

Adhésion d'une plaque mince sur une sphère par capillarité

Jérémy Hure & Benoît Roman & José Bico

PMMH, CNRS UMR 7636, Univ. Paris 6 & Paris 7, ESPCI ParisTech, 10, rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05
jeremy.hure@espci.fr

Résumé. Le collage d'un film mince sur une sphère par capillarité conduit à des morphologies complexes, allant d'un contact total à de multiples branches de contact séparées par des zones décollées. L'un des facteurs essentiels expliquant ces motifs est le *Theorema Egregium* de Gauss dont la conséquence est l'étirement nécessaire à une plaque pour être en contact étendu avec une sphère. Notre étude s'intéresse aux propriétés locales des motifs comme la taille caractéristique des zones de contact ou globales comme la forme générale de celles-ci, expérimentalement et numériquement.

Abstract. The complex morphology resulting from the adhesion of a thin plate on a sphere by capillarity ranges from complete contact to branching patterns. One of the key factors explaining these morphologies comes from Gauss' *Theorema Egregium* whose consequence is the unavoidable stretching needed to map a plate on a sphere. We study both experimentally and numerically the characteristics of the developed contact patterns such as the typical size of the contact zone as well as the general shape of the pattern.

1 Introduction

Différents types de projections ont été développés par les cartographes afin de réaliser des planisphères, dont l'une des plus célèbres est celle que l'on doit à Gerardus Mercator [1]. Cette dernière est conforme, conservant les angles mais modifiant les distances. En fait, la projection d'une sphère sur un plan ne peut être isométrique, i.e. conserver à la fois les angles et les distances. Cette propriété à laquelle on doit l'aspect des planisphères découle du *Theorema Egregium* énoncé par Gauss qui stipule que le produit des courbures principales - ou courbure de Gauss - d'une surface est invariant par isométrie locale [2]. Ainsi, transformer une sphère, de courbure de Gauss constante ρ^{-2} , en un plan, de courbure de Gauss nulle, n'est possible qu'en modifiant les distances entre les points de la surface. Cette propriété géométrique contraint de manière très importante les déformations des surfaces élastiques - comme les plaques et les coques - puisqu'à une variation de courbure de Gauss est donc associée une énergie d'extension. De plus, cette dernière varie linéairement avec l'épaisseur alors que l'énergie de courbure - due aux déformations opposées de part et d'autre de la surface moyenne - varie comme le cube de l'épaisseur. Ainsi, pour des films élastiques minces, les déformations de flexion, quand elles sont possibles, sont privilégiées par les surfaces élastiques [3]. De ces deux propriétés - géométrique et mécanique - découlent les propriétés des plaques minces telles que la focalisation de l'énergie d'extension au niveau de points ou de lignes que l'on observe par exemple dans le papier froissé, et en dehors desquels la surface est isométrique à un plan [4]. Dans cette étude, on s'intéresse à la situation réciproque de celle des cartographes et qui consiste à enrober une sphère par une plaque.

2 Dispositif expérimental

L'expérience consiste à déposer un film mince sur une calotte sphérique préalablement recouverte de liquide (Fig. 1a). Les caractéristiques mécaniques des films utilisés sont indiquées dans le tableau 1b. Le liquide est de l'éthanol, de tension superficielle $\gamma = 22.4 \text{mN.m}^{-1}$, en situation de mouillage total avec les films et les sphères. En fonction des paramètres du système, on observe des morphologies complexes de zones collées et décollées comme le montrent les figures 1c, d.

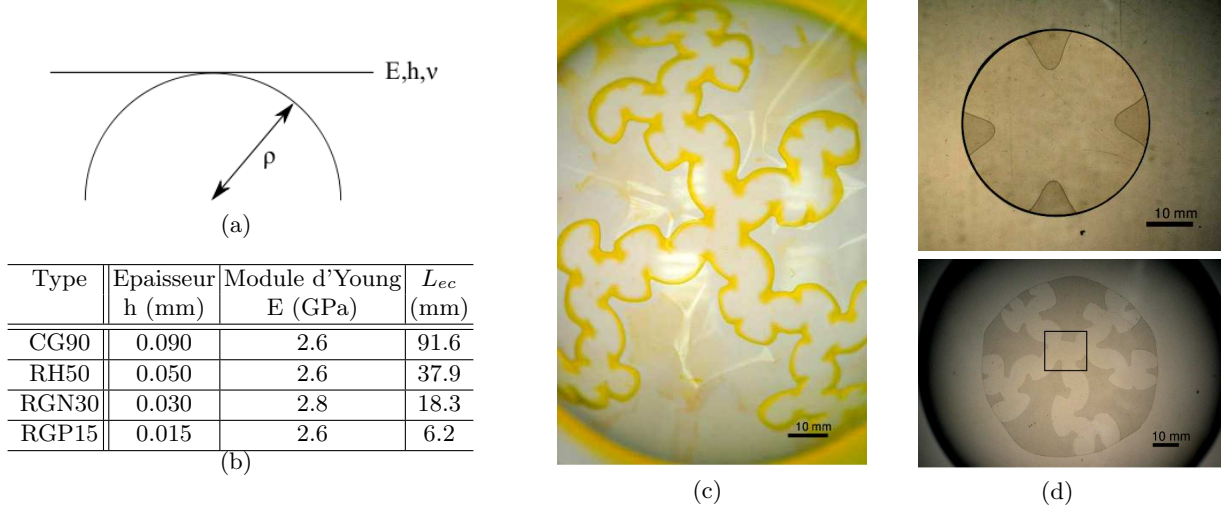


Fig. 1. (a) Dispositif expérimental (b) Caractéristiques des films de polypropylène (Innovia Films), avec $L_{ec} = \sqrt{B/\gamma}$ la longueur élastocapillaire [5], [6], $B = [Eh^3]/[12(1-\nu^2)]$ le module de flexion. Le coefficient de Poisson ν est pris égal à 0.4. La valeur du module d'Young correspond à une valeur moyenne : l'anisotropie peut atteindre 10% pour le film le plus mince. Le rayon des calottes sphériques ρ utilisées est dans la gamme [25mm, 500mm]. (c) Cas $\rho = 60\text{mm}$, RGP15, éthanol coloré. (d) Haut : $\rho = 197\text{mm}$, RH50 ; Bas : $\rho = 60\text{mm}$, RGP15 ; Les zones claires correspondent au contact entre le film et la sphère, les zones plus foncées aux endroits où le film est décollé.

L'utilisation de colorant (Fig. 1c) permet de distinguer le ménisque délimitant la zone de contact entre la plaque et la sphère. Le volume présent entre les deux dans cette zone est quasi-nul d'où l'absence de coloration. Entre les branches de contact se trouvent des parties décollées. Dans la suite, afin de s'affranchir du paramètre de volume de liquide, on laisse l'éthanol s'évaporer jusqu'à disparition du ménisque. Dans cette limite $V \rightarrow 0$, la présence de liquide se réduit à considérer une énergie liée au contact entre le film et la sphère. Dans cette étude, on s'intéresse principalement aux caractéristiques des motifs développés, comme sur les figures 1c, d bas.

3 Caractéristiques des motifs observés

3.1 Zone de contact

Considérons l'adhésion par capillarité d'une plaque de surface S , d'épaisseur h , de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν sur une sphère de rayon ρ . Dans un premier temps, on se restreint au cas d'une plaque de surface infinitésimale, ce qui permet de négliger l'énergie d'extension devant l'énergie de courbure d'ordre $E_c \sim (Eh^3/\rho^2)S$ [7]. L'énergie due à la tension de surface par le contact vaut $E_a \sim \gamma S$ ¹. L'adhésion complète de la plaque n'est possible que si $E_a > E_c$ ce qui s'écrit $\rho > L_{ec}$ où L_{ec} est la longueur élastocapillaire. Si le rayon de la sphère est plus petit que la longueur élastocapillaire, l'adhésion complète par capillarité d'une plaque, même de surface infinitésimale, n'est pas possible. Pour des rayons plus grands, l'énergie gagnée par le système lors de l'adhésion de la plaque sur la sphère est d'autant plus grande que la surface de contact est grande. Ce qui va limiter la taille du contact est donc l'énergie d'extension. Dans le cas de l'adhésion complète d'une plaque circulaire de rayon R , en négligeant les frottements, Majidi *et al* ont montré que le rayon maximal est donné par la relation [8] :

$$R_{max} = \max \left(\left[\frac{256\gamma\rho^4}{Eh} - \frac{32h^2\rho^2}{3(1-\nu)} \right], 0 \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1)$$

¹ à cause du mouillage total : séparer la plaque de la sphère crée deux interfaces air/liquide

On peut également s'intéresser au contact entre une plaque rectangulaire dont la largeur $2a$ est très petite devant la longueur. Les équations de Föppl-von Kármán s'écrivent [9] : $B\Delta^2 w = q + 2h[\phi, w]$ et $\Delta^2 \phi = -E[w, w]$ en notant w le déplacement transverse, q le chargement transverse, ϕ la fonction d'Airy et $[f, g] = (1/2)f_{,xx}g_{,yy} + (1/2)f_{,yy}g_{,xx} - f_{,xy}g_{,xy}$ en coordonnées cartésiennes. L'axe ($0x$) est orienté selon la longueur de la plaque. Du fait de l'invariance en x des contraintes, la fonction d'Airy s'écrit, à une fonction affine près, $\phi(x, y) = f(y) + \alpha xy + \beta x^2$. Les contraintes dans le plan moyen s'en déduisent en utilisant les conditions aux limites $\sigma_{yy}(\pm a) = 0$ et $\langle \sigma_{xx} \rangle_y = 0^2$ et s'écrivent : $\sigma_{xx} = [E/(6\rho^2)](a^2 - 3y^2)$, $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$. Par la loi de Hooke en contraintes planes, on en déduit l'énergie élastique par unité de longueur de la plaque : $E_{el} = [(Eh^3 a)/(6\rho^2(1-\nu))] + [(Eha^5)/(45\rho^4)]$ où les deux termes correspondent respectivement à l'énergie de courbure et à l'énergie d'extension. L'énergie totale du système vaut $E_t = E_{el} - 4\gamma a$. La largeur maximale est définie par la relation $dE_t/da = dE_{el}/da - 4\gamma = 0$:

$$a_{max} = \max \left(\left[\frac{36\gamma\rho^4}{Eh} - \frac{3h^2\rho^2}{2(1+\nu)} \right], 0 \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2)$$

Ces équations ne sont valides que dans le cas d'une plaque complètement en contact avec la sphère. Néanmoins, dans le cas $\rho \gg L_{ec}$, elles montrent la loi d'échelle reliant la taille de la zone de contact avec les paramètres du système, i.e. $a \sim (\gamma/Eh)^{1/4}\rho$. Cette loi peut se retrouver de la manière suivante : la déformation nécessaire pour coller une plaque circulaire de rayon R sur une sphère est d'ordre $(R/\rho)^2$ ³, ce qui donne une énergie d'extension d'ordre EhR^6/ρ^4 à comparer à une énergie d'adhésion d'ordre γR^2 .

On mesure la taille de la zone de contact sur les motifs développés (cf Fig. 1c,d bas) que l'on définit comme le rayon du plus grand disque que que l'on puisse inscrire à l'intérieur de celle-ci (Fig. 2a).

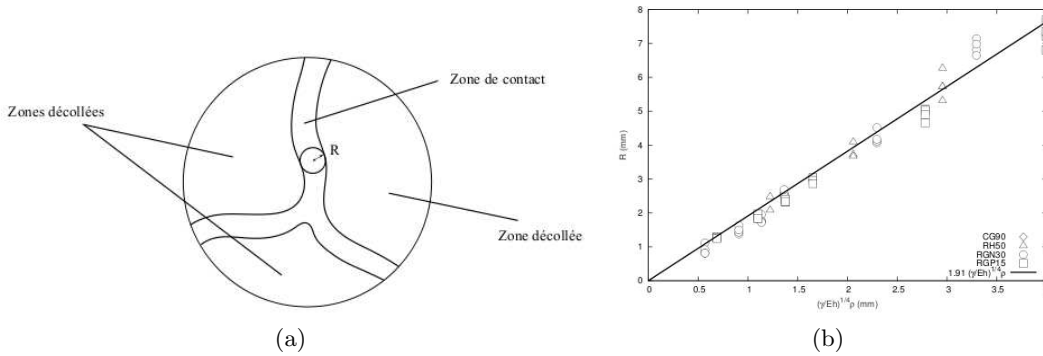


Fig. 2. (a) Mesure de la taille de la zone de contact sur les motifs développés définie comme étant le rayon du plus grand cercle inscrit dans celle-ci. (b) Taille de la zone de contact en fonction des paramètres du système.

Toutes les mesures correspondent au cas $\rho \gg L_{ec}$. Les résultats expérimentaux (Fig. 2b) vérifient la loi d'échelle prédite dans le paragraphe précédent. Les variations sont attribuées notamment à l'anisotropie des films. Ce résultat est particulièrement frappant puisqu'il semble indiquer que, dans ce régime, l'énergie dans les zones décollées est négligeable. Le préfacteur obtenu par l'ajustement des données vaut 1.91, proche de la valeur correspondant à une bande complètement en contact de 2.45.

Dans le cas d'un volume de liquide non nul, on retrouve des résultats proches de ceux précédents, indiquant que l'influence du ménisque semble être négligeable dans la taille de la zone de contact.

² Aucune force extérieure n'est appliquée dans cette direction.

³ ce qui correspond à l'ordre de grandeur de la déformation radiale si on considère que le périmètre ne change pas de longueur, ou inversement la déformation orthoradiale à rayon constant.

3.2 Décollements

Afin d'étudier la forme générale des zones collées et décollées dans les cas complexes de présence de multiples branches de contact, on s'intéresse au cas où l'on observe une zone de contact centrale avec des cloques de décollement autour (voir Fig. 1d haut). Cette situation peut être vue comme un agrandissement de la zone centrale des cas plus complexes (rectangle dans Fig. 1d bas). On s'intéresse dans un premier temps à la forme de ces cloques. Supposons qu'elle résulte d'un équilibre entre adhésion et énergie de courbure, comme pour des cloques rectilignes [10]. Pour une plaque circulaire complètement en contact sur une sphère, la variation de longueur ΔL d'un cercle de rayon r est d'ordre $\Delta L \sim r^3/\rho^2$. L'apparition des cloques permet de relâcher cette déformation d'où $\Delta L \sim nd^2/\lambda$ avec n le nombre de cloques, d la hauteur et λ la largeur des cloques. L'énergie d'adhésion par unité de longueur $\gamma\lambda$ s'équilibre avec l'énergie de courbure Eh^3d^2/λ^3 , ce qui donne :

$$\lambda \sim \frac{L_{ec}^{2/3}}{\rho^{2/3}n^{1/3}}r \quad (3)$$

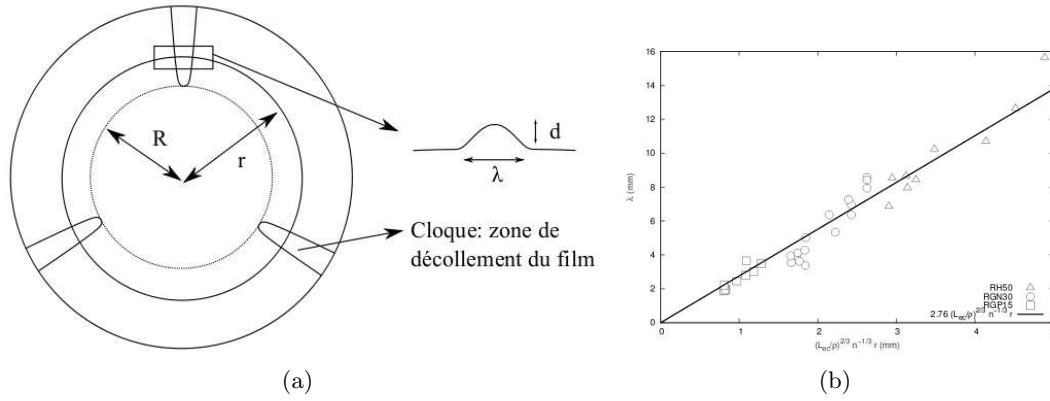


Fig. 3. (a) Motif simple de décollement constitué de cloques équiréparties de faibles amplitudes (Fig. 1d haut). (b) Largeur des cloques en fonction des paramètres du système. La valeur de n utilisée est celle mesurée expérimentalement.

Le graphique 3b valide l'hypothèse selon laquelle la forme des cloques résulte d'un équilibre entre adhésion et énergie de courbure. L'énergie d'extension à l'intérieur des cloques, pour ce type de cloques de faibles amplitudes, qui existe puisque la forme décrite n'est pas développable, est donc négligeable. On peut maintenant s'intéresser au nombre de cloques. On considère l'équilibre du disque de rayon r . L'énergie de courbure et de surface associées aux cloques sont respectivement d'ordre $n(Eh^3)(d^2/\lambda^4)\lambda(r - R)$ et $n\gamma\lambda(r - R)$ en notant R la taille du disque de contact central. Pour estimer l'énergie d'extension, qui se trouve principalement au centre, on considère que la déformation d'ordre $\epsilon = R^2/\rho^2$ est également répartie en n zones à l'intérieur de la zone centrale du fait de la présence des cloques, d'où une énergie d'ordre $nEh(R/n)^2\epsilon^2$. Equilibrer ces trois énergies en considérant que les cloques relâchent toute la déformation orthoradiale $\Delta L \sim r^3/\rho^2 \sim nd^2/\lambda$ conduit à :

$$n \sim \left(\frac{Eh}{\gamma}\right)^{3/5} \frac{R^{18/5}}{r^{3/5}(r - R)^{3/5}L_{ec}^{2/5}\rho^2} \quad (4)$$

$$\lambda \sim \frac{L_{ec}^{2/3}}{\rho^{2/3}n^{1/3}}r \quad (5)$$

La figure 4 montre un bon accord entre les équations 4, 5 et les résultats expérimentaux. Cela étant, il est difficile d'obtenir une plage de nombre de cloques suffisamment large pour infirmer ou confirmer de manière plus significative les prédictions.

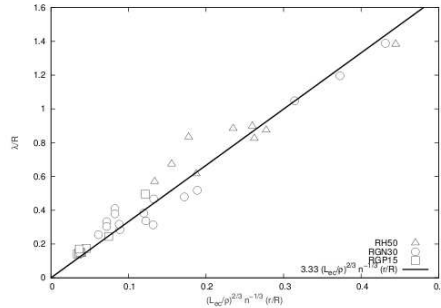


Fig. 4. Largeur des cloques en fonction des paramètres du système. La valeur de n utilisée est celle provenant de l'équation 4.

L'étude de ces motifs simples de décollement permet de comprendre globalement les motifs dans les cas développés (Fig. 1b). Le nombre de cloques apparaissant autour d'une zone de contact centrale va fixer le nombre de branches de contact, dont on a vu dans le paragraphe précédent que la taille caractéristique dépend des paramètres du système. A cela s'ajoute le fait que les branches de contact ne peuvent délimiter une zone décollée fermée, puisque d'après le théorème de Gauss-Bonnet [2], cela nécessiterait de changer la courbure de Gauss dans la partie décollée, et donc coûterait au système de l'énergie d'extension sans gain d'énergie d'adhésion.

4 Simulations numériques

Les simulations numériques ont été réalisées avec le logiciel Surface Evolver [11], principalement utilisé pour l'étude des surfaces liquides, mais également pour simuler des tiges et coques élastiques [12], [5]. L'énergie d'adhésion est modélisée par un potentiel énergétique décroissant exponentiellement sur une longueur caractéristique lorsque la plaque s'éloigne de la sphère. La minimisation de l'énergie utilise alternativement les algorithmes de gradient et de gradient conjugué en introduisant également de la stochasticité. Enfin, on vérifie que les résultats ne dépendent pas du maillage ni du paramètre de décroissance exponentielle de l'énergie d'adhésion. Les simulations permettent de retrouver les motifs expérimentaux (Fig.5 a,b,c,d). Les comparaisons des déformations radiales et orthoradiales entre la situation où toute la plaque serait en contact et la solution avec des cloques montrent que les cloques permettent de relâcher en grande partie la déformation orthoradiale. De plus, la déformation radiale est non nulle dans les cloques. Cela étant, les simulations montrent également que l'énergie d'extension est négligeable devant l'énergie de courbure dans celles-ci. Ces remarques valident les hypothèses faites dans le paragraphe précédent qui prédit la forme et le nombre de cloques dans les cas simples de cloques de faibles amplitudes.

5 Conclusion

L'adhésion d'une plaque mince sur une sphère par capillarité présente des motifs complexes de zones de contact et décollées. La taille caractéristique du contact, dans le cas où celui-ci est possible, est donnée par un équilibre entre adhésion et extension de la plaque. Pour les motifs plus simples, la forme des cloques est décrite de manière satisfaisante par un équilibre entre courbure et adhésion comme dans le cas des cloques rectilignes. Enfin, la simulation numérique permet de prédire le motif de contact et d'avoir accès au champ de déformations dans la plaque.

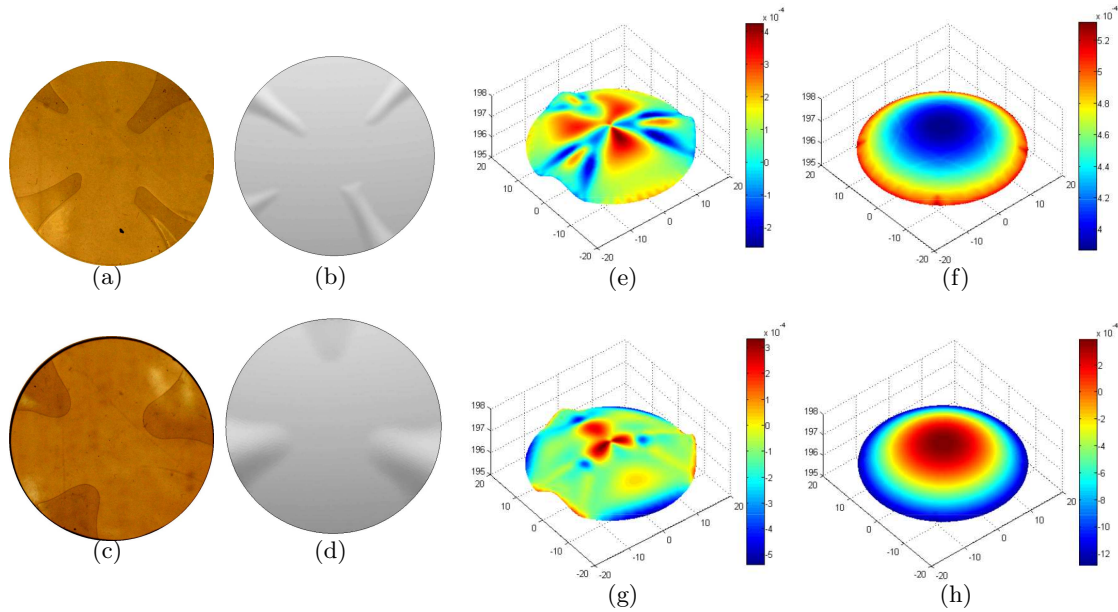


Fig. 5. (a) $\rho = 100\text{mm}$, RGP15, expérience (b) $\rho = 100\text{mm}$, RGP15, simulation (c) $\rho = 197\text{mm}$, RH50, expérience (d) $\rho = 197\text{mm}$, RH50, simulation (e,f) $\rho = 197\text{mm}$, RH50, déformation radiale ϵ_{rr} , comparaison avec la déformation de la plaque complètement en contact (g,h) $\rho = 197\text{mm}$, RH50, déformation orthoradiale $\epsilon_{\theta\theta}$, comparaison avec la déformation de la plaque complètement en contact

Références

1. G. MERCATOR, Atlas Sive Cosmographicae Meditationes De Fabrica Mundi Et Fabricati Figura, *Duisburgi Clivorum*, (1595).
2. D.J. STRUIK, Lectures on classical differential geometry, *Dover*, (1988).
3. T.A. WITTEN, Stress focusing in elastic sheets, *Review of Modern Physics*, **79** (2), 643-675 (2007).
4. M. BEN AMAR & Y. POMEAU, Crumpled paper, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **453**, 729-755 (1997).
5. A.E. COHEN & L. MAHADEVAN, Kinks, rings, and rackets in filamentous structures, *Proceedings of the National Academy of Science (USA)*, **100** (21), 12141-12146 (2003).
6. C. PY, P. REVERDY, L. DOPPLER, J. BICO, B. ROMAN AND C.N. BAROUD, Capillary origami : Spontaneous wrapping of a droplet with an elastic sheet, *Physical Review Letters*, **98** (15), 156103 (2007).
7. S. TIMOSHENKO AND S. WOINOWSKI-KRIEGER, Theory of plates and shells, *McGraw-Hill*, (1959).
8. C. MAJIDI & R.S. FEARING, Adhesion of an elastic plate to a sphere, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **464**, 1309-1317 (2008).
9. L.D. LANDAU & E.M. LIFSHITZ, Theory of elasticity, *Butterworth Heinemann*, (1986).
10. D. VELLA, J. BICO, A. BOUDAUD, B. ROMAN & P.M. REIS, The macroscopic delamination of thin films from elastic substrates, *Proceedings of National Academy of Science (USA)*, **106** (27), 10901-10906 (2009).
11. K. BRAKKE, The surface Evolver, *Exp. Maths*, **1** (2), 141-165 (1992).
12. C. QUILLIET, C. ZOLDESI, C. RIERA, A. VAN BLAADEREN & A. IMHOF, Anisotropic colloids through non-trivial buckling, *European Physical Journal E*, **27** (1), 13-20 (2008).