Theory of oscillators*, (Dover, 1966).
20. O. E. Rössler, A synthetic approach to exotic kinetics (with examples), Lecture Notes in Biomathematics **4** (1974) 546-582.
21. J. Guckenheimer, G. F. Oster & A. Ipaktchi, Periodic solutions of a logistic difference equation, *Journal of Mathematical Biology*, **4**, 101-147, 1977.
22. O. E. Rössler, Chaotic behavior in simple reaction systems, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **31**, 259-264, 1976.
23. O. E. Rössler, Toroidal oscillation in a 3-variable abstract reaction system, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **32**, 299-301, 1977.
24. C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan & J. A. Yorke, Strange attractors that are not chaotic, *Physica D*, **13**, 261-268, 1984.
25. R. Lozi, Giga-periodic orbits for weakly coupled tent and logistic discretized maps, In : *Modern Mathematical Models, Methods and Algorithms for Real World Systems*, A. H. Siddiqi, I. S. Duff & O.Christensen (Eds), (Anamaya Publishers, New Delhi), 80-14, 2006.
26. R. F. Williams, The structure of lorenz attractors, *Lecture Notes in Mathematics*, **615**, 94-112, 1977.