

# Dynamiques toroïdales non triviales dans un laser spatio-temporel

Dalila Amroun Aliane<sup>1</sup>, Christophe Letellier<sup>2</sup> & Luc Pastur<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LEQ, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, BP 32, Bab Ezzouar, 16111 Alger

<sup>2</sup> CORIA-UMR 6614, Université de Rouen, BP 12, 76801 St-Etienne du Rouvray cedex

<sup>3</sup> LIMSI-CNRS, Université de Paris Sud, BP 133, Bât 508, 91403 Orsay cedex

amroun\_dalila@yahoo.fr

**Résumé.** La dynamique d'un laser monomode à élargissement homogène est étudiée par l'intermédiaire de portraits de phase, d'applications de premier retour et de diagrammes spatio-temporels. Une route vers le chaos est plus particulièrement décrite, montrant que le chaos suit un scénario de Ruelle-Takens se terminant par une transition vers le chaos selon le scénario de Curry-Yorke (plissements du tore). Les dynamiques toroïdales qui en résultent sont non triviales dans la mesure où les tores  $T^n$  doivent être plongés dans des espaces de dimension au moins  $n + 2$ .

**Abstract.** The dynamics of a homogeneously broadened single-mode laser is investigated by using phase portraits, first-return maps and spatio-temporal diagrams. One particular route to chaos is described in details, showing that the chaotic behavior occurs after a Ruelle-Takens scenario ended by a transition to chaos according to the Curry-Yorke scenario (foldings on the torus). Toroidal dynamics resulting from that road are non trivial in the sense that tori  $T^n$  must be embedded within space whose dimension is at least  $n + 2$ .

## 1 Introduction

L'étude des systèmes spatio-temporels à l'aide des outils de la théorie des systèmes dynamiques non-linéaires n'est pas une tâche aisée : théoriquement, l'espace des phases est de dimension infinie. Néanmoins, lorsque la dynamique peut être plongée dans un espace des phases de « basse » dimension, l'analyse peut être menée à bien et révéler des scénarios très intéressants. De précédents travaux ont montré qu'il était possible de s'affranchir de la difficulté liée à la dépendance spatiale du système dynamique : ainsi nous avons démontré récemment l'existence d'un lien entre la structure des applications de premier retour et l'apparition des défauts sur les diagrammes spatio-temporels dans un laser [1,2,3]. D'autre part, dans un système hydrodynamique spatio-temporel, une intermittence de modes fréquents a été mise en évidence dans une expérience d'écoulement en cavité ouverte grâce à l'utilisation d'une dynamique symbolique [4].

En plus de la complication due à l'extension spatiale de ces systèmes dynamiques, la complexité inhérente à la dynamique rend encore plus difficile toute tentative d'analyse. C'est notamment le cas des dynamiques quasi-périodiques qui, si elles sont couramment étudiées par le biais d'applications discrètes [5,6,7], les études de systèmes continus (flots) demeurent rares [8]. L'apparition d'une structure toroïdale fait toujours suite à une série de bifurcations, autrement dit une *route vers le chaos*. L'une des routes les plus connues correspond à une explosion du tore après la troisième bifurcation de Hopf : c'est le scénario de Ruelle et Takens [9]. Parmi les différentes possibilités d'explosion du tore, il y a aussi la déstabilisation d'un tore  $T^2$  par plissement tel que l'ont proposé Curry et Yorke [10]. Citons également la bifurcation globale induisant une explosion d'un tore  $T^2$  suivant un scénario établi par Baptista et Caldas [11] et retrouvé dans une expérience de tube à décharge représentant un système spatio-temporel [12]. Leurs résultats confirment ainsi que l'explosion du tore est aussi une route vers le chaos spatio-temporel.

Dans cette contribution, nous mettons en évidence un nouveau scénario d'explosion du tore impliquant cette fois un tore  $T^3$ . Ce scénario complexe est une composition du scénario de Ruelle et Takens avec un scénario de Curry et Yorke. C'est la première fois à notre connaissance qu'une telle succession de bifurcations est mise en évidence dans un système dynamique, et de surcroît spatio-temporel.

## 2 Modèle d'un laser monomode à élargissement homogène

Le laser monomode à élargissement homogène qui constitue le système dynamique est décrit par les équations de Maxwell-Bloch normalisées avec diffraction dans la direction  $x$  [13,14,15] :

$$\begin{cases} \partial_t e = -\sigma(e - p) + iA\partial_x^2 e \\ \partial_t p = -(1 - i\delta)p + ed \\ \partial_t d = -\gamma(d - r + \frac{1}{2}(ep^* + e^*p)) \end{cases} \quad (1)$$

Les quantités normalisées  $e$ ,  $p$  et  $d$  sont respectivement le champ électrique, la polarisation macroscopique et l'inversion de population. Les paramètres  $\gamma = \gamma_{\parallel}/\gamma_{\perp}$  et  $\sigma = \gamma_{\ell}/2\gamma_{\perp}$  se définissent à partir du taux de relaxation de la polarisation  $\gamma_{\perp}$ , de l'inversion de population  $\gamma_{\parallel}$  et de l'intensité optique  $\gamma_{\ell}$ . Le temps est normalisé par rapport à la durée de vie de la cohérence  $\tau_{\perp} = 1/\gamma_{\perp}$ . Le désaccord de fréquence  $\delta = (\omega - \omega_a)/\gamma_{\perp}$  représente la différence, normalisée, entre la fréquence du champ  $\omega$  et celle de la transition atomique résonante  $\omega_a$ .  $A$  est le paramètre de diffraction, et  $r$  le taux de pompage. L'opérateur différentiel partiel  $\partial/\partial t$  est noté par  $\partial_t$ , et ainsi de suite.

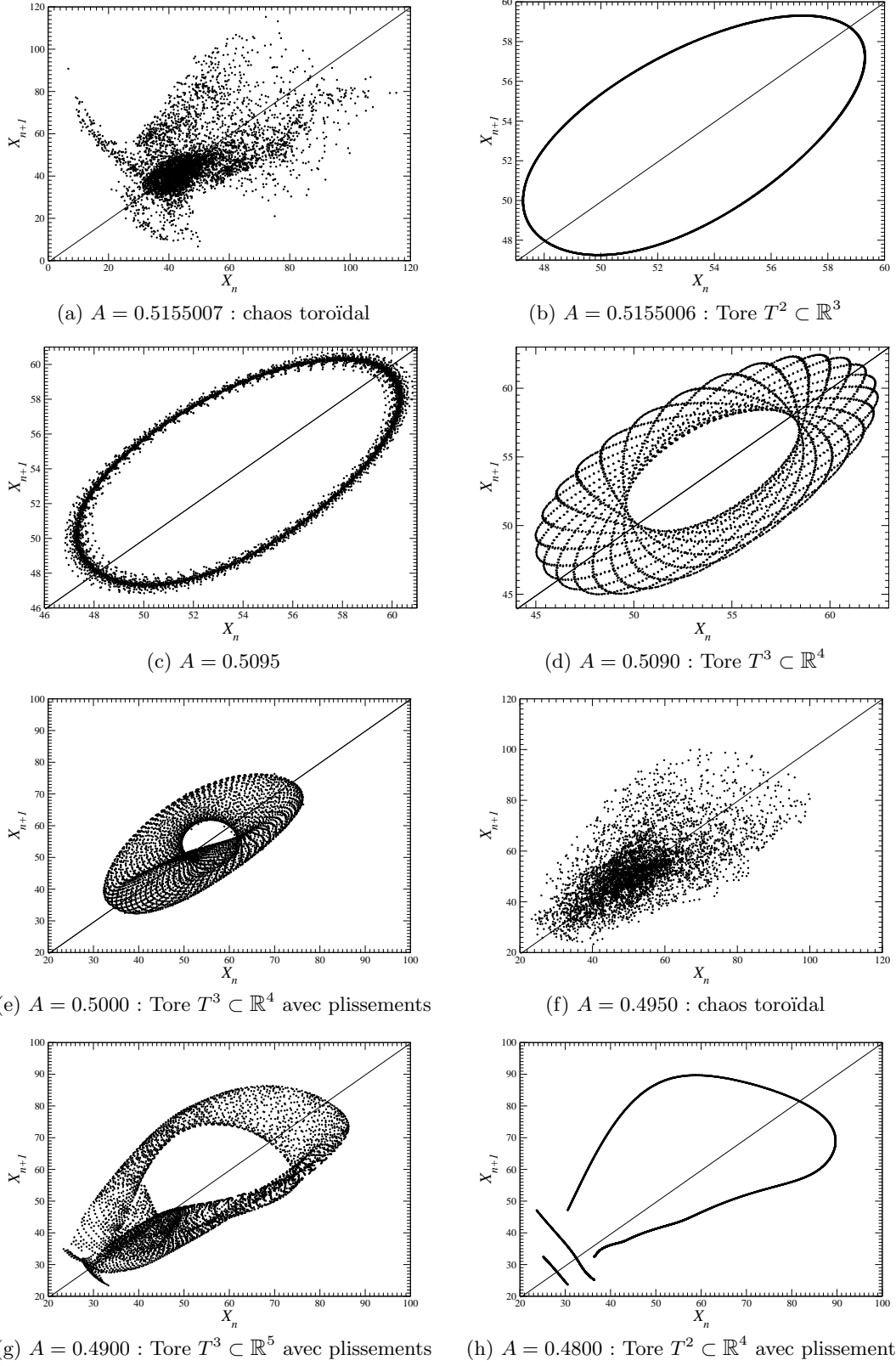
## 3 Dynamiques temporelles toroïdales

Nous avons effectué plusieurs simulations numériques de l'intensité laser dans le temps et l'espace  $x$  pour différentes valeurs du paramètre  $A$ , considéré comme paramètre de bifurcation. Les séries temporelles correspondent à l'intensité laser calculée au point de coordonnée  $x = 0$ . Les portraits de phase sont reconstruits à partir de l'intensité laser en utilisant un plongement différentiel (coordonnées dérivées). Toute section de Poincaré effectuée sur un attracteur est définie dans le plan ( $X = I, Z = \ddot{I}$ ) par  $Y = \dot{I} = 0$  et  $Y < 0$ .

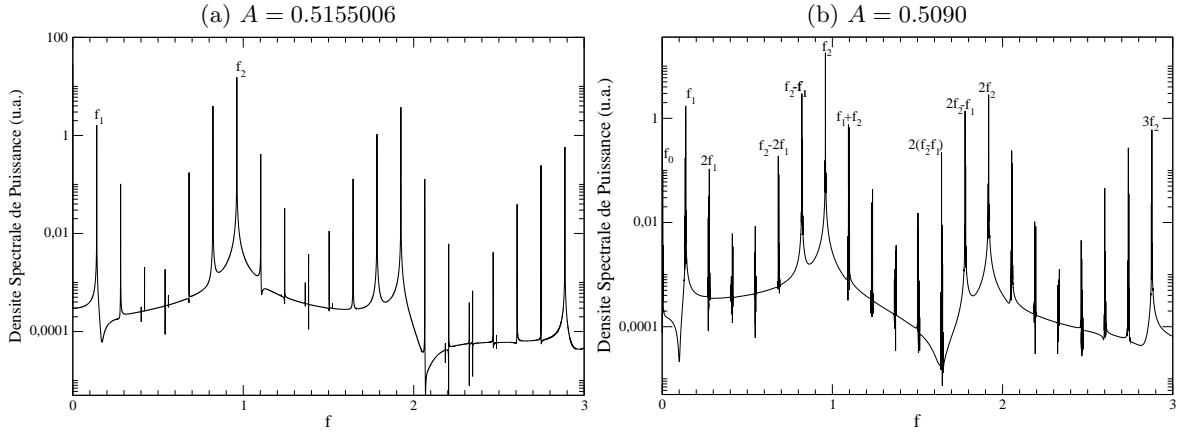
Choisissons de commencer notre étude pour  $A = 0.5155006$  correspondant à l'application de premier retour annulaire (Fig. 1b). Nous avons là une structure typique d'un régime quasi-périodique sur un tore  $T^2$  qui peut être plongé dans un espace  $\mathbb{R}^3$  : classique, ce comportement se structure essentiellement autour de deux fréquences incommensurables (Fig. 2a). Lorsque le paramètre  $A$  est légèrement diminué, une bifurcation de Hopf introduit une troisième fréquence (Fig. 1c & 2b) qui transforme le tore  $T^2$  en un tore  $T^3$  (Fig. 1d) qui doit désormais être plongé dans  $\mathbb{R}^4$  pour une représentation sans auto-intersection de la trajectoire. Pour  $A = 0.5$ , le tore  $T^3$  commence à se plisser (Fig. 1e). Ces plissements se développent suffisamment pour provoquer une explosion du tore autour de  $A = 0.495$  où le comportement devient un chaos toroïdal (Fig. 1f). Lorsque le paramètre  $A$  est encore diminué ( $A = 0.49$ ), la dynamique se restructure autour d'un tore  $T^3$  à la surface suffisamment plissée (Fig. 1g) pour qu'il ne soit plus possible de visualiser sa projection dans une section de Poincaré — tridimensionnelle puisqu'un tore  $T^3$  est plongé dans un espace de dimension au moins égale à 4 — et qui suggère, par conséquent, une dimension de plongement qui pourrait être de 5. Les calculs de dimension de plongements par détection des faux plus proches voisins [16] indiquent systématiquement une dimension inférieure d'une unité à la dimension attendue : cette sous-estimation est probablement due au rapport  $f_1/f_0 \approx 42$  qui interdit de visiter suffisamment la structure pour détection fiable de la dimension de plongement. La superposition de deux trajectoires issues de conditions initiales voisines permet de vérifier l'absence de l'amplification exponentielle de la divergence des trajectoires : la dynamique est donc quasi-périodique pour  $A = 0.49$ . Enfin une bifurcation inverse de Hopf détruit une fréquence pour redonner un tore  $T^2$  (Fig. 1h) ; toutefois, la structure plissée demeure, interdisant une représentation correcte — sans auto-intersection — de ce tore dans  $\mathbb{R}^3$ . C'est pour cette raison qu'il est impossible d'obtenir une application de premier retour à la structure annulaire comme cela avait été le cas pour  $A = 0.5155006$  (Fig. 1b). Le diagramme de bifurcations peut se résumer à :

$$T^2 \subset \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{Hopf}} T^3 \subset \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\text{plissement}} \text{Chaos} \longrightarrow T^3 \subset \mathbb{R}^5 \xrightarrow{\text{Hopf}^{-1}} T^2 \subset \mathbb{R}^4,$$

c'est-à-dire à un scénario de Ruelle-Takens où le passage au chaos se fait par plissement comme dans le scénario de Curry-Yorke.



**Fig. 1.** Applications de premier retour à une section de Poincaré  $(X, Z)$  définie par  $Y = 0$  et  $\dot{Y} = Z < 0$ , sur la variable  $X = I$ , pour des valeurs décroissantes de  $A$ . Les autres paramètres sont  $\sigma = 3$ ,  $\gamma = 1$ ,  $r = 30$  et  $\delta = -2$ .



**Fig. 2.** Spectres de Fourier de l'intensité laser pour les régimes quasi-périodiques à 2 (a) puis à 3 fréquences (b). Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Fig. 1.

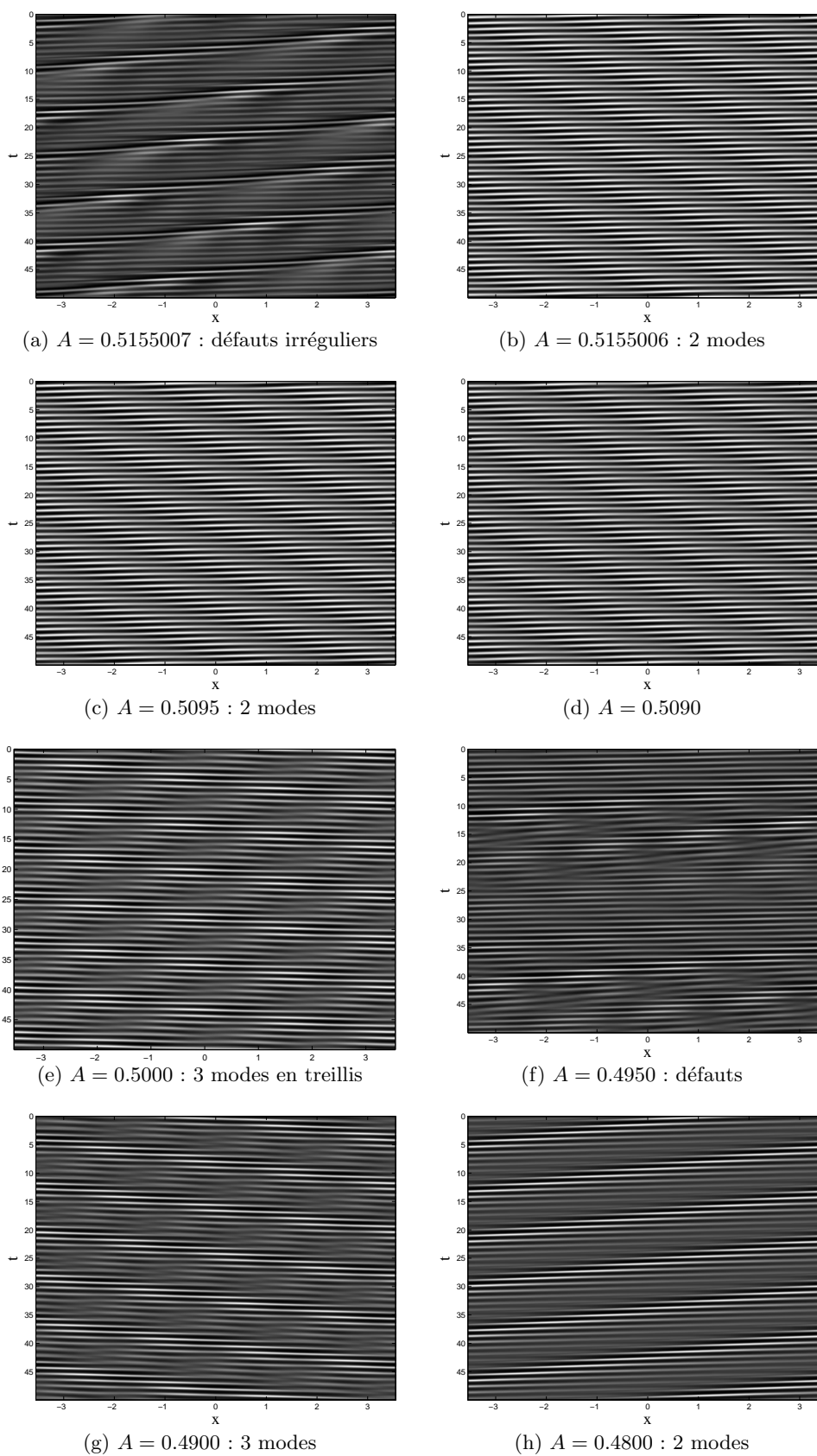
#### 4 Conséquences sur les diagrammes spatio-temporels

Cette succession de régimes dynamiques se traduit par des modifications notables de la structure des diagrammes spatio-temporels. Lorsque le régime est quasi-périodique  $T^2$  ( $A = 0.5155006$ ), le diagramme révèle deux ondulations — deux modes — l'une étant horizontale, l'autre étant selon la seconde bissectrice (Fig. 3b). Une troisième apparaît à peine lors de l'apparition du quasi-périodique  $T^3$  ( $A = 0.509$ , Fig. 3d) en raison du grand rapport sur les fréquences  $\frac{f_1}{f_0} \approx 42$ . Il est intéressant de noter que les plissements se traduisent par une troisième ondulation très visible (Fig. 3e) sur les diagrammes spatio-temporels : toutefois aucun défaut n'est remarqué. Ces derniers n'apparaissent qu'à l'explosion du tore ( $A = 0.495$ ) : leurs localisations dans le diagramme sont irrégulières (Fig. 3f). Lorsque la dynamique redevient quasi-périodique ( $A = 0.49$ ), les créations et annihilations des défauts ont pratiquement disparu : il ne demeure que des créations-annihilations sans perturbation de la structure globale (Fig. 3g). Ces événements apparaissent de manière régulière dans le diagramme. Une fois la dynamique retrouvée sur un régime quasi-périodique  $T^2 \subset \mathbb{R}^4$  ( $A = 0.48$ ), nous retrouvons un diagramme typique d'un quasi-périodique  $T^2$ , sans aucune signature de la nature quadri-dimensionnelle de la dynamique temporelle.

Le régime quasi-périodique  $T^2 \subset \mathbb{R}^3$  pour  $A = 0.5155006$  précède, lorsque le paramètre  $A$  est augmenté, une autre explosion du tore conduisant à une dynamique chaotique plus raide (Fig. 1a) que celle rencontrée pour  $A = 0.495$  (Fig. 1f) : cette seconde explosion pourrait s'apparenter à ce que l'on rencontre lors du scénario mis en évidence par Baptista et Caldas [11], comme le suggère les deux « bras » sur la partie gauche de l'applicatoïn de premier retour. Cette explosion pourrait résulter d'une crise de frontière alors que celle apparaissant entre 0.495 et 0.5 serait plutôt du type crise intérieure. La raideur du chaos étant plus grande, le diagramme spatio-temporel présente des défauts survenant de manière beaucoup plus irrégulière (Fig. 1a) que dans le chaos toroïdal observé à  $A = 0.495$ .

#### 5 Conclusion

Nous avons effectué l'analyse dynamique de régimes issus d'un système spatio-temporel, correspondant à un laser monomode à élargissement homogène. À l'aide des portraits de phase, des applications de premier retour et des diagrammes spatio-temporels, des régimes quasi-périodiques complexes à deux et à trois fréquences ont été mis en évidence. Le scénario observé se présente comme une combinaison d'un scénario de type Ruelle-Takens avec un passage au chaos par apparition de repliements qui s'apparente ainsi à un scénario de Curry-Yorke. En conséquence, les dynamiques toroïdales deviennent non triviales et ne sont plus de simples tores  $T^n$  plongés dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  mais des tores  $T^n$  plongés dans des espaces de



**Fig. 3.** Diagrammes spatio-temporels pour des valeurs décroissantes de  $A$ . Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Fig. 1.

dimension au moins  $n + 2$ . La première difficulté rencontrée avec ces tores non triviaux réside dans le fait que les sections de Poincaré — ou de manière équivalente, les applications de premier retour — ne soient plus de simples « boucles fermées » sans auto-intersection mais apparaissent avec des segments disjoints.

La difficulté d'interprétation provient d'une structure qui doit être plongée au moins dans un espace de dimension 5. La représentation de ces objets s'apparente à celle d'une bouteille de Klein : comment se représenter une surface qui se connecte à elle-même par l'intérieur ? C'est ce qui se passe dans certaines configurations toroïdales où la trajectoire spirale autour du tore avant de recommencer une nouvelle bouffée de par l'intérieur du tore...

Enfin, les repliements de ces dynamiques toroïdales non triviales semblent n'avoir que peu d'effet — sur l'apparition des défauts — sur les diagrammes spatio-temporels qui ne restent affectés que par les modes actifs. Précisons qu'un régime quasi-périodique est *a priori* associé à un diagramme sans défaut, ou au mieux apparaissant régulièrement, traduisant tout l'intérêt qu'il y a à utiliser simultanément les interprétations temporelles et spatio-temporelles.

## Références

1. D. AMROUN, C. LETELLIER, L. PASTUR, M. BRUNEL, H. LEBLOND & F. SANCHEZ, Spatio-temporal dynamics versus temporal analysis : What can we learn ?, *First International Seminar on Fluid Dynamics and Materials Processing FDMP'2007*, Alger, 2-4 juin (2007).
2. D. AMROUN ALIANE, L. PASTUR, C. LETELLIER, M. BRUNEL, H. LEBLOND & F. SANCHEZ, A link between spatio-temporal and temporal dynamics of a laser, *Dynamics Days Europe 2008*, Delft, 25-29 août (2008).
3. D. AMROUN ALIANE, L. PASTUR, M. BRUNEL, H. LEBLOND, F. SANCHEZ & C. LETELLIER, Analyse de dynamiques spatio-temporelles d'un laser, *Comptes-Rendus de la 12e Rencontre du Non-Linéaire*, 1-6, Paris, 12-13 Mars 2009.
4. F. LUSSEYRAN, L. PASTUR & C. LETELLIER, Dynamical analysis of an intermittency in an open cavity flow, *Physics of Fluids*, **20**, 114101 (2008)
5. V. S. AFRAIMOVICH & L. P. SHILNIKOV, On invariant two-dimensional tori, their breakdown and stochasticity, *American Mathematical Society Translations (series 2)*, **149**, 201-212 (1991).
6. Z. T. ZHUSUBALIYEV & E. MOSEKILDE, Birth of bilayered torus and torus breakdown in a piecewise-smooth dynamical system, *Physics Letters A*, **351** (3), 167-174 (2006).
7. P. S. DUTTA, S. DE, S. BANERJEE & A. R. ROY, Torus destruction via global bifurcations in a piecewise-smooth, continuous map with square-root nonlinearity, *Physics Letters A*, **373** (48), 4426-4433 2009.
8. C. LETELLIER, V. MESSEGER & R. GILMORE, From quasi-periodicity to toroidal chaos : analogy between the Curry-Yorke map and the van der Pol system, *Physical Review E*, **77** (4), 046203, 2008.
9. D. RUELLE & F. TAKENS, On the nature of turbulence, *Communications in Mathematical Physics*, **20**, 167-192 (1971) .
10. J. H. CURRY & J. A. YORKE, The structure of attractors in dynamical systems, *Lecture Notes in Mathematics*, **668**, 48-66 (1978).
11. M. N. BAPTISTA & I. L. CALDAS, Dynamics of the two frequency torus breakdown in the driven double scroll circuit, *Physics Review E*, **58**, 4413-4420 (1998).
12. C. LETELLIER, A. DINKLAGE, H. EL-NAGGAR, C. WILKE & G. BONHOMME, Experimental evidence for a torus breakdown through a global bifurcation in a glow discharge plasma, *Physics Review E*, **63**, 042702 (2001).
13. P. K. JAKOBSEN, J. V. MOLONEY, A. C. NEWELL & R. INDIK, Space-time dynamics of wide-gain-section lasers, *Physics Review A*, **45**, 8129-8137 (1992).
14. D. AMROUN, *Dynamiques spatio-temporelles d'un laser monomode. Influence des effets spatiaux et des interactions dipôle-dipôle*, Thèse de Doctorat, Université de Rouen (juillet 2004).
15. D. AMROUN, M. BRUNEL, C. LETELLIER, H. LEBLOND & F. SANCHEZ, Complex intermittent dynamics in large-aspect-ratio homogeneously broadened single-mode lasers, *Physica D*, **203**, 185-197 (2005).
16. L. CAO, Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series, *Physica D*, **110** (1 & 2), 43-52 (1997).