

Ondes non linéaires dans l'expérience de Faraday

N. Rojas¹, M. Argentina¹, E. Cerda² & E. Tirapegui³

¹ Université de Nice-Sophia-Antipolis, UFR Sciences, LJAD, Parc Valrose, 28, avenue Valrose, 06108 Nice Cedex 2, France

² Departamento de Física and Centro para Investigación Interdisciplinaria Avanzada en Ciencias de los Materiales, Universidad de Santiago, Av. Ecuador 3493, Santiago, Chile.

³ Facultad de Ciencias Físicas y Mat., Depto. Física, Univ. de Chile, casilla 487-3, Santiago, Chile

Nicolas.ROJAS@unice.fr

Résumé. Dans ce travail, nous proposons une dérivation robuste des équations non linéaires qui décrivent la dynamique de l'épaisseur d'une couche de fluide mince vibrée dans la limite des petits nombres de Reynolds. Cette approche est en fait suffisamment générale pour qu'elle puisse être appliquée pour tous les problèmes de dynamique de couche mince de fluide visqueux.

Abstract. In this article, we propose a robust derivation of the non linear equations that describe the dynamics of a thin fluid layer vibrated, in the limit of the low Reynolds number. This approach is general and remains relevant for thin viscous fluid layer dynamics.

Dans un article publié en 1831, Michael Faraday décrit la formation de structures obtenues en vibrant un plateau recouvert par un milieu granulaire [1]. En annexe, il étudie les patterns constitués d'ondes de surface d'un fluide vibré. Bien plus tard [2], avec l'hypothèse de fluide non visqueux, l'origine de l'instabilité fut proposée : une résonance paramétrique. En approximation shallow water, les ondes de surface se comportent comme des oscillateurs harmoniques de fréquence \sqrt{gk} , k étant le nombre d'onde de la déformation de surface. La vibration périodique du récipient contenant ce fluide induit donc un mouvement périodique des ondes. L'amplitude des ondes de surface obéit donc à une équation de Mathieu, dont les solutions se déstabilisent avec un forçage sous harmonique. Lorsque les effets visqueux sont pris en compte, la surface du fluide vibré se déforme en produisant de petites vagues avec des longueurs caractéristiques sans lien avec la taille du récipient. Les expériences menées sur les fluides visqueux ont montré une grande variété de patterns, comme des carrés, des hexagones, des rhomboèdes [3,4,5,6] mais aussi des quasi-patterns [7,5,6] ou encore des oscillons [8,9,6]. Du point de vue théorique, l'inclusion de la dissipation visqueuse dans la détermination du seuil d'instabilité permet d'obtenir de bonnes prédictions par rapports aux mesures expérimentales [10].

Nous étudions les équations de la dynamique d'un fluide newtonien incompressible décrit par :

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \pi + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

où \mathbf{v} et ν sont la vitesse et la viscosité cinématique du fluide alors que $\pi = (p - p_s)/\rho$ mesure la déviation de la pression de l'état hydrostatique p_s . A l'équilibre, cette grandeur est $p_s = p_0 - \rho g(t)[z - h]$. Le paramètre ρ est la densité du liquide. La fonction $g(t)$ représente l'accélération verticale imposée au fluide, elle se décompose $g(t) = g(1 + \Gamma \cos(\Omega t))$. Γ mesure l'accélération imposée par les vibrations du récipient contenant le fluide normalisée par l'accélération gravitationnelle.

Le dispositif expérimental que nous souhaitons modéliser est représenté dans la Figure 1.

A ces équations qui décrivent ce qu'il se passe dans la couche du fluide, il faut rajouter les conditions aux frontières. Sur le récipient, nous considérons les conditions limites de non-glissement, c'est-à-dire la vitesse $\mathbf{v}(z=0) = 0$ et que la surface du fluide n'est pas cisailée, ce qui se traduit par :

$$T_{jk} \hat{n}_k|_{z=\xi} = [p_0 + \gamma \kappa] \hat{n}_j, \quad (3)$$

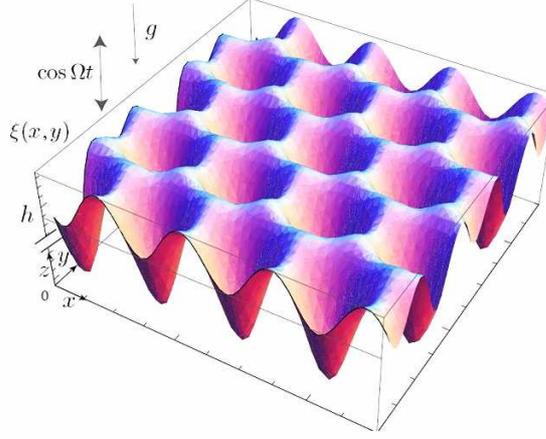


Fig. 1. Un récipient contenant une épaisseur h de fluide au repos est mis en vibration périodique et verticale.

où T_{jk} est le tenseur des taux de déformations, p_0 la pression atmosphérique, γ la tension de surface du fluide et κ la courbure de la surface. Enfin, pour décrire l'évolution de la surface, nous utilisons la condition cinétique que nous écrivons :

$$v_z|_{z=\xi} = \partial_t \xi + (\mathbf{v}_\perp|_{z=\xi} \cdot \nabla_\perp) \xi \quad (4)$$

où l'opérateur ∇_\perp représente le gradient par rapport aux variables horizontales x, y .

Dans le but d'écrire le système sans dimensions, nous effectuons les changements d'échelle suivants : $t \rightarrow \tilde{t}/\Omega$, $x, y \rightarrow L\tilde{x}, L\tilde{y}$, la coordonnée verticale et la position de la surface libre : $z, \xi \rightarrow \tilde{z}, \tilde{\xi}$. Ces dilatations font apparaître deux paramètres sans dimension $\epsilon = h/L$ qui mesure le rapport d'aspect de l'expérience et $R_e = \frac{\Omega h^2}{\nu}$. Le nombre de Reynolds qui mesure l'importance des effets visqueux par rapport à l'inertie du fluide. Nous obtenons ainsi les deux équations :

$$\begin{aligned} R_e [\partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)] \mathbf{v}_\perp &= -\nabla_\perp \pi + (\epsilon^2 \nabla_\perp^2 + \partial_z^2) \mathbf{v}_\perp, \\ \epsilon^2 R_e [\partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)] v_z &= -\partial_z \pi + \epsilon^2 (\epsilon^2 \nabla_\perp^2 + \partial_z^2) v_z, \end{aligned} \quad (5)$$

Nous avons enlevé les tildes des variables afin d'alléger les notations. Enfin, les deux conditions limites à la surface deviennent :

$$\begin{aligned} \partial_z \mathbf{v}_\perp|_{z=\xi} + \epsilon^2 [\nabla_\perp v_z + \partial_z \mathbf{v}_\perp (\nabla_\perp \xi)^2 - \nabla_{\mathbf{v}_\perp} (\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla_\perp \xi) - (\nabla_\perp \xi \cdot \nabla_\perp) \mathbf{v}_\perp]|_{z=\xi} \\ - 2\epsilon^2 \nabla_\perp \xi [\nabla_\perp \cdot (\mathbf{v}_\perp|_{z=\xi})] + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\pi|_{z=\xi} + 2\epsilon^2 \nabla_\perp \cdot (\mathbf{v}_\perp|_{z=\xi}) + \mathcal{O}(\epsilon^4) = G(t)[\xi - 1] + \sigma \kappa, \quad (7)$$

La paramètre σ est relié par la tension de surface τ du fluide : $\sigma = \tau h^3 / \eta \Omega L^4$. Il est possible de prendre deux limites pour ce système suivant si R_e est grand ou petit.

Pour de grands nombres de Reynolds, nous obtenons les équations d'Euler étudiées dans l'article écrit par Benjamin et Ursell [2]. Pour de faibles déformations, l'équation qui décrit la position de l'interface est

$$\ddot{\xi}_k + k \tanh(kh)(1 + \sigma k^2 - \Gamma \cos t) \xi_k = 0, \quad (8)$$

où Γ est l'accélération induite par le récipient, normalisée par l'accélération gravitationnelle. ξ_k est l'amplitude de vibration de nombre d'onde k . Avec une dilatation temporelle, elle peut être ramenée à une équation de type Mathieu :

$$\ddot{f} + (p^2 - \mu \cos(2t))f = 0 \quad (9)$$

Avec la méthode multi-échelle, appliquée dans la limite des faibles forçages μ , nous allons dériver la partie linéaire de l'équation d'amplitude. Pour ce faire, nous écrivons :

$$f = B(T)e^{ipt} + \overline{B(T)}e^{-ipt} + \mu C(t, T) + o(\mu^2). \quad (10)$$

La variable T est une variable lente, définie par $T = \mu t$. La fonction $C(t, T)$ obéit à la relation suivante :

$$\partial_t^2 C + p^2 C = -2ip\partial_T B e^{ipt} + 2ip\partial_T \overline{B} e^{-ipt} + \cos(2t) \left(B(T)e^{ipt} + \overline{B(T)}e^{-ipt} \right), \quad (11)$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique forcé. Les deux premiers termes du forçage sont dits résonnants, car ils induisent une résonance séculaire sur $C(T)$. En revanche, le troisième terme génère des oscillations avec des fréquences $(2+p)$, $(p-2)$, $-(2+p)$ et $2-p$. Une résonance séculaire se produira si une de ces fréquences devient égale à $\pm p$. Dans ce cas, le module de la correction $C(T)$ croît linéairement et peut donc devenir plus grande que $B(T)$, ce qui n'est pas compatible avec les hypothèses de calcul. Cependant, si on impose que la somme des termes résonnants du second membre est nulle, $C(T)$ reste bornée en module. Cette alternative, dite de Fredholm génère l'équation d'amplitude suivante [11] :

$$\partial_T B = -\frac{i}{4} \overline{B}, \quad \text{si } p = 1 \quad (12)$$

$$\partial_T B = 0, \quad \text{si } p \neq 1 \quad (13)$$

Si $p^2 \neq 1$, la correction $C(T)$ contiendra des harmoniques de p . Dans le cas $p^2 = 1$, on parle de résonance paramétrique et il est possible de calculer les termes non linéaires de cette équation. La dynamique de l'amplitude des oscillations B est régie par l'équation [11] :

$$\partial_t B = (\mu + i\nu)B - (1 + i\alpha)|B|^2 B + \gamma \overline{B} + (1 + i\beta)\Delta B, \quad (14)$$

où le paramètre γ est proportionnel à l'accélération a-dimensionnée induite par le récipient du fluide.

Nous avons ici décrit très succinctement le comportement asymptotique linéaire du fluide non visqueux vibré. Lorsque le fluide est très visqueux, c'est à dire pour des petits nombres de Reynolds, l'approche qui vient d'être présentée n'est plus valable et il faut traiter le problème autrement. Ce sont maintenant les termes inertiels de équations de Navier et Stokes (5) qui sont supposés perturbatifs.

En intégrant sur l'épaisseur du fluide la relation décrivant l'incompressibilité (2) nous obtenons avec la condition cinématique (4) :

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \int_0^\xi \mathbf{v}_\perp(\mathbf{x}, z, t) dz. \quad (15)$$

$$\partial_t \xi + \nabla_\perp \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (16)$$

Pour résoudre les équations (3,15,16) avec (5), nous nous plaçons dans la limite de fond peu profond, c'est à dire $\epsilon \ll 1$, ce qui permet de faire une expansion de Taylor des différentes variables qui définissent le fluide : \mathbf{v}_\perp , vitesse dans le plan horizontal, v_z , composante vertical du champs de vitesse et l'écart à la pression relative π :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\perp(\mathbf{x}, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \\ v_z(\mathbf{x}, z, t) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \nabla_\perp \cdot \mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) \frac{z^{n+2}}{(n+2)!} \\ \pi(\mathbf{x}, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mathbf{x}, t) \frac{z^n}{n!}, \end{aligned} \quad (17)$$

Les nouvelles inconnues sont donc les variables indicées $v_n(\mathbf{x}, t)$ et $\pi_n(\mathbf{x}, t)$. Pour écrire ces équations nous avons utilisé la relation d'incompressibilité du fluide, ce qui explique la présence du gradient horizontal

dans l'expansion de v_z . En injectant ces définitions dans l'équation (1), nous effectuons l'expansion de Taylor et nous résolvons le système ordre par ordre en puissance de z . Les inconnues π_n et \mathbf{v}_n peuvent être calculées dans la limite ϵ et R_e petit devant 1, il résulte qu'elle sont toutes fonctions de deux variables π_0 et \mathbf{v}_0 :

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= -\epsilon^2 \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_0, \\
\pi_2 &= -\epsilon^2 \nabla_{\perp}^2 \pi_0, \\
\mathbf{v}_1 &= \nabla_{\perp} \pi_0, \\
\mathbf{v}_2 &= R_e \partial_t \mathbf{v}_0 - \epsilon^2 [\nabla_{\perp}^2 \mathbf{v}_0 + \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_0)], \\
\mathbf{v}_3 &= R_e [\partial_t \nabla_{\perp} \pi_0 + 2(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0 (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_0)] - 2\epsilon^2 \nabla^2 (\nabla_{\perp} \pi_0), \\
\mathbf{v}_4 &= R_e [3(\nabla_{\perp} \pi_0 \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{v}_0 - 3(\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_0) \nabla_{\perp} \pi_0 + 3(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\perp}) \nabla_{\perp} \pi_0 - \mathbf{v}_0 (\nabla_{\perp}^2 \pi_0)] + \mathcal{O}(\epsilon^4, \epsilon^2 R_e, R_e^2), \\
\mathbf{v}_5 &= R_e [-4 \nabla_{\perp} \pi_0 (\nabla_{\perp}^2 \pi_0) + 6(\nabla_{\perp} \pi_0 \cdot \nabla_{\perp}) \nabla_{\perp} \pi_0] + \mathcal{O}(\epsilon^4, \epsilon^2 R_e, R_e^2).
\end{aligned} \tag{18}$$

Il reste à évaluer ces deux inconnues à l'aide de la définition du flux de masse (15) et de la condition aux bord dynamique à la surface du liquide (3). La non linéarité de cette deuxième relation, nous incite à continuer l'expansion de Taylor en puissance de ϵ et R_e :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_0(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}_0^{(0)} + R_e \mathbf{v}_0^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{v}_0^{(2)} + \dots \\
\pi_0(\mathbf{x}, t) &= \pi_0^{(0)} + R_e \pi_0^{(1)} + \epsilon^2 \pi_0^{(2)} + \dots
\end{aligned}$$

Ainsi, ordre par ordre nous calculons les termes $\pi_0^{(i)}$ et \mathbf{v}_0^i :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_0^{(0)} &= 3 \frac{\mathbf{q}}{\xi^2} \\
\nabla_{\perp} \pi_0^{(0)} &= -3 \frac{\mathbf{q}}{\xi^3} \\
\mathbf{v}_0^{(1)} &= \left[\frac{3}{4!} \mathbf{v}_2 \xi^2 + \frac{7}{5!} \mathbf{v}_3 \xi^3 + \frac{2}{5!} \mathbf{v}_4 \xi^4 + \frac{18}{7!} \mathbf{v}_5 \xi^5 \right]_{\epsilon=0} \\
\nabla_{\perp} \pi_0^{(1)} &= \left[-\frac{15}{4!} \mathbf{v}_2 \xi - \frac{27}{5!} \mathbf{v}_3 \xi^2 - \frac{7}{5!} \mathbf{v}_4 \xi^3 - \frac{60}{7!} \mathbf{v}_5 \xi^4 \right]_{\epsilon=0} \\
\mathbf{v}_0^{(2)} &= \left[\frac{3}{4!} \mathbf{v}_2 \xi^2 + \frac{7}{5!} \mathbf{v}_3 \xi^3 + \frac{1}{2} \mathbf{A} \right]_{R_e=0} \\
\nabla_{\perp} \pi_0^{(2)} &= \left[-\frac{15}{4!} \mathbf{v}_2 \xi - \frac{27}{5!} \mathbf{v}_3 \xi^2 - \frac{3}{2\xi} \mathbf{A} \right]_{R_e=0}
\end{aligned} \tag{19}$$

Nous avons introduit l'opérateur \mathbf{A} afin de rendre les expressions plus compactes. Il est défini de la manière suivante : $\mathbf{A} = -\nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{q}) + \frac{3}{2} [\frac{\mathbf{q}}{\xi}, \nabla_{\perp} \xi] - \frac{3}{2} \nabla_{\perp} \xi (\nabla_{\perp} \cdot (\frac{\mathbf{q}}{\xi}))$ avec $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{a} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{a}$ représentant le crochet de Lie. Nous utilisons ces grandeurs dans la condition au bord dynamique tangentielle et nous obtenons finalement avec la relation de conservation de la masse :

$$\begin{aligned}
&\frac{6}{5} R_e \left[(\xi^3 \partial_t + \frac{9}{7} \xi^2 (\mathbf{q} \cdot \nabla_{\perp})) (\frac{\mathbf{q}}{\xi}) + \frac{1}{7} \xi \mathbf{q} (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{q}) \right] + 3\mathbf{q} + \xi^3 (G(t) - \sigma \nabla_{\perp}^2) \nabla_{\perp} \xi \\
&- \frac{3}{2} \epsilon^2 \left[-\xi^2 \mathbf{A} + \xi^3 \nabla_{\perp} \left(\nabla_{\perp} \cdot (\frac{\mathbf{q}}{\xi}) \right) + \frac{5}{4} \xi^4 \left(\nabla_{\perp}^2 (\frac{\mathbf{q}}{\xi^2}) + \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \cdot (\frac{\mathbf{q}}{\xi^2})) \right) - \frac{9}{10} \xi^5 \nabla_{\perp}^2 (\frac{\mathbf{q}}{\xi^3}) \right] = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\partial_t \xi + \nabla_{\perp} \mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{21}$$

Ces deux équations sont fermées et leur résolution permet de calculer ξ et \mathbf{q} , qui sont reliées aux champs de vitesse et de pression au travers de expansions (18) et (19). Contrairement aux approches classiques

faiblement non-linéaires justifiées dans le voisinage des bifurcations, notre approche reste valide tant que les paramètres ϵ et R_e restent petits. Notre calcul est donc basé sur une perturbation du cas très visqueux, alors que les calculs basés sur les formes normales sont des perturbations du cas non visqueux, ou des perturbations aux voisinage des bifurcations. Nos équations non-linéaires peuvent être résolues numériquement par des méthodes de différences finies. En utilisant une discrétisation spatiale *staggered*, où les variables q et ξ sont évaluées sur deux grilles décalées d'une demi longueur de discrétisation, la dynamique temporelle est obtenue avec une méthode Runge Kutta précise au quatrième ordre. Les simulations numériques montrent que pour des forçages du type $G(t) = G(1 + \Gamma \cos(t))$, une instabilité spatiale se produit en faisant émerger une longueur d'onde. L'amplitude de ces ondulations croient dans le temps avant de se saturer grâce aux non-linéarités. Dans la figure (2), nous montrons l'évolution spatio-temporelle de la surface du fluide, ainsi que la distribution spatiale de ξ et q .

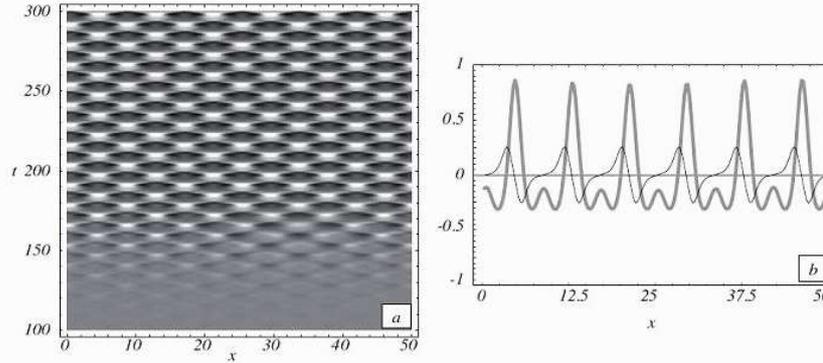


Fig. 2. (a) Evolution Spatiotemporelle de la surface $\xi - 1$. Les paramètres sont $R_e = 5.0$, $\epsilon = 0.5$, $G = 3.0$, $B = 0.8$, $\Gamma = 3.5$, $dx = 0.25$, $dt = 0.1$. (b) Champs ξ en courbe épaisse grise et q en courbe fine et noire au temps $t = 300$.

Nous avons aussi effectué des simulations numériques sur des domaines horizontaux bi-dimensionnels, avec des forçages sur plusieurs fréquences : $G(t) = G(1 + \Gamma(\cos \phi \cos(mt) + \sin \phi \sin(nt)))$ et nous montrons dans la figure (1) la structure hexagonale que prend l'interface ξ , lorsque ϕ est voisin de $\pi/4$. En revanche, en dehors de ce voisinage, les structures spatiales sont en général de type carrées [12].

De plus, nous retrouvons les équations de Stokes, en négligeant les termes en ϵ^2 et R_e :

$$\partial_t \xi = \frac{1}{3} \nabla_{\perp} \cdot (([G(t) - \sigma \nabla_{\perp}^2] \nabla_{\perp} \xi) \xi^3), \quad (22)$$

Dans cette limite, l'équation est non-linéaire, puisque le flux de masse \mathbf{q} est proportionnel à ξ^3 . Dans ce régime de paramètre, si on linéarise le système autour de la position d'équilibre, on constate que le fluide reste stable par rapport à des perturbation spatiales et ce quelque soit la fonction de forçage $G(t)$. En effet, l'évolution temporelle des modes spatiaux de Fourier $h_k(t)$ de nombre d'onde k sont

$$h_k(t) = h_k(0) \exp \left[-\frac{k^2}{3} \left(\int_0^t G(s) ds + \sigma k^2 t \right) \right] \quad (23)$$

En revanche, dans le cas d'eau peu profonde $\epsilon \ll 1$, la linéarisation du système autour de $\xi = 1$ et $q = 0$ donne l'équation d'un oscillateur amorti, forcé paramétriquement :

$$\frac{6}{5} R_e \partial_t^2 \xi + 3 \partial_t \xi - (G(t) - \sigma \nabla_{\perp}^2) \nabla_{\perp}^2 \xi + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon^2 R_e, R_e^2, \dots) = 0.$$

Dans cette limite, nous retrouvons le critère d'instabilité décrit par des précédents travaux [10]. Nous avons mesuré numériquement pour $G(t) = G(1 + \Gamma \cos(t))$, la dépendance du seuil d'instabilité en Γ , quand le nombre de Reynolds augmente. Nous avons dessiné nos courbes dans un graphique en Log-Log et il apparaît que seuil est obtenu pour $\Gamma \sim R_e^{-0.7}$.

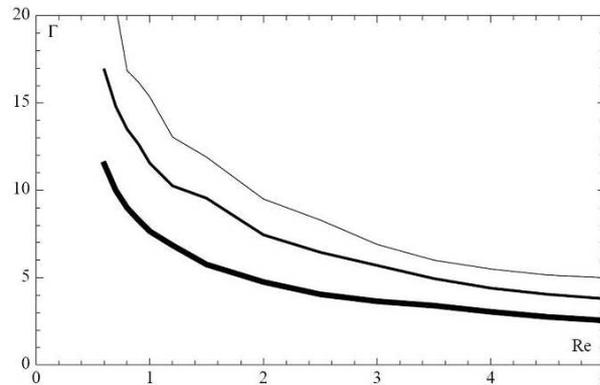


Fig. 3. Le seuil d'instabilité de l'accélération normalisée Γ décroît quand le nombre de Reynolds augmente. Les courbes en trait très épais, épais et fin sont obtenues pour respectivement $B = 0.7$, $B = 7$ et $B = 15$. La tension de surface tend à augmenter le seuil d'instabilité pour σ . Les autres paramètres choisis pour ces mesures sont $\epsilon = 0.5$, $dx = 0.25$, $dt = 0.1$.

Dans ce travail, nous avons dérivé les équations qui décrivent la dynamique de la surface d'un fluide visqueux, contenu dans un récipient vibrant à faible rapport d'aspect. Nous pensons que notre approche est suffisamment générale pour être développée hors contexte des instabilités de Faraday.

N. O. Rojas remercie le support financier de CONICYT. Les simulations ont été effectuées avec le logiciel XDIM développé par M. Monticelli et P. Couillet.

Références

1. M. FARADAY, On the forms and states of fluids on vibrating elastic surfaces, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **52**, 319-340 (1831).
2. T. B. BENJAMIN & F. URSELL, The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **225**, 505 (1954).
3. H. W. MULLER, Periodic triangular patterns in the Faraday experiment, *Physical Review Letters*, **71**, 3287 (1993).
4. H. ARBELL & J. FINEBERG, Two-mode rhomboidal states in driven surface waves, *Physical Review Letters*, **84** (4), 654 (1999).
5. H. ARBELL & J. FINEBERG, Temporally harmonic oscillons in newtonian fluids, *Physical Review Letters*, **85** (4), 756 (2000).
6. H. ARBELL & J. FINEBERG, Pattern formation in 2-frequency forced parametric waves, *Physical Review Letters*, **E**, **65**, 036224 (2002).
7. W. S. EDWARDS & S. FAUVE, Parametrically excited quasicrystalline surface waves, *Physical Review Letters*, **E**, **47**, 788 (1993).
8. J. WU, R. KEOLIAN & I. RUDNICK, Observation of a nonpropagating hydrodynamic soliton, *Physical Review Letters*, **52**, 1421 (1984).
9. O. LIOUBASHEVSKI, H. ARBELL & J. FINEBERG, Dissipative solitary states in driven surface waves, *Physical Review Letters*, **76**, 3959 (1996).
10. E. A. CERDA & E. L. TIRAPEGUI, Faraday's instability in viscous fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, **368**, 195 (1998).
11. S. DOUADY, S. FAUVE & O. THUAL, Oscillatory phase modulation of parametrically forced surface waves, *Europhysics Letters*, **10**, 309, (1989).
12. N. ROJAS, M. ARGENTINA, E. A. CERDA & E. L. TIRAPEGUI, Faraday waves in viscous fluids, to be submitted to *Physical Review Letters*,