Formes normales d'observabilité réduites non linéaires

Driss Boutat[1] & Gang Zheng[2]

[1] ENSI de Bourges, Institut PRISME, 10, Boulevard Lahitolle 18020 Bourges Cedex
[2] INRIA Lille-Nord Europe, 40, avenue Halley, 59650 Villeneuve d'Ascq.
driss.boutat@ensi-bourges.fr, gang.zheng@inria.fr

Résumé. Dans ce papier on donne une nouvelle forme normale d'observabilité non linéaire adaptée à l'observateur réduit. Puis, on expose les conditions géométriques nécessaires et suffisantes qui permettent de dire si un système non linéaire avec des sorties multiples peut se mettre, à un changement de coordonnées près, sous une telle forme normale. D'une part, Cette forme normale permet d'éviter la redondance des mesures et d'autre part, elle élargit la classe de systèmes dynamiques non linéaires qui admettent un observateur robuste.

Abstract. This paper presents a nonlinear canonical form which is used for the design of a reduced order observer. We give sufficient and necessary geometric conditions, which enable to determine whether a special class of nonlinear systems with multi-outputs can be transformed, by a change of coordinate, to the proposed nonlinear canonical form. This normal form can firstly avoid the redundancy of the measurements, and secondly represent a larger class of nonlinear systems for which we can design a more robust observer.

1 Introduction

Un observateur est un moyen de mesure "informatique" qui permet de retrouver les états d'un système industriel en ayant un minimum d'informations sur une partie de ces états. Cette information est obtenue à l'aide d'un capteur. Une manière brute d'observer les états d'un système est de dériver numériquement l'information mesurée grâce aux capteurs. L'expérience a montré que cette méthode a l'inconvénient de donner des résultats erronés à cause de l'amplification d'erreurs due, par exemple, à des imperfections de mesures. Pour remédier à ce problème, Luenberger a introduit en 1971 l'observateur comme étant un système dynamique constitué, du modèle du système réel corrigé par la mesure fournie par les capteurs [1].

En 1983 Krener et Isodori ont étudié une forme d'observabilité canonique pour les systèmes avec un capteur [2] et, en 1985, Krener et Respondek ont introduit la forme d'observabilité canonique non linéaires (FCON) pour les systèmes à sorties multipes suivants [3] :

$$\dot{z} = Az + \beta(\bar{y}) \tag{1}$$
$$\overline{y} = Cz \tag{2}$$

où $z \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, A et C sont les formes de Brunovsky ou companions d'observabilité. Sous la forme (1)-(2), on peut appliquer l'observateur robuste suivant :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \beta(\bar{y}) + K(\bar{y} - \hat{\bar{y}}) \tag{3}$$

de sorte que la dynamique de l'erreur de l'observation $e = z - \hat{z}$ soit linéaire :

$$\dot{e} = (A - KC)e. \tag{4}$$

Grâce à cette dernière équation, le problème de la mise sous forme FCON s'appelle aussi le problème de linéarisation de l'erreur d'observation. Ce problème revient donc à caractériser les systèmes non linéaires de la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$
$$y = h(x),\ y \in \mathbb{R}^m \tag{6}$$

© **Non Linéaire Publications**, Bât.510, Université de Paris-sud, 91405 Orsay

qui sont transformables via un changement de coordonnées $z = \phi(x)$ sous la forme canonique d'observabilité non linéaire (FCON) (1-2).

Depuis quelques années, plusieurs chercheurs se sont intéressés au problème de linéarisation [4-11]. L'observateur de Luenberger [12] permet d'estimer les états inconnues ainsi que les états mesurés (les sorties). Pour éviter la redondance dans les mesures, il a introduit l'observateur réduit. A notre connaissance, jusqu'aujourd'hui, la notion d'observateur réduit n'est jamais introduite pour les systèmes non linéaires. Ce papier est consacré à l'introduction de cette notion pour les systèmes non linéaires. Ceci, d'une part, comme pour les systèmes linéaires, va éviter la redondance des mesures et d'autre part va augmenter la classe des systèmes qui admettent un observateur robuste. Le paragraphe qui suit donnera les notations et une définition d'un observateur réduit. La section 3 donnera les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un difféomorphisme qui permet la mise sous cette forme. La section 4 présentera un exemple académique de la mise sous forme normale réduite.

2 Notations et définition

On commencera cette section par une définition d'un observateur réduit. Puis, pour fixer les idées on donnera un exemple. Sans perte de généralité, on considère un système dynamique sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x) \\ \dot{x}_2 = F_2(x) \\ y = x_2 \end{cases} \tag{7}$$

où $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système et $y = x_2$ est l'état mesuré. On dit aussi que y est la sortie du système dynamique.

Définition 1. On dit qu'un système dynamique de la forme :

$$\dot{\hat{x}}_1 = \widetilde{F}_1(\hat{x}_1, x_2) \tag{8}$$

est un observateur réduit du système dynamique (7) si

$$\lim_{t\to\infty} \parallel \hat{x}_1(t) - x_1(t) \parallel = 0. \tag{9}$$

Rappelons un résultat bien connu pour les systèmes linéaires, c'est-à-dire qu'un système de la forme (7) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \\ y = x_2 \end{cases} \tag{10}$$

où les A_{ij} sont des matrices. Il est facile de voir [12] qu'un tel système dynamique a pour observateur réduit :

$$\dot{\hat{x}}_1 = A_{11}\hat{x}_1 + A_{12}x_2 + K(A_{21}x_1 - A_{21}\hat{x}_1), \tag{11}$$

avec $A_{21}x_1 = \dot{y} - A_{22}y$. En effet, l'erreur de l'observation $e = \hat{x}_1 - x_1$ est régie par la dynamique linéaire suivante :

$$\dot{e} = (A_{11} - KA_{21})e, \tag{12}$$

qui est stabilisable par K, dès que la paire (A_{11}, A_{21}) est observable.

Remarque 1. l'observateur réduit introduit (11) par Luenberger [12] permet d'éviter la redondance dans les mesures. Cependant, la nouvelle sortie $A_{21}x_1$ peut contenir plus d'informations que ce que l'on a besoin. L'exemple qui suit montre bien ce fait.

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 & = \zeta + \vartheta, \dot{x}_2 = x_1, \dot{x}_3 = x_2 \\ \dot{\zeta} & = x_3 + \zeta, \dot{\vartheta} = ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ y & = (\zeta^T, \vartheta^T)^T , \end{array}$$

c'est-à-dire que

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0\ 0\ 1 \\ a\ b\ c \end{bmatrix},$$

ce qui montre que pour faire un observateur réduit, on aura uniquement besoin de l'information provenant de l'équation $\dot{\zeta} = x_3 + \zeta$. Par la suite, on tiendra compte de ce fait.

3 Formes normales d'observabilité non linéaires réduites

Cette section est consacrée à la forme normale d'observabilité réduite et à l'observateur réduit correspondant. On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \beta(y_1)z_r + \rho(y) \\ \dot{\xi} = \alpha_1(y_1)z_r + \alpha_2(y) \\ \dot{\eta} = \mu\,(z, y) \\ y = \left(y_1^T, y_2^T\right)^T = \left(\xi^T, \eta^T\right)^T \end{cases} \tag{13}$$

avec

$$\begin{array}{l} z = (z_1, \cdots, z_r)^T \in \mathbb{R}^r \\ \beta = (\beta_1, \cdots, \beta_r)^T \in \mathbb{R}^r \\ \rho = (\rho_1, \cdots, \rho_r)^T \in \mathbb{R}^r \\ \eta = (\eta_1, \cdots, \eta_p)^T \in \mathbb{R}^p \\ \xi \in \mathbb{R}, \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots\ \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et $z_r = Cz$ avec $C = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0\ 0\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 2. Puisque, il est supposé que le système (13) est observable, alors z_r dans(13) doit être mesuré de y_1, donc on supposera que $\alpha_1(y) \neq 0$.

A partir de (13), il vient que si l'on peut mesurer y_1 et $\dot{y}_1$, alors on peut mesurer une nouvelle sortie Y comme étant une fonction de y_2, y_1 et de sa dérivée $\dot{y}_1$ qui est de la forme :

$$Y = \alpha_1^{-1}(y_1)\left(\dot{y}_1 - \alpha_2(y)\right) \tag{14}$$

Par conséquent, on a le résultat préliminaire suivant :

Proposition 1. *Le système dynamique :*

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \beta(y_1)C\hat{z} + \rho(y) - K(y_1)(Y - C\hat{z}) \tag{15}$$

où $K(y_1) = -\beta(y_1) + \kappa$ et Y défini par (14), est un observateur réduit pour le système dynamique (13), si on choisit κ de sorte que la matrice $(A + \kappa C)$ est Hurwitz.

Démonstration. Soit $e = \hat{z} - z$ l'erreur d'observation. Puisque $z_r = Cz$, alors on peut déduire de (13) et de (15) la dynamique de l'erreur comme :

$$\dot{e} = [A + (\beta(y_1) + K(y_1))C]e \tag{16}$$

Puisque pour un système dynamique observable on peut choisir arbitrairement la matrice des gains $K(y_1)$, alors si on pose

$$K(y_1) = -\beta(y_1) + \kappa$$

la dynamique de l'erreur devient :

$$\dot{e} = (A + \kappa C)e. \tag{17}$$

Par conséquent, si κ est choisit telle que $(A+\kappa C)$ est Hurwitz, alors la convergence de $\hat{z}$ à z est garantie.

Remarque 3. Il est clair de l'expression de Y en (14) que l'observateur (15) contient explicitement la dérivée $\dot{y}_1$ de la sortie y_1. Ce qui est un inconvenient comme il a été signalé dans l'introduction. Pour y remédier, on introduit comme pour les systèmes linéaires l'estimateur algébrique suivant :

$$\zeta = \hat{z} + \Gamma(y_1)$$

où $\Gamma(y_1) = \int K(y_1)\alpha^{-1}(y_1)dy_1$. De sorte que l'observateur est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = (A+\kappa C)\zeta + \rho(y) - (A+\kappa C)\Gamma(y_1) + K(y_1)\alpha^{-1}(y_1)\alpha_2(y) \\ \hat{z} = \zeta - \Gamma(y_1) \end{cases} \tag{18}$$

La déduction de la forme (18) est évidente, et on omet la démonstration à cause de la limite de place.

4 Le changement de coordonnées

Dans cette section, on présentera les conditions nécessaires et suffisantes que doit satisfaire un système dynamique pour se mettre sous la forme canonique réduite (13). Ceci va concerner la classe de systèmes dynamiques de la forme suivante :

$$\dot{x} = F_1(x,\zeta,\vartheta) = f(x,\zeta,\vartheta) \tag{19}$$
$$\dot{\zeta} = F_{21}(x,\zeta,\vartheta) = \gamma_1(\zeta)H(x) + \gamma_2(\zeta,\vartheta) \tag{20}$$
$$\dot{\vartheta} = F_{22}(x,\zeta,\vartheta) = \varepsilon\,(x,\zeta,\vartheta) \tag{21}$$
$$y = \left(\zeta^T, \vartheta^T\right)^T \tag{22}$$

où $x \in \mathbb{R}^r$, $\zeta \in \mathbb{R}$, $\vartheta \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^{p+1}$, $f : \mathbb{R}^{r+p+1} \to \mathbb{R}^r$, $H \in \mathbb{R}$, γ_1 etγ_2 sont de dimensions convenables. En outre on suppose que le système (19-22) est observable au sens du rang. C'est-à-dire que les 1-formes d'observabilité suivantes :

$$\theta_i = dL_f^{i-1}H$$

for $1 \le i \le r$ sont indépendantes. On note ainsi

$$F = \left(f^T, F_2^T\right)^T$$
$$F_2 = \left(F_{21}^T, F_{22}^T\right)^T$$

que la décomposition F_2 en F_{21} and F_{22} ainsi que la condition d'observabilité impliquent que $\gamma_1(\zeta) \neq 0$.

Maintenant, on définit un champ de vecteurs τ_1 par les équations suivantes :

$$\begin{matrix} \theta_j(\tau_1) = 0, \text{ pour } 1 \le j \le r-1 \\ \theta_r(\tau_1) = 1 \end{matrix} \tag{23}$$

Puis, par induction on définit la famille de champs de vecteurs τ_j comme suit :

$$\tau_j = [\tau_{j-1}, f] \text{ pour } 2 \le j \le r.$$

Comme on va le voir l'existence du difféomorphisme implique nécessairement que les τ_i commutent. C'est-à-dire : $[\tau_i, \tau_j] = 0$ pour $1 \le i \le r$ et $1 \le j \le r$. On suppose donc que cette dernière condition est satisfaite, et soient σ, $\nu_1, \cdots, \nu_p$ des champs de vecteurs tels que :

- $[\tau_i, \tau_j] = [\tau_i, \sigma] = [\tau_i, \nu_l] = [\sigma, \nu_l] = [\nu_l, \nu_s] = 0$ pour $1 \le i, j \le r$ et $1 \le l, s \le p$;
- $d\zeta(\sigma) = 1$ et $d\vartheta(\sigma) = 0$;
- $d\zeta(\nu_j) = 0$ et $d\vartheta_i(\nu_j) = \delta_i^j$ pour $1 \le i, j \le p$ où δ_i^j représentent les symboles de Kronecker.

Posons

$$\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_r, d\zeta, d\vartheta_1, \cdots, d\vartheta_p)^T$$

et soit $\Lambda = \theta(\tau_i, \sigma, \nu_j)$ pour $1 \le i \le r$ et $1 \le j \le p$ l'évaluation de θ sur le repère (τ_i, σ, ν_j). On pose

$$\omega = \Lambda^{-1}\theta,$$

c'est une multi-1 forme différentielle combinaison linéaire θ_i, $d\zeta$ et $d\vartheta_j$ pour $1 \le i \le r$ et $1 \le j \le p$. Elle est décomposée en $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ où $\omega_2 = (d\zeta, d\vartheta_1, \cdots, d\vartheta_p)^T$. On a le résultat suivant :

Théorème 1. *Il existe un difféomorphisme $(z, \xi, \eta) = \phi(x, \zeta, \vartheta)$ qui transforme (19-22) sous la forme canonique réduite (13) si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$[\tau_i, \tau_j] = 0$, for $1 \le i \le r$, $1 \le j \le r$;*
2. *$[\tau_r, \bar{F}] = V(y_1)$ est un champs de vecteur qui ne dépend que de y_1 modulo le sous espace vectoriel engendré par $\{\tau_i, \sigma\}$ pour $1 \le i \le r$;*
3. *$[\tau_j, F_2] \in \ker \omega_1$ pour $1 \le j \le r - 1$.*

Comme la longueur de l'article ne le permet pas, nous allons omettre la preuve, et donner un exemple pour illustrer ce résultat. Mais la preuve peut être facilement faite par l'adaptation des méthodes utilisées dans [11,5].

Exemple 1. On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = \vartheta + x_2 x_3, \dot{x}_2 = x_1 + x_3\zeta - \frac{1}{2}x_3^2 \\ &\dot{x}_3 = x_2 + \zeta, \dot{\zeta} = \alpha(\zeta)x_3, \dot{\vartheta} = \mu(x, \zeta, \vartheta) \\ &y = \left(\zeta^T, \vartheta^T\right)^T \end{aligned}$$

Un calcul facile donne le repère d'observabilité comme suit :

$$\theta_1 = dx_3, \theta_2 = dx_2 + d\zeta, \theta_3 = dx_1 + d\left(x_3\zeta - \frac{1}{2}x_3^2\right)$$

$$\tau_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \tau_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \tau_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_1}, \sigma = \frac{\partial}{\partial \zeta}, \nu = \frac{\partial}{\partial \vartheta_1}$$

Donc il est facile de montrer que :

$$[\tau_3, \bar{F}] = -\zeta\frac{\partial}{\partial x_1} + \zeta\frac{\partial}{\partial x_2} = -\zeta\tau_1 + \zeta\tau_2$$

Ensuite, on pose $\Lambda = \theta(\tau_1, \tau_2, \sigma, \nu)$ qui nous donne $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \xi & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. On en déduit :

$$\omega = \Lambda^{-1}\theta = (dx_1 - x_3 dx_3, dx_2, dx_3, d\zeta, d\vartheta)^T$$

où $\omega_1 = (dx_1 - x_3 dx_3, dx_2, dx_3)^T$, qui fournit

$$\omega_1[\tau_1, F] = \omega_1[\tau_2, F] = 0$$

Ainsi toutes les conditions du Théorème 1 sont satisfaites, et le système peut être transmis sous la forme canonique proposée. D'après l'expression de ω, on obtient le difféomorphisme suivant :

$$\phi(x) = (z_1, z_2, z_3, \xi, \eta)^T = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_3^2, x_2, x_3, \zeta, \vartheta\right)^T$$

D'où la forme normale réduite suivante :

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = \eta - \xi z_3,\ \dot{z}_2 = z_1 + \xi z_3 \\ &\dot{z}_3 = z_2 + \xi\ ,\ \dot{\xi} = \alpha(\xi) z_3, \dot{\eta} = \mu(z, \xi, \eta) \\ &y = (\xi^T, \eta^T)^T \end{aligned}$$

Remarque 4. 1. Le théorème ci-dessus peut être énoncé pour le cas où y_1 est constituée de plusieurs sorties.

2. On peut écrire l'équivalent du théorème pour les systèmes à temps discret.

5 conclusion

Dans cette note, on a fait la lumière sur une nouvelle forme d'observabilité qui supporte un observateur réduit. Ce dernier bien connu pour les systèmes linéaires, à notre connaissance, n'a pas encore était exploité pour les systèmes dynamiques non linéaires.

Références

1. D. G. Leunberger, An itroduction to observers, *ZEEE Transactions in Automatics and Control*, AC-IG**6**, 596-602 (1971).
2. A. J. Krener & A. Isidori, Linearization by output injection and nonlinear observer, *Systems and Control Letters* , **3**, 47-52, (1983).
3. A.J. Krener & W. Respondek, Nonlinear observer with linearizable error dynamics, *SIAM J. Control and Optimization*, **30**, 197-216 (1985).
4. D. Boutat & K. Busawon, Extended nonlinear observable canonical form for multi-output dynamical systems, *Proceedings of the IEEE CDC*, 2009.
5. D. Boutat, A. Benali, H. Hammouri & K. Busawon, New algorithm for observer error linearization with a diffeomorphism on the outputs, *Automatica*, **45** (10, 2187-2193 (2009).
6. D. Noh, N.H. Jo & J.H. Seo, Nonlinear observer design by dynamic observer error linearization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49**, (10), 1746-1753 (2004).
7. M. Fliess & I. Kupka, A finiteness criterion for nonlinear input-output differential systems, *SIAM Journal of Control and Optimization*, **21** (5), 721-728 (1983).
8. M. Hou & A.C. Pugh, Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems, *Systems and Control Letters*, **37**, 1-9 (1999).
9. A. Phelps, On constructing nonlinear observers, *SIAM J. Control and Optimization*, **29** (3), 516-534 (1991).
10. X. H. Xia & W.B. Gao, Nonlinear observer with linearizable error dynamics, *SIAM Journal Control and Optimization*, **27**, 199-216 (1989).
11. G. Zheng, D. Boutat & J.-P. Barbot, Single output dependent observability normal form, *SIAM Journal Control and Optimization*, **46**, 2242-2255 (2007).
12. D. G. Luenberger, Observing the state of a linear system, *IEEE Transactions on Military Electronics*, **8**, 74-80 (1964).