

Les courbes singulières : invariants unidimensionnels des systèmes dynamiques

Jean-Marc Ginoux¹, Robert Gilmore², Timothy Jones², Ubiratan Freitas³ & Christophe Letellier³

¹ Laboratoire PROTEE, I.U.T. de Toulon — Université du Sud, BP 20132, F-83957 La Garde Cedex, France

² CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France

ginoux@univ-tln.fr

Résumé. Les courbes singulières sont des invariants unidimensionnels qui sont introduits de manière à décrire les contraintes d'évolution des courbes intégrales d'un système dynamique de dimension n . Ces courbes qui fournissent plus d'information sur le système que les invariants de dimension nulle (les points fixes) sont appelées "singulières" parce qu'elles passent par les points fixes. Elles peuvent être définies de deux manières différentes mais équivalentes, l'une issue de la théorie des systèmes dynamiques, l'autre issue de la géométrie différentielle. Ce travail a pour but de décrire les deux méthodes de calcul de ces courbes et d'illustrer leurs propriétés en montrant les courbes singulières de plusieurs systèmes dynamiques de type Rössler de dimensions 3 et 4.

Abstract. We introduce one dimensional sets to help describe and constrain the integral curves of an n -dimensional dynamical system. These curves provide more information about the system than the zero-dimensional sets (fixed points) do. In fact, these curves pass through the fixed points. These connecting curves are introduced using two different but equivalent definitions, one from dynamical systems theory, the other from differential geometry. We describe how to compute these curves and illustrate their properties by showing the connecting curves for a number of dynamical systems.

1 Introduction

A la fin du XX^e siècle Poincaré suggéra que les points fixes d'un système dynamique pourraient être utilisés pour fournir des informations, ou des contraintes sur le comportement des trajectoires définies par un système de n équations différentielles ordinaires non linéaires (un système dynamique) [1,2,3,4]. Les points fixes d'un système dynamique représentent son ensemble invariant dimension de dimension nulle. Malheureusement, les points fixes ne fournissent qu'une information locale sur la nature du flot.

Au début du XX^e siècle, bon nombre de scientifiques comme Andronov, Tikhonov, Levinson, Wasow, Cole, O'Malley et Fenichel, se sont concentrés sur des ensembles invariants de dimension supérieures, en particulier des ensembles invariants de dimension $n - 1$. Dans de nombreux cas, ils correspondent aux variétés lentes invariantes de systèmes dynamiques singulièrement perturbés. Ces variétés permettent alors de définir la partie lente de l'évolution de la courbe de trajectoire de tels systèmes. Jusqu'à présent, il semble que, exception faite des travaux de [5], personne n'a étudié le problème d'ensembles invariants de uni-dimensionnels qui jouent un rôle très important dans la structure des attracteurs chaotiques en reliant leurs points fixes. L'objectif de ce travail est de définir et présenter des méthodes permettant de construire l'une de ces ensembles invariants uni-dimensionnels, c'est-à-dire ces courbes singulières.

2 Dynamical system

On considère un système d'équations différentielles définies dans un compacte E inclus dans \mathbb{R}^n avec $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t \in E \subset \mathbb{R}^n$:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{S}}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

où $\vec{\mathfrak{S}}(\mathbf{X}) = [f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X})]^t \in E \subset \mathbb{R}^n$ définit un champ de vecteurs vitesse dans E dont les composantes f_i sont supposés continus et infiniment différentiable par rapport aux x_i , c'est-à-dire que ce

sont des fonctions C^∞ dans E qui satisfont les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz theorem. Une solution de ce système est la représentation paramétrique de la *courbe trajectoire* $\mathbf{X}(t)$ dont les valeurs définissent les *états* du *système dynamique* (1). Puisqu'aucun composant f_i du champ de vecteurs vitesse ne dépend pas explicitement du temps, le système est dit *autonome*.

2.1 Champ de vecteurs vitesse

Comme la fonction vectorielle $\mathbf{X}(t)$ de la variable scalaire t représente la *trajectoire* du point mobile M , la différentielle totale de $\mathbf{X}(t)$ est une fonction vectorielle $\vec{V}(t)$ de la variable scalaire t qui représente le vecteur vitesse instantanée de M à l'instant t , soit :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{S}}(\mathbf{X}) \quad (2)$$

Le vecteur vitesse instantanée $\vec{V}(t)$ est tangent à la *trajectoire* excepté aux *points fixes*, où il n'est pas défini.

2.2 Champ de vecteurs accélération

Comme la fonction vectorielle $\vec{V}(t)$ de la variable scalaire t représente le vecteur vitesse instantanée de, la dérivée par rapport au temps $\vec{V}(t)$ est une fonction vectorielle $\gamma(t)$ qui représente le vecteur accélération instantanée de M à l'instant t , soit :

$$\gamma(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (3)$$

Puisque les fonctions f_i sont supposées C^∞ dans un compacte E inclus dans \mathbb{R}^n , la dérivée par rapport au temps du champ de vecteurs vitesse $\vec{V}(t)$ (1) peut être calculée. La dérivée des fonctions composées fait apparaître une dérivée au sens de Fréchet :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\mathfrak{S}}}{d\mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{dt} \quad (4)$$

En remarquant que $\frac{d\vec{\mathfrak{S}}}{d\mathbf{X}}$ est la matrice Jacobienne fonctionnelle J associée au système dynamique (1), il vient des équations (2) et (1) que

$$\gamma = J\vec{V} \quad (5)$$

Cette équation joue un rôle très important dans la suite de la discussion.

3 Ensemble invariant de dimension nulle

Comme il a été précédemment rappelé, Poincaré [1,2,3,4] définit l'*ensemble invariant de dimension nulle* comme le lieu des points où le champ de vecteurs vitesse s'annule. Aux points fixes le champ de vecteurs accélération s'annule aussi. Il en va de même pour le champ de vecteurs sur-accélération $d\gamma(t)/dt$. Toutes les dérivées par rapport au temps du champ de vecteurs vitesse s'annulent également aux points fixes.

4 Ensemble invariant uni-dimensionnel

La première tentative d'étude d'*ensembles invariants uni-dimensionnels* a été réalisée dans un contexte de Mécanique des Fluides par Roth and Peikert[8]. L'idée de transposer le concept de "courbes de vorticité" à l'espace des phases d'un système dynamique est à l'un d'entre nous (R.G.), qui l'appliqua à

un système dynamique de dimension trois et ensuite à des systèmes de dimensions plus élevées. Dans le contexte de la théorie des systèmes dynamiques, l'un de nous (C. L.), appela ces courbes invariantes *courbes singulières* puisqu'elles représentent des courbes reliant ou partant des points singuliers.

Dans le cas de systèmes dynamiques autonomes de dimension n (1), les *ensembles invariants unidimensionnels* sont des courbes définies par la relation de colinéarité entre les champs de vecteurs vitesse et accélération. Cette condition se traduit par : $\gamma = J\vec{V} = \lambda\vec{V}$, où J est la matrice jacobienne fonctionnelle, qui facilite d'une part la généralisation et, d'autre part l'interprétation de ces *courbes singulières*. De plus, il peut être facilement établi que tous les points fixes appartiennent à ces courbes invariantes.

5 Détermination des courbes singulières

Ce type de problème ne peut, en général être résolu, analytiquement. Aussi, trois méthodes peuvent être utilisées (seule la première est présentée ci-dessous) pour déterminer les *courbes singulières* définies par l'intersection de deux surfaces, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \phi_{23} = 0 \\ \phi_{12} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

En dimension trois, il est possible, en principe, d'utiliser deux des trois équations $\phi_{ij}(X) = 0$ pour exprimer deux des trois variables (x, y, z) en fonction de la troisième, par exemple $y = y(x)$, $z = z(x)$.

6 Applications

Dans ce paragraphe les courbes singulières sont explicitées pour des systèmes dynamiques de dimensions trois et quatre.

6.1 Modèle de Rössler model

Les équations du flot de l'attracteur de Rössler [6] sont :

$$\vec{V} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \vec{\mathfrak{S}} \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y - z \\ x + ay \\ b + z(x - c) \end{bmatrix} \quad (7)$$

où a , b et c sont des paramètres réels. La *courbe singulière* de ce système dynamique a été fournie par l'équation $J\vec{V} = \lambda\vec{V}$ qui dépend des trois paramètres de contrôle (a, b, c) et qui est alors paramétrisée l'une des trois coordonnées de l'espace des phases. Choisissons x comme coordonnée de l'espace des phases, la valeur propre λ satisfait alors une équation du cinquième degré :

$$\sum_{j=0}^5 D_j \lambda^j = 0 \quad (8)$$

Les coefficients D_j sont présentés dans la Table I. Pour chaque point fixe, la valeur de λ est la valeur de la valeur propre réelle de la matrice Jacobienne fonctionnelle. Les coordonnées y and z sont exprimées par des fonctions rationnelles de x and $\lambda(x)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-b - x + ax(c - x) + \lambda x(x - c + a - \lambda)}{a + (c - x)(1 - a^2) + \lambda a(c - x + \lambda - a)} \\ z &= \frac{+b + x + (\lambda x + ab)(\lambda - a)}{a + (c - x)(1 - a^2) + \lambda a(c - x + \lambda - a)} \end{aligned} \quad (9)$$

Tab.1. Coefficients de l'équation du cinquième degré qui définit la valeur propre λ dans l'expression de la courbe singulière le long de laquelle les champs de vecteurs vitesse et accélération sont parallèles pour le système dynamique de Rössler.

| | |
|-------|---|
| D_5 | a |
| D_4 | $2a(c - a - x)$ |
| D_3 | $ax^2 - 2acx + 4a^2x - 4a^2c + a^3 + c + 2a + ac^2$ |
| D_2 | $-2a^2x^2 + x^2 - 2a^3x - 2cx + 4a^2cx - 4ax + ab + 2ac - 2a^2c^2 + 2a^3c + c^2 - 2a^2$ |
| D_1 | $a^3x^2 + 4a^2x - 2a^3cx - 2a^2b + a + b + c - 3a^2c + a^3c^2$ |
| D_0 | $x^2 - a^2x^2 + 2a^2cx - 2cx - 2ax + ac - a^2c^2 + c^2 - ab + a^3b$ |

Le segment de courbe singulière entre les points fixes (dots) est représenté pour l'attracteur de Rössler par Fig. 1 pour les valeurs des paramètres $(a, b, c) = (0.556, 2.0, 4.0)$. Deux projections sont présentées. Près du point fixe de direction propre réelle et répulsive, cette courbe est une bonne approximation de la courbe qui définit le mouvement de l'œil d'une tornade. Cependant, lorsqu'on se déplace vers le point fixe près du plan x - y et que les non-linearités augmentent, l'approximation devient de plus en plus mauvaise, intersectant même l'attracteur à deux reprises. Ce problème est visible sur la projection selon x - z . Ce résultat renforce une observation faite par Roth and Peikert selon laquelle la courbe singulière définie par $J\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}$, est une bonne approximation de l'œil du vortex dans la région où les nonlinéarités sont faibles, mais ne l'est plus là où les nonlinéarités deviennent plus importantes [8].

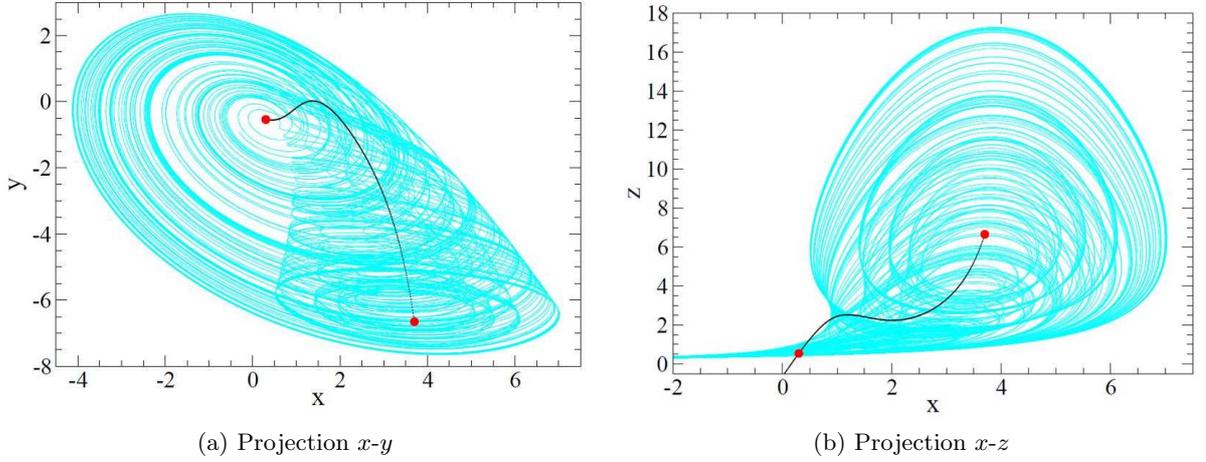


Fig. 1. Courbes connectantes du système de Rössler. La courbe entre en intersection deux fois avec l'attracteur, comme cela est vu sur la projection x - z . Paramètres : $(a, b, c) = (0.556, 2, 4)$.

6.2 Modèle de Rössler model d'hyperchaos

Rössler proposa en 1979 un modèle simple de dimension quatre et produisant un comportement hyperchaotique [7]. Ce modèle s'écrit :

$$\vec{V} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \vec{\mathfrak{F}} \begin{bmatrix} f_1(x, y, z, w) \\ f_2(x, y, z, w) \\ f_3(x, y, z, w) \\ f_4(x, y, z, w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y - z \\ x + ay + w \\ b + xz \\ -cz + dw \end{bmatrix} \quad (10)$$

Les variables d'état sont dans ce cas (x, y, z, w) et les paramètres de contrôle sont (a, b, c, d) . La courbe singulière a été calculée selon la seconde méthode qui fournit un résultat plus simple lorsque la coordonnée z est utilisée pour exprimer le comportement des autres variables. La valeur propre λ s'exprime comme la racine d'un polynôme de degré sept dont les coefficients sont fonctions des quatre paramètres de contrôle (a, b, c, d) et de z . Les trois autres coordonnées sont des fonctions rationnelles de plus faible degré des variables z et $\lambda(z)$. Deux projections de cet attracteur hyperchaotique et de la courbe singulière sont présentées sur la Fig. 2. Les calculs ont été effectués pour $(a, b, c, d) = (1/4, 3, 1/2, 1/20)$. Les points fixes sont représentés par des points rouges le long des courbes singulières connecting curve.

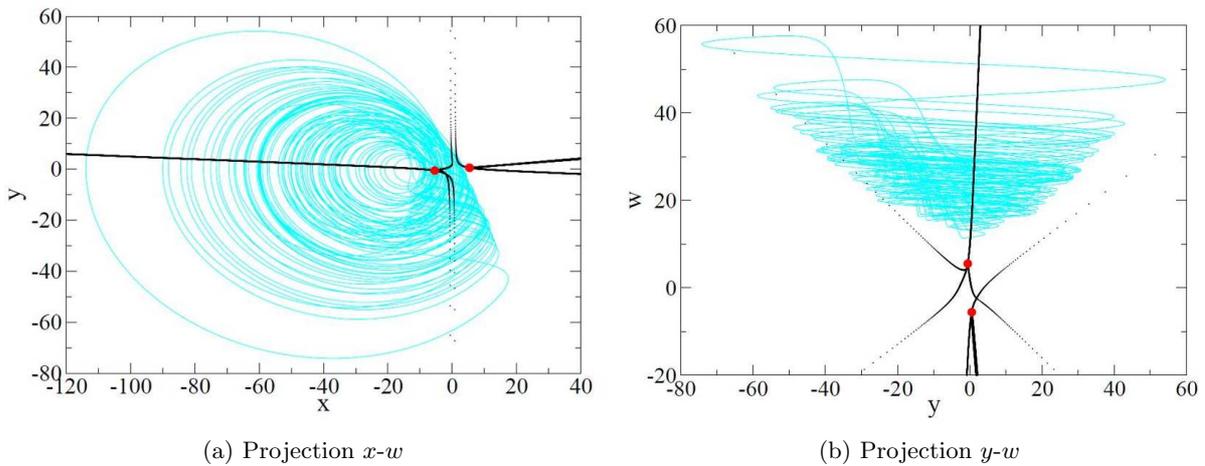


Fig. 2. Hyperchaotic strange attractor generated by the 1979 Rössler model for hyperchaos, with control parameter values $(a, b, c, d) = (1/4, 3, 1/2, 1/20)$.

7 Discussion

Dans ce travail nous allons au-delà de l'ensemble invariant zéro-dimensionnel (points fixes) qui servent d'une certaine manière à définir la structure de l'attracteur d'un système dynamique. Nous avons introduit une courbe que l'on appelle une courbe singulière (ou connectante), car elle relie ou part des points fixes d'un système dynamique autonome. Nous avons défini cette courbe par une équation aux valeurs propres, $J\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}$, où \mathbf{V} est le champ de vecteurs vitesse définissant le système dynamique et $J_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ est son Jacobien.

Ces courbes connectantes se présentent comme des objets permettant, au même titre que les points fixes, un lien entre la structure algébrique des systèmes dynamiques et la topologie de leurs solutions. Les courbes connectantes se présentent comme une courbe de foyers autour de laquelle la trajectoire s'enroule. Il reste que la manière générale dont elles structurent le portrait de phase reste à déterminer.

Remerciements

Ce travail a été partiellement supporté par la *U.S. National Science Foundation* par le contrat PHY-0754081. R. G. remercie le CNRS et le CORIA pour une position de chercheur invité.

Références

1. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3^e série, **7**, 375-422 (1881).
2. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3^e série, **8**, 251-296 (1882).
3. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4^e série, **1**, 167-244 (1885).
4. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4^e série, **2**, 151-217 (1886).
5. E. KREYSZIG, *Differential Geometry*, New York : Dover, 1959.
6. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57**(5), 397-398 (1976).
7. O. E. RÖSSLER, An equation for hyperchaos, *Physics Letters A*, **31**, 155-157 (1979).
8. M. ROTH & R. PEIKERT, A higher-order method for finding vortex core lines, *Proceedings IEEE of the conference on Visualization'98*, 143-150 (1998).