La variété de courbure du flot comme squelette des attracteurs chaotiques

Jean-Marc Ginoux[1] & Christophe Letellier[2]

[1] Laboratoire PROTEE, I.U.T. de Toulon — Université du Sud, BP 20132, F-83957 La Garde Cedex, France
[2] CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France
ginoux@univ-tln.fr

Depuis que les attracteurs chaotiques sont reconnus comme un objet important dans la description des phénomènes dynamiques, qu'ils soient physiques, chimiques, biologiques ou autres, les techniques de classification des attracteurs chaotiques se répartissent globalement en deux catégories : celles issues d'une approche statistique en lien avec la théorie ergodiques [1,2] et celles reposant sur une approche topologique [3]. La caractérisation des comportements chaotiques est aujourd'hui un problème plutôt bien documenté, au moins dans les cas tri-dimensionnels [3–5]. Depuis les premiers travaux de Poincaré [6], il est reconnu que les portraits de phase se structurent autour des points singuliers. Bien que permettant d'accéder à de nombreuses propriétés du système, il est néanmoins constaté que ces points singuliers ne donnaient pas toute la structure des attracteurs.

Récemment, des propriétés métriques du flot ont été analytiquement calculées pour des sytèmes non intégrable dont la courbe solution n'est pas connue de manière générale [7,8]. Ces propriétés métriques consistent en la *courbure du flot* et définissent, dans l'espace des phases, une variétés reposant sur les dérivées temporelles du champ de vecteurs vitesse et contenant les points singuliers. Il s'agit de la *variété de courbure du flot* dont l'invariance sous l'action du flot a été prouvée par le théorème de Darboux [9]. Dans cette contribution, nous montrons que la composante non stationnaire — dépendante du temps — de cette variété structure l'attracteur chaotique et permet d'envisager une classification topologique reposant sur une démarche analytique. Quelques exemples comme les systèmes de Rössler et Lorenz sont traités.

References

1. J. P. Eckmann & D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Review of Modern Physics*, **57**, 617-656, 1985.
2. H. D. I. Abarbanel, R. Brown, J. J. Sidorowich & L. Sh. Tsimring. The analysis of observed chaotic data in physical systems, *Review of Modern Physics*, **65** (4), 1331-1388, 1993.
3. R. Gilmore & M. Lefranc, *The topology of chaos*, Wiley, 2002.
4. T. D. Tsankov & R. Gilmore, Strange attractors are classified by bounding tori, *Physical Review Letters*, **91** (13), 134104, 2003.
5. C. Letellier, E. Roulin & O. E. Rössler, Inequivalent topologies of chaos in simple equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **28**, 337-360, 2006.
6. H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Série iv, **2**, 151-217, 1886.
7. J.-M. Ginoux & B. Rosetto, Differential geometry and mechanics applications to chaotic dynamical systems, *International Journal of Bifurcations & Chaos*, **16** (4), 887-910, 2006.
8. J.-M. Ginoux, B. Rossetto & L. O. Chua, Slow invariant manifolds as curvature of the flow of dynamical systems, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, sous presse.
9. G. Darboux, Sur les équations différetielles algébriques du premier ordre et du premier degré, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Série 2, **2**, 60-96, 123-143, 151-200, 1878.